Projet de semestre

Hiver 2005-2006

Vers le Théorème de Suspension de Freudenthal

CAROLINE LASSUEUR

Encadré par la Professeure

KATHRYN HESS BELLWALD

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
Section de mathématiques
CH-1015 Lausanne
caroline.lassueur@epfl.ch

Resumé

Un des buts de ce travail est de donner une preuve du théorème de suspension de Freudenthal en utilisant les théorèmes d'Hurewicz et de Bott-Samelson. Il est l'occasion de donner une introduction au produit tensoriel, à l'homologie singulière, ainsi qu'aux structures d'algèbre, de coalgèbre et d'algèbre de Hopf.

A CQFD
L'association qui fait ses preuves !

Table des matières

Table des notations

Ab	Catégorie des groupes abéliens
$B_n(X)$	Groupe des n-bords de l'espace X
C_-X	Cône inférieur réduit sur l'espace X
C_+X	Cône supérieur réduit sur l'espace X
Comp	Catégorie des complexes de chaînes
$\mathbb{F}$	Corps commutatif quelconque
$[G, G]$	sous-groupe des commutateurs du groupe G
$H_n(X)$	n-ème groupe d'homologie de l'espace X
$\widetilde{H}_n(X)$	n-ème groupe d'homologie réduite de l'espace X
I	Intervalle $[0, 1]$
Id_S	Application identité de l'ensemble S
Im	Image d'une application
$\mathbb{K}$	Anneau commutatif quelconque
ker	Noyau
$\mathbb{N}$	Les nombres naturels, 0 compris
$\mathbb{N}_n$	$\{1, 2, 3, \ldots, n\}$
PX	Espace des chemins de l'espace X
$\mathbb{Q}$	Les nombres rationnels
$\mathbb{R}$	Les nombres réels
S^n	Sphère de dimension n
$S_n(X)$	Groupe des n-chaînes singulières de l'espace X
$T(M)$	Algébre tensorielle sur le module M
Top	Catégorie des espaces topologiques
Top$_*$	Catégorie des espaces topologiques pointés
hTop	Catégorie des espaces topologiques équivalents à homotopie près
$\mathbb{Z}$	Les nombres entiers
$Z_n(X)$	Groupe des n-cycles de l'espace X
$\pi_n(X)$	n-ième groupe d'homotopie de l'espace X
ΣX	Suspension réduite de l'espace X
ΩX	Espace des lacets de l'espace X
0	Groupe trivial
$\#A$	Cardinalité de l'ensemble A
$i = \overline{m, n}$	$i = n, \cdots, m$
$\oplus$	La somme directe
$\otimes$	Le produit tensoriel
$\times$	Le produit cartésien
$\circ$	La composition des applications
$\cap$	L'intersection
$\cup$	L'union
$\cong$	Isomorphisme de structure algébrique
$\simeq$	Homotopie
$\subseteq$	L'inclusion
$\hookrightarrow$	Flèche injective
$\twoheadrightarrow$	Flèche surjective
$\forall$	Symbole universel "pour tout"
$\exists$	Symbole universel "il existe"

Introduction

Ce travail s'inscrit dans une série de quatre projets de semestres, réalisés par Anna Devic, Julian Kellerhalls, Michele Klaus et moi-même, visant à étudier les théorèmes d'Hurewicz qui lient groupes d'homotopie et groupes d'homologie d'un espace topologique. Le but de ce travail en particulier n'est pas de démontrer ces théorèmes, tâche incombant à Michele et Julian , mais de les appliquer premièrement dans une démonstration du théorème de Bott-Samelson pour deuxièmement utiliser ces deux derniers pour démontrer le théorème de suspension de Freudenthal dans le cas des sphères.

La partie la plus difficile du travail a certainement été de déchiffrer tous les symboles se trouvant dans l'énoncé du théorème de Bott-Samelson. C'est pourquoi les quatre premier chapitres sont consacrés à ce déchiffrage. Le premier, qui introduit la notion de produit tensoriel, est à considérer un peu à part du reste du travail. Il est certes fondamental de comprendre le produit tensoriel pour aborder les notions présentées dans la suite du travail, cependant ma motivation pour présenter le sujet en détail étant doublée d'une volonté de CQFD-l'association des étudiants en mathématiques de l'epfl de mettre à dispositio§n des étudiants de la section des textes d'introduction à divers sujets des mathématiques écrits par des étudiants d'un niveau de connaissances équivalent. Les projets de semestre constituent à ces fins une grande ressource puisque leur contenu est vérifié par un professeur ou un assistant compétent en la matière. Le chapitre 2 introduit ensuite l'homologie singulière absolue d'un espace topologique. Le chapitre 3 en un bref résumé de quelques résultats d'algèbre homologique concernant les complexes de chaînes et les suites exactes longues en homologie ; pour plus de détails ainsi que les preuves des résultat présentés, je recommande la lecture du projet de Julian ainsi que des livre [5] et [6]. Par conséquent, les seuls prérequis supposés sont quelques notions élémentaires d'algèbre, d'algèbre linéaire et de topologie algébrique en matière de groupes d'homotopie. Cependant le lecteur savant pourra commencer sa lecture directement au chapitre 4 où nous introduisons ensuite les notions duales d'algèbre et de coalgèbre, que l'on regroupe à travers la notion d'algèbre de Hopf. Finalement, après ces quatre chapitres de préliminaires, nous avons en mains tous les outils nécessaires pour comprendre le théorème de Bott-Samelson, que l'on appliquera ensuite pour traiter le théorème de suspension de Freudenthal.

J'ai essayé d'écrire un texte cohérent et lisible, cependant je reste un auteur imparfait. C'est pourquoi je sollicite l'aide de mes lecteurs pour corriger mes erreurs de tous types. Pour terminer, je tiens à remercier la Prof. Kathryn Hess Bellwald pour son enthousiasme envers l'idée de créer une série de projets de semestre autour des théorèmes d'Hurewicz, ainsi que pour avoir pris le temps de répondre à mes questions une fois par semaine durant tout le semestre.

CHAPITRE 1

Produits tensoriels de modules

Ce chapitre présente une introduction au produit tensoriel, que j'ai voulu relativement complète, essentiellement pour les raisons exposées dans l'introduction. En outre, de prime abord, le produit tensoriel est une notion très abstraite et peu intuitive, qui est souvent trop brievement expliquée dans les livres. C'est pourquoi j'ai tenu à entrer dans les détails ici. L'intérêt de chapitre pour la suite, outre la compréhension de l'opération produit tensoriel, réside dans les sections 5 et 6 qui sont des préliminaires aux chapitres 4 et 5. Mes sources se constituent de notes d'un cours donné au Tata Institute [1].

1. Définition, existence et unicité

Le produit tensoriel de deux modules est une construction algébrique basée sur la notion suivante d'application équilibrée.

Définition 1.1.
Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau, M un A-module à droite et N un A-module à gauche. Soit encore P un groupe abélien.
Une application $f : M \times N \longrightarrow P$ est dite A-**équilibrée** si :

(1) $f(m_1 + m_2, n) = f(m_1, n) + f(m_2, n) \qquad \forall\, m_1, m_2 \in M\ \forall\, n \in N$;

(2) $f(m, n_1 + n_2) = f(m, n_1) + f(m, n_2) \qquad \forall\, m \in M\ \forall\, n_1, n_2 \in N$;

(3) $f(ma, n) = f(m, an) \qquad \forall\, m \in M\ \forall\, n \in N\ \forall a \in A$.

Si f satisfait les points (1) et (2) seulement, on dit que f est **bi-additive**.

Exemple 1.2.
Soit A un anneau ainsi que M et N deux A-modules à droite. Alors $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ est un A-module à gauche pour l'addition usuelle des applications et la multiplication externe suivante :

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & A \times \mathrm{Hom}_A(M,N) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(M,N) \\ & (a,\varphi) & \longmapsto & \begin{array}{rccc} a\cdot\varphi : & M & \longrightarrow & N \\ & m & \longmapsto & (a\cdot\varphi)(m) := \varphi(ma) \end{array} \end{array}$$

Alors l'application *évaluation*

$$\begin{array}{rccc} e : & M \times \mathrm{Hom}_A(M,N) & \longrightarrow & N \\ & (m,\varphi) & \longmapsto & \varphi(m) \end{array}$$

est A-équilibrée. En effet, pour tous $m, m_1, m_2 \in M$, $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ et $a \in A$ on a :

- $e(m_1 + m_2, \varphi) = \varphi(m_1 + m_2) = \varphi(m_1) + \varphi(m_2) = e(m_1, \varphi) + e(m_2, \varphi)$;
- $e(m, \varphi_1 + \varphi_2) = (\varphi_1 + \varphi_2)(m) = \varphi_1(m) + \varphi_2(m) = e(m, \varphi_1) + e(m, \varphi_2)$:
- $e(ma, \varphi) = \varphi(ma) = (a \cdot \varphi)(m) = e(m, a \cdot \varphi)$.

Nous définissons maintenant la notion de produit tensoriel de modules à l'aide d'une propriété universelle.

Définition 1.3.
Soit A un anneau, M un A-module à droite et N un A-module à gauche. Un **produit tensoriel** de M et N est un couple (T, t) où T est un groupe abélien et $t : M \times N \longrightarrow T$ est une application A-équilibrée tels que la propriété universelle suivante est satisfaite.

Pour tout groupe abélien P et pour toute application A-équilibrée $f : M \times N \longrightarrow P$, il existe un unique homomorphisme de groupes abéliens $\tilde{f} : T \longrightarrow P$ tel que le diagramme suivant commute, i.e. $\tilde{f} t = f$.

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "t"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & P \\ T \arrow[ur, "\exists ! \tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Commençons par montrer que si un produit tensoriel existe alors il est unique.

Unicité. Supposons que (T, t) et (T', t') sont deux produits tensoriels de M et N.

(1) Par la propriété universelle de (T, t) il existe un unique homomorphisme de groupes abéliens $h : T \longrightarrow T'$ tel que $ht = t'$.

(2) Par la propriété universelle de (T', t') il existe un unique homomorphisme de groupes abéliens $h' : T' \longrightarrow T$ tel que $h't' = t$.

$$\begin{tikzcd} M \times N' \arrow[r, "t"] \arrow[d, "t"'] & T' \arrow[dl, shift left, "h'"] \\ T \arrow[ur, shift left, "h"] & \end{tikzcd}$$

Ainsi $h'ht = h't' = t = \mathrm{id}_T\, t$ et donc par unicité dans la propriété universelle de (T, t) on doit avoir $h'h = \mathrm{id}_T$.

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "t"] \arrow[d, "t"'] & T \\ T \arrow[ur, shift left, "\mathrm{id}_T"] \arrow[ur, shift right, "h'h"'] & \end{tikzcd}$$

De même par unicité dans la propriété universelle de (T', t') on obtient que $hh' = \mathrm{id}_{T'}$. Donc h est un isomorphisme entre T et T'.
Par conséquent, (T, t) est unique à un unique isomorphisme près.

Avant de travailler avec le produit tensoriel, il nous reste à voir que l'objet que nous venons de définir existe effectivement. La démonstration ci-dessous donne une construction explicite du produit tensoriel.

Existence. On considère le $\mathbb{Z}$-module libre L de base $M \times N$. Définissons alors K comme étant le sous-$\mathbb{Z}$-module de L engendré par les éléments de la forme :

(a) $(m_1 + m_2, n) - (m_1, n) - (m_2, n)$ $\qquad m_1, m_2 \in M,\ n \in N$;

(b) $(m, n_1 + n_2) - (m, n_1) - (m, n_2)$ $\qquad m \in M,\ n_1, n_2 \in N$;

(c) $(ma, n) - (m, an)$ $\qquad m \in M,\ n \in N$ et $a \in A$.

Alors l'application

$$\begin{array}{rcccccc} t: & M \times N & \xrightarrow{\iota} & L & \xrightarrow{\pi} & L/K \\ & (m,n) & \longmapsto & (m,n) & \longmapsto & (m,n) + K \end{array}$$

qui est la restriction à $M \times N$ de la projection canonique est A-équilibrée. En effet, pour tous $m, m_1, m_2 \in M$, $n, n_1, n_2 \in N$ et $a \in A$ on a :

- $t(m_1 + m_2, n) = (m_1 + m_2, n) + K \overset{(a)}{=} (m_1, n) + (m_2, n) + K = t(m_1, n) + t(m_2, n)$:
- $t(m, n_1 + n_2) = (m, n_1 + n_2) + K \overset{(b)}{=} (m, n_1) + (m, n_2) + K = t(m, n_1) + t(m, n_2)$;
- $t(ma, n) = (ma, n) + K \overset{(c)}{=} (m, an) + K = t(m, an)$.

On remarque en outre que $t(M \times N)$ engendre L/K.
On pose alors $T := L/K$ et il reste à voir que (T, t) est un produit tensoriel de M et N.

Soit donc P un groupe abélien (i.e. un $\mathbb{Z}$-module) et $f : M \times N \longrightarrow P$ un application équilibrée sur A. Alors par la propriété universelle des modules libres, f peut être étendue en un unique homomorphisme $\hat{f} : L \longrightarrow P$ tel que $\hat{f}\iota = f$. Autrement dit, $\hat{f}$ coïncide avec f sur les éléments de la base, i.e. $\hat{f}(m, n) = f(m, n)$ pour tout $(m, n) \in M \times N$, puis on étend par $\mathbb{Z}$-linéarité. $(\hat{f}(\sum_{i=1}^{r} a_i(m_i, n_i)) = \sum_{i=1}^{r} a_i \hat{f}(m_i, n_i).)$

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "\iota"'] & P \\ T \arrow[ur, "\exists! \hat{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Comme f est A-équilibrée on a que $K \subseteq \ker \hat{f}$, on peut donc appliquer la propriété universelle des modules quotients au triple $(L, K, \hat{f})$. On obtient qu'il existe un unique homomorphisme de $\mathbb{Z}$-modules $\tilde{f} : L/K \longrightarrow P$ tel que $\tilde{f}\pi = \hat{f}$.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d, "\pi"'] & P \\ L/K = T \arrow[ur, "\exists! \tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

En résumé, on a la situation suivante :

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, hook, "\iota"] \arrow[ddr, "t"'] & & P \\
& L \arrow[ur, dashed, "\hat{f}"] \arrow[d, "\pi"] & \\
& T \arrow[uur, dashed, "\exists ! \tilde{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Avec $\tilde{f}t = \tilde{f}\pi\iota = \hat{f}\iota = f$. Le couple (T, t) est donc un produit tensoriel de M et N.

Notation 1.4.
Au lieu de T on écrira $M \otimes_A N$ et on pose $t(m, n) := m \otimes n$ pour tout $(m, n) \in M \times N$. Comme t est équilibrée on a par exemple que $(m_1 + m_2) \otimes n = m_1 \otimes n + m_2 \otimes n$. Ainsi, puisque les éléments de la forme $m \otimes n$ engendrent $M \otimes_A N$, tout élément $u \in M \otimes_A N$ peut s'écrire comme $u = \sum_{i=1}^{r} m_i \otimes n_i$.

Remarques.

(1) Cette expression pour u n'est pas unique. En effet, on a pour tous $m \in M$, $n, n_1, n_2 \in N$ et $a \in A$,

$$0 = m \otimes (n_1 + n_2) - m \otimes n_1 - m \otimes n_2 = ma \otimes n - m \otimes an\,.$$

(2) Il découle directement de la bi-additivité du produit tensoriel que l'élément neutre du groupe abélien $M \otimes_A N$ est $0_{M \otimes_A N} = 0_M \otimes_A 0_N =: 0$.

Propriétés 1.5.
Sous les mêmes hypothèses que ci-dessus on a pour tous $m \in M$, $n \in N$ et $a, b \in A$:

(1) $0 \otimes n = 0$ *puisque* $0 \otimes n + m \otimes n = (0 + m) \otimes n = m \otimes n$ *;*

(1′) $m \otimes 0 = 0$ *;*

(2) $(-m) \otimes n = -(m \otimes n)$ *puisque* $0 = (m + (-m)) \otimes n = m \otimes n + (-m) \otimes n$ *;*

(2′) $m \otimes (-n) = -((m \otimes n)$ *;*

(3) $m(ab) \otimes n = (ma)b \otimes n = ma \otimes bn = m \otimes a(bn) = m \otimes (ab)n$.

Remarque 1.6.
$M \otimes_A N$ peut être nul sans que ni M, ni N ne soit le module nul.
Exemple : $T = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Il suffit de voir que tous les générateurs de T sont nuls. Soit donc $\frac{a}{b} \otimes \overline{m}$ $(a, b, m \in \mathbb{Z}$ et $b \neq 0)$ un générateur de T. Alors

$$\frac{a}{b} \otimes \overline{m} = \frac{an}{bn} \otimes \overline{m} = \frac{a}{bn} \otimes \underbrace{\overline{nm}}_{\overline{0}} = 0\,.$$

2. Produit tensoriel d'applications

Le produit tensoriel de deux modules étant muni d'une structure de groupe abélien (ou de manière équivalente, d'une structure de $\mathbb{Z}$-module), intéressons-nous maintenant aux homomorphismes (de groupes abéliens) entre produits tensoriels.

Proposition 1.7.
Soit $f : M \longrightarrow M'$ un homomorphisme de A-modules à droite. Soit $g : N \longrightarrow N'$ un homomorphisme de A-modules à gauche. Alors il existe un unique homomorphisme de groupes abéliens $f \otimes g : M \otimes_A N \longrightarrow M' \otimes_A N'$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "f\times g"] \arrow[d, "t"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M' \times N' \arrow[d, "t'"] \\ M \otimes_A N \arrow[r, dashed, "f\otimes g"'] & M' \otimes_A N' \end{tikzcd}$$

autrement dit $(f \otimes g)(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n)$ pour tout $m \in M$ et pour tout $n \in N$.
On dit que $f \otimes g$ est le ***produit tensoriel*** *de f et g.*

Démonstration. La composition $h : M \times N \overset{f\times g}{\longrightarrow} M' \times N' \overset{t'}{\longrightarrow} M' \otimes_A N'$ est A-équilibrée.
En effet, pour tous $m, m_1, m_2 \in M$, $n, n_1, n_2 \in N$ et $a \in A$ on a :

- $h(m_1 + m_2, n) = f(m_1 + m_2) \otimes g(n) = (f(m_1) + f(m_2)) \otimes g(n) = f(m_1) \otimes g(n) + f(m_2) \otimes g(n) = h(m_1, n) + h(m_2, n)$;
- $h(m, n_1 + n_2) = f(m) \otimes g(n_1 + n_2) = f(m) \otimes (g(n_1) + g(n_2)) = f(m) \otimes g(n_1) + f(m) \otimes g(n_2) = h(m, n_1) + h(m, n_2)$;
- $h(ma, n) = f(ma) \otimes g(n) = f(m)a \otimes g(n) = f(m) \otimes ag(n) = f(m) \otimes g(an) = h(m, an)$.

Ainsi par la propriété universelle du produit tensoriel $M \otimes_A N$, il existe un unique homomorphisme de groupes abéliens, disons $f \otimes g$ tel que $f \otimes g \circ t = h = t' \circ f \times g$.
Donc pour tout $m \in M$ et pour tout $n \in N$ on a :

$$f \otimes g(m \otimes n) = f \otimes g(t(m, n)) = t'(f \times g(m, n)) = f(m) \otimes g(n)$$

En d'autres termes, le diagramme ci-dessus commute. □

Remarque 1.8.
Sous les mêmes hypothèses que la proposition ci-dessus, l'application

$$\begin{array}{rccc} \theta : & \hom_A(M, M') \times \hom_A(N, N') & \longrightarrow & \hom_{\mathbb{Z}}(M \otimes_A N, M' \otimes_A N' \\ & (f, g) & \longmapsto & f \otimes g \end{array}$$

est bi-additive.
En effet, pour tous $f, f' \in \hom_A(M, M')$, $g, g' \in \hom_A(N, N')$, $m \in M$ et $n \in N$ on a :

- $\theta[(f + f', g)](m \otimes n) = (f + f') \otimes g(m \otimes n) = (f + f')(m) \otimes g(n) = f(m) \otimes g(n) + f'(m) \otimes g(n) = (f \otimes g)(m \otimes n) + (f' \otimes g)(m \otimes n) = \theta[(f, g)](m \otimes n) + \theta[(f', g)](m \otimes n)$.
  Cette proppriété s'étend par $\mathbb{Z}$-linéarité à tous les éléments de $M \otimes_A N$, donc $\theta[(f + f', g)] = \theta[(f, g)] + \theta[(f', g)]$.
- De manière similaire $\theta[(f, g + g')] = \theta[(f, g)] + \theta[(f, g')]$.

Une pathologie du produit tensoriel d'applications réside dans le fait que lorsqu'on tensorise un homomomorphisme avec une application identité, cette opération conserve la surjectivité, mais pas l'injectivité.

Propriétés 1.9.

(1) *Si $f : M \longrightarrow M'$ est un homomorphisme surjectif de A-modules à droite et N un A-module à gauche, alors $f \otimes \mathrm{id}_N : M \otimes_A N \longrightarrow M' \otimes_A N$ est aussi surjectif (de même si on inverse droite et gauche).*

(2) *Si $f : M \longrightarrow M'$ est un homomorphisme injectif de A-modules à droite et N un A-module à gauche, alors $f \otimes \mathrm{id}_N : M \otimes_A N \longrightarrow M' \otimes_A N$ n'est pas nécessairement injectif.*

Démonstration.

(1) Il suffit de voir que tous les générateurs ont une pré-image.
Soit donc $m' \otimes n$ un générateur de $M' \otimes_A N$. Par surjectivité de f, il existe $m \in M$ tel que $m' = f(m)$. Ainsi,

$$m' \otimes n = f(m) \otimes \mathrm{id}_N(n) = f \otimes \mathrm{id}_N(m \otimes n)\,.$$

(2) Posons $M = \mathbb{Z}$, $N = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $M' = \mathbb{Q}$.
Alors $M \otimes_{\mathbb{Z}} N = \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ comme nous le verrons à la section suivante. Posons encore

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ & z & \longmapsto & \frac{z}{1}\,. \end{array}$$

Il s'agit clairement d'un $\mathbb{Z}$-homomorphisme injectif. De plus nous savons déjà que $M' \otimes_{\mathbb{Z}} N = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = 0$ donc $f \otimes \mathrm{id}_N$ ne peut pas être injectif puisque $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ne peut pas s'injecter dans le $\mathbb{Z}$-module nul.

□

Remarques.

(1) $\mathrm{id}_M \otimes \mathrm{id}_N = \mathrm{id}_{M \otimes_A N}$ puisque $\mathrm{id}_M \otimes \mathrm{id}_N(m \otimes n) = \mathrm{id}_M(m) \otimes \mathrm{id}_N(n) = m \otimes n$.

(2) Si $M \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{f'} M''$ et $N \xrightarrow{g} N' \xrightarrow{g'} N''$ sont A-linéaires à droite et à gauche respectivement alors :

$$(f' \circ f) \otimes (g \circ g') = (f' \otimes g') \circ (f \otimes g)$$

Effectivement calculons pour tout $m \in M$ et pour tout $n \in N$:

$$\begin{aligned} (f' \circ f) \otimes (g \circ g')(m \otimes n) &= f' \circ f(m) \otimes g' \circ g(n) \\ &= (f' \otimes g')(f(m) \otimes g(n)) \\ &= (f' \otimes g') \circ (f \otimes g)(m \otimes n) \end{aligned}$$

3. Structure de module sur le produit tensoriel

Dans cette section nous allons voir que si l'on considère un A-module à droite M et un A-module à gauche N, alors on peut équiper leur produit tensoriel $M \otimes_A N$ sur A d'une structure de B-module, pour autant que M soit muni d'une structure de A-B-module.
Ainsi, en particulier, tout produit tensoriel de modules sur un anneau commutatif pourra être doté d'une structure de module à gauche ou à droite sur ce même anneau.
Rappelons que si A et B sont deux anneaux, alors un groupe abélien M est un A-B-bimodule du type ${}_AM_B$ si M est muni d'une structure de A-module à gauche, d'une structure de B-module à droite et les deux multiplications extérieures sont liées par une loi associative :

$$a(mb) = (am)b \qquad \forall\, a \in A,\ \forall\, b \in B \text{ et } \forall\, m \in M\,.$$

Exemples 1.10.

(1) Tout idéal bilatère d'un anneau A est un A-A-bimodule.

(2) Si $f : A \longrightarrow B$ est un homomorphisme d'anneaux, alors B peut être considéré comme un A-B-bimodule du type ${}_AB_B$ en posant $a \cdot b := f(a) \cdot b$.

(3) Plus particulièrement, si A est un anneau commutatif, alors tout A-module peut-être considéré comme un A-A-bimodule.
Par exemple, si M est A-module à gauche, alors on peut le munir d'une structure de A-module à droite en définissant la multiplication externe suivante :
$$\begin{array}{rrcl} \cdot : & M \times A & \longrightarrow & M \\ & (m, a) & \longmapsto & m \cdot a := am \end{array}$$
Alors $m \cdot (aa') = (aa')m = a(a'm) = (a'm) \cdot a = (m \cdot a) \cdot a'$ pour tout $a, a' \in A$ et pour tout $m \in M$ et les autres axiomes de module à droite sont clairement vérifiés.
De plus $a(ma') = a(a'm) = (aa')m = (a'a)m = m(a'a) = a'(am) = (am)a'$ pour tout $a, a' \in A$ et pour tout $m \in M$. Ainsi le troisième axiome des bimodules est satisfait.
En résumé, tout module sur un anneau commutatif peut-être considéré comme un bimodule sur cet anneau en prenant deux fois la structure de module donnée.

Soit ${}_AN$ un A-module à gauche et ${}_BM_A$ un A-B-bimodule. Nous allons montrer via les lemmes suivants que l'on peut définir une structure de B-module à gauche sur $M \otimes_A N$.

Lemme 1.11.
L'application μ_b de multiplication par un élément b de B

$$\begin{array}{cccc} \mu_b : & M & \longrightarrow & M \\ & m & \longmapsto & bm \end{array}$$

est A-linéaire et induit un unique endomorphisme $\mu_b \otimes \mathrm{id}_N$ du groupe abélien $M \otimes_A N$.

Démonstration. Vérifions l'A-linéarité de μ_b. Soit $m \in M$ et $a \in A$ alors :

$$\mu_b(ma) = b(ma) = (bm)a = \mu_b(m)a$$

Ainsi μ_b est une application A-linéaire de M dans M, donc d'après la proposition 1.7 μ_b donne lieu a un unique endomorphisme $\mu_b \otimes \mathrm{id}_N$ du groupe $M \otimes_A N$. □

Lemme 1.12.
L'application $b \longmapsto \mu_b \otimes \mathrm{id}_N$ est un homomorphisme d'anneaux de $B \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_A N)$.

Démonstration. On considère la composition

$$\begin{array}{ccccc} B & \longrightarrow & \mathrm{End}_A(M) \times \mathrm{End}_A(N) & \xrightarrow{\theta} & \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_A N) \\ b & \longmapsto & (\mu_b, \mathrm{id}_N) & \longmapsto & \mu_b \otimes \mathrm{id}_N \end{array}$$

Alors pour tout $b_1, b_2 \in B$ on a :

- $b_1 b_2 \mapsto (\mu_{b_1 b_2}, \mathrm{id}_N) = (\mu_{b_1} \circ \mu_{b_2}, \mathrm{id}_N) \mapsto (\mu_{b_1} \circ \mu_{b_2}) \otimes (\mathrm{id}_N \circ \mathrm{id}_N) = (\mu_{b_1} \otimes \mathrm{id}_N) \circ (\mu_{b_2} \otimes \mathrm{id}_N)$;
- $1_B \mapsto (\mathrm{id}_M, \mathrm{id}_N) \mapsto \mathrm{id}_M \otimes \mathrm{id}_N = \mathrm{id}_{M \otimes_A N}$;
- $b_1 + b_2 \mapsto (\mu_{b_1+b_2}, \mathrm{id}_N) = (\mu_{b_1} + \mu_{b_2}, \mathrm{id}_N) \mapsto (\mu_{b_1} + \mu_{b_2}) \otimes \mathrm{id}_N = \mu_{b_1} \otimes \mathrm{id}_N + \mu_{b_2} \otimes \mathrm{id}_N$ par bi-additivité de la deuxième application θ (cf. remarque 1.8).

L'application $b \longmapsto \mu_b \otimes \mathrm{id}_N$ est de ce fait un homomorphisme d'anneaux de $B \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_A N)$. □

Conséquence 1.13.
Par conséquent, le produit tensoriel $M \otimes_A N$ acquiert, via l'homomorphisme ci-dessus, la structure de B-module à gauche caractérisée par :

$$b \cdot (m \otimes n) := (\mu_b \otimes \mathrm{id}_N)(m \otimes n) = \mu_b(m) \otimes \mathrm{id}_N(n) = bm \otimes n$$

pour tout $b \in B$, pour tout $m \in M$ et pour tout $n \in N$.

Remarques.

(1) Si ${}_B M'_A$ est un autre A-B-bimodule, $f : M \longrightarrow M'$ est linéaire sur A et sur B et $g : N \longrightarrow N'$ est un homomorphisme de A-modules à gauche, alors $f \otimes g : M \otimes_A N \longrightarrow M' \otimes_A N'$ est un homomorphisme de B-modules à gauche.

On sait déjà que $f \otimes g$ est un homomorphisme de groupes abéliens (1.7), de plus pour tout $b \in B$, $m \in M$ et $n \in N$ on a :

$$\begin{aligned} f \otimes g(b \cdot (m \otimes n)) &= f \otimes g(bm \otimes n) = f(bm) \otimes g(n) \\ &= bf(m) \otimes g(n) = b \cdot (f(m) \otimes g(n)) \\ &= b \cdot (f \otimes g)(m \otimes n) \end{aligned}$$

(2) Si N est un A-B-bimodule du type ${}_AN_B$, le produit tensoriel $M \otimes_A N$ peut être muni d'une structure de B-module à droite par une construction analogue à celle décrite ci-dessus.

(3) En particulier, si A est un anneau commutatif et M et N sont des A-modules (à droite et à gauche, par commutativité de A), on peut munir $M \otimes_A N$ d'une structure de A-A-bimodule. Dès lors, la notion d'application A-équilibrée peut-être remplacée par la notion de A-bilinéarité et toutes les applications induites par la propriété universelle du produit tensoriel deviennent A-linéaires (i.e. des homomorphismes de A-modules).

Utilisons maintenant la structure de module sur le produit tensoriel, pour montrer que tensoriser un module avec son anneau de base est une opération neutre, à isomorphisme près.

Proposition 1.14.
Soit M un A-module à droite et N un A-module à gauche. Alors

$$M \otimes_A A \cong M \qquad \text{en tant que } A\text{-modules à droite;}$$
$$A \otimes_A N \cong N \qquad \text{en tant que } A\text{-modules à gauche.}$$

Démonstration. On munit $M \otimes_A A$ d'une structure de A-module à droite comme ci-dessus. L'application

$$\begin{array}{ccc} M \times A & \longrightarrow & M \\ (m, a) & \longmapsto & ma \end{array}$$

est A-bilinéaire grâce aux axiomes de A-module à droite. En vertu de la remarque 3 (3), elle induit une application A-linéaire $\phi : M \otimes_A A \longrightarrow M$ telle que $\phi(m \otimes a) = ma$. Définissons d'autre part

$$\begin{array}{cccc} \psi : & M & \longrightarrow & M \otimes_A A \\ & m & \longmapsto & m \otimes 1_A \end{array}$$

qui est A-linéaire puisque $\psi(ma) = ma \otimes 1_A = m \otimes 1_A \cdot a = (m \otimes 1_A) \cdot a$. Alors ϕ et ψ sont inverses l'un de l'autre :
- $\psi \circ \phi(m \otimes a) = \psi(ma) = ma \otimes 1_A = m \otimes a = \mathrm{id}_{M \otimes_A A}(m \otimes a)\ \forall\, a \in A, \forall\, m \in M$;
- $\phi \circ \psi(m) = \phi(m \otimes 1_A) = \mathrm{id}_M(m)\ \forall\, m \in M$.

Par conséquent ϕ est un isomorphisme de A-modules à droite.
De manière similaire, $A \otimes_A N$ et N sont isomorphes en tant que A-modules à gauche. □

Le produit tensoriel de plusieurs modules est aussi une opération associative, à isomorphisme près.

Proposition 1.15.
Soit M un A-module à droite, N un A-B-bimodule du type ${}_AN_B$ et P un B-module à gauche. Alors l'application

$$\begin{array}{cccc} \widetilde{\beta} : & M \otimes_A (N \otimes_B P) & \longrightarrow & (M \otimes_A N) \otimes_B P \\ & (m \otimes n) \otimes p & \longmapsto & (m \otimes n) \otimes p \end{array}$$

est un isomorphisme de groupe abéliens.

Démonstration. Pour tout $m \in M$ définissons l'application

$$\begin{array}{rccl} \alpha_m : & N \times P & \longrightarrow & (M \otimes_A N) \otimes_B P \\ & (n,p) & \longmapsto & \alpha_m(n,p) := (m \otimes n) \otimes p \end{array}$$

qui est B-équilibrée :
- $\alpha_m(n_1 + n_2, p) = (m \otimes n_1 + m \otimes n_2) \otimes p = (m \otimes n_1) \otimes p + (m \otimes n_2) \otimes p = \alpha_m(n_1, p) + \alpha_m(n_2, p)$;
- $\alpha_m(n, p_1 + p_2) = (m \otimes n) \otimes p_1 + (m \otimes n) \otimes p_2 = \alpha_m(n, p_1) + \alpha_m(n, p_2)$;
- $\alpha_m(nb, p) = (m \otimes nb) \otimes p = ((m \otimes n)b) \otimes p = (m \otimes n) \otimes bp = \alpha_m(n, bp)$;

pour tout $n_1, n_2, n \in N$, $p, p_1, p_2 \in P$ et $b \in B$.
Par conséquent, α_m induit un unique homomorphisme de groupes abéliens $\widetilde{\alpha_m} : N \otimes_B P \longrightarrow (M \otimes_A N) \otimes_B P$ tel que $\widetilde{\alpha_m}(n \otimes p) = (m \otimes n) \otimes p$. Définissons alors

$$\begin{array}{rccl} \beta : & M \times (N \otimes_B P) & \longrightarrow & (M \otimes_A N) \otimes_B P \\ & (m,x) & \longmapsto & \beta(m,x) := \widetilde{\alpha_m}(x) . \end{array}$$

Cette application est bien-définie par définition de $\widetilde{\alpha_m}$; elle est équilibrée sur A :
- $\beta(m_1 + m_2, x) = \widetilde{\alpha_{m_1}}(x) + \widetilde{\alpha_{m_1}}(x) = \beta(m_1, x) + \beta(m_2, x)$;
- $\beta(m, x_1 + x_2) = \widetilde{\alpha_m}(x_1 + x_2) = \widetilde{\alpha_m}(x_1) + \widetilde{\alpha_m}(x_2) = \beta(m, x_1) + \beta(m, x_2)$;
- $\beta(ma, x) = \widetilde{\alpha_{ma}}(x) = \widetilde{\alpha_m}(ax) = \beta(m, ax)$;

pour tout $m_1, m_2, m \in M$, $x, x_1, x_2 \in N \otimes_B P$ et $a \in A$.
Par conséquent, β induit un unique homomorphisme de groupes abéliens

$$\widetilde{\beta} : M \otimes_A (N \otimes_B P) \longrightarrow (M \otimes_A N) \otimes_B P$$

tel que $\widetilde{\beta}((m \otimes n) \otimes p) = (m \otimes n) \otimes p$.
On obtient de façon similaire un homomorphisme

$$\widetilde{\gamma} : (M \otimes_A N) \otimes_B P \longrightarrow M \otimes_A (N \otimes_B P)$$

tel que $\widetilde{\gamma}((m \otimes n) \otimes p) = (m \otimes n) \otimes p$.
Ces homomorphismes sont clairement inverses l'un par rapport à l'autre. Il s'agit de ce fait d'isomorphismes. □

Regardons finalement que si A est un anneau commutatif, alors le produit tensoriel de deux A-modules est une opération symétrique à isomorphisme près.

Proposition 1.16.
Soit A est un anneau commutatif, M et N des A-modules . Alors $M \otimes_A N$ et $N \otimes_A M$ sont isomorphes en tant que A-modules.

Démonstration. L'application

$$\begin{array}{rccl} \alpha : & M \times N & \longrightarrow & N \otimes_A M \\ & (m,n) & \longmapsto & n \otimes m \end{array}$$

est A-bilinéaire :
- $\alpha(m_1 + m_2, n) = n \otimes m_1 + n \otimes n_2 = \alpha(m_1, n) + \alpha(m_2, n) \quad \forall\, m_1, m_2 \in M, n \in N$;
- $\alpha(m, n_1 + n_2) = m \otimes n_1 + m \otimes n_2 = \alpha(m, n_1) + \alpha(m, n_2) \quad \forall\, m \in M, n_1, n_2 \in N$;

– $\alpha(am, n) = n \otimes am = an \otimes m = \alpha(m, an) = an \otimes m = a(n \otimes m) = a\alpha(m, n)$ $\forall\, m \in M, n \in N, a \in A$.

Par conséquent, par la propriété universelle du produit tensoriel et par la remarque 3 (3), α induit un unique homomorphisme de A-modules $\widetilde{\alpha} : M \otimes_A N \longrightarrow N \otimes_A M$ tel que $\widetilde{\alpha}(m \otimes n) = n \otimes m$.

De façon analogue, on obtient qu'il existe un unique homomorphisme de A-modules $\widetilde{\alpha} : N \otimes_A M \longrightarrow M \otimes_A N$ tel que $\widetilde{\alpha}(n \otimes m) = m \otimes n$. Ces deux homomorphismes sont clairement inverses l'un de l'autre et sont par conséquent des isomorphimes de A-modules. □

4. Produit tensoriel de sommes directes

Le comportement du produit tensoriel par rapport au sommes directes de modules et particulièrement intéressant dans l'optique de travailler avec des modules libres.

Théorème 1.17.
Soit $\{M_i\}_{i \in I}$ une famille de A-modules à droite et $\{N_j\}_{j \in J}$ une famille de A-modules à gauche. Alors l'application

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i \in I} M_i \otimes_A \bigoplus_{j \in J} N_j & \longrightarrow & \bigoplus_{(i,j) \in I \times J} (M_i \otimes_A N_j) \\ (\sum_i m_i) \otimes (\sum_j n_j) & \longmapsto & \sum_{i,j} m_j \otimes n_j \end{array}$$

est un isomorphisme de groupes abéliens.

Démonstration. D'une part l'application

$$\begin{array}{cccc} \psi : & \bigoplus_{i \in I} M_i \times_A \bigoplus_{j \in J} N_j & \longrightarrow & \bigoplus_{(i,j) \in I \times J} (M_i \otimes_A N_j) \\ & (\sum_i m_i, \sum_j n_j) & \longmapsto & \sum_{i,j} m_i \otimes n_j \end{array}$$

est clairement équilibrée. Ainsi, par la propriété universelle du produit tensoriel, elle induit un unique homomorphisme de groupes abéliens

$$\tilde{\psi} : \quad \bigoplus_{i \in I} M_i \otimes_A \bigoplus_{j \in J} N_j \quad \longrightarrow \quad \bigoplus_{(i,j) \in I \times J} (M_i \otimes_A N_j)$$

tel que $\tilde{\psi} t = \psi$, i.e. $\tilde{\psi}((\sum_i m_i) \otimes (\sum_j n_j)) = \sum_{i,j} m_j \otimes n_j$.

D'autre part, pour tout les couples $(i, j) \in I \times J$, les applications

$$\begin{array}{cccc} b_{ij} : & M_i \times N_j & \longrightarrow & \bigoplus_{i \in I} M_i \otimes_A \bigoplus_{j \in J} N_j \\ & (m_i, n_j) & \longmapsto & m_i \otimes n_j \end{array}$$

sont A-équilibrées par construction du produit tensoriel. Par conséquent, elles induisent des homomorphismes de groupes (uniques) :

$$\tilde{b_{ij}} : \quad M_i \otimes_A N_j \quad \longrightarrow \quad \bigoplus_{i \in I} M_i \otimes_A \bigoplus_{j \in J} N_j$$

tel que $\tilde{b_{ij}}(m_i \otimes n_j) = m_i \otimes n_j$.
Ainsi, il existe un unique homomorphisme de groupes qui étend tous les $\tilde{b_{ij}}$:

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\beta}: & \bigoplus_{(i,j)\in I\times J}(M_i \otimes_A N_j) & \longrightarrow & \bigoplus_{i\in I} M_i \otimes_A \bigoplus_{j\in J} N_j \\ & \sum_{i,j} x_{ij} & \longmapsto & \sum_{i,j} \tilde{b_{ij}}(x_{ij}) \end{array}$$

En particulier, $\tilde{\beta}(\sum_{i,j} m_i \otimes n_j) = (\sum_i m_i) \otimes (\sum_j n_j)$. Ce qui montre que $\tilde{\psi}$ et $\tilde{\beta}$ sont inverses l'un de l'autre, il s'agit par conséquents s'isomorphismes de groupes. □

Conséquence 1.18.
Soit A un anneau commutatif, $M = \bigoplus_{i\in I} Ae_i$ un A-module libre de base $\{e_i \,|\, i \in I\}$ et $N = \bigoplus_{j\in J} Af_j$ un A-module libre de base $\{f_j \,|\, j \in J\}$. Alors par le théorème précédent :

$$M \otimes_A N = (\bigoplus_{i\in I} Ae_i) \otimes_A (\bigoplus_{j\in J} Af_j) \cong \bigoplus_{(i,j)\in I\times J} (Ae_i \otimes Af_j)$$

Or $Ae_i \otimes Af_j \cong A \otimes A \cong A$ où $ae_i \otimes bf_j \mapsto ab$ avec inverse $A \longrightarrow Ae_i \otimes Af_j$ où $c \mapsto c(e_i \otimes f_j)$. Donc

$$M \otimes_A N \cong \bigoplus_{(i,j)\in I\times J} A(e_i \otimes f_j) .$$

Par conséquent $M \otimes_A N$ est un A-module libre de base $\{e_i \otimes f_j \,|\, (i, j) \in I \times J\}$.
En outre, si M est libre de rang m et N est libre de rang n, alors $M \otimes_A N$ est libre de rang mn.

5. Exactitude à droite du produit tensoriel

Théorème 1.19.
Soit M un A-module à droite. Le foncteur $M \otimes_A -$ est exact à droite.

Démonstration. Soit $N' \xrightarrow{f} N \overset{g}{\twoheadrightarrow} N'' \longrightarrow 0$ une suite exacte de A-modules à gauche. On a donc $\mathrm{Im}(f) = \ker(g)$ et g est surjectif.
Il faut montrer que $M \otimes_A N' \xrightarrow{\mathrm{id}_M \otimes f} M \otimes_A N \overset{\mathrm{id}_M \otimes g}{\twoheadrightarrow} M \otimes_A N'' \longrightarrow 0$ est exact, i.e. que $\mathrm{Im}(\mathrm{id}_M \otimes f) = \ker(\mathrm{id}_M \otimes g)$ et que $\mathrm{id}_M \otimes g$ est surjectif.

→*Surjectivité de* $\mathrm{id}_M \otimes g$.
L'homomorphisme g étant surjectif, on a déjà montré la surjectivité de $\mathrm{id}_M \otimes g$ dans la propriété 1.9.
→$\mathrm{Im}(\mathrm{id}_M \otimes f) = \ker(\mathrm{id}_M \otimes g)$.
Par exactitude de la suite initiale, on a $g \circ f = 0$, ainsi

$$(\mathrm{id}_M \otimes g)(\mathrm{id}_M \otimes f) = \mathrm{id}_M \otimes (g \circ f) = \mathrm{id}_M \otimes 0 = 0$$

et donc $\mathrm{Im}(\mathrm{id}_M \otimes f) \subseteq \ker(\mathrm{id}_M \otimes g)$. Ainsi par la propriété universelle des groupes quotients, il existe un unique homomorphisme surjectif de groupes

$$\Theta : M \otimes_A N/\,\mathrm{Im}(\mathrm{id}_M \otimes f) \longrightarrow M \otimes_A N''$$

tel que $\Theta(\overline{x \otimes y}) = x \otimes g(y)$ pour tout $x \in M$, $y \in N$. C'est un isomorphisme si et seulement si $\mathrm{Im}(\mathrm{id}_M \otimes f) = \ker(\mathrm{id}_M \otimes g)$.
Par conséquent, il suffit de montrer que Θ est un isomorphisme.
Soit $x \in M$, $y'' \in N''$ et choisissons $y \in N$ tel que $g(y) = y''$.

Affirmation. La classe de $x \otimes y$ dans $M \otimes_A N/\,\mathrm{Im}(\mathrm{id}_M \otimes f)$ est indépendante du choix de y.
En effet, soit $y, z \in N$ tels que $g(y) = y'' = g(z)$ alors $g(y - z) = 0$, i.e $y - z \in \ker(g) = \mathrm{Im}(f)$. Donc il existe $y' \in N'$ tel que $y - z = f(y')$, ainsi $y = z + f(y')$ et $x \otimes y = x \otimes z + (\mathrm{id}_M \otimes f)(x \otimes y')$, i.e $\overline{x \otimes y} = \overline{x \otimes z}$.

Nous avons donc une application

$$\begin{array}{ccc} M \times N'' & \longrightarrow & M \otimes_A N/\,\mathrm{Im}(\mathrm{id}_M \otimes f) \\ (x, y'') & \longmapsto & \overline{x \otimes y} \end{array}$$

avec $g(y) = y''$, qui est équilibrée. Par conséquent, par la propriété universelle du produit tensoriel, nous avons un homomorphisme Θ' de $M \otimes N''$ dans $M \otimes_A N/\,\mathrm{Im}(\mathrm{id}_M \otimes f)$ tel que $\Theta'(x \otimes y'') = \overline{x \otimes y}$ où $g(y) = y''$. Il reste à vérifier sur les générateurs de ces deux groupes que leurs compositions donnent l'identité.

$$\Theta\Theta'(x \otimes y'') \overset{y''=g(y)}{=} \Theta(\overline{x \otimes y}) = x \otimes g(y) = x \otimes y''$$

et

$$\Theta'\Theta(\overline{x \otimes y}) = \Theta'(x \otimes g(y)) = \overline{x \otimes y}\,.$$

Par suite, Θ est bien un isomorphisme. Ce qui prouve la première assertion.

□

6. Produit tensoriel d'Algèbres

Soit K un anneau commutatif. Si A est une K-algèbre, sa multiplication

$$\begin{array}{ccc} A \times A & \longrightarrow & A \\ (a, a') & \longmapsto & aa' \end{array}$$

est une application K-bilinéaire. Elle induit donc un K-homomorphisme

$$\begin{array}{cccc} M_A : & A \otimes_K A & \longrightarrow & A \\ & a \otimes a' & \longmapsto & aa'\,. \end{array}$$

Maintenant, si B est une autre K-algèbre, la composition

$$\begin{tikzcd} (A \otimes_K B) \times (A \otimes_K B) \arrow[r, "\phi"] \arrow[drr, dashed, "m"'] & (A \otimes_K B) \otimes_K (A \otimes_K B) \arrow[r, "T"] & (A \otimes_K A) \otimes_K (B \otimes_K B) \arrow[d, "M_A \otimes M_B"] \\ & & A \otimes_K B \end{tikzcd}$$

où $\phi : (m,n) \mapsto m \otimes n$ et T est l'unique isomorphisme de K-modules tel que $T[(a\otimes b)\otimes(a'\otimes b')] = (a\otimes a')\otimes(b\otimes b')$ (donné par la propriété universelle du produit tensoriel), est K-linéaire, puisque chacune des flèches l'est. Cette composition est la multiplication sur $A \otimes_K B$ puisque

$$m(a\otimes b, a'\otimes b') = (M_A\otimes M_B)\circ T[(a\otimes b)\otimes(a'\otimes b')] = M_A(a\otimes a')\otimes M_B(b\otimes b') = aa'\otimes bb' .$$

L'élément $1 \otimes 1$ est un élément neutre pour m, et cette application est clairement associative puisque les multiplications de A et de B sont associatives.
Par conséquent, on a muni $A \otimes_K B$ d'une structure de K-algèbre.

Remarque 1.20.
Comme vu ci-dessus, la multiplication dans une algèbre A, induit une homomorphisme

$$\begin{array}{rccc} M_A : & A\otimes_K A & \longrightarrow & A \\ & a\otimes a' & \longmapsto & aa' . \end{array}$$

Plus tard on considérera cette application comme étant la multiplication, plutôt que l'application usuelle.

Propriétés 1.21.
Soit K un anneau commutatif ainsi que A, B et C des K-algèbres, alors sont isomorphes en tant que K-algèbres :

(1) $K \otimes_K A \cong A$ *et* $A \otimes_K K \cong A$;

(3) $A \otimes_K B \cong B \otimes_K A$;

(3) $A \otimes_K (B \otimes_K C) \cong (A \otimes_K B) \otimes_K C$.

Démonstration. Il s'agit simplement de copier les preuves des propositions 1.14, 1.16 et 1.15 respectivement dans le cas des K-algèbres. □

Etant donné deux K-algèbres sur un anneau commutatifs, considérons les deux homomorphismes d'algèbres suivants :

$$\begin{array}{rccc} i_A : & A & \longrightarrow & A\otimes_k B \\ & a & \longmapsto & a\otimes 1_B \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} i_B : & B & \longrightarrow & A\otimes_k B \\ & b & \longmapsto & 1_A\otimes b \end{array}$$

Il découle de ces définitions que $i_A(a)$ commute avec $i_B(b)$ pour tout $a \in A, b \in B$.
Remarquons qu'en général, i_A et i_B ne sont pas injectifs, cependant, si K est un corps et si les algèbres A et B sont non triviales, alors i_A et i_B sont injectifs et peuvent être utilisés pour identifier A et B avec leurs images respectives $A \otimes 1_B$ et $1_A \otimes B$.

Finalement, le produit tensoriel d'algèbres vérifie une propriété universelle de coproduit suivante :

Proposition 1.22.
Soit K un anneau commutatif ainsi que A,B et C des K-algèbres. Soit $f_A : A \longrightarrow C$ et $f_B : B \longrightarrow C$ des homomorphismes de K-algèbres tels que $f_A(a)f_B(b) = f_B(b)f_A(a)$ pour

tout $a \in A$ et tout $b \in B$.
Alors il existe un unique homomorphisme de K-algèbres $f : A \otimes_K B \longrightarrow C$ tel que $f_A = f \circ i_A$ et $f_B = f \circ i_B$. Autrement dit, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "i_A"'] \arrow[drr, bend left, "f_A"] & & \\
& A \otimes_K B \arrow[r, dashed, "\exists! f"] & C \\
B \arrow[ur, "i_B"] \arrow[urr, bend right, "f_B"'] & &
\end{tikzcd}$$

Démonstration. L'unicité de f est banale. En effet si $g : A \otimes_K B \longrightarrow C$ est un autre homomorphisme et s'il on veut que le diagramme commute, alors il faut que $g(a \otimes 1_B) = f_A(a)$ pour tout $a \in A$ et il faut que $g(1_A \otimes b) = f_B(b)$ pour tout $b \in B$. Ainsi $g(a \otimes b) = g((a \otimes 1_B)(1_A \otimes b)) = f_A(a) f_B(b) = f(a \otimes b)$.
Pour montrer l'existence, nous considérons l'application

$$\begin{array}{cccc} \phi : & A \otimes_K B & \longrightarrow & C \\ & (a, b) & \longmapsto & f_A(a) f_B(b) \end{array}$$

est K-bilinéaire en vertu de la linéarité de f_A et f_B. Elle induit ainsi une application K-linéaire $f : A \otimes_K B \longrightarrow C$ telle que $f(a \otimes b) = f_A(a) f_B(b)$ pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$. De plus $f(1_A \otimes 1_B) = 1_C 1_C = 1_C$ et f préserve la multiplication. En effet, pour tout $a, a' \in A$,$b, b' \in B$ on a pour les générateurs de $A \otimes_K B$:

$$\begin{aligned} f((a \otimes b)(a' \otimes b')) &= f(aa' \otimes bb') = f_A(aa') f_B(bb') \\ &= f_A(a) f_A(a') f_B(b) f_B(b') \\ &= f_A(a) f_B(b) f_A(a') f_B(b') \\ &= f(a \otimes b) f(a' \otimes b') \end{aligned}$$

Par conséquent, f est un homomorphisme K-linéaire d'anneaux, autrement dit un homomorphisme de K-algèbres. □

CHAPITRE 2

Homologie singulière

1. Simplexes

L'idée cachée derrières le mot n-simplexe est de décrire l'analogue du triangle en dimension n. On peut aussi le voir comme le plus petit sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$ contenant $n+1$ points qui ne sont pas contenus dans un hyperplan de dimension plus petite que n.

Définition 2.1.
Soit $\{v_0, \ldots, v_m\} \subset \mathbb{R}^n$ tels que $\{v_1 - v_0, \ldots, v_m - v_0\}$ est un sous-ensemble linéairement indépendant du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. (Donc $m \leq n$). L'ensemble convexe engendré par cet ensemble est appelé **m-simplexe** de sommets $v_0, v_1, \ldots, v_m$. On le note $[v_0, \ldots, v_m]$.

La **face opposée** au sommet v_i est le sous-simplexe $[v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_m]$ engendré par les sommets tous les sommets $v_0, v_1, \ldots, v_m$ moins le sommet v_i.

Le **bord** de $[v_0, \ldots, v_m]$ est l'union de ces $m+1$ faces.

Remarque 2.2.
Tout élément x du m-simplexe $[v_0, \ldots, v_m]$ s'écrit de manière unique comme

$$x = \sum_{i=0}^{m} t_i v_i \quad \text{où} \sum_{i=0}^{m} t_i = 1 \quad \text{et } t_i \geq 0 \, \forall \, i = \overline{0, m}$$

Pour se donner une meilleure intuition, examinons cette définition en petites dimensions.

Exemple 2.3.
Le 0-simplexe $[v_0]$ est simplement constitué du point v_0.

Exemple 2.4.
Le 1-simplexe $[v_0, v_1] = \{tv_0 + (1-t)v_1 \mid t \in I\}$ est un segment de droite admettant les points v_0 et v_1 pour extrémités.

Exemple 2.5.
Le 2-simplexe $[v_0, v_1, v_2]$ est le triangle dans $\mathbb{R}^2$ (avec intérieur) de sommets v_0,v_1 et v_2.

Exemple 2.6.
Le 3-simplexe $[v_0, v_1, v_2, v_3]$ est le tétraèdre dans $\mathbb{R}^3$ (avec intérieur) de sommets v_0,v_1,v_2 et v_3.

Exemple 2.7.
Le **n-simplexe standard** est par définition le simplexe

$$\Delta^n = \{(t_0, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{m} t_i = 1\,, t_i \geq 0\, \forall\, i = \overline{0, m}\} = [e_0, \ldots, e_m]$$

où $e_0 = (1, 0, ..., 0), \ldots, e_n = (0, ..., 0, 1)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Définition 2.8.
Une **orientation** du n-simplexe standard $\Delta^n = [e_0, e_1, \ldots, e_n]$ est la donnée d'un ordre sur les sommets de Δ^n :

$$e_{i_0} < e_{i_1} < \ldots < e_{i_n}$$

On dit que deux orientations de Δ^n sont identiques si, vue comme permutations de $\{e_0, e_1, \ldots, e_n\}$, elles ont la même parité. Sinon on dit qu'elles sont opposées.

Définition 2.9.
Tout orientation de Δ^n induit une orientation de ses faces définie en orientant la i-ème face dans le sens $(-1)^i[v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_m]$, où $-[v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_m]$ signifie que l'on donne à la i-ème face une orientation opposée à celle décrite par les sommets ordonnés comme dans les crochets.

Exemple 2.10.
Considérons le 2-simplexe standard $[e_0, e_1, e_2]$ avec l'orientation $e_0 < e_1 < e_2$. La 0-ième face $[e_1, e_2]$ est orientée comme $(-1)^0[e_1, e_2] = [e_1, e_2]$, i.e. de e_1 à e_2. La première face $[e_0, e_2]$ est orientée de e_2 à e_0 et la deuxième face $[e_0, e_1]$ est orientée de e_0 à e_1. Et le bord de Δ^2 est $[e_1, e_2] \cup [e_0, e_2] \cup [e_0, e_1]$.

On définit encore pour tout n et pour tout $i = \overline{0, n-1}$ la i-ème **application de face** $F_i^n = F_i : \Delta^{n-1} \longrightarrow \Delta^n$ comme suit :

$$F_0^n : (t_0, \ldots, t_{n-1}) \longmapsto (0, t_0, \ldots, t_{n-1})$$
$$F_i^n : (t_0, \ldots, t_{n-1}) \longmapsto (t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \ldots, t_{n-1}) \text{ si } i > 0$$

Il s'agit donc de l'application affine qui envoie les sommets $\{e_0, \ldots, e_{n-1}\}$ sur les sommets $\{e_0, \ldots, e_n\}$ en préservant l'ordre.

2. Définition des groupes d'homologie singulière

Pour un espace topologique quelconque X nous pouvons généraliser la notion de n-simplexe de l'espace euclidien en considérant les images dans X des n-simplexes standards par des applications continues, ou les applications elles-mêmes. C'est cette notion qui est la base de la construction des groupes d'homologie singulière.

Définition 2.11.
Soit X un espace topologique quelconque. Un **n-simplexe singulier** est une application continue $T : \Delta^n \longrightarrow X$.

Remarquons que Δ^1 étant homéomorphe à $\mathbf{I}$, un 1-simplexe singulier est simplement un chemin dans X. Similairement, comme $\Delta^0 = \{e_0\}$, un 0-simplexe singulier peut être identifié avec un point de X.

Définition 2.12.
Etant donné X un espace topologique, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on définit $S_n(X)$, le **n-ième groupe de chaînes singulières** de l'espace X, comme étant le groupe abélien libre admettant pour base l'ensemble $Simp_n(X)$ des n-simplexes de X.
En outre, on pose $S_n(X) := 0$ si $n < 0$.
On appelle **n-chaînes** les éléments de $S_n(X)$.

Proposition-Définition 2.13.
Soit X un espace topologique. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit une application ensembliste ∂_n par

$$\begin{array}{rccl} \partial_n : & Simp_n(X) & \longrightarrow & S_{n-1}(X) \\ & T & \longmapsto & \partial_n(T) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i T F_i^n \end{array}$$

si $n > 0$ et $\partial_0 = 0$ si $n = 0$..
Ainsi par la propriété universelle des groupes libres, pour tout $n \geq 0$, il existe un unique homomorphisme, appelé ***opérateur de bord****,*

$$\partial_n : S_n(X) \longrightarrow S_{n-1}(X)$$

tel que $\partial_n(T) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i T F_i^n$ pour tout n-simplexe singulier T.
Autrement dit, on étend par linéarité l'application ∂_n définie sur la base de $S_n(X)$.

Nous avons ainsi construit une suite de groupes abéliens et d'homomorphismes

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{n+1}} S_n \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \ldots \xrightarrow{\partial_3} S_2 \xrightarrow{\partial_2} S_1 \xrightarrow{\partial_1} S_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

appelée **complexe de chaînes singulier** de X. On le note $(S_*(X), \partial)$ ou simplement $S_*(X)$.

Proposition 2.14.
La compostion $\partial_n\partial_{n+1}$ est nulle pour tout $n \geq 0$.

Démonstration. Il suffit de vérifier que $\partial_n\partial_{n+1}(T) = 0$ pour tout $(n+1)$-simplexe T de la base de $S_{n+1}(X)$. Soit donc T un $(n+1)$-simplexe dans X, alors

$$\begin{aligned}
\partial_n\partial_{n+1}(T) &= \partial_n(\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i TF_i^{n+1}) \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i TF_i^{n+1})F_k^n \\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^{i+k} TF_i^{n+1}F_k^n \\
&= \sum_{i\leq k}(-1)^{i+k} TF_i^{n+1}F_k^n \;+\; \sum_{k<i}(-1)^{i+k} TF_i^{n+1}F_k^n .
\end{aligned}$$

Or si $k < i$ on a pour tout $(t_0,\ldots,t_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
F_i^{n+1}F_k^n(t_0,\ldots,t_{n-1}) &= F_i^{n+1}(t_0,\ldots,t_{k-1},0,t_k,\ldots,t_{n-1}) \\
&= (t_0,\ldots,t_{k-1},0,t_k,\ldots,t_{i-2},0,t_{i-1},\ldots,t_{n-1}) \\
&= F_k^{n+1}(t_0,\ldots,t_{k-1},t_k,\ldots\ldots,t_{i-2},0,t_{i-1},\ldots,t_{n-1}) \\
&= F_k^{n+1}F_{i-1}^n(t_0,\ldots,t_{n-1})
\end{aligned}$$

ainsi $F_i^{n+1}F_k^n = F_k^{n+1}F_{i-1}^n$.
Par suite

$$\begin{aligned}
\partial_n\partial_{n+1}(T) &= \sum_{i\leq k}(-1)^{i+k} TF_i^{n+1}F_k^n \;+\; \sum_{k<i}(-1)^{i+k} TF_i^{n+1}F_k^n \\
&= \sum_{i\leq k}(-1)^{i+k} TF_i^{n+1}F_k^n \;+\; \sum_{k<i}(-1)^{i+k} TF_k^{n+1}F_{i-1}^n \\
&= \sum_{i\leq k}(-1)^{i+k} TF_i^{n+1}F_k^n \;+\; \sum_{k\leq q}(-1)^{q+k+1} TF_k^{n+1}F_q^n \quad \text{en posant } q = i-1 \\
&= \sum_{i\leq k}\underbrace{[(-1)^{i+k} + (-1)^{q+k+1}]}_{=0\ \forall i,k} TF_i^{n+1}F_k^n \;=0
\end{aligned}$$

□

Nous avons maintenant en mains tous les outils nécessaires pour définir les groupes d'homologie singulière.

Définition 2.15.
Soit X un espace topologique et $n \geq 0$ un entier.

(1) On appelle groupe des n-**cycles** de X, le groupe[1] $Z_n(X) := \ker\partial_n$ et on appelle groupe des n-**bords** de X le groupe $B_n(X) := \operatorname{Im}\partial_{n+1}$.

[1]De l'allemand "Zykel".

(2) On définit le **n-ième groupe d'homologie** singulière $H_n(X)$ comme étant le groupe quotient suivant :

$$H_n(X) := Z_n(X)/B_n(X) = \ker \partial_n / \operatorname{Im} \partial_{n+1}$$

Pour tout n-cycle z_n, la classe $\overline{z_n} = z_n + B_n(X)$ est appelée la **classe d'homologie** de z_n.

3. Fonctorialité de H_n

L'objectif prochain est de montrer que H_n est un foncteur covariant de la catégorie des espaces topologiques **Top** dans la catégorie des groupes abéliens **Ab**.

Définition 2.16 (*Homomorphisme induit par une application continue*).
Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue entre deux espaces topologiques X et Y et $T : \Delta^n \longrightarrow X$ un n-simplex dans X, alors $f \circ T : \Delta^n \longrightarrow Y$ est un n-simplex dans Y. En étendant par linéarité, on obtient un homomorphisme

$$\begin{array}{cccc} f_\#^n : & S_n(X) & \longrightarrow & S_n(Y) \\ & \sum a_T T & \longmapsto & f_\#(\sum a_T T) = \sum a_T (f \circ T) . \end{array}$$

On appelle $f_\#^n$ l'**homomorphisme induit** par l'application continue f.

Remarques.

(1) Dans l'homomorphisme induit, la composition de l'application continue avec les n-simplexes se faisant à gauche, il est claire que si $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ sont deux applications continues alors

$$(g \circ f)_\#^n = g_\#^n \circ f_\#^n .$$

(2) Si A est un sous-espace de X avec inclusion $j : A \hookrightarrow X$, alors l'homomorphisme induit $j_\#^n : S_n(A) \hookrightarrow S_n(X)$ est injectif.

En effet, considérons $c = \sum_i m_i T_i \in S_n(A)$ où $m_i \in \mathbb{Z}$ pour tout i et où l'on peut supposer sans perte de généralité que tous les T_i sont distincts. Supposons alors que $c \in \ker j_\#^n$, ainsi

$$0 = \sum_i m_i (j \circ T_i)$$

où tous les $j \circ T_i$ restent distincts dans $S_n(X)$. Or $S_n(X)$ est abélien libre de base tous les n-simplexes, on a donc $m_i = 0$ pour tout i. Par conséquent c est nul et $\ker j_\#^n = \{0\}$. D'où l'injectivité.

Théorème 2.17.
*Pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n :**Top**$\longrightarrow$**Ab** est un foncteur covariant.*

Pour prouver ce théorème, nous auront besoin de deux lemmes techniques. Le premier nous assure que l'homomorphisme induit commute avec l'opérateur de bord et le deuxième nous assure que cet homomorphisme envoie les n-cycles de X sur des n-cycles de Y et de même, envoie les n-bords de X sur des n-bords de Y.

Lemme 2.18.
Si $f : X \longrightarrow Y$ est une application continue entre deux espaces topologiques, alors $\partial_n f_\#^{n-1} = f_\#^n \partial_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En d'autres termes, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} S_n(X) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_\#^n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & S_{n-1}(X) \arrow[d, "f_\#^{n-1}"] \\ S_n(Y) \arrow[r, "\partial_n"] & S_{n-1}(Y) \end{tikzcd}$$

Démonstration. Il suffit de vérifier l'assertion sur les générateurs de $S_n(X)$. Soit donc σ un n-simplexe dans X, alors

$$\begin{aligned} f_\#^{n-1}\partial_n T &= f_\#^{n-1}(\sum_i (-1)^i T F_i^n) \\ &= \sum_i (-1)^i f_\#^{n-1}(T F_i^n) \\ &= \sum_i (-1)^i (f \circ T) F_i^n \\ &= \partial_n (f \circ T) = \partial_n f_\#^{n-1} T \end{aligned}$$

Ainsi $\partial_n f_\#^{n-1} = f_\#^n \partial_n$. □

Lemme 2.19.
Si $f : X \longrightarrow Y$ est une application continue entre deux espaces topologiques, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a,

$$f_\#^n(Z_n(X)) \subset Z_n(Y) \qquad \textit{et} \qquad f_\#^n(B_n(X)) \subset B_n(Y)\,.$$

Démonstration. Soit $z \in Z_n(X)$ est un n-cycle, alors $\partial_n(z) = 0$. Donc par le lemme précédent $\partial_n f_\#^{n-1}(z) = f_\#^n \partial_n(z) = f_\#^n(0) = 0$. D'où $f_\#^{n-1}(z) \in \ker \partial_n = Z_n(Y)$. Ceci valant pour tout n-cycle de X, on a $f_\#^n(Z_n(X)) \subset Z_n(Y)$.
Soit $b \in B_n(X)$ un n-bord, alors il existe $c \in S_{n+1}(X)$ tel que $b = \partial_{n+1}(c)$. Par conséquent,

$$f_\#^n(b) = f_\#^n \partial_{n+1}(c) = \partial_{n+1} f_\#^{n+1}(c) \in \operatorname{Im} \partial_{n+1} = B_n(Y)\,.$$

D'où $f_\#^n(B_n(X)) \subset B_n(Y)$. □

Preuve du théorème 2.17. Nous avons déjà défini H_n sur les objets X de **Top** comme

$$H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X)\,.$$

Il reste à définir H_n sur les morphismes de **Top**. Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue entre deux espaces topologiques, posons alors

$$H_n(f) : \begin{array}{ccc} H_n(X) & \longrightarrow & H_n(Y) \\ z_n + B_n(X) & \longmapsto & f_{\#}^n(z_n) + B_n(Y) \end{array}$$

Le lemme précédent assure que $f_{\#}^n(z_n) \in Z_n(Y)$, donc $f_{\#}^n(z_n) + B_n(Y)$ est bien un élément de $H_n(Y)$.
L'application $H_n(f)$ est bien-définie puisque pour tout $z_n \in Z_n(X)$ et pour tout $b_n \in B_n(X)$ on a :

$$f_{\#}^n(z_n + b_n) + B_n(Y) = f_{\#}^n(z_n) + \underbrace{f_{\#}^n(b_n)}_{\in B_n(Y)} + B_n(Y) = f_{\#}^n(z_n) + B_n(Y)$$

De plus $H_n(f)$ est clairement un homomorphisme de groupes abéliens.
En appliquant H_n à id_X il vient pour tout $z_n + B_n(X) \in H_n(X)$:

$$H_n(\mathrm{id}_X)(z_n + B_n(X)) = \mathrm{id}_{X\#}^n(z_n) + B_n(X) = \mathrm{id}_X \circ z_n + B_n(X) = z_n + B_n(X)$$

Donc $H_n(\mathrm{id}_X)) = \mathrm{id}_{H_n(X)}$.
Si $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ sont deux applications continues alors pour tout $\overline{z_n} \in H_n(X)$ on a :

$$\begin{aligned} H_(g \circ f)(\overline{z_n}) &= \overline{(g \circ f)_{\#}^n(z_n)} = \overline{g_{\#}^n \circ f_{\#}^n(z_n)} \\ &= H_n(g)(\overline{f_{\#}^n(z_n)}) = H_n(g) \circ H_n(f)(\overline{z_n}) \end{aligned}$$

Ainsi $H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f)$ et par conséquent H_n est un foncteur covariant. □

Il est maintenant clair que les groupes d'homologie d'espaces topologiques homéomorphes sont isomorphes. Formellement :

Corollaire 2.20.
Si X et Y sont deux espaces topologiques homéomorphes, alors $H_n(X) \cong H_n(Y)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Découle immédiatement du fait que les foncteurs préservent les équivalences. □

Ainsi chaque groupe d'homologie $H_n(X)$ est un invariant topologique de l'espace X.

4. Groupe d'homologie et connexité par arcs

Il semble que le calcul des groupes d'homologie d'un espace topologique donné soit de façon générale difficile. Nous allons voir dans cette section que l'on peut le ramener au calcul des groupes d'homologie de ces composantes connexes par arcs.

Nous sommes cependant pleinement en mesure de calculer tous les groupes d'homologie des deux espaces les plus simples que l'on puisse imaginer : l'ensemble vide et le singleton !

Proposition 2.21.
Si $X = \emptyset$*, alors* $H_n(X) = 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*.*

Démonstration. Le groupe abélien libre de base vide étant trivial, on a $S_n(\emptyset) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par suite $Z_n(\emptyset) = B_n(\emptyset) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'où $H_n(\emptyset) = 0/0 = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Proposition 2.22.
Soit $X = \{*\}$ *un singleton, alors* $H_n(X) = 0$ *pour tout* $n > 0$ *et* $H_0(X) = \mathbb{Z}$*.*

Démonstration. Pour tout $n \geq 0$, il n'existe qu'un n-simplexe dans $\{*\}$, $T_n : \Delta^n \longrightarrow \{*\}$ qui n'est autre que l'application constante. Donc $S_n(X) =< T_n >\cong \mathbb{Z}$ pour tout $n \geq 0$.

On a pour tout $n > 0$, $\Delta^{n-1} \xrightarrow{F_i^n} \Delta^n \xrightarrow{T_n} X$ donc $T_n F_i^n = T_{n-1}$. Par conséquent, les opérateurs de bord sont

$$\partial_n(T_n) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i T_n F_i^n = [\sum_{i=0}^{n}(-1)^i] T_{n-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ T_{n-1} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

- Si n est impair, alors $\partial_n = 0$ donc $Z_n(X) = \ker \partial_n = S_n(X)$.
  De plus ∂_{n+1} envoie T_{n+1} sur T_n, il s'agit de ce fait d'un isomorphisme entre $S_{n+1}(X) =< T_{n+1} >$ et $S_n(X) =< T_n >$. D'où $B_n(X) = \operatorname{Im} \partial_{n+1} = S_n(X)$. Par suite $H_n(X) \cong S_n(X)/S_n(X) = 0$.
- Si $n > 0$ est pair, alors dans ce cas c'est ∂_n qui est un isomorphisme entre $S_n(X)$ et $S_{n-1}(X)$. Par conséquent $Z_n(X) = \ker \partial_n = 0$. On en déduit immédiatement que $H_n(X) = 0$.

Pour la cas $n = 0$, on est dans la situation suivante :

$$S_1 \xrightarrow{\partial_1} S_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

avec $\partial_1 = 0$. Par conséquent $H_0(X) = Z_0(X)/B_0(X) = S_0(X)/0 \cong S_0(X) \cong \mathbb{Z}$. □

Le prochain théorème va nous permettre d'oublier les espaces topologiques quelconques pour travailler uniquement avec les espaces topologiques connexes par arcs.

Théorème 2.23.
Soit X *un espace topologique quelconque et* $\{X_j \mid j \in I\}$ *la famille de ses composantes connexes par arcs. Alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a*

$$H_n(X) \cong \bigoplus_{j \in I} H_n(X_j)\,.$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $c = \sum_i a_i T_i \in S_n(X)$. On peut écrire $c = \sum_{j \in I} c_j$, où c_j est la somme de tous les termes de c tels que $\mathrm{Im}(T_i) \subset X_j$. Alors l'application

$$\begin{array}{ccc} S_n(X) & \longrightarrow & \bigoplus_{j \in I} S_n(X_j) \\ c & \longmapsto & (c_j)_{j \in I} \end{array}$$

est clairement un isomorphisme. Alors $c \in Z_n(X)$ si et seulement si $c_j \in Z_n(X_j)$ pour tout $j \in I$. En effet, puisque $\partial_n(c_j) \in S_{n-1}(X_j)$, on a $0 = \partial_n(c) = \sum_{j \in I} \partial_n(c_j)$ implique que $\partial_n(c_j) = 0$ pour tout $j \in I$ (puisqu'on est dans une somme directe).
Ainsi on a l'homomorphisme bien-défini suivant :

$$\begin{array}{cccc} \Phi_n : & H_n(X) & \longrightarrow & \bigoplus_{j \in I} H_n(X_j) \\ & \overline{c} & \longmapsto & (\overline{c_j})_{j \in I} \end{array}$$

En outre, l'homomorphisme

$$\begin{array}{cccc} \Psi_n : & \bigoplus_{j \in I} H_n(X_j) & \longrightarrow & H_n(X) \\ & (\overline{c_j})_{j \in I} & \longmapsto & \overline{\sum_{j \in I} c_j} \end{array}$$

est tel que $\Psi_n \circ \Phi_n = \mathrm{id}$ et $\Phi_n \circ \Psi_n = \mathrm{id}$. Il s'agit donc d'isomorphismes. D'où $H_n(X) \cong \bigoplus_{j \in I} H_n(X_j)$. □

Exemple 2.24.
A l'aide du théorème ci-dessus on calcule facilement les groupes d'homologie de S^0 :

$$H_n(S^0) = H_n(\{*\}) \oplus H_n(\{*\}) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi,

$$H_n(S^0) = \begin{cases} 0 \oplus 0 = 0 & \text{si } n > 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \end{cases}.$$

Calculer les groupes d'homologie d'un espace topologique n'est en général pas facile, cependant le théorème suivant montre que l'on peut toujours calculer au moins $H_0(X)$. Comme π_0 renvoie le nombre de composantes connexes d'un espace topologique, nous allons voir que les foncteurs π_0 et H_0 comportent essentielement le même information.

Théorème 2.25.
Soit $X \neq \emptyset$ un espace topologique connexe par arcs, alors $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$. En outre, $\overline{x}$ est un générateur de ce groupe pour tout $x \in X$.

Démonstration. Regardons l'extrémité du complexe :

$$S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{\partial_0 = 0} 0$$

On veut calculer $H_0(X)$, donc on travaille dans $S_0(X)$ dont les éléments sont les 0-simplexes singuliers, i.e. les points de X.
Puisque $\partial_0 = 0$ on a $Z_0(X) = S_0(X)$, ainsi un 0-cycle s'écrit comme $\sum_{x \in X} m_x x$ où $m_x \in \mathbb{Z}$ pour tout $x \in X$ et $m_x \neq 0$ pour un nombre fini de $x \in X$.

Affirmation : $B_0(X) = \{\sum_{x\in X} m_x x \in S_0(X) \mid \sum_{x\in X} m_x = 0\}$.
Preuve de l'affirmation : Il faut montrer la double inclusion.

"$\subseteq$" : Soit $c \in B_0(X)$. Alors $c = \partial_1(\sum_i m_i T_i)$ où $m_i \in \mathbb{Z}\ \forall\, i$ et T_i est un 1-simplexe $\forall\, i$. Ainsi $c = \sum_i m_i \partial_1(T_i) = \sum_i m_i(T_i(e_1) - T_i(e_0))$. Chaque m_i apparaît deux fois dans cette somme, mais avec signes opposés, donc $\sum_i m_i = 0$. La première inclusion suit.

"$\supseteq$" : Soit $c = \sum_{i=0}^k m_i x_i \in S_0(X)$ tel que $\sum_{i=0}^k m_i = 0$. L'espace X étant non vide et connexe par arc, l'axiome du choix nous permet de choisir un élément $x \in X$ et un 1-simplexe $T_i : \Delta^1 \longrightarrow X$ (qui est en fait un chemin dans X) reliant x à x_i pour tout $i = \overline{0,k}$. Alors

$$\partial_1(T_i) = T_i(e_1) - T_i(e_0) = x_i - x\,.$$

Par conséquent, $\sum_{i=0}^k m_i T_i \in S_1(X)$ et donc

$$\begin{aligned}\partial_1\Big(\sum_{i=0}^k m_i T_i\Big) &= \sum_{i=0}^k m_i \partial_1(T_i)\\ &= \sum_{i=0}^k m_i x_i - x\underbrace{\sum_{i=0}^k m_i}_{=0} = \sum_{i=0}^k m_i x_i = c\end{aligned}$$

En d'autres termes, $c \in B_0(X)$.

Il suit que l'application

$$\begin{array}{cccc}\phi : & Z_0(X) & \longrightarrow & \mathbb{Z}\\ & \sum_{x\in X} m_x x & \longmapsto & \sum_{x\in X} m_x\end{array}$$

est un homomorphisme surjectif de noyau $B_0(X)$. Ainsi le premier théorème d'isomorphie nous fournit l'isomorphisme souhaité :

$$H_0(X) = Z_0(X)/B_0(X) \cong \mathbb{Z}\,.$$

Il reste à calculer les générateurs de $H_0(X)$.
Soit donc $\bar{c}$ un générateur de $H_0(X)$ avec $c = \sum_i m_i x_i$ alors $\phi(c) = \pm 1$. Quitte à remplacer c par $-c$, on peut supposer que $\phi(c) = \sum_i m_i = 1$. Ainsi si $x \in X$, on a $c = x + (c - x)$ où la somme des coefficients de $(c - x)$ est nulle i.e. $(c - x) \in B_0(X)$. Par conséquent, $\bar{c} = \bar{x}$.
De plus $\bar{x} = \bar{y}$ pour tout $x, y \in X$. En effet, comme il exsite un 1-simplexe $T : \Delta^1 \longrightarrow X$ reliant x et y, on a que $y - x = \partial_1(T) \in B_0(X)$. □

Conséquence 2.26.
Si $X \neq \emptyset$ est un espace topologique quelconque, dont l'ensemble des composantes connexes est $\{X_i \mid i \in I\}$, alors

$$H_0(X) = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}\,.$$

Il s'agit donc d'un groupe abélien libre de rang $\#I$.

5. Axiome d'homotopie

Le but de cette section est de montrer que si $f, g : X \longrightarrow Y$ sont deux applications continues homotopes, alors $H_n(f) = H_n(g)$ pour tout n.

Le lemme suivant donne un critère d'égalité pour $H_n(f)$ et $H_n(g)$ lorsque f et g sont deux applications continues entre les mêmes espaces.

LEMME 2.27.
Soit $f, g : X \longrightarrow Y$ deux applications continues et $P_n : S_n(X) \longrightarrow S_{n+1}(Y)$ une famille d'homomorphismes telle que

$$f_\#^n - g_\#^n = \partial_{n+1}P_n + P_{n-1}\partial_n \,.$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & S_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, shift right, "g_\#^{n+1}"'] \arrow[d, shift left, "f_\#^{n+1}"] & S_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[dl, "P_n"'] \arrow[d, shift right, "g_\#^{n}"'] \arrow[d, shift left, "f_\#^{n}"] & S_{n-1} \arrow[r, "\partial_{n-1}"] \arrow[dl, "P_{n-1}"'] \arrow[d, shift right, "g_\#^{n-1}"'] \arrow[d, shift left, "f_\#^{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & S_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"'] & S_n \arrow[r, "\partial_n"'] & S_{n-1} \arrow[r, "\partial_{n-1}"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_n(f) = H_n(g)$.

DÉMONSTRATION. Soit $z_n + B_n(X) \in H_n(X)$, alors on a définit $H_n(f)(z_n + B_n(X)) = f_\#^n(z_n) + B_n(Y)$. Utilisons maintenant l'hypothèse pour calculer $f_\#^n(z_n)$ en fonction de $g_\#^n(z_n)$:

$$\begin{aligned}
(f_\#^n - g_\#^n)(z_n) &= (\partial_{n+1}P_n + P_{n-1}\partial_n)(z_n) \\
&= \partial_{n+1}P_n(z_n) + P_{n-1}\underbrace{\partial_n(z_n)}_{0} \\
&= \partial_{n+1}\underbrace{P_n(z_n)}_{\in S_{n+1}(Y)} \in \operatorname{Im}\partial_{n+1} = B_n(Y)
\end{aligned}$$

Par conséquent $f_\#^n(z_n) = g_\#^n(z_n) + \partial_{n+1}P_n(z_n)$. Il suit que :

$$\begin{aligned}
H_n(f)(z_n + B_n(X)) &= f_\#^n(z_n) + B_n(Y) \\
&= g_\#^n(z_n) + \underbrace{\partial_{n+1}P_n(z_n)}_{\in B_n(Y)} + B_n(Y) \\
&= g_\#^n(z_n) + B_n(Y) \\
&= H_n(g)(z_n + B_n(X))
\end{aligned}$$

Remarquons que ce raisonnement est tout à fait valable pour $n = 0$ puisqu'on a posé $S_1(X) = 0$. Par conséquent $H_n(f) = H_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

THÉORÈME 2.28.
Soit $f, g : X \longrightarrow Y$ deux applications continues homotopes entre deux espaces topologiques quelconques.
Alors $H_n(f) = H_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Soit $F : X \times I \longrightarrow Y$ une homotopie entre f et g.
Notons pour $i = 0$ ou 1

$$\begin{array}{rccc} \lambda_i^X : & X & \longrightarrow & X \times I \\ & x & \longmapsto & (x, i) \ . \end{array}$$

Alors $f = F\lambda_0^X$ et $g = F\lambda_1^X$. En outre, à supposer que $H_n(\lambda_0^X) = H_n(\lambda_1^X)$ on obtient que

$$H_n(f) = H_n(F\lambda_0^X) = H_n(F)H_n(\lambda_0^X) = H_n(F)H_n(\lambda_1^X) = H_n(F\lambda_1^X) = H_n(g)\,.$$

Nous en sommes donc ramenés à prouver que $H_n(\lambda_0^X) = H_n(\lambda_1^X)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Or d'après le lemme précédent, pour ce faire, il suffit d'exhiber une famille d'homomorphismes $P_n^X : S_n(X) \longrightarrow S_{n+1}(X \times I)$ telle que

$$\lambda_1^X - \lambda_0^X = \partial_{n+1} P_n^X + P_{n-1}^X \partial_n \ . \tag{1}$$

Nous allons construire cette famille d'homomorphismes en procédant par récurrence sur n.

Cas n=0.
Comme $S_{-1}(X) = 0$, nous sommes contraints de définir $P_{-1}^X : S_{-1}(X) \longrightarrow S_0(X \times I)$ par $P_{-1}^X = 0$. D'autre part, pour $\Delta_0 = \{e_0\}$ et $T : \Delta^0 \longrightarrow X$ on définit

$$\begin{array}{rccc} P_0^X : & S_0(X) & \longrightarrow & S_1(X \times I) \\ & T & \longmapsto & \begin{array}{rccc} P_0^X(T) : & \Delta^1 & \to & X \times I \\ & \text{t} & \mapsto & (T(e_0), t) \end{array} \end{array}$$

où l'on identifie $(1-t)e_0 + te_1 \in \Delta^1$ avec t. On étend ensuite par linéarité.
Pour vérifier que P_0^X et P_{-1}^X satisfont la formule (1), il suffit de l'évaluer sur un élément quelconque $T : \Delta^0 \longrightarrow X$ de la base de $S_0(X)$.

$$\begin{aligned} (\partial_1 P_0^X + P_{-1}\partial_0)(T)(t) &= (\partial_1 P_0^X(T) + \underbrace{P_{-1}\partial_0(T)}_{0})(t) \\ &= (\sum_{i=0}^{1} (-1)^i P_0^X(T) F_i^1)(t) \\ &= (P_0^X(T)F_0^1 - P_0^X(T)F_1^1)(t) \\ &= (T(e_0), 1) - (T(e_0), 0) \\ &= (\lambda_1^X \circ T - \lambda_0^X \circ T)(t) \\ &= (\lambda_1^X(T) - \lambda_0^X(T))(t) \end{aligned}$$

D'où $\partial_1 P_0^X + P_{-1}\partial_0 = \lambda_1^X - \lambda_0^X$.
En outre, P_0^X satisfait la condition de naturalité suivante :

$$\begin{tikzcd} S_0(\Delta^0) \arrow[r, "P_0^{\Delta^0}"] \arrow[d, "T_\#^0"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & S_1(\Delta^0 \times I) \arrow[d, "(T\times 1)_\#^1"] \\ S_0(X) \arrow[r, "P_0^X"] & S_1(X \times I) \end{tikzcd}$$

En effet, puisqu'il n'existe qu'un seul 0-simplexe, nommément $d : \Delta^0 \longrightarrow \Delta^0$, $e_0 \mapsto e_0$, il suffit d'évaluer chaque composante du diagramme en d :

$$P_0^X \circ T_\#^0(d) = P_0^X(T \circ d) = P_0^X(T) : \begin{array}{ccc} \Delta^1 & \longrightarrow & X \times I \\ (1-t)e_0 + te_1 & \longmapsto & (T(e_0), t) \end{array}$$

et

$$(T \times 1)_\#^1 \circ P_0^{\Delta^0}(d) : \begin{array}{ccc} \Delta^1 & \longrightarrow & X \times I \\ (1-t)e_0 + te_1 & \longmapsto & (T \times 1)_\#^1(d(e_0), t) = (T \times 1)_\#^1(e_0, t) = (T(e_0), t) \end{array}$$

D'où la commutativité du diagramme.

Cas n>0.
Renforçons l'hypothèse de récurrence en supposant maintenant que (1) et la conditions de naturalité ci-dessus sont satisfaites pour les entiers plus petits que n et montrons qu'elles restent valables pour n.

Commençons par remarquer que si la condition (1) est satisfaite, alors

$$(\lambda_1^{\Delta^n}{}_\# - \lambda_0^{\Delta^n}{}_\# - P_{n-1}^{\Delta^n}\partial_n)(c)$$

est un n-cycle de $\Delta^n \times I$ pour tout élément $c \in S_n(X)$ puisque

$$\begin{aligned} \partial_n(\lambda_1^{\Delta^n}{}_\# - \lambda_0^{\Delta^n}{}_\# - P_{n-1}^{\Delta^n}\partial_n) &= \lambda_1^{\Delta^n}{}_\#\partial_n - \lambda_0^{\Delta^n}{}_\#\partial_n - \partial_n P_{n-1}^{\Delta^n}\partial_n \\ &= \lambda_1^{\Delta^n}{}_\#\partial_n - \lambda_0^{\Delta^n}{}_\#\partial_n - (\lambda_1^{\Delta^n}{}_\# - \lambda_0^{\Delta^n}{}_\# - P_{n-2}^{\Delta^n}\partial_{n-1})\partial_n \quad \text{par induction} \\ &= P_{n-2}^{\Delta^n}\underbrace{\partial_{n-1}\partial_n}_{0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Notons $d = \mathrm{id}_{\Delta^n} \in S_n(\Delta^n)$. Vu ce qui précède,

$$(\lambda_1^{\Delta^n}{}_\# - \lambda_0^{\Delta^n}{}_\# - P_{n-1}^{\Delta^n}\partial_n)(d) \in Z_n(\Delta^n \times I)$$

Or on peut montrer que, étant donné que $\Delta^n \times I$ est un sous-ensemble borné et convexe de $\mathbb{R}^{n+2}$, son n-ième groupe d'homologie est trivial.(Admis ici, sans démonstration.) Ainsi $B_n(\Delta^n \times I) = Z_n(\Delta^n \times I)$. Par conséquent, il existe $b_{n+1} \in S_{n+1}(\Delta^n \times I)$ tel que

$$\partial_{n+1}(b_{n+1}) = \lambda_1^{\Delta^n}{}_\# - \lambda_0^{\Delta^n}{}_\# - P_{n-1}^{\Delta^n}\partial_n)(d)\,.$$

Définissons alors

$$P_n^X : \begin{array}{ccc} S_n(X) & \longrightarrow & S_{n+1}(X \times I) \\ T & \longmapsto & (T \times 1)_\#(b_{n+1}) \end{array}$$

où T est un n-simplexe dans X et on étend par linéarité.

Remarquons que $(T \times 1)\lambda_i^{\Delta^n}(a) = (T \times 1)(a, i) = (T(a), i) = \lambda_i^X(a)$ pour tout $a \in \Delta^n$, par conséquent

(2) $$(T \times 1)\lambda_i^{\Delta^n} = \lambda_i^X T$$

Vérifions (1). Soit $T : \Delta^n \longrightarrow X$ un n-simplexe de X, alors :

$$\begin{aligned}
\partial_{n+1}P_n^X(T) &= \partial_{n+1}(T\times 1)_\#(b_{n+1})\\
&= (T\times 1)_\#\partial_{n+1}(b_{n+1})\\
&= (T\times 1)_\#(\lambda_1^{\Delta^n}{}_\# - \lambda_0^{\Delta^n}{}_\# - P_{n-1}^{\Delta^n}\partial_n)(d) \quad \text{par déf. de } b_{n+1}\\
&= (T\times 1)_\#(\lambda_1^{\Delta^n} - \lambda_0^{\Delta^n} - P_{n-1}^{\Delta^n}\partial_n(d))\\
&= (T\times 1)\lambda_1^{\Delta^n} - (T\times 1)\lambda_0^{\Delta^n} - (T\times 1)_\# P_{n-1}^{\Delta^n}\partial_n(d)\\
&= (T\times 1)\lambda_1^{\Delta^n} - (T\times 1)\lambda_0^{\Delta^n} - P_{n-1}^X T_\#\partial_n(d) \quad \text{naturalité appliquée à } P_{n-1}\\
&= \lambda_1^X T - \lambda_0^X T - P_{n-1}^X\partial_n T_\#(d) \quad \text{par (2)}\\
&= \lambda_1^X T - \lambda_0^X T - P_{n-1}^X\partial_n T\\
&= (\lambda_1^X - \lambda_0^X - P_{n-1}^X\partial_n)(T)
\end{aligned}$$

D'où $\lambda_1^X - \lambda_0^X = \partial_{n+1}P_n^X + P_{n-1}^X\partial_n$.

Ainsi pour que (1) soit totalement vérifiée, il ne reste plus qu'à montrer que la condition de naturalité est satisfaite pour n.
Soit $s : \Delta^n \longrightarrow \Delta^n$ un n-simplexe dans Δ^n, on a :

$$\begin{aligned}
(T\times 1)_\# P_n^{\Delta^n}(s) &= (T\times 1)_\#(s\times 1)_\#(b_{n+1})\\
&= (Ts\times 1)_\#(b_{n+1})\\
&= P_n^X(Ts)\\
&= P_n^X T_\#(s)
\end{aligned}$$

D'où $(T\times 1)_\# P_n^{\Delta^n} = P_n^X T_\#$. Ce qui termine la preuve. □

Corollaire 2.29.
Si X et Y sont deux espaces topologiques équivalents à homotopie près alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$H_n(X) \cong H_n(Y)\,.$$

Démonstration. Soit $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow X$ deux applications continues telles que $g\circ f \simeq \mathrm{id}_X$ et $f\circ g \simeq \mathrm{id}_Y$, une équivalence d'homotopie. Alors pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$H_n(g)\circ H_n(f) = H_n(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{H_n(X)}$$

et

$$H_n(f)\circ H_n(g) = H_n(\mathrm{id}_Y) = \mathrm{id}_{H_n(Y)}\ .$$

Par conséquent $H_n(f)$ et $H_n(g)$ sont des isomorphismes entre $H_n(X)$ et $H_n(Y)$. □

De ce fait, les foncteurs d'homologie H_n induisent des foncteurs sur la catégorie **hTop** des espaces topologiques équivalents à homotopie près dans la catégorie des groupes abéliens. On peut donc regarder H_n comme un foncteur de **hTop**$\longrightarrow$**Ab**.

Corollaire 2.30.
Si X est un espace topologique contractile, alors pour tout $n > 0$ on a

$$H_n(X) = 0\,.$$

Démonstration. Si X est contractile, X est équivalent à homotopie près au singleton $\{*\}$. Le corollaire ci-dessus entraîne alors que $H_n(X) \cong H_n(\{*\}) = 0$ pour tout $n > 0$, vu la proposition 2.22. □

6. Le théorème d'Hurewicz de rang 1

Cette section donne un lien entre le groupe fondamental et le premier groupe d'homologie : ce dernier se trouve être l'abélianisé du groupe fondamental.
Dans toute cette section, X désignera un espace topologique et x_0 un point de base de X.

Définition 2.31.
Soit $m : \Delta^1 \longrightarrow \mathbf{I}$ l'homéomorphisme définit par $(1-t)e_0 + te_1 \mapsto t$. On appellera alors **application d'Hurewicz**, l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \pi_1(X, x_0) & \longrightarrow & H_1(X) \\ & [f] & \longmapsto & \overline{fm} \end{array}$$

où $f : I \longrightarrow X$ est un lacet dans X, i.e. $f(0) = f(1) = x_0$.

Nous allons voir dans les deux résultats suivants que cette application est non seulement bien-définie, mais qu'il s'agit aussi d'un homomorphisme.

Lemme 2.32.
L'application d'Hurewicz est bien-définie.

Démonstration. Certainement $fm : \Delta^1 \longrightarrow I \longrightarrow X$ est un 1-simplexe. Regardons qu'il s'agit d'un 1-cycle :

$$\partial_1(fm)(1) = [\sum_{i=0}^{1}(-1)^i fmF_i^1](1) = fm(e_1) - fm(e_0) = f(1) - f(0) = 0$$

puisque f est un lacet dans X.
Ainsi $fm \in Z_1(X)$ est un 1-cycle et donc $\overline{fm}$ est bien un élément de $H_1(X)$.
Notons $u : I \longrightarrow S^1$ l'application définie par $t \mapsto e^{2\pi i t}$ alors il existe une application continue $\tilde{f} : S^1 \longrightarrow X$ telle que $\tilde{f} \circ u = f$ par la propriété universelle du quotient. Alors l'application $\tilde{f}$ induit un homomorphisme

$$\begin{array}{rccc} H_1(\tilde{f}) : & H_1(S^1) & \longrightarrow & H_1(X) \\ & \overline{\sum_i n_i T_i} & \longmapsto & \overline{\tilde{f}_\#(\sum_i n_i T_i)} = \overline{\sum_i n_i(\tilde{f} \circ T_i)}\,. \end{array}$$

Donc $\overline{fm} = \overline{\tilde{f}um} = \overline{\tilde{f}_\#(um)} \in H_1(X)$.
Soit $[g] = [f] \in \pi_1(X, x_0)$, alors $\tilde{g} \simeq \tilde{f}$ ainsi par le théorème 2.28 on a que $H_1(\tilde{f}) = H_1(\tilde{g})$ et

$$\overline{fm} = \overline{\tilde{f}_\#(um)} = H_1(f)(\overline{um}) = H_1(g)(\overline{um}) = \overline{\tilde{g}_\#(um)} = \overline{gm}$$

Par conséquent, l'application ϕ est bien-définie. □

Lemme 2.33.
L'application d'Hurewicz $\phi : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow H_n(X)$ est un homomorphisme de groupes.

Démonstration. Soit $f, g : \mathbf{I} \longrightarrow X$ deux lacets basés en x_0. On veut montrer que $\phi([f][g]) = \phi([f]) + \phi([g])$.
En utilisant f et g, on peut définir un élément $T_{f,g} : \Delta^2 \longrightarrow X$ de $S_2(X)$ de la façon suivante :

- sur le bord de Δ^2 en posant :
  $$\begin{array}{llll} T_{f,g}: & (1-t, t, 0) & \longmapsto & f(t) \\ T_{f,g}: & (0, 1-t, t) & \longmapsto & g(t) \\ T_{f,g}: & (1-t, 0, t) & \longmapsto & f * g(t) \end{array}$$
- sur l'intérieure de Δ^2 en le posant constant égal à $f(t)$ sur les segments avec extrémités du type $(1-t, t, 0)$ et $((2-t)/2, 0, t/2)$ et en le posant constant égal à $g(t)$ sur les segments avec extrémités du type $(0, 1-t, t)$ et $((1-t)/2, 0, (1+t)/2)$.

Pour voir que l'application $T_{f,g}$ est bien-définie, on remarque que les seuls points dont l'image est définies de deux façons différentes sont les points du segment d'extrémités $(0, 1, 0)$ et $(1, 0, \frac{1}{2})$. Mais ces images sont égales puisque d'une part $T_{f,g}(0, 1, 0) = f(1) = x_0$ et d'autre part $T_{f,g}(0, 1, 0) = g(0) = x_0$, donc $T_{f,g}$ est bien-définie.
En outre, il s'agit clairement d'une application continue puisque f et g le sont. Par conséquent $T_{f,g}$ est bien un élément de $S_2(X)$.
Alors,

$$\partial_2(T_{f,g}) = T_{f,g}F_0^2 - T_{f,g}F_1^2 + T_{f,g}F_2^2 .$$

En appliquant à $(1-t, t)$, il vient :

$$\begin{aligned} \partial_2(T_{f,g})(1-t, t) &= T_{f,g}F_0^2(1-t, t) - T_{f,g}F_1^2(1-t, t) + T_{f,g}F_2^2(1-t, t) \\ &= T_{f,g}(0, 1-t, t) - T_{f,g}(1-t, 0, t) + T_{f,g}(1-t, t, 0) \\ &= g(t) - f * g(t) + f(t) \\ &= (f + g - f * g)(t) \\ &= (f + g - f * g)m(1-t, t) \end{aligned}$$

Autrement dit, $\partial_2(T_{f,g}) = (f + g - f * g)m$, i.e $(f + g)m = (f * g)m + \underbrace{\partial_2(T_{f,g})}_{\in B_1(X)}$. Par conséquent :

$$\phi([f][g]) = \phi([f * g]) = \overline{(f * g)m} = \overline{(f + g)m} = \overline{fm} + \overline{gm} = \phi([f]) + \phi([g])$$

□

Théorème d'Hurewicz.
Soit X un espace topologique connexe par arcs, alors l'application d'Hurewicz

$$\phi : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow H_1(X)$$

induit un isomorphisme

$$\pi_1(X, x_0)/[\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)] \cong H_1(X)\,.$$

Plus précisément, ϕ est surjective de noyau $[\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)]$, le sous-groupe des commutateurs de $\pi_1(X, x_0)$.

En d'autres termes le premier groupe d'homologie d'un espace topologique connexe par arcs est l'abélianisé du groupe fondamental.

Démonstration.
(I) *Surjectivité de ϕ.* Soit $c = \sum_i m_i T_i$ un 1-cycle dans X ; alors

$$0 = \partial_1(c)(1) = \sum_i m_i(T_i(e_1) - T_i(e_0))\,.$$

L'espace X est connexe par arcs par hypothèse, ainsi il existe un chemin $c_i : I \longrightarrow X$ liant x_o à $T_i(e_1)$ pour tout i et de même il existe un chemin $d_i : I \longrightarrow X$ liant x_o à $T_i(e_0)$ pour tout i. S'il existe i et j tels que $T_i(e_1) = T_j(e_1)$, alors on pose $c_j = c_i$, et s'il existe i et j tels que $T_i(e_0) = T_j(e_0)$, alors on pose $d_j = d_i$. Ainsi, pour tout i, $d_i * T_i m^{-1} * c_i^{-1}$ est un lacet basé en x_0.
D'autre part, l'équation

$$0 = \sum_i m_i(T_i(e_1) - T_i(e_0))$$

dans le groupe abélien libre $S_0(X)$ fournit l'équation

$$0 = \sum_i m_i(d_i m - c_i m)$$

dans le groupe abélien $S_1(X)$ par substitution, puisque $T_i(e_1) = T_j(e_1)$, entraîne $c_i m = c_j m$ et $T_i(e_0) = T_j(e_0)$, entraîne $d_j m = d_i m$. Alors,

$$c = \sum_i m_i T_i = \sum_i m_i T_i + \sum_i m_i(d_i m - c_i m) = \sum_i m_i(d_i m + T_i - c_i m)\,.$$

Par un argument similaire à celui de la preuve du lemme précédent, on montre que pour tout i :

$$\overline{d_i m + T_i - c_i m} = \overline{(d_i + T_i m^{-1} - c_i)m} = \overline{(d_i * T_i m^{-1} * c_i^{-1})m}$$

Il vient,

$$\begin{aligned}\bar{c} &= \overline{\sum_i m_i(d_i + T_i m^{-1} - c_i)m} \\ &= \sum_i m_i \overline{(d_i + T_i m^{-1} - c_i)m} \\ &= \sum_i m_i \overline{(d_i * T_i m^{-1} * c_i^{-1})m} \\ &= \sum_i m_i \phi([d_i * T_i m^{-1} * c_i^{-1}]) \\ &= \phi(\prod_i [d_i * T_i m^{-1} * c_i^{-1}]^{m-i})\end{aligned}$$

Ainsi, puisque toute classe de 1-cycle à une pré-image par ϕ, il s'agit d'une application surjective

(II) *Calcul du noyau de* ϕ. Nous voulons montrer que $\ker(\phi) = [\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)]$. Alors il découle du premier théorème d'isomorphie que

$$\pi_1(X, x_0)/[\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)] \cong H_1(X)\,.$$

"$\supseteq$". Puisque $H_1(X)$ est abélien par définition, nécessairement $[\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)] \subseteq \ker(\phi)$.

"$\supseteq$". Soit $f : I \longrightarrow X$ un lacet dans X tel que $[f] \in \ker(\phi)$. Alors $fm \in B_1(X)$, donc on peut écrire $fm = \partial_2(\sum_i r_i T_i)$ où $r_i \in \mathbb{Z}$ pour tout i et $T_i : \Delta^2 \longrightarrow X$ est un 2-simplexe pour tout i. Autrement dit :

$$fm = \partial_2(\sum_i r_i T_i) = \sum_i r_i(T_i F_0^2 - T_i F_1^2 + T_i F_2^2)$$

Comme fm est un élément de la base de $S_1(X)$, $fm = T_p F_q^2$ pour un certain $p = i$ et pour $q \in \{0, 1, 2\}$, on a donc une combinaison linéaire des éléments de la base.

Utilisons maintenant le fait que X est connexe par arcs pour construire des lacets en x_0.

Pour tout i, posons :

- α_i un chemin liant x_0 à $T_i F_0^2(e_0)$;
- β_i un chemin liant x_0 à $T_i F_1^2(e_1)$;
- γ_i un chemin liant x_0 à $T_i F_0^2(e_0)$.

Si $T_i F_0^2(e_0)$, $T_i F_0^2(e_0)$ ou $T_i F_0^2(e_0)$ est égal à x_0, le chemin correspondant est choisit égal au chemin constant en x_0. De plus si $T_i F_0^2(e_0) = T_j F_0^2(e_0)$, on prend $\alpha_j = \alpha_i$ (idem pour les β_i et γ_i). On obtient trois familles de lacets basés en x_0, dont on note les classes d'homotopies dans $\pi_1(X, x_0)$ comme suit :

- $[\alpha_i * T_i F_0^2 m^{-1} * \beta_i^{-1}] := f_{i0}$;
- $[\gamma_i * T_i F_1^2 m^{-1} * \beta_i^{-1}] := f_{i1}$;
- $[\gamma_i * T_i F_2^2 m^{-1} * \alpha_i^{-1}] := f_{i2}$.

Alors,

$$\begin{aligned} f_{i0}f_{i1}^{-1}f_{i2} &= [\alpha_i * T_iF_0^2m^{-1} * \beta_i^{-1} * \beta_i * (T_iF_1^2m^{-1})^{-1} * \gamma_i^{-1} * \gamma_i * T_iF_2^2m^{-1} * \alpha_i^{-1}] \\ &= [\alpha_i * \underbrace{T_iF_0^2m^{-1} * (T_iF_1^2m^{-1})^{-1} * T_iF_2^2m^{-1}}_{trivial} * \alpha_i^{-1}] \\ &= 1\,. \end{aligned}$$

Nous savons aussi que $f_{pq} = [a{*}T_pF_q^2m^{-1}{*}b]$ où a et b représentent α,β,γ ou leurs inverses en accord avec p et q. Or puisque $T_pF_q^2m^{-1} = fmm^{-1} = f$ est un lacet basé en x_0, on a posé ci-dessus que a et b sont les lacets constants en x_0. Par conséquent, $[f] = [T_pF_q^2]$.

D'autre part, comme $T_iF_0^2 = T_jF_0^2$ entraîne que $f_{i0} = f_{j0}$, $T_iF_1^2 = T_jF_1^2$ entraîne que $f_{i1} = f_{j1}$ et $T_iF_2^2 = T_jF_2^2$ entraîne que $f_{i2} = f_{j2}$, on applique à l'équation

$$T_pF_q^2 = fm = \sum_i r_i(T_iF_0^2 - T_iF_1^2 + T_iF_2^2)$$

du groupe abélien libre $S_1(X)$ une substitution dans le groupe abélien $\pi_1(X,x_0)/[\pi_1(X,x_0),\pi_1(X,x_0)]$, on obtient l'équation

$$\overline{f_{pq}} = \overline{\sum_i r_i(f_{i0}f_{i1}f_{i2})} = \overline{\prod_i (f_{i0}f_{i1}f_{i2})^{r_i}} = 1\,.$$

Il suit que $\overline{[f]} = \overline{f_{pq}} = 1$ dans le quotient $\pi_1(X,x_0)/[\pi_1(X,x_0),\pi_1(X,x_0)]$. Par conséquent, $[f]$ est un élément $[\pi_1(X,x_0),\pi_1(X,x_0)]$ et donc $\ker(\phi) \subseteq [\pi_1(X,x_0),\pi_1(X,x_0)]$.

□

Exemple 2.34.
Le groupe fondamental de la 1-sphère S^1 est $\mathbb{Z}$, qui est abélien, le théorème d'Hurewicz entraîne donc que $H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

Corollaire 2.35.
Pour tout espace topologique X simplement connexe on a $H_1(X) = 0$.

Démonstration. Immédiat puisque $\pi_1(X,x_0) = 0$ pour tout $x_0 \in X$ si X est simplement connexe. □

CHAPITRE 3

Suites exactes longues d'homologie

Le présent chapitre est un condensé de résultats d'algèbre homologique concernant les suites exactes longues en homologie, dont nous aurons besoin par la suite. Les démonstrations ne sont pas données, mais peuvent se trouver par exemple dans le travail de Julian ou dans [5] ou [6].

1. Complexes de chaînes

Le complexe de chaînes singulier présenté au chapitre précédent est un cas particulier de la notion de complexe de chaîne définie ci-dessous.

DÉFINITION 3.1.
Un complexe de chaînes S_* est une suite de groupes abéliens et d'homomorphismes :

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+2}} S_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} S_n \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \qquad n \in \mathbb{Z}$$

t.q. $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ (ssi $\ker(\partial_n) \supset \mathrm{Im}(\partial_{n+1})$).
Les homomorphismes ∂_n sont appelés les **différentielles** de degré n et S_n le terme de degré n.
On note le complexe de chaînes (S_*, ∂) ou simplement S_*.

DÉFINITION 3.2.
Pour un complexe (S_*, ∂), on définit $\ker(\partial_n) =: Z_n(S_*, \partial)$ son groupe des n-cycles ; $\mathrm{Im}(\partial_{n+1}) =: B_n(S_*, \partial)$ son groupe des n-bords. Le n-ième groupe d'homologie de ce complexe est alors définit par

$$H_n(S_*, \partial) := Z_n(S_*, \partial)/B_n(S_*, \partial)\,.$$

Un homomorphisme de complexes de chaînes $\phi : (S_*, \partial) \longrightarrow (S'_*, \partial')$ est suite d'homomorphismes $\{\phi_n : S_n \longrightarrow S'_n\}$ telle que $\partial'_n \phi_n = \phi_{n-1}\partial_n$ pour tout.

Si $f : X \longrightarrow Y$ est une application continue, comme nous l'avons vu au chapitre précédent dans le cas particulier du complexe singulier, f induit un homomorphisme de complexes de chaînes $f_\# : S_*(X) \longrightarrow S_*(Y)$. Les complexes et les homomorphismes de complexes forment une catégorie, notée **Comp**, où la composition est définie sur les coordonnées. ($\{g_n\} \circ \{f_n\} = \{g_n \circ f_n\}$).

Alors $S_* :$ **Top** $\longrightarrow$ **Comp** est un foncteur avec $X \mapsto (S_*, \partial)$ et $f \mapsto f_\#$.

Et pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n : **Comp** $\longrightarrow$ **Ab** est un foncteur avec $S_* \mapsto H_n(S_*)$ et $H_n(\phi) : \overline{z_n} \mapsto \overline{\phi_n(z_n)}$ pour tout homomorphisme de complexes de chaînes $\phi : S_* \longrightarrow S'_*$. On écrit souvent f_* au lieu de $H_n(f)$.

2. Suite exactes en homologie

Théorème 3.3 (Triangle exacte).
Si $0 \longrightarrow (S'_*, \partial') \xrightarrow{i} (S_*, \partial) \xrightarrow{p} (S''_*, \partial'') \longrightarrow 0$ *est une suite exacte de complexe de chaînes, alors le triangle suivant est exacte :*

$$\begin{tikzcd} H(S'_*) \arrow[rr, "i_*"] & & H(S_*) \arrow[dl, "p_*"] \\ & H(S''_*) \arrow[ul, "d"] & \end{tikzcd}$$

Ce diagramme se traduisant par la longue suite exacte suivante :

$$\cdots \longrightarrow H_n(S'_*) \xrightarrow{i_*} H_n(S_*) \xrightarrow{p_*} H_n(S''_*) \longrightarrow H_{n-1}(S'_*) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(S_*) \xrightarrow{p_*} H_{n-1}(S'_*i) \longrightarrow \cdots .$$

Pour une paire d'espaces topologiques (X, A), on note $H_n(X, A) := H_n(S_*(X)/S_*(A))$, on a alors la suite exacte suivante de complexes de chaînes :

$$0 \longrightarrow S_*(A) \xrightarrow{i} S_*(X) \xrightarrow{i} S_*(X)/S_*(A) \longrightarrow 0$$

Le théorème a pour conséquence directe le résultat suivant sur les paires d'espaces topologiques :

Corollaire 3.4 (Suite exacte longue d'une paire topologique).
Soit X un espace topologique et A un sous-espace de X, alors on a une suite exacte

$$\cdots \longrightarrow H_n(A) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_n(X, A) \longrightarrow H_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots .$$

Par exemple, il découle directement de ce théorème que $H_q(X, x_0) \cong H_q(X)$ pour tout $q > 0$.

3. Homologie réduite

Définition 3.5.
Soit (S_*, ∂) le complexe singulier d'un espace topologique X. On définit $\widetilde{S}_{-1}(X) \cong \mathbb{Z}$ comme étant le groupe cyclique infini engendré par le symbole [], ainsi que $\widetilde{\partial}_0$: $S_0(X) \longrightarrow \widetilde{S}-1(X)$ par $\sum m_x x \mapsto (\sum m_x)[]$.
Le **complexe singulier augmenté** de X est :

$$\widetilde{S}_*(X) : \quad \cdots \longrightarrow S_n(X) \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\partial_2} S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{\widetilde{\partial}_0} \widetilde{S}_{-1}(X) \longrightarrow 0 .$$

Il est claire que $\widetilde{\partial}_0\partial_1 = 0$, ainsi $\widetilde{S}_*(X)$ est bien un complexe de chaînes.

Définition 3.6.
Les **groupes d'homologie réduite** sont pour tout $n \geq 0$

$$\widetilde{H}_n(\widetilde{S}_*(X), \partial)\,.$$

Proposition 3.7.
Si (X, A) est une paire d'espaces topologiques, alors on a une suite exacte longue pour l'homologie réduite :

$$\cdots \longrightarrow \widetilde{H}_n(A) \longrightarrow \widetilde{H}_n(X) \longrightarrow H_n(X, A) \longrightarrow \widetilde{H}_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

qui se termine en

$$\cdots \longrightarrow \widetilde{H}_0(A) \longrightarrow \widetilde{H}_0(X) \longrightarrow H_0(X, A) \longrightarrow 0$$

4. Mayer-Vietoris

Si X est un espace topologique et X_1, X_2 deux sous-espaces tels que $X = X_1^\circ \cup X_2^\circ$, alors le théorème de Mayer-Vietoris nous donne une relation entre l'homologie de l'espace X et l'homologie de ses sous-espaces X_1 et X_2.

Théorème de Mayer-Vietoris 3.8.
Soit X un espace topologique et X_1, X_2 deux sous-espaces tels que $X = X_1^\circ \cup X_2^\circ$. Alors on a une suite exacte longue

$$\cdots \longrightarrow H_n(X_1 \cap X_2) \longrightarrow H_n(X_1) \oplus H_n(X_2) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_{n-1}(X_1 \cap X_2) \longrightarrow \cdots\,.$$

Il exsite aussi une version de ce théorème pour l'homologie réduite.

Corollaire.(Mayer-Vietoris pour l'homologie réduite). 3.9.
Soit X un espace topologique et X_1, X_2 deux sous-espaces tels que $X = X_1^\circ \cup X_2^\circ$ et $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$. Alors on a une suite exacte longue

$$\cdots \longrightarrow \widetilde{H}_n(X_1 \cap X_2) \longrightarrow \widetilde{H}_n(X_1) \oplus \widetilde{H}_n(X_2) \longrightarrow \widetilde{H}_n(X) \longrightarrow \widetilde{H}_{n-1}(X_1 \cap X_2) \longrightarrow \cdots$$

qui se termine en

$$\cdots \longrightarrow \widetilde{H}_0(X_1) \oplus \widetilde{H}_0(X_2) \longrightarrow \widetilde{H}_0(X) \longrightarrow 0\,.$$

CHAPITRE 4

Algèbres, Coalgèbres et Algèbres de Hopf

Dans ce chapitre nous considérons $\mathbb{K}$ un anneau commutatif fixé. Sauf mention explicite, le produit tensoriel sera pris sur $\mathbb{K}$ et sera noté $\otimes$ au lieu de $\otimes_{\mathbb{K}}$.

1. Modules gradués

Nous commençons par introduire la notion de graduation pour un module, qui est à la base de la construction d'algèbre, coalgèbre et algèbre de Hopf.

Définition 4.1.

(1) Un **$\mathbb{K}$-module gradué** M est une famille de $\mathbb{K}$-modules $\{M_n\}$ indexée sur $\mathbb{N}$.
Le module M_n est appelé le **terme homogène de degré** n et un élément $m \in M_n$ un élément homogène de degré n.

(2) Si M et N sont des $\mathbb{K}$-modules gradués, alors un **morphisme** de $\mathbb{K}$-modules gradués $f : M \longrightarrow N$ est une famille $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de morphismes telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : M_n \longrightarrow N_n$ est un morphisme de $\mathbb{K}$-modules.
Le morphisme f est dit surjectif (respectivement injectif) si pour tout $n \in \mathbb{N}$ f_n est surjectif (respectivement injectif).

(3) Le **produit tensoriel** de M et N est le $\mathbb{K}$-module gradué $M \otimes N$ dont on définit le terme homogène de degré n comme suit :

$$(M \otimes N)_n := \bigoplus_{i+j=n} M_i \otimes N_j$$

Similairement, on définit la **somme directe** $M \oplus N$ de M et N en posant :

$$(M \oplus N)_n := M_n \oplus N_n$$

(4) Si $f : M \longrightarrow M'$ et $g : N \longrightarrow N'$ sont deux morphismes de $\mathbb{K}$-modules gradués alors le **morphisme produit tensoriel** est définit par :

$$(f \otimes g)_n := \bigoplus_{i+j=n} f_i \otimes g_j$$

Nous considérerons parfois l'anneau commutatif $\mathbb{K}$ comme un $\mathbb{K}$-module gradué en posant $\mathbb{K}_0 = \mathbb{K}$ et $\mathbb{K}_n = 0$, le module nul, pour tout $n > 0$. Alors d'après la définition ci-dessus du produit tensoriel, on a que $\mathbb{K} \otimes A \cong A \cong A \otimes \mathbb{K}$ pour tout $\mathbb{K}$-module gradué A.

2. Algèbres

La notion d'algèbre est présentée ici non pas en termes d'ensembles, d'éléments et de lois, mais de façon catégorique en termes d'objets et de morphismes.

Définition 4.2.
Une **$\mathbb{K}$-algèbre**, ou **algèbre sur** $\mathbb{K}$ est un triple (A, M, u) où A est un $\mathbb{K}$-module gradué, $M : A \otimes A \longrightarrow A$ et $u : \mathbb{K} \longrightarrow A$ sont des morphismes de $\mathbb{K}$-modules gradués satisfaisant les deux conditions suivantes.

(1) Le morphisme $M : A \otimes A \longrightarrow A$, appelé **multiplication** de l'algèbre A, fait commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "1\otimes M"] \arrow[d, "M\otimes 1"'] & A \otimes A \arrow[d, "M"] \\ A \otimes A \arrow[r, "M"'] & A \end{tikzcd}$$

(2) Le morphisme $u : \mathbb{K} \longrightarrow A$, appelé **unité** de l'algèbre A, fait commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K} \otimes A \arrow[r, "u\otimes 1"] \arrow[dr, "\cong"'] & A \otimes A \arrow[d, "M"] & A \otimes \mathbb{K} \arrow[l, "1\otimes u"'] \arrow[dl, "\cong"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Les flèches sans nom représentant l'isomorphisme canonique entre A et $A \otimes \mathbb{K}$ ou $\mathbb{K} \otimes A$ et la notation 1 l'application identité.

Définition 4.3.
Une $\mathbb{K}$-algèbre (A, M, u) est dite **commutative** si le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "M"'] & & A \otimes A \arrow[dl, "M"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

commute.
Où T est le **morphisme twist** défini sur les générateurs du produit tensoriel $A \otimes B$ de deux $\mathbb{K}$-modules gradués comme suit

$$\begin{array}{rccl} T_n : & (A \otimes B)_n & \longrightarrow & (B \otimes A)_n \\ & a \otimes b & \longmapsto & T_n(a \otimes b) := (-1)^{pq} b \otimes a \end{array}$$

pour $a \in A_p$,$b \in B_q$ avec $p + q = n$.
Cette proriété se traduit en termes d'éléments par $ab = (-1)^{pq}ba$ pour tous $a, b \in A$ avec $a \in A_p$ et $b \in A_q$.

Exemples 4.4.

(1) Il convient de vérifier que la structure d'algèbre définie ci-dessus correspond à la définition classique de $\mathbb{K}$-algèbre en tant qu'ensemble muni des structures de $\mathbb{K}$-espace vectoriel et d'anneau et satisfaisant l'axiome $k(ab) = (ka)b = a(kb)$ pour tout $k \in \mathbb{K}$, a, b dans l'algèbre.
D'une part si une algèbre A est donnée par la définition 4.2, alors on pose pour tout $a, b \in A$, $a \cdot b := M(a \otimes b)$ et $1_A := u(1_{\mathbb{K}})$, alors par exemple,
$$1_A \cdot a = M(u(1_{\mathbb{K}}) \otimes a) = M \circ (u \otimes 1)(1 \otimes a) = a$$
par commutativité du second diagramme de la définition 4.2. Les autres axiomes découlent tout aussi facilement.
D'autre part, si A est donnée par sa définition standard, alors il suffit de poser $M(a \otimes b) := a \cdot b$ et $u(1_{\mathbb{K}}) := 1_A$. Ces deux morphismes satisfont alors les diagrammes de 4.2.

(2) Soit $\mathbb{F}$ un corps. Alors $\mathbb{F}[X, Y]$ est une $\mathbb{F}$-algèbre graduée commutative car on peut la décomposer comme
$$\{\mathbb{F}[X, Y]\}_{2n} = \{\text{polynômes sur } \mathbb{F} \text{ homogènes en X, Y de degré } n\}\,.$$
La multiplication est donnée par la multiplication standard des polynômes et le morphisme unité par l'injection canonique de $\mathbb{F}$ dans $\{\mathbb{F}[X]\}_0$.

(3) Le $\mathbb{K}$-module $\mathbb{K}$ vu comme un $\mathbb{K}$-module gradué est une $\mathbb{K}$-algèbre graduée, où la multiplication est la multiplication usuelle de $\mathbb{K}$ et le morphisme unité est l'inclusion $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}_0 = \mathbb{K}$.

(4) Si A une $\mathbb{K}$-algèbre libre sur $\mathbb{K}$ engendrée par un système de générateurs $(x_i)_{i \in I}$, notons alors M_h le module engendré par les mots de longueur h $x_{i_1} \cdots x_{i_h}$. La multiplication est la concaténation des mots et le morphisme unité est l'extension par linéarité de l'application qui envoie $1_{\mathbb{K}}$ sur le mot vide.

(5) Si A et B sont des $\mathbb{K}$-algèbres, alors le produit tensoriel $A \otimes B$ admet aussi une structure de $\mathbb{K}$-algèbre pour la multiplication $M_{A \otimes B}$ définie par la composition
$$M_{A \otimes B} := (1 \otimes T \otimes 1) \circ (M_A \otimes M_B)$$
(cf. chapitre 1 section 6 pour les détails) et pour le morphisme unité
$$u_{A \otimes B} : \mathbb{K} \xrightarrow{\cong} \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \xrightarrow{u_A \otimes u_B} A \otimes B\,.$$

Définition 4.5.
Soit (A, M_A, u_A) et (B, M_B, u_B) deux $\mathbb{K}$-algèbres. Une application $f : A \longrightarrow B$ est appelé un **morphisme** de $\mathbb{K}$-algèbres si f est un morphisme de $\mathbb{K}$-modules gradués faisant commuter les deux diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd} A\otimes A \arrow[r, "f\otimes f"] \arrow[d, "M_A"'] & B\otimes B \arrow[d, "M_B"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] & & B \\ & \mathbb{K} \arrow[ul, "u_A"] \arrow[ur, "u_B"'] & \end{tikzcd}$$

Remarquons qu'en notation multiplicative, la commutativité des deux diagrammes ci-dessus se traduit par les égalité suivantes :

$$f(a\cdot a') = f(a)\cdot f(a') \qquad \text{et} \qquad f(1_A) = 1_B \qquad \forall\, a, a' \in A\, \forall\, b \in B\,.$$

Remarque 4.6.
On montre facilement qu'une algèbre (A, M, u) est commutative si et seulement si $M : A\otimes A \longrightarrow A$ est un morphisme d'algèbres.
En effet, supposons A commutative alors $M = MT$. Alors :

$$\begin{aligned} M\circ(M_{A\otimes A}) &= \underbrace{M\circ[(M\otimes M)}\circ(1\otimes T\otimes 1)] \\ &= [M\circ(M\otimes 1)\circ \underbrace{(1\otimes M\otimes 1)]\circ(1\otimes T\otimes 1)} \\ &= M\circ(M\otimes 1)\circ(1\otimes \underbrace{MT}_{M} \otimes 1) \\ &= \underbrace{M\circ(M\otimes 1)\circ(1\otimes M\otimes 1)} \\ &= M\circ(M\otimes M) \end{aligned}$$

Ainsi on a le diagramme commutatif souhaité :

$$\begin{tikzcd} A\otimes A\otimes A\otimes A \arrow[r, "M_{A\otimes A}"] \arrow[d, "M\otimes M"'] & A\otimes A \arrow[d, "M"] \\ A\otimes A \arrow[r, "M"] & A \end{tikzcd}$$

La commutativité du deuxième diagramme est banale.
Reciproquement, dire que le premier diagramme de la définition 4.5, c'est dire que $abcd = (-1)^{pq}acbd$ pour tous $a, b, c, d \in A$ avec $b \in A_p$ et $c \in A_q$, alors pour $a = b = 1_A$, on obtient $bc = (-1)^{pq}cb$ pour tous $b, c \in A$ avec $b \in A_p$ et $c \in A_q$. Donc A est commutative.

Définition 4.7.
Une **augmentation** d'une $\mathbb{K}$-algèbre (A, M, u) est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbre graduée $\varepsilon : A \longrightarrow \mathbb{K}$.

Notons que par commuativité du second diagramme de la définition de morphisme d'algèbre on obtient que $\varepsilon u = \mathrm{id}_{\mathbb{K}}$.

3. Coalgèbres

Etant donné sa nature catégorique, la notion d'algèbre peut être dualisée, on obtient ainsi la notion de coalgèbre. Cette section est légèrement ennuyante dans le sens où elle ne fait que présenter les définitions de bases ; il s'agit de ce fait d'une copie de la précédente modulo inversion des flèches[1].

Définition 4.8.
Une $\mathbb{K}$**-coalgèbre**, ou **coalgèbre sur** $\mathbb{K}$ est un triple (C, Δ, ε) où C est un $\mathbb{K}$-module gradué, $\Delta : C \longrightarrow C \otimes C$ et $\varepsilon : C \longrightarrow \mathbb{K}$ sont des morphismes de $\mathbb{K}$-modules gradués satisfaisant les deux conditions suivantes.

(1) Le morphisme $\Delta : C \longrightarrow C \otimes C$, appelé **comultiplication** de la coalgèbre C, fait commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "1\otimes\Delta"] \\ C \otimes C \arrow[r, "\Delta\otimes 1"'] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd}$$

(2) Le morphisme $u : \mathbb{K} \longrightarrow C$, appelé **counité** de la coalgèbre C, fait commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K} \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "\varepsilon\otimes 1"'] \arrow[r, "1\otimes\varepsilon"] & C \otimes \mathbb{K} \\ & C \arrow[ul, "\cong"] \arrow[u, "\Delta"] \arrow[ur, "\cong"'] & \end{tikzcd}$$

La commutativité du premier diagramme est appelée **coassociativité**.

Définition 4.9.
Une $\mathbb{K}$-coalgèbre (C, Δ, ε) est dite **commutative** si le diagramme

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\Delta"'] \arrow[dr, "\Delta"] & \\ C \otimes C \arrow[rr, "T"] & & C \otimes C \end{tikzcd}$$

commute.
Où T est le morphisme twist défini précédemment.

[1]Notons que n'ayant pas de co-auteur pour ce travail, l'auteur s'est vu contraint d'inverser les flèches lui-même.

Exemples 4.10.

(1) On munit très facilement l'anneau commutatif $\mathbb{K}$ d'une structure de coalgèbre en prenant pour comultiplication $\Delta : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} \otimes \mathbb{K}$ l'somorphisme canonique ($\Delta(k) = k \otimes 1$) et pour counité $\varepsilon := 1 : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ le morphisme identité.

(2) Si $\mathbb{F}$ est un corps, on peut munir tout $\mathbb{F}$-espace vectoriel d'une structure de coalgèbre. Plus précisément, si S est un ensemble (non-vide), alors $\mathbb{F}S$ (le $\mathbb{F}$-espace vectoriel de base S) est une coalgèbre avec la comultiplication Δ définie par $\Delta(s) := s \otimes s$ et la counité ε définie par $\varepsilon(s) := 1_{\mathbb{K}}$ pour tout $s \in S$. La commutativité des deux diagrammes de la définition 4.8 est banale pour les éléments de la base S, on étend alors par linéarité.

(3) Si C et D sont deux coalgèbres sur $\mathbb{K}$, alors leur produit tensoriel $C \otimes D$ est une coalgèbre avec comultiplication définie par la composition

$$C \otimes D \xrightarrow{\Delta_C \otimes \Delta_D} C \otimes C \otimes D \otimes D \xrightarrow{1 \otimes T \otimes 1} C \otimes D \otimes C \otimes D$$

et avec counité définie par

$$C \otimes D \xrightarrow{\varepsilon_C \otimes \varepsilon_D} \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}\,.$$

Définition 4.11.
Soit $(C, \Delta_C, \varepsilon)$ et $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ deux $\mathbb{K}$-coalgèbres. Une application $f : C \longrightarrow D$ est appelé un **morphisme** de $\mathbb{K}$-coalgèbres si f est un morphisme de $\mathbb{K}$-modules gradués faisant commuter les deux diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "f \otimes f"] & D \otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varepsilon_C"'] & & D \arrow[dl, "\varepsilon_D"] \\ & \mathbb{K} & \end{tikzcd}$$

Définition 4.12.
Une **augmentation** d'une $\mathbb{K}$-coalgèbre (C, Δ, ε) est un morphisme de $\mathbb{K}$-coalgèbres graduées $u : \mathbb{K} \longrightarrow C$.

Notons que par commuativité du second diagramme de la définition de morphisme d'algèbre on obtient que $\varepsilon u = \mathrm{id}_{\mathbb{K}}$.

4. Algèbres de Hopf

Maintenant que nous avons introduit les structures d'algèbre et de coalgèbre, nous nous demandons dans quelles situations ces deux structures peuvent premièrement coexister sur un ensemble donné et deuxièmement être compatibles.

Remarque 4.13.
D'après les exemples 4.4 (1) et 4.10 (3), tout espace vectoriel peut être muni à la fois d'une structure d'algèbre et de coalgèbre, respectivement, de façon canonique. Il n'est donc pas absurde de vouloir introduire sur un ensemble une nouvelle structure englobant ces deux structres déjà existantes, il s'agira de la structure d'algèbre de Hopf, parfois aussi appelée bialgèbre.
Le théorème ci-dessous nous permet de lier les concepts d'algèbres et de coalgèbres.

Théorème 4.14.
Soit A un $\mathbb{K}$-module gradué. Munissons A d'une structure d'algèbre (A, M, u) et d'une structure de coalgèbre (A, Δ, ε). Alors les assertions suivantes sont équivalentes :
(1) les applications δ et ε sont des morphismes d'algèbres ;
(2) les applications M et u sont des morphismes de coalgèbres.

Démonstration. Le morphisme M est un morphisme de coalgèbres si et seulement si les deux diagrammes suivants commutes :

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[rr, "M"] \arrow[d, "\Delta\otimes\Delta"'] & & A \arrow[dd, "\Delta"] \\
A \otimes A \otimes A \otimes A \arrow[d, "1\otimes T\otimes 1"'] & & \\
A \otimes A \otimes A \otimes A \arrow[rr, "M\otimes M"'] & & A \otimes A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "M"] \arrow[d, "\varepsilon\otimes\varepsilon"'] & A \arrow[ddl, "\varepsilon"] \\
\mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \arrow[d, "\cong"'] & \\
\mathbb{K} &
\end{tikzcd}$$

De même, le morphisme u est un morphisme de coalgèbres si et seulement si les deux diagrammes suvants commutes :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\cong"'] & A \arrow[d, "\Delta"] \\
\mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \arrow[r, "u\otimes u"'] & A \otimes A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{K} \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "1"'] & & A \arrow[dl, "\varepsilon"] \\
& \mathbb{K} &
\end{tikzcd}$$

Or le morphisme Δ est un morphisme d'algèbres si et seulement si le premier et le troisième diagrammes commutent. Similairement, ε est un morphisme d'algèbres si et seulement si le deuxième et le quatrième diagrammes commutent. D'où l'équivalence des assertions. □

Définition 4.15.
Une **algèbre de Hopf** sur $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-module gradué A muni de morphismes de $\mathbb{K}$-modules gradués

$$M : A \otimes A \longrightarrow A \qquad u : \mathbb{K} \longrightarrow A$$
$$\Delta : A \longrightarrow A \otimes A \qquad \varepsilon : A \longrightarrow \mathbb{K}$$

tels que
(1) (A, M, u) est une algèbre sur $\mathbb{K}$ avec augmentation ε ;
(2) (A, Δ, ε) est une coalgèbre sur $\mathbb{K}$ avec augmentation u ;
(3) M est un morphisme de coalgèbres.

En vertu du théorème ci-dessus, la condition (3) est équivalente à exiger que Δ soit un morphisme d'algèbres qui est équivalente à exiger la commutativité du premier diagramme de la preuve.

Exemple 4.16 (Algèbre Tensorielle).
Soit M un $\mathbb{K}$-module. L'algèbre tensorielle $T(M)$ sur M est définie par la propriété universelle suivante.

Ainsi pour être totalement formel, une **algèbre tensorielle sur** M est un couple (T, i) où T est une $\mathbb{K}$-algèbre et $i : M \longrightarrow T$ est un morphisme de $\mathbb{K}$-modules satisfaisant la propriété que pour toute $\mathbb{K}$-algèbre A et pour tout application $\mathbb{K}$-linéaire $f : M \longrightarrow A$, il existe un unique morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres $\overline{f} : T \longrightarrow A$ tel que $\overline{f}i = f$. En d'autres termes, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A \\ T \arrow[ur, "\exists!\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Lemme 4.17.
L'algèbre tensorielle définie par la propriété universelle ci-dessus est unique à isomorphisme près.

Démonstration. La preuve de cette unicité se fait en utilisant la propriété universelle avec les mêmes arguments que dans la preuve de l'unicité du produit tensoriel donnée au chapitre premier. $\square$

La construction de l'algèbre tensorielle sur M se fait comme suit. On pose d'abord :

$$\begin{aligned} T_0(M) &:= \mathbb{K} \\ T_1(M) &:= M \\ T_2(M) &:= M \otimes M \\ &\ldots \\ T_n(M) &:= \underbrace{M \otimes M \otimes \ldots \otimes M}_{\text{n fois}} \\ &\ldots \end{aligned}$$

On pose ensuite :

$$T(M) := \mathbb{K} \oplus M \oplus (M \otimes M) \oplus \cdots \oplus (M \otimes M \otimes \ldots \otimes M) \oplus \cdots = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} T_k(M)$$

On a alors déjà un $\mathbb{K}$-module gradué.
On définit maintenant une multiplication M sur $T(M)$ comme suit : pour $x = m_1 \otimes m_2 \otimes \ldots \otimes m_p \in T_p(M)$ et $y = l_1 \otimes l_2 \otimes \ldots \otimes l_q \in T_q(M)$ on pose

$$M(x \otimes y) := m_1 \otimes m_2 \otimes \ldots \otimes m_p \otimes l_1 \otimes l_2 \otimes \ldots \otimes l_q \in T_{(p+q)}(M).$$

L'extension par linéarité de cette application nous donne la multiplication pour deux éléments quelconques de $T(M)$. Cette multiplication est clairement associative. L'unité est l'inclusion canonique $u : \mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{K} = T_0(M) \subset T(M)$. Elle satisfait clairement le second diagramme de la définition 4.2. .
En outre, on pose $i : M \longrightarrow T(M)$ comme étant l'inclusion canonique de M dans $T(M)$ donnée par $m \mapsto i(m) := m \in T_1(M)$ pour tout $m \in M$. Alors le couple $(T(M), i)$ est une algèbre tensorielle.

Pour définir une structure de coalgèbre sur $T(M)$, on considère l'application linéaire

$$\begin{array}{rccc} f : & M & \longrightarrow & T(M) \otimes T(M) \\ & m & \mapsto & m \otimes\otimes 1 + 1 \otimes\otimes m \end{array}$$

où la notation $\otimes\otimes$ est utilisée uniquement pour ne pas confondre avec les produits tensoriels internes de $T(M)$.
Alors la propriété universelle de l'algèbre tensorielle nous donne l'existence d'un unique morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres

$$\Delta : T(M) \longrightarrow T(M) \otimes T(M)$$

tel que $\Delta i = f$ que nous prendrons pour comultiplication. Il faut montrer que Δ est coassociatif, i.e. que $(\Delta \otimes 1)\Delta = (1 \otimes \Delta)\Delta$. Puisque $(\Delta \otimes 1)\Delta$ et $(1 \otimes \Delta)\Delta$ sont des morphismes d'algèbres, il suffit de montrer que l'inégalité est vérifiée sur un sytème de générateurs de $T(M)$, en l'occurence, on utilise $i(M)$. Soit $m \in M$, alors

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes 1)\Delta(m) &= (\Delta \otimes 1)(m \otimes\otimes 1 + 1 \otimes\otimes m) \\ &= m \otimes\otimes 1 \otimes\otimes 1 + 1 \otimes\otimes m \otimes\otimes 1 + 1 \otimes\otimes 1 \otimes\otimes m \\ &= (1 \otimes \Delta)(m \otimes\otimes 1 + 1 \otimes\otimes m) \\ &= (1 \otimes \Delta)\Delta(m)\,. \end{aligned}$$

D'où la coassociativité de Δ.
Pour définir la counité, on procède de façon similaire en considérant l'application $\mathbb{K}$-linéaire nulle $0 : M \longrightarrow \mathbb{K}$. La propriété universelle de l'algèbre tensorielle nous fournit alors l'existence d'un unique morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres $\varepsilon : T(M) \longrightarrow \mathbb{K}$ tel que $\varepsilon i = 0$, i.e. $\varepsilon(m) = 0$ pour tout $m \in M$. On vérifie alors que $(\varepsilon \otimes 1)\Delta$ correspond à l'isomorphisme canonique de $T(M)$ avec $\mathbb{K} \otimes T(M)$. Soit $m \in M$ alors

$$(\varepsilon \otimes 1)\Delta(m) = \varepsilon(m) \otimes 1 + \varepsilon(1) \otimes = 1 \otimes m$$

qui est la valeur souhaitée.On procède de même pour montrer que $(1 \otimes \varepsilon)\Delta$ correspond à l'isomorphisme canonique de $T(M)$ avec $T(M) \otimes \mathbb{K}$.

Par conséquent, nous avons sur $T(M)$ une structure d'algèbre par $(T(M), M, u)$ avec augmentation ε (puisque c'est un morphisme d'algèbres), une structure de coalgèbre par $(T(M), \Delta, \varepsilon)$ avec augmentation ε (c'est un morphisme de coalgèbres par le théorème) et δ est un morphisme d'algèbre. Finalement, $T(M)$ est munie d'une structure d'algèbre de Hopf.

5. Algèbre de Hopf de l'homologie d'un H-espace

Le but de cette section est de montrer comment on peut munir l'homologie d'un H-espace associatif d'une structure d'algèbre de Hopf.

Remarque 4.18.
Si M est un module sur l'anneau commutatif $\mathbb{K}$ et

$$\cdots \longrightarrow S_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} S_n(X) \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

le complexe de chaînes singulier du chapitre 2, par exactitude à droite du foncteur $M \otimes_{\mathbb{Z}} -$ la suite suivante est un complexe de chaîne dont les termes sont des modules sur $\mathbb{K}$:

$$\cdots \longrightarrow M \otimes S_{n+1}(X) \xrightarrow{M\otimes\partial_{n+1}} M \otimes S_n(X) \xrightarrow{M\otimes\partial_n} M \otimes S_{n-1}(X) \xrightarrow{M\otimes\partial_{n-1}} \cdots .$$

On note ce nouveau complexe $M \otimes S_*(X)$, on obtient alors non plus des groupes abéliens en homologie, mais des modules sur $\mathbb{K}$ et l'on note

$$H_n(X; M) := H_n(M \otimes S_*(X))$$

ainsi que

$$H_*(X; M) := \{H_n(X; M)\}_{n\in\mathbb{N}}$$

le $\mathbb{K}$-module gradué de l'homologie sur M de l'espace X.

Plaçons nous désormais dans les hypothèses du théorème de Bott-samelson qui est présenté au chapitre suivant et supposons que X est un espace topologique connexe par arcs et que $\mathbb{K}$ est un anneau principal tel que $H_*(X; \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-module gradué sans torsion.

Structure de coalgèbre sur l'homologie.
Considérons l'application continue diagonale $\Delta : X \longrightarrow X \times X$ définie par $\Delta(x) = (x, x)$ pour tout $x \in X$. Alors puisque $H_*(X, \mathbb{K})$ est supposé sans torsion, il découle du théorème de Künneth que

$$H_*(X \times X; \mathbb{K}) \cong H_*(X; \mathbb{K}) \otimes H_*(X; \mathbb{K}) .$$

(Pour la construction de cet isomorphisme se référer par exemple au livre de Spanier [8].)
La diagonale induit alors une application de $\mathbb{K}$-modules

$$\Delta_{H_*} : H_*(X; \mathbb{K}) \xrightarrow{\Delta_{H_*}} H_*(X \times X; \mathbb{K}) \xrightarrow{\cong} H_*(X; \mathbb{K}) \otimes H_*(X; \mathbb{K}) .$$

Dans la catégorie des espaces topologiques pointés, nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & X \times X \arrow[d, "\Delta\times 1"] \\ X \times X \arrow[r, "1\times\Delta"'] & X \times X \times X \end{tikzcd}$$

Ainsi on obtient comme conséquence de la naturalité du foncteur d'homologie $H_*(-;\mathbb{K})$ la commuativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} H_*(X;\mathbb{K}) \arrow[r, "\Delta_{H_*}"] \arrow[d, "\Delta_{H_*}"'] & H_*(X;\mathbb{K}) \otimes H_*(X;\mathbb{K}) \arrow[d, "\Delta_{H_*}\times 1"] \\ H_*(X;\mathbb{K}) \otimes H_*(X;\mathbb{K}) \arrow[r, "1\times\Delta_{H_*}"'] & H_*(X;\mathbb{K}) \otimes H_*(X;\mathbb{K}) \otimes H_*(X;\mathbb{K}) \end{tikzcd}$$

De ce fait $\Delta_{H_*} : H_*(X;\mathbb{K}) \longrightarrow H_*(X;\mathbb{K}) \otimes H_*(X;\mathbb{K})$ est une application coassociative.

Nous avons vu au chapitre 2 que $H_*(\{*\}) \cong \mathbb{Z}$. Après application du foncteur $\mathbb{K} \otimes -$ sur le complexe singulier comme décrit ci-dessus, cet isomorphisme devient :

$$H_*(\{*\}, \mathbb{K}) \cong \mathbb{K}\,.$$

Alors si $\varepsilon : X \longrightarrow \{*\}$ est l'application pointée constante, elle induit en homologie l'application

$$\varepsilon_* : H_*(X;\mathbb{K}) \longrightarrow H_*(\{*\}, \mathbb{K})$$

qui induit le morphisme de $\mathbb{K}$-modules

$$\varepsilon'_* : H_*(X;\mathbb{K}) \longrightarrow H_*(\{*\}, \mathbb{K}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}\,.$$

Alors le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K} \otimes H_*(X;\mathbb{K}) & H_*(X;\mathbb{K}) \otimes H_*(X;\mathbb{K}) \arrow[l, "\varepsilon'_*\otimes 1"'] \arrow[r, "1\otimes\varepsilon'_*"] & H_*(X;\mathbb{K}) \otimes \mathbb{K} \\ & H_*(X;\mathbb{K}) \arrow[ul, "\cong"] \arrow[u, "\Delta_{H_*}"'] \arrow[ur, "\cong"'] & \end{tikzcd}$$

On conclut que Δ_{H_*} est une comultiplication sur $H_*(X;\mathbb{K})$ et ε'_* une counité sur $H_*(X;\mathbb{K})$. Par conséquent $(H_*(X;\mathbb{K}), \Delta_{H_*}, \varepsilon'_*)$ est une $\mathbb{K}$-coalgèbre.

Structure d'algèbre sur l'homologie d'un H-espace.

Supposons maintenant de plus que X est un H-espace associatif. Alors il existe une application continue pointée $\mu : X \times X \longrightarrow X$ telle que les deux diagrammes suivants commutent à homotopie près :

$$\begin{tikzcd}
X \times X \times X \arrow[r, "\mu\times 1"] \arrow[d, "1\times\mu"'] & X \times X \arrow[d, "\mu"] \\
X \times X \arrow[r, "\mu"] & X
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X \times X \arrow[r, "\mu"] & X \\
X \vee X \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "\triangledown"'] &
\end{tikzcd}$$

où $\triangledown : X \vee X \longrightarrow X$ est le pliage et $i : X \vee X \longrightarrow X \times X$ l'inclusion canonique du wedge dans le produit cartésien. L'application μ induit l'application de $\mathbb{K}$-module gradué

$$\mu_{H_*} : H_*(X;\mathbb{K}) \otimes H_*(X;\mathbb{K}) \xrightarrow{\cong} H_*(X \times X;\mathbb{K}) \xrightarrow{\mu_*} H_*(X;\mathbb{K})\,.$$

A l'aide du premier diagramme on obtient la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
H_*(X;\mathbb{K}) \otimes H_*(X;\mathbb{K}) \otimes H_*(X;\mathbb{K}) \arrow[r, "\mu_{H_*}\times 1"] \arrow[d, "1\times\mu_{H_*}"'] & H_*(X;\mathbb{K}) \otimes H_*(X;\mathbb{K}) \arrow[d, "\mu_{H_*}"] \\
H_*(X;\mathbb{K}) \otimes H_*(X;\mathbb{K}) \arrow[r, "\mu_{H_*}"] & H_*(X;\mathbb{K})
\end{tikzcd}$$

En outre, considérons l'application $\eta : \{*\} \longrightarrow X$ qui induit en homologie un morphisme de $\mathbb{K}$-modules

$$\eta'_* : \mathbb{K} \xrightarrow{\cong} H_*(\{*\};\mathbb{K}) \xrightarrow{\eta_*} H_*(X;\mathbb{K})\,.$$

et le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K} \otimes H_*(X;\mathbb{K}) \arrow[r, "1\otimes\eta'_*"] \arrow[dr, "\cong"'] & H_*(X;\mathbb{K}) \otimes H_*(X;\mathbb{K}) \arrow[d, "\mu_{H_*}"] & H_*(X;\mathbb{K}) \otimes \mathbb{K} \arrow[l, "\eta'_*\otimes 1"'] \arrow[dl, "\cong"] \\
& H_*(X;\mathbb{K}) &
\end{tikzcd}$$

On conclut que μ_{H_*} est une multiplication associative sur $H_*(X;\mathbb{K})$ et ε'_* une unité sur $H_*(X;\mathbb{K})$. Par conséquent $(H_*(X;\mathbb{K}), \mu_{H_*}, \eta'_*)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

Structure d'algèbre de Hopf sur l'homologie d'un H-espace.

Afin d'obtenir une structure d'algèbre de Hopf $H_*(X;\mathbb{K})$, il reste à voir que Δ_{H_*} et μ_{H_*} sont des morphismes d'algèbres et de coalgèbres respectivement. (Compte tenu du fait que X est toujours un H-espace associatif.)

Dans la catégorie des espaces topologiques pointés, le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \times X \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\Delta\times\Delta"'] & X \arrow[r, "\Delta"] & X \times X \\ X \times X \times X \times X \arrow[rr, "1\times\tau\times 1"'] & & X \times X \times X \times X \arrow[u, "\mu\times\mu"'] \end{tikzcd}$$

où $\tau : X{\times}X \longrightarrow X{\times}X, (x, y) \mapsto (y, x)$, est clairement commutatif. Or comme $H_*(X; \mathbb{K})$ est considéré sans torsion, le théorème de Künneth nous fournit un isomorphisme

$$H_*(X; \mathbb{K}) \otimes H_*(X; \mathbb{K}) \cong H_*(X \times X; \mathbb{K})$$

qui est de plus naturel. (Voir [8]). Alors en conséquence de cette naturalité, on obtient la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} H_*(X) \otimes H_*(X) \arrow[r, "\mu_{H_*}"] \arrow[d, "\Delta_{H_*}\otimes\Delta_{H_*}"'] & H_*(X) \arrow[r, "\Delta_{H_*}"] & H_*(X) \otimes H_*(X) \\ H_*(X) \otimes H_*(X) \otimes H_*(X) \otimes H_*(X) \arrow[rr, "1\otimes T\otimes 1"'] & & H_*(X) \otimes H_*(X) \otimes H_*(X) \otimes H_*(X) \arrow[u, "\mu_{H_*}\otimes\mu_{H_*}"'] \end{tikzcd}$$

où $H_*(X) = H_*(X; \mathbb{K})$. Or nous avons vu que la commutativité de ce diagramme est équivalente à la condition (3) de la définition d'algèbre de Hopf.

Remarque 4.19.
Dans le chapitre suivant, nous allons nous intéresser à l'homologie d'un espace de lacets. Rappelons alors que tout espace de lacets est un H-espace associatif. En effet, l'ensemble $[S^1, Y]$ étant le groupe fondamental de l'espace Y, il est munit d'une structure de groupe pour tout espace Y. Ainsi S^1 est un co-H-groupe, ce qui entraîne que $F(S^1, Y)$ est un H-groupe pour tout espace Y. Par conséquent, l'espace des lacets de Y qui est exactement $F(S^1, Y)$ est en particulier un H-espace associatif. On peut donc sans autre munir l'homologie d'un espace de lacets d'une structure d'algèbre de Hopf.

CHAPITRE 5

Les théorèmes de Bott-Samelson et de Freudenthal

1. Les théorèmes d'Hurewicz

Nous arrivons finalement au point central de ces projets de semestre : les théorèmes d'Hurewicz. Le but ici n'étant pas de les démontrer mais de les utiliser pour démontrer les théorèmes de Bott-Samelson et de Freudenthal. Pour une démonstration de ces théorèmes, se référer au travaux de Julian et Michele..

Théorème d'Hurewicz.
Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier plus grand que 1. Soit X un espace topologique $(n-1)$-connexe. Alors

$$h_n : \pi_n(X) \longrightarrow H_n(X)$$

est un isomorphisme.

Conséquence 5.1.
Supposons que comme dans les hypothèses du théorème, X soit un espace topologique $(n-1)$-connexe, alors X est aussi $(m-1)$-connexe pour tout $1 < m < n$. Ainsi,

$$0 \cong \pi_m(X) \cong H_m(X) \quad \forall\, m = \overline{2, n-1}\,.$$

Par conséquent, l'homologie d'un espace $(n-1)$-connexe est

$$H_m(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } m = 0 \text{ car } X \text{ est connexe par arcs (cf. thm. 2.25)} \\ \pi_1(X)_{ab} & \text{si } m = 1 \\ 0 & \text{si } 2 \leq m \leq n-1 \\ \pi_n(X) & \text{si } m = n \\ \text{Hurewicz ne dit rien} & \text{si } m > n\,. \end{cases}$$

Théorème d'Hurewicz, version relative.
Soit (X, A) une paire d'espace topologique $(n-1)$-connexe où X et A est simplement connexe et $n \geq 2$. Alors $H_q(X; A) = 0$ pour tout $q \leq n$ et
$$k_n : \pi_n(X; A) \longrightarrow H_n(X; A)$$
est un isomorphisme.

2. Théorème de Bott-Samelson

Cette section se base essentiellement sur un papier de J. Neisendorfer [3]. Nous commençons par quelques rappels sur la suspension réduite et l'espace des lacets pour fixer les idées et les notations.

La suspension réduite.
Soit (X, x_0) un espace topologique pointé. On définit la **suspension réduite** ΣX de X par le quotient suivant :
$$\Sigma X := X \times I / X \times \{0\} \cup X \times \{1\} \cup \{x_0\} \times I$$
pointé par $\{x_0\} \times I$. La suspension réduite se caractérise aussi par $\Sigma X = S^1 \wedge X$. Mais, ici nous utiliserons la caractérisation
$$\Sigma X = C_- X \cup C_+ X$$
avec $C_- X = \{[x, t] \,|\, x \in X,\ 0 \leq t \leq \frac{1}{2}\}$ le cône inférieur sur X et $C_+ X = \{[x, t] \,|\, x \in X,\ \frac{1}{2} \leq t \leq 1\}$ le cône supérieur sur X. En outre, $C_- X \cap C_+ X = X \times \{\frac{1}{2}\} \cong X$.

On peut aussi suspendre une application continue pointée $f : X \longrightarrow Y$
$$\begin{array}{rccl} \Sigma f : & \Sigma X & \longrightarrow & \Sigma Y \\ & [x, t] & \longmapsto & \Sigma f([x, t]) := [f(x), t]\ . \end{array}$$

L'espace des lacets.
L'**espace des lacets** d'un espace topologique pointé (X, x_0) est
$$\Omega X := \{u \in X^I \,|\, u(0) = u(1) = x_0\}$$
pointé par le lacet constant en x_0.

Si $f : X \longrightarrow Y$ est une application continue pointée, alors on définit le **laçage** de f par
$$\begin{array}{rccl} \Omega f : & \Omega X & \longrightarrow & \Omega Y \\ & u & \longmapsto & \Omega f(u) := f \circ u\ . \end{array}$$

Dans le théorème de Bott-Samelson c'est en fait l'espace des lacets de la suspension réduite $\Omega \Sigma X$ d'un espace topologique connexe X qui nous intéresse.

Application de suspension et évaluation.
Nous considérons l'application Σ_X, appelée **application de suspension**, qui envoie un élément de l'espace X sur le lacet dans la suspension réduite de première coordonnée constante x. Formellement :

$$\begin{array}{rccl} \Sigma_X : & X & \longrightarrow & \Omega\Sigma X \\ & x & \longmapsto & \begin{array}{rccl} \Sigma_X(x) : & I & \longrightarrow & \Sigma X \\ & t & \longmapsto & \Sigma_X(x)(t) := [x,t] \end{array} \end{array}$$

où l'application $\Sigma_X(x)$ est bien un lacet dans ΣX puisque $[x,0] = [x,1]$.

L'**évaluation** quant à elle se définit comme suit :

$$\begin{array}{rccl} e_X : & \Sigma\Omega X & \longrightarrow & X \\ & [u,t] & \longmapsto & u(t) \end{array}$$

L'espace $\Omega\Sigma X$ vérifie la propriété universelle suivante.

Propriété universelle multiplicative de $\Omega\Sigma X$.
Pour tout espace topologique Y et pour tout application continue $f : X \longrightarrow \Omega Y$, il existe un unique laçage $\overline{f} : \Omega\Sigma X \longrightarrow \Omega Y$, tel que $\overline{f} \circ \Sigma_X = f$, c-à-d qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Sigma_X"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \Omega Y \\ \Omega\Sigma X \arrow[ur, "\exists! \overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Démonstration. Posons $\overline{f} := \Omega e_Y \circ \Omega\Sigma f : \Omega\Sigma X \longrightarrow \Omega\Sigma\Omega Y \longrightarrow \Omega Y$, alors $\overline{f}$ fait commuter le diagramme. En effet, pour $x \in X$ calculons

$$\overline{f} \circ \Sigma_X(x) = \Omega e_Y \circ \Omega\Sigma f \circ \Sigma_X(x)$$

Alors $e_y(\Sigma f(\Sigma_X(x)(t))) = e_Y([f(x),t]) = f(x)(t)$. D'où $\overline{f} \circ \Sigma_X = f$.

Pour l'unicité supposons que $\overline{g}$ fasse commuter le diagramme, alors pour tout $x \in X$ et pour tout $t \in I$ on a $\overline{g} \circ \Sigma_X(x)(t) = f(x)(t)$. Ainsi

$$\overline{g}([x,t]) = f(x)(t) = e_Y([f(x),t]) = e_Y(\Sigma f([x,t])) \ .$$

D'où $\overline{g} = \Omega(e_Y \circ \Sigma f) = \Omega e_Y \circ \Omega\Sigma f = \overline{f}$.
L'application $\overline{f}$ est appelée l'extension multiplicative de f. □

Après ces nombreuses pages de préliminaires, nous avons finalement en mains tous les outils nécessaires pour énoncer et démontrer le théorème de Bott-Samelson

Théorème de Bott-Samelson 5.2.
Soit R un anneau principal. Soit X un espace topologique connexe par arcs tel que $\widetilde{H}_*(X, R) = \widetilde{H}_*(X)$ est un R-module libre. Alors l'application

$$\Sigma_* : \widetilde{H}_*(X) \longrightarrow \widetilde{H}_*(\Omega\Sigma X)$$

induit un isomorphisme d'algèbres

$$T(\widetilde{H}_*(X)) \cong H_*(\Omega\Sigma X)\,.$$

En fait, ces deux algèbres sont même isomorphes en tant qu'algèbres de Hopf, où le coproduit sur $T(\widetilde{H}_*(X))$ est induit par celui de $H_*(X)$.

Démonstration. Nous allons considérer l'espace E donné par le pushout

$$\begin{tikzcd} \Omega\Sigma X \times X \arrow[r, "c"] \arrow[d, "1\times\iota"] & \Omega\Sigma X \times C_+X \arrow[d] \\ \Omega\Sigma X \times C_-X \arrow[r] & E \end{tikzcd}$$

où

$$\begin{array}{rccc} c: & \Omega\Sigma X \times X & \longrightarrow & \Omega\Sigma X \times X \\ & (u, x) & \longmapsto & (u * \Sigma_X(x), x)\,. \end{array}$$

(Ceci revient à dire que $E = (\Omega\Sigma X \times C_-X) \cup (\Omega\Sigma X \times C_+X)$ avec identification du bord du premier terme avec le bord du deuxième selon c.)

Lemme 5.3.
L'espace E est un espace contractile.

Preuve du lemme. Pour montrer que E est contractile, on utilise un autre espace que l'on sait contractile, à savoir $P\Sigma X$ l'espace des chemins pointés de ΣX. Rappelons que la fibration des chemins est donnée par

$$\begin{array}{rccc} p: & P\Sigma X & \longrightarrow & \Sigma X \\ & u & \longmapsto & u(1)\,. \end{array}$$

Décomposons alors $P\Sigma X = p^{-1}(C_-X) \cup p^{-1}(C_+X)$, où l'intersection des deux termes est $p^{-1}(C_-X) \cap p^{-1}(C_+X) = p^{-1}(C_-X \cap C_+X) = p^{-1}(X)$. Ainsi $P\Sigma X$ est le pushout du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(C_-X) \cap p^{-1}(C_+X) \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & p^{-1}(C_-X) \arrow[d] \\ p^{-1}(C_+X) \arrow[r] & P\Sigma X\,. \end{tikzcd}$$

Nous allons maintenant trouver trois équivalences d'homotopie entre les sommets des diagrammes ci-dessus (sauf entre les pusouts). Pour ce faire, on considère les chemins $\gamma_-([x,t])$ dans C_-X qui relie linéairement $[x,0]$ à $[x,t]$, ainsi que les chemins $\gamma_+([x,t])$ dans C_+X qui relie linéairement $[x,1]$ à $[x,t]$. On pose alors

$$\psi_- : \Omega\Sigma X \times C_-X \longrightarrow p^{-1}(C_-X)\ ,\ (u,a) \mapsto u * \gamma_-(a)$$

(dont l'image est un lacet dans C_-X auquel on ajoute le chemin linéaire liant a) ;

$$\psi_+ : \Omega\Sigma X \times C_+X \longrightarrow p^{-1}(C_+X)\ ,\ (u,a) \mapsto u * \gamma_+(a)\ ;$$

$$\phi_- : p^{-1}(C_-X) \longrightarrow \Omega\Sigma X \times C_-X\ ,\ u \mapsto (u * \gamma_-(u(1))^{-1}, u(1))\ ;$$

$$\phi_+ : p^{-1}(C_+X) \longrightarrow \Omega\Sigma X \times C_+X\ ,\ u \mapsto (u * \gamma_+(u(1))^{-1}, u(1))\ .$$

En évaluant on voit facilement qu'il s'agit d'équivalences d'homotopie :

$$\psi_- \circ \phi_- \simeq 1,\ \phi_- \circ \psi_- \simeq 1,\ \psi_+ \circ \phi_+ \simeq 1,\ \phi_+ \circ \psi_+ \simeq 1\ .$$

On obtient de ce fait un diagramme commutatif à homotopie près :

$$\begin{tikzcd}
 & P\Sigma X & \\
p^{-1}(C_-X) \arrow[ur, hook] \arrow[d, "\phi_-"] & p^{-1}(C_-X) \cap p^{-1}(C_+X) \arrow[l, hook'] \arrow[r, hook] \arrow[d, "\phi_-"] & p^{-1}(C_+X) \arrow[ul, hook'] \arrow[d, "\phi_+"] \\
\Omega\Sigma X \times C_-X \arrow[dr, hook] & \Omega\Sigma X \times X \arrow[l, hook', "1\times\iota"'] \arrow[r, hook] & \Omega\Sigma X \times C_+X \arrow[dl, hook'] \\
 & E &
\end{tikzcd}$$

Les applications de la ligne du haut sont des cofibrations, on peut donc les modifier par une homotopie ϕ_+ et ϕ_- de telle sorte que le diagramme soit non plus commutatif à homotopie près, mais commutatif strictement. (Se référer au chapitre 1 du travail de Michele pour les détails de cet argument). On obtient ainsi une application $P\Sigma X \longrightarrow E$ entre les pushouts.

On applique alors le foncteur π_1 à ce nouveau diagramme. Puisque les flèches verticales sont des équivalences d'homotopie, les groupes fodamentaux des espaces liés par une telle flèche sont isomorphes. Alors, si on applique le théorème de Seifert-van Kampen pour trouver les groupes fondamentaux des deux pushouts E et $P\Sigma X$, on obtient que $\pi_1(P\Sigma X) \cong \pi_1(E)$.
Comme $P\Sigma X$ est contracile, il suit que tous ses groupes d'homotopie sont triviaux. En particulier, puisque $0 \cong \pi_1(P\Sigma X) \cong \pi_1(E)$, alors par Hurewicz de rang 1, $H_1(E) \cong 0$.
On applique maintenant les foncteurs d'homologie à ce diagramme et on trouve que $H_n(P\Sigma X) \cong H_n(E)$ pour tout n. De plus $0 \cong \pi_n(P\Sigma X)$ pour tout $n \geq 2$, veut dire que $P\Sigma X$ est $(m-1)$-connexe pour m aussi grand que l'on puisse souhaiter. Le théorème d'Hurewicz entraîne que $\pi_m(P\Sigma X) \cong H_m(P\Sigma X)$ pour tout $m \geq 2$.
Par conséquent, en réunissant tous les isomorphismes cités ci-dessus, il vient

$$0 \cong \pi_m(P\Sigma X) \cong H_m(P\Sigma X) \cong H_m(E) \quad \forall\, m > 0$$

Ce qui prouve finalement que E est un espace contractile. $\square$

Le fait que E est contractile, entraîne que $H_*(E) \cong R$ (nous avons prouvé ce résultat au chapitre 2 pour $R = \mathbb{Z}$ seulement, mais il se généralise facilement). Ainsi en appliquant la suite exacte de Mayer-Vietoris au premier diagramme du pushout E on obtient la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow H_*(\Omega\Sigma X) \otimes H_*(X) \xrightarrow{d} H_*(\Omega\Sigma X) \otimes H_*(C_-X) \oplus H_*(\Omega\Sigma X) \otimes H_*(C_+X) \longrightarrow R \longrightarrow 0$$

où, si l'augmentation est $\varepsilon : H_*(X) \longrightarrow R$, on a $d(a,b) = (a \otimes \varepsilon(a), ab \otimes 1)$. D'où l'isomorphisme

$$H_*(\Omega\Sigma X) \otimes \widetilde{H}_*(X) \xrightarrow{\cong} \widetilde{H}_*(\Omega\Sigma X)\,.$$

On utilise alors le fait que X est connexe, ce qui implique que l'algèbre $H_*(X)$ est connexe, pour conclure à l'aide du lemme suivant.

Lemme 5.4.
Soit A une algèbre connexe et M un module libre connexe. Si $f : M \longrightarrow \widetilde{A}$ est une application linéaire, alors l'extension $\overline{f} : T(M) \longrightarrow A$ est un isomorphisme si et seulement si $A \otimes M \xrightarrow{1\otimes f} A \otimes \widetilde{A} \xrightarrow{m} \widetilde{A}$ est un isomorphisme.

Démonstration. La démonstration de ce lemme se fait par induction et se trouve dans l'article sur les algèbres de Hopf de Milnor and Moor [4]. $\square$

On obtient donc finalement $T(\widetilde{H}_*(X)) \cong H_*(\Omega\Sigma X)$.
Pour la partie Algèbre de Hopf, on détermine la comultiplication de l'algèbre tensorielle $T(\widetilde{H}_*(X))$ sur les générateurs par la comultiplication de $H_*(X)$.

$\square$

3. Théorème de Freudenthal

Il s'agit dans cette section d'appliquer le théorème d'Hurewicz, ainsi que le theorème de Bott-Samelson pour donner une démonstration du théorème de suspension de Freudenthal dans le cas où l'espace considéré est la n-sphère.

Théorème de Suspension de Freudenthal 5.5.
Soit X un espace topologique pointé $m-1$-connexe ($m \geq 2$), alors la suspension homotopique

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & \pi_i(X) & \longrightarrow & \pi_{i+1}(\Sigma X) \\ & [f] & \longmapsto & [\Sigma f] \end{array}$$

est un isomorphisme de groupes pour $i < 2m-1$. Elle est surjective pour $i = 2m-1$.

Preuve pour $X = S^n$, $n \geq 2$.
Rappelons que pour tout $n \geq 2$, on a $S^{n+1} = S^1 \wedge S^n = \Sigma S^n$.

Les foncteur Σ et Ω étant adjoints, on peut écrire

$$\begin{aligned}\pi_{i+1}(S^{n+1}) &= [S^{i+1}, S^{n+1}] = [\Sigma S^i, S^{n+1}] \\ &= [S^i, \Omega S^{n+1}] = \pi_i(\Omega S^{n+1})\end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que $\pi_i(\Omega S^{n+1}) \cong \pi_i(S^n)$ pour tout $i < 2n-1$ et que $\pi_i(S^n) \twoheadrightarrow \pi_i(\Omega S^n)$ pour $i = 2n-1$.
En appliquant Bott-samelson à S^n, on obtient $T(\widetilde{H}_*(S^n)) \cong H_*(\Omega S^{n+1})$. L'algèbre tensorielle se calcule facilement puisque pour $n \geq 0$

$$H_q(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = q \\ 0 & \text{si } n \neq q\,. \end{cases}$$

(Voir chapitre 2 du travail de Julian pour ce calcul.)
Ainsi, si x_n est un générateur $H_n(S^n)$, on peut écrire $T(\widetilde{H}_*(S^n)) = T(x_n)$. D'où

$$H_k(\Omega S^{n+1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = n, 2n, \cdots \\ 0 & \text{sinon}\ . \end{cases}$$

Par conséquent $H_k(\Omega S^{n+1}) \cong H_k(S^n)$ pour tout $k = \overline{0, 2n-1}$.
En utilisant une décomposition en CW-complexes de ΩS^{n+1}, on peut voir que $S^r \hookrightarrow \Omega S^{n+1}$. (Voir chapitre 1 du travail de Michele.) On obtient ainsi une suite exacte longue en homologie pour la paire $(\Omega S^{n+1}, S^n)$:

$$\cdots H_{i+1}(\Omega S^{n+1}, S^n) \longrightarrow H_i(S^n) \longrightarrow H_i(\Omega S^n) \longrightarrow H_i(\Omega S^{n+1}, S^n) \longrightarrow \cdots.$$

Alors, comme $H_k(\Omega S^{n+1}) \cong H_k(S^n) \cong 0$ pour tout $k = \overline{0, 2n-1}$ avec $k \neq n$, par exactitude de la suite on obtient que $H_k(\Omega S^{n+1}, S^n) = 0$ pour tout $0 \leq k \leq n-1$ et $n+2 \leq k \leq 2n-1$. Autour de n on obtient la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow H_{n+1}(\Omega S^{n+1}, S^n) \longrightarrow \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \longrightarrow H_n(\Omega S^{n+1}, S^n) \longrightarrow 0$$

qui entraîne que $H_{n+1}(\Omega S^{n+1}, S^n) = H_n(\Omega S^{n+1}, S^n) = 0$.
Maintenant, en homotopie, on obtient pour la paire topologique $(\Omega S^{n+1}, S^n)$ la suite exacte longue

$$\cdots \pi_{i+1}(\Omega S^{n+1}, S^n) \longrightarrow \pi_i(S^n) \longrightarrow \pi_i(\Omega S^n) \longrightarrow \pi_i(\Omega S^{n+1}, S^n) \longrightarrow \cdots.$$

Alors comme $\pi_j(\Omega S^{n+1}, S^n) \cong 0$ pour tout $j \leq 2n-1$ l'exactitude de la suite entraîne que $\pi_i(S^n) \cong \pi_i(\Omega S^n)$ pour tout $i \leq 2n-2$ et $\pi_i(S^n) \twoheadrightarrow \pi_i(\Omega S^n)$ pour $i = 2n-1$. □

Remarque 5.6.
On peut appliquer une démonstration similaire à un espace X $(n-1)$-connexe en utilisant une approxiamation par les CW-complexes (développée dans le travail de Michele), puisqu'alors il est facile d'inclure une sphère dans X.

Le théorème de Freudenthal est particulièrement intéressant pour calculer certains groupes d'homotopie des sphères.

Remarque 5.7.
Si X est un espace topologique m-connexe, on déduit de la suite

$$\pi_i(X) \xrightarrow{\sigma} \pi_{i+1}(\Sigma X) \xrightarrow{\sigma} \pi_{i+2}(\Sigma^2 X) \xrightarrow{\sigma} \dots$$

et du théorème de Freudenthal que ΣX est $(m+1)$-connexe, $\Sigma^2 X$ est $(m+2)$-connexe et ainsi de suite.

En outre, si l'on prend $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq i - 2m$ (alors $i + k \leq 2m + k + k = 2(m+k)$) on obtient qu'à partir de

$$\pi_{i+k}(\Sigma^k X) \xrightarrow{\sigma} \pi_{i+k+1}(\Sigma^{k+1} X)$$

toutes les suspensions sont des isomorphismes.

En appliquant ce résultat à $X = S^1$, $i = 1$ et $k = 1$ on obtient la suite suivante d'isomorphismes :

$$\pi_2(S^2) \xrightarrow[\sigma]{\cong} \pi_3(S^3) \xrightarrow[\sigma]{\cong} \pi_4(S^4) \xrightarrow[\sigma]{\cong} \dots$$

Or nous savons que $H_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$, ainsi puisque S^2 est 1-connexe, il découle du théorème d'Hurewicz que

$$\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$$

pour tout $n \geq 1$.

Exemple 5.8.
En partant de la sphère S^2, que nous savons connexe par arcs et dont le groupe fondamental est trivial (i.e. S^2 est 1-connexe), comme $S^1 \wedge S^n = S^{n+1}$ on obtient

$$\underbrace{\pi_1(S^2)}_{0} \xrightarrow[\sigma]{\cong} \pi_2(S^3)$$

Il suit que $\pi_2(S^3) \cong 0$. Par conséquent, $\pi_1(S^3)$ étant trivial, S^3 est 2-connexe. Ainsi

$$\underbrace{\pi_1(S^3)}_{0} \xrightarrow[\sigma]{\cong} \pi_2(S^4)$$

et

$$\underbrace{\pi_2(S^3)}_{0} \xrightarrow[\sigma]{\cong} \pi_3(S^4)\,.$$

Donc S^4 est 3-connexe. (On considère ici connu le fait que $\pi_1(S^n) \cong 0$ pour tout $n > 1$.)
Et ainsi de suite.

Il ressort finalement que

$$\pi_i(S^n) = 0 \quad \text{si } i < n\,.$$

Bibliographie

[1] Homi Bhabha. *Tensor product*. Tata Institute, Bombay.

[2] Sorin Dăscălescu, Constantin Năstăsescu, and Şerban Raianu. *Hopf algebras*, volume 235 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker Inc., New York, 2001. An introduction.

[3] Neisendorfer J. Untitled manusript. *Work in progress*.

[4] John W. Milnor and John C. Moore. On the structure of Hopf algebras. *Ann. of Math. (2)*, 81 :211–264, 1965.

[5] James R. Munkres. *Elements of algebraic topology*. Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, 1984.

[6] Joseph J. Rotman. *An introduction to algebraic topology*, volume 119 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1988.

[7] Paul Selick. *Introduction to homotopy theory*, volume 9 of *Fields Institute Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[8] Edwin H. Spanier. *Algebraic topology*. Springer-Verlag, New York, 1981. Corrected reprint.

Index