Le théorème de Swan

Un travail réalisé par Michele Klaus sous la direction
du professeur Manuel Ojanguren

26 janvier 2005

Remerciements

Ringrazio il professore Manuel Ojanguren per avermi suggerito il tema di questo progetto e per avermi seguito nella sua realizzazione.

Résumé

Si on considère une application continue et surjective entre deux espace topologique $p : E \to X$ telle que $p^{-1}(x)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on remarque que l'ensemble des applications continues $s : X \to E$ vérifiant $p \circ s = id_X$ possède une structure de module sur l'anneau des fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$. Après avoir établit rigoureusement cette relation, le but ultime de ce projet sera de prouver que si l'espace topologique X est compact et de Hausdorff alors le module corréspondant est projectif de type fini et inversement tout module projectif de type fini sur l'anneau en question est isomorphe à un module touver comme ci-dessus.

Table des matières

Introduction

Ce projet à été très intéréssant pour l'auteur parce que au cours de sa réalisation il a eu la possibilité de connaître des domaines mathématiques importants qu'il ignorait. En particulier la théorie des catégories et les modules. Cela justifie l'existance des deux premiers chapitres dans lesquels on introduit les pré-requis nécéssaires à la compréhension de l'énoncé du théorème de Swan et de sa preuve. Le but n'est pas de traiter exaustivement les notions de catégorie et module projectif, mais seulement de donner les définitions de base et de prouver les propriétés qui seront employées dans la suite du travail.

Le troisième chapitre traite des fibrés vectoriels et dans le quatrième on donne la preuve du théorème de Swan.

Chapitre 1

Catégories et foncteurs

1.1 Définitions

Dans ce chapitre on introduit le langage des catégories et on prouve deux propositions fondamentales pour la suite.

Définition 1.1 : Une catégorie $\mathfrak{C}$ est un quintuple $(\mathcal{O}, \mathcal{M}, dom, cod, \circ)$ où :

1. $\mathcal{O}$ est une classe dont les membres sont appelés objets.
2. $\mathcal{M}$ est une classe dont les membres sont appelés morphismes.
3. *dom* et *cod* sont deux fonctions de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{O}$.
4. $\circ$ est une fonction de $D = \{(f, g)|\ f, g \in \mathcal{M}\ et\ dom(f) = cod(g)\}$ vers $\mathcal{M}$ qu'on appelle loi de composition de $\mathfrak{C}$. (On écrit souvent $\circ(f, g) = f \circ g$ et on dit que $f \circ g$ est défini si et seulement si (f,g)∈D).

On demande aussi que les propriétées suivantes soient satisfaites :

1. Si $f \circ g$ est défini, alors $dom(f \circ g) = dom(g)$ et $cod(f \circ g) = cod(f)$.
2. si $f \circ g$ et $h \circ f$ sont défini, alors $h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g$.
3. Pour tout $\mathfrak{C}$-objet A il existe un $\mathfrak{C}$-morphisme e avec $dom(e) = A = cod(e)$ et vérifiant $f \circ e = f$ et $e \circ g = g$ chaque fois que $f \circ e$ et $e \circ g$ sont définis.
4. Pour toute paire (A,B) de $\mathfrak{C}$-objets la classe $Hom_{\mathfrak{C}} = \{f|\ f \in \mathcal{M},\ \ dom(f) = A,\ \ cod(f) = B\}$ est un ensemble.

Dans ce projet tous les membres de toutes les catégories considérées seront des ensembles avec certains structures, comme par exemple des espaces topologiques, des espaces vectoriels ou autre. De même les morphismes considérés seront des applications ensemblistes particulières comme par exemple des applications continue, des homomorphismes de groupe ou autre. Cela nous permet de donner une deuxième définition de catégorie, plus restrictive et donc moins générale de la précédente, mais plus pratique à manier. On remarque facilement que une catégorie au sense de la définition 2 est une catégorie au sense de la définition 1.

Définition 1.2 : Une catégorie est une classe $\mathfrak{C}$ d'objets avec, pour tout $A, B \in \mathfrak{C}$, un ensemble de homomorphismes noté $Hom(A, B)$ et vérifiant :

1. Pour tout $A \in \mathfrak{C}$ on a que $id_A \in Hom(A, A)$.
2. Pour tout $A, B, C \in \mathfrak{C}$ il existe une loi de composition associative

$$\begin{aligned} \circ : Hom(A, B) \times Hom(B, C) &\to Hom(A, C) \\ (f, g) &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

Exemple 1.1 : La famille des espaces topologiques avec les applications continues est une catégorie.

Définition 1.3 : Soient $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ deux catégories. Un foncteur covariant est une application $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ vérifiant :

1. Pour tout objet $A \in \mathfrak{A}, F(A)$ est un objet de $\mathfrak{B}$.
2. $\forall A, B \in \mathfrak{A}$, $\forall f \in Hom(A, B)$ on a que $F(f) \in Hom(F(A), F(B))$.
3. $\forall A \in \mathfrak{A}, F(id_A) = id_{F(A)}$.
4. $\forall A, B, C \in \mathfrak{A}$; $\forall\ f {\in} Hom(A, B)$; $\forall\ g {\in} Hom(B, C)$;
   $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Remarque 1.1 : On remarque facilement que si F est un foncteur de $\mathfrak{A}$ vers $\mathfrak{B}$ et G est un foncteur de $\mathfrak{B}$ vers $\mathfrak{C}$, alors $F \circ G$ en est un de $\mathfrak{A}$ vers $\mathfrak{C}$.

Notation : Pour un foncteur F entre deux catégories $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}, F : Hom(A, B) \to Hom(F(A), F(B))$ signifie $F|_{Hom(A,B)} : Hom(A, B) \to Hom(F(A), F(B))$

Définition 1.4 : Un foncteur $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ est dit :

1. Fidèle si pour tout $A, B \in \mathfrak{A}$ $F : Hom(A, B) \to Hom(F(A), F(B))$ est une application injective.
2. Plein si pour tout $A, B \in \mathfrak{A}$ $F : Hom(A, B) \to Hom(F(A), F(B))$ est une application surjective.
3. Dense si pour tout $B \in \mathfrak{B}$ il existe $A \in \mathfrak{A}$ tel que $F(A) \cong B$, i.e. s'il existe $f \in Hom(F(A), B)$ et $g \in Hom(B, F(A))$ tels que $f \circ g = id_B$ et $g \circ f = id_{F(A)}$.

Exemple 1.2 :

1. Le foncteur *Oublie* de la catégorie des corps vers celle des ensembles, qui à tout corps associe l'ensemble sous-jacent n'est pas dense (il n'existe pas de corps à 6 éléments) ni plein (il existe un seul homomorphisme de corps de $\mathbb{F}_2$ dans lui même, mais il y a quatre applications ensemblistes de $\{0, 1\}$ dans $\{0, 1\}$), mais il est clairement fidèle.
2. Le foncteur *Oublie* de la catégorie des espaces topologiques vers celle des ensemble, qui à tout espace topologique associe l'ensemble sous-jacent est dense (sur tout ensemble on peut mettre une topologie, comme par exemple la topologie discrète) mais pas plein (il existe des applications ensemblistes de X avec la topologie grossière dans X avec la topologie discrète qui ne sont pas continue).

1.2 Catégories de foncteurs

Pour $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ deux catégories on note $\mathfrak{B}^{\mathfrak{A}}$ l'ensemble des foncteurs de $\mathfrak{A}$ vers $\mathfrak{B}$, Ob($\mathfrak{A}$) les objets de A et $Hom(\mathfrak{A})$ tous les homomorphisme entre tous les objets de $\mathfrak{A}$.

Définition 1.5 : Soient $F, G \in \mathfrak{B}^{\mathfrak{A}}$; une transformation naturelle de F vers G est une application $\alpha : Ob(\mathfrak{A}) \to Hom(\mathfrak{B})$ telle que $\alpha(A) \in Hom(F(A), G(A))$ et le diagramme suivant commute quelque soient A, B dans $\mathfrak{A}$ et $f : A \to B$

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\alpha(A)"'] & F(B) \arrow[d, "\alpha(B)"] \\ G(A) \arrow[r, "G(f)"'] & G(B) \end{tikzcd}$$

Pour deux foncteurs F,G de $\mathfrak{A}$ vers $\mathfrak{B}$ On note $Hom(F, G)$ la famille de tous les transformations naturelles de F vers G.

La catégorie des foncteurs

La collection des foncteurs d'une catégorie $\mathfrak{A}$ vers une catégorie $\mathfrak{B}$ avec les transformations naturelles forme une catégorie.

En effet $id_F : Ob(\mathfrak{A}) \to Hom(\mathfrak{B})$ qui à tout A dans $\mathfrak{A}$ associe $id_{F(A)}$ est une tranformation naturelle de F vers F et si α, β sont deux transformations naturelles de F vers G et de G vers H respectivement, alors $\beta \circ \alpha$ est une tranformation naturelle de F vers H definie par :

$$\begin{gathered} \beta \circ \alpha : Ob(\mathfrak{A}) \to Hom(\mathfrak{B}) \\ A \mapsto \beta(A) \circ \alpha(A) \end{gathered}$$

Puisque le deux diagrammes commutent

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\alpha(A)"'] & F(B) \arrow[d, "\alpha(B)"] \\ G(A) \arrow[r, "G(f)"'] & G(B) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G(A) \arrow[r, "G(f)"] \arrow[d, "\beta(A)"'] & G(B) \arrow[d, "\beta(B)"] \\ H(A) \arrow[r, "H(f)"'] & H(B) \end{tikzcd}$$

entraine que le diagramme suivant commute aussi

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\beta(A)\circ\alpha(A)"'] & F(B) \arrow[d, "\beta(B)\circ\alpha(B)"] \\ H(A) \arrow[r, "H(f)"'] & H(B) \end{tikzcd}$$

Comme la composition de tranformations naturelles ainsi définie est clairement associative on a bien une catégorie de foncteurs.

1.3 Comparaisons entre catégories

Définition 1.6 : Deux catégories $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont isomorphes s'il existe deux foncteurs $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ et $G : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ tels que $F \circ G = id_{\mathfrak{B}}$ et $G \circ F = id_{\mathfrak{A}}$.

Cette définition est trop forte car elle impose que les deux catégories aîent la même taille ! Pour affirmer que deux catégories sont "semblables" il parait plus "raisonnable" de trouver une bijection entre les classes d'objets isomorphes plutôt que entre les objets. Cela motive les définitions suivantes :

Définitions 1.7 :

1. On dit que deux foncteurs $F, G : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ sont isomorphes, et on note $F \simeq G$, s'il existe deux transformations naturelles $\alpha : F \to G$ et $\beta : G \to F$ telles que $\alpha \circ \beta = id_G$ et $\beta \circ \alpha = id_F$.
2. Un foncteur $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ est une équivalence de catégorie entre $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ s'il existe un foncteur $G : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ tel que $F \circ G \simeq id_{\mathfrak{B}}$ et $G \circ F \simeq id_{\mathfrak{A}}$.
3. Deux catégories $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont équivalentes et on note $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$, s'il existe une équivalence de catégorie entre les deux.

Remarque 1.2 : Si F et G sont deux foncteurs isomorphes via les tranformations naturelles $\alpha : F \to G$ et $\beta : G \to F$, alors $\alpha(A)$ est un isomorphisme de F(A) vers G(A) parce que $id_{G(A)} = id_G(A) = (\alpha \circ \beta)(A) = \alpha(A) \circ \beta(A)$ et $id_{F(A)} = id_F(A) = (\beta \circ \alpha)(A) = \beta(A) \circ \alpha(A)$, ce qui signifie que $\beta(A)$ est l'inverse de $\alpha(A)$.

Lemme 1.1 : Si $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ est un foncteur pleinement fidèle et $F(f) : F(A) \to F(B)$ est un isomorphisme, alors $f : A \to B$ est un isomorphisme.

Démonstration : Soit $h : F(B) \to F(A)$ telle que $h \circ F(f) = id_{F(A)}$ et $F(f) \circ h = id_{F(B)}$ et soit $g : B \to A$ telle que $F(g) = h$; ce g existe parce que F est plein.

Ainsi on a $F(f) \circ F(g) = id_{F(B)}$ et $F(g) \circ F(f) = id_{F(A)}$ donc $F(f \circ g) = id_{F(B)} = F(id_B)$ et $F(g \circ f) = id_{F(A)} = F(id_A)$.
Par fidélité de F on a $f \circ g = id_B$ et $g \circ f = id_A$.

Voici une première proposition importante sur laquelle a'appuie la démonstration du théorème de Swan :

Proposition 1.1 : Soient $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ deux catégories et $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ un foncteur, alors F est une équivalence de catégories $\Leftrightarrow$ F est pleinement fidèle et dense.

Démonstration :

1. $\Rightarrow$
   (a) F est fidèle :

   Soient $A, B \in \mathfrak{A}$, $f, g \in Hom(A, B)$ et $G : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ tel que $G \circ F \simeq id_{\mathfrak{A}}$. Supposons que $F(f) = F(g)$. Considérons :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

$$\Downarrow F$$

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, bend left, "F(f)"] \arrow[r, bend right, "F(g)"'] & F(B) \end{tikzcd}$$

$$\Downarrow G$$

$$\begin{tikzcd} GF(A) \arrow[r, bend left, "GF(f)"] \arrow[r, bend right, "GF(g)"'] \arrow[d, "\alpha"'] & GF(B) \arrow[d, "\beta"] \\ A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

   où α et β qui sont l'image de l'application naturelle donnée par le fait que $G \circ F \simeq id_{\mathfrak{A}}$ et donc sont tel que $f \circ \alpha = \beta \circ GF(f)$ et $g \circ \alpha = \beta \circ GF(g)$. Or par hypothèse $F(f) = F(g)$ donc $GF(f) = GF(g)$ et donc $f \circ \alpha = g \circ \alpha$.

Par définition de isomorphisme entre foncteurs il existe une application $\alpha' : A \to GF(A)$ telle que $\alpha \circ \alpha' = id_A$, donc $f \circ \alpha \circ \alpha' = g \circ \alpha \circ \alpha'$ implique $f = g$.
Ainsi F est fidèle.

(b) F est plein :
Soient $A, B \in \mathfrak{A}$, $g : F(A) \to F(B)$ et α et β les isomorphismes de A vers GF(A) et de B vers GF(B) respectivement, donnés par l'équivalence de catégorie. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ GF(A) \arrow[r, bend left, "GF(f)"] \arrow[r, bend right, "G(g)"'] & GF(B) \end{tikzcd}$$

avec $f \coloneqq \beta^{-1} \circ G(g) \circ \alpha$.

Ce diagramme commute deux fois : une fois par construction on a $G(g) \circ \alpha = \beta \circ f$ et d'autre part par équivalence on a $GF(f) \circ \alpha = \beta \circ f$.
Ce qui donne $G(g) \circ \alpha = GF(f) \circ \alpha$ et donc comme dans le point précédent $G(g) = GF(f)$. Or on vient de prouver que G est fidèle puisqu'il est une équivalence de catégorie et donc $g = F(f)$.
Cela montre que F est plein.

(c) F est dense :
Comme $F \circ G \simeq id_{\mathfrak{B}}$ on a que $F(G(B)) \cong id_{\mathfrak{B}}(B) = B$.
Ainsi F est dense.

2. $\Leftarrow$

(a) Candidat pour un inverse d'equivalence :
soit $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ un foncteur pleinement fidèle et dense. Par densité on a que pour tout $B \in \mathfrak{B}$ il existe $A_B \in \mathfrak{A}$ tel que $F(A_B) \cong B$.
Posons $G : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ defini par $G(B) = A_B$

(b) Effet de G sur les homomorphismes :
Soient $A, B \in \mathfrak{B}$ et $f : A \to B$. Par définition de G il existe deux isomorphismes $\alpha : A \to FG(A)$ et $\beta : B \to FG(B)$. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[dd, "\alpha"'] & B \arrow[dd, "\beta"] \arrow[dr, Rightarrow, "G"] & & \\
& & G(A) \arrow[r, bend left, "G(f)=?"] \arrow[dl, Rightarrow, "F"] & G(B) \\
FG(A) \arrow[r, bend left, "\beta\circ f\circ\alpha^{-1}"] & FG(B) & &
\end{tikzcd}$$

L'application

$$\varphi_{A,B} : Hom(A, B) \to Hom(FG(A), FG(B))$$

$$f \mapsto \beta \circ f \circ \alpha^{-1}$$

est clairement injective et surjective (avec $f = \beta^{-1} \circ g \circ \alpha$ si $g \in Hom(FG(A), FG(B))$.

De plus F est pleinement fidèle donc $Hom(G(A), G(B)) \cong Hom(FG(A), FG(B))$. Ainsi le gros diagramme commute isomorphiquement sur les applications de A dans B, déterminant entièrement l'effet de G sur les homomorphismes :

$$G(f) = ((F|_{Hom(G(A),G(B))})^{-1} \circ \varphi_{A,B})(f)$$

(c) G est un foncteur :
Notons $\psi = (F|_{Hom(G(A),G(B))})^{-1}$.
$G(id_B) = \psi\circ\varphi_{B,B}(id_B) = \psi(\beta\circ id_A\circ\beta^{-1}) = \psi(id_{FG(B)}) = id_{G(B)}$ puisque ψ est une bijection et on sait que $F(id_{G(B)}) = id_{gf(B)}$.

Soient $A, B, C \in \mathfrak{B}$; $f \in Hom(B, C)$; $g \in Hom(A, B)$ et γ l'isomorphisme de C vers FG(C) qui existe par définition de G.

$$G(f \circ g) = \psi(\varphi_{A,C}(f \circ g)) =$$

$$= \psi(\gamma \circ f \circ g \circ \alpha^{-1}) =$$

$$= \psi(\gamma \circ f \circ \beta^{-1} \circ \beta \circ g \circ \alpha^{-1}) =$$
$$= \psi(\gamma \circ f \circ \beta^{-1}) \circ \psi(\beta \circ g \circ \alpha^{-1}) =$$
$$= \psi(\varphi_{A,B}(f)) \circ \psi(\varphi_{B,C}(g)) = G(f) \circ G(g)$$

Il s'ensuit que G est un foncteur

(d) $F \circ G \simeq id_{\mathfrak{B}}$:
Par définition de G on a que $F(G(B)) \cong id_B(B)$ pour tout $B \in \mathfrak{B}$, considérons le diagramme :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ FG(A) \arrow[r, bend left, "FG(f)"] & FG(B) \end{tikzcd}$$

Alors $FG(f) \circ \alpha = ((F|_{Hom(G(A),G(B))} \circ (F|_{Hom(G(A),G(B))})^{-1}) \circ \varphi_{A,B})(f) \circ \alpha = \varphi_{A,B}(f) \circ \alpha = \beta \circ f \circ \alpha^{-1} \circ \alpha = \beta \circ f$. Ainsi le diagramme commute et donc $F \circ G \simeq id_{\mathfrak{B}}$.

(e) $G \circ F \simeq id_{\mathfrak{A}}$:
Soit $\beta_{F(A)-FGF(A)} : F(A) \to FGF(A)$ l' isomorphisme de F(A) vers FGF(A) donné par le fait que $F \circ G \simeq id_{\mathfrak{B}}$. Par fidélité pleine il existe un unique homomorphisme $\alpha_{A-GF(A)} : A \to GF(A)$ tel que $F(\alpha_{A-GF(A)}) = \beta_{F(A)-FGF(A)}$. Celui-ci est en fait un isomorphisme par le lemme 1.1.

Montrons que la famille $(\alpha_{A-GF(A)})_{A \in \mathfrak{A}}$ définie un isomorphisme de $id_{\mathfrak{A}}$ vers $G \circ F$.
Il faut prouver que le diagramme suivant commute pour tout $A, B \in \mathfrak{A}$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[d, "\alpha_1 := \alpha_{A-GF(A)}"'] & B \arrow[d, "\alpha_2 := \alpha_{B-GF(B)}"] \\ GF(A) \arrow[r, bend left, "GF(f)"] & GF(B) \end{tikzcd}$$

Par choix de α_1 et α_2 on a que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, bend left, "F(f)"] \arrow[d, "F(\alpha_1)"'] & F(B) \arrow[d, "F(\alpha_2)"] \\ FGF(A) \arrow[r, bend left, "FGF(f)"] & FGF(B) \end{tikzcd}$$

i.e. $F(\alpha_2) \circ F(f) = FGF(f) \circ F(\alpha_2)$ donc $F(\alpha_2 \circ f) = F(GF(f) \circ \alpha_2)$. Comme F est fidèle on a que $\alpha_2 \circ f = GF(f) \circ \alpha_2$, ce qui signifie que le diagramme qui nous interesse commute.

On a donc prouvé que $G \circ F \simeq id_{\mathfrak{A}}$.

Il en résulte que F est une équivalence de catégorie.

1.4 Catégories additives et foncteurs additifs

Définition 1.8 : Una catégorie $\mathfrak{A}$ est dite additive si pour tout $A, B, C \in \mathfrak{A}$ on a une loi de composition

$$+ : Hom(A, B) \times Hom(A, B) \to Hom(A, B)$$

$$(f, g) \mapsto f + g$$

vérifiant :

1. $(Hom(A, B), +)$ est un groupe abélien.
2. Pour tout $f, g \in Hom(A, B)$ et pour tout $h, k \in Hom(B, C)$ on a que :

$$h \circ (f + g) = h \circ f + h \circ g$$

$$(h + k) \circ f = h \circ f + k \circ f$$

3. Le morphisme nul est élément neutre pour la loi +.

Exemple 1.3 : Soit R un anneau, A et B deux R-modules et $f, g \in Hom_R(A, B)$. On vérifie facilement que la catégorie des R-modules avec les R-homomorphismes est une catégorie additive avec somme définie par : $(f + g)(a) = f(a) + g(a) \ \forall a \in A$.

Définition 1.9 : Soient $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ deux catégories additives. Un foncteur $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ est dit additif si pour tout $A, B \in \mathfrak{A}$ on a que $F : Hom(A, B) \to Hom(F(A), F(B))$ est un homomorphisme de groupe.

Définition 1.10 : Soit $\mathfrak{A}$ une catégorie et $A, B \in \mathfrak{A}$. Un coproduit de la paire (A,B) est un triple (i_A, i_B, C) avec $C \in \mathfrak{A}$, $i_A \in Hom(A, C)$ et $i_B \in Hom(B, C)$ vérifiant : pour tout objet L dans $\mathfrak{A}$ et pour tout $f \in Hom(A, L)$, $g \in Hom(B, L)$ il exite un unique homomorphisme $\varphi \in Hom(C, L)$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "i_A"] \arrow[drr, bend left, "f"] & & \\
& C \arrow[r, dashed, "\varphi"] & L \\
B \arrow[ur, "i_B"'] \arrow[urr, bend right, "g"'] & &
\end{tikzcd}$$

Remarque 1.3 :

– Cette construction se généralise pour un nombre fini d'objet.
– Par la propriété universelle définissant le coproduit il est facile de prouver son unicité à isomorphisme près. On notera $A \coprod B$ le coproduit de (A,B).

Exemple 1.4 : Soit R un anneau et A,B deux R-modules, alors le R-module AxB avec les inclusions canoniques est le coproduit de (A,B) :

Soient L un R-module et $f : A \to L$, $g : B \to L$ deux R-homomorphismes. On cherche un homomorphisme $\varphi : AxB \to L$ faisant commuter le diagramme de la dèfinition. On doit donc avoir $\varphi(i_A(a)) = \varphi(a, 0_B) = f(a)$ et $\varphi(i_B(b)) = \varphi(0_A, B) = g(b)$. Or φ doit etre un R-homomorphisme, donc on étend par R-linéarité et on obtient forcement que $\varphi(a, b) = f(a) + g(b)$.

Il s'ensuit qu'il existe un unique R-homomorphisme satisfaisant les propriétés requises et ainsi on a bien le coproduit de (A,B).

On enonce et on prouve maintenant la deuxième proposition importante :

Proposition 1.2 : Soient $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ deux catégories additives et $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ un foncteur additif, alors F preserve le coproduit.

Démonstration : Considérons les deux diagrammes suivants pour le coproduit de (A,B) :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "i_A"] \arrow[drr, bend left, "id_A"] & & \\
& A \coprod B \arrow[r, dashed, "P_A"] & A \\
B \arrow[ur, "i_B"'] \arrow[urr, bend right, "0"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "i_A"] \arrow[drr, bend left, "0"] & & \\
& A \coprod B \arrow[r, dashed, "P_B"] & B \\
B \arrow[ur, "i_B"'] \arrow[urr, bend right, "id_B"'] & &
\end{tikzcd}$$

Par définition du coproduit on a que il existe un unique homomorphisme $\varphi : A \coprod B \to A \coprod B$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "i_A"] \arrow[drr, bend left, "i_A"] & & \\
& A \coprod B \arrow[r, dashed, "\varphi"] & A \coprod B \\
B \arrow[ur, "i_B"'] \arrow[urr, bend right, "i_B"'] & &
\end{tikzcd}$$

Clairement $id_{A \coprod B}$ fait l'affaire mais on a aussi que l'application $i_A \circ P_A + i_B \circ P_B : A \coprod B \to A \coprod B$ vérifie (par les deux diagrammes du début) :

- $(i_A \circ P_A + i_B \circ P_B) \circ i_A = i_A \circ P_A \circ i_A + i_B \circ P_B \circ i_A = i_A \circ id_A + i_B \circ 0 = i_A$
- $(i_A \circ P_A + i_B \circ P_B) \circ i_B = i_A \circ P_A \circ i_B + i_B \circ P_B \circ i_B = i_A \circ 0 + i_B \circ id_B = i_B$

Par unicité on doit donc avoir $id_{A \coprod B} = i_A \circ P_A + i_B \circ P_B$

Soient maintenant $C \in \mathfrak{B}$, $f \in Hom(F(B), C)$ et $g \in Hom(F(A), C)$ et considérons :

$$\begin{tikzcd}
F(B) \arrow[dr, "F(i_B)"] \arrow[drr, bend left, "f"] & & \\
& F(A \coprod B) \arrow[r, dashed, "?"] & C \\
F(A) \arrow[ur, "F(i_A)"'] \arrow[urr, bend right, "g"'] & &
\end{tikzcd}$$

On cherche un homomorphisme $\psi : F(A \coprod B) \to C$ tel que $\psi \circ F(i_B) = f$ et $\psi \circ F(i_A) = g$. Cet homomorphisme ψ doit donc vérifer $\psi \circ F(i_B) \circ F(P_B) = f \circ F(P_B)$ et $\psi \circ F(i_A) \circ F(P_A) = g \circ F(P_A)$.

Comme F est un foncteur additif, en sommant les deux équations précédentes on obtient : $f \circ F(P_B) + g \circ F(P_A) = \psi \circ F(i_A \circ P_A + i_B \circ P_B) = \psi \circ F(id_{A \coprod B}) = \psi \circ id_{F(A \coprod B)} = \psi$

Ainsi ψ est uniquement détérminé et fait commuter le diagramme.

On a donc prouvé que si $(i_A, i_B, A \coprod B)$ est le coproduit de (A,B) dans $\mathfrak{A}$, alors $(F(i_A), F(i_B), F(A \coprod B))$ est le coproduit de (F(A),F(B)) dans $\mathfrak{B}$.

Chapitre 2

Modules projectifs

2.1 Le foncteur $Hom_R(A, -)$

Dans ce chapitre on ne donne pas de proposition importante, mais on se limite à expliquer la notion de module projectif. Le lecteur qui connaît déjà le sujet peut donc passer directement à la suite.

On commence par deux propositions qui seront très utile pour carctériser les modules projectifs :

Convention : Dans tout ce chapitre R désignera un anneau.

Proposition 2.1 : Soit A un R-module. L'application

$$Hom_R(A, -) : (R - modules, R - hm) \to (groupes, hm)$$

$$M \xrightarrow{f} N \longmapsto Hom_R(A, M) \xrightarrow{f\circ -} Hom_R(A, N)$$

est un foncteur de la catégorie des R-modules vers celles des groupes.

Démonstration :

1. Comme on vient de le voir dans l'exemple précédent $Hom_R(A, M)$ est un groupe.

2. Pour tout $f \in Hom_R(M, N)$ on a que $(Hom_R(A, -))(f) := f \circ -$ est un homomorphisme de groupe de $Hom_R(A, M)$ dans $Hom_R(A, N)$ puisque :

(a) Si $g \in Hom_R(A, M)$ alors $f \circ g \in Hom_R(A, N)$ en tant que composée de R-homomorphismes.

(b) Si $g_1, g_2 \in Hom_R(A, M)$ et $a \in A$ alors $(f \circ (g_1 + g_2))(a) = f(g_1(a)) + f(g_2(a)) = (f \circ g_1)(a) + (f \circ g_2)(a)$ et donc $(Hom_R(A, -))(f)$ est un homomorphisme de groupe.

3. Clairement $(Hom_R(A, -))(id_M) = id_{Hom_R(A,M)}$.

4. Si Q est un quatrième R-module avec $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} Q$, alors $(Hom_R(A, -))(h \circ f) = (h \circ f) \circ - = h \circ (f \circ -) = (h \circ -)(f \circ -) = ((Hom_R(A, -))(h)) \circ ((Hom_R(A, -))(f))$.

Ce qui prouve l'assertion.

Proposition 2.2 : Si $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$ est une suite exacte de R-modules et si M est un quatrième R-module, alors la suite

$$0 \longrightarrow Hom_R(M, A) \xrightarrow{\bar{\varphi}:=\varphi\circ -} Hom_R(M, B) \xrightarrow{\bar{\psi}:=\psi\circ -} Hom_R(M, C)$$

est exacte aussi. (On dit que le foncteur $Hom_R(M, -)$ est exact à gauche.)

Démonstration :

1. Soit $f \in Hom_R(M, A)$ avec $\bar{\varphi}(f) = 0$, alors $(\varphi \circ f)(m) = \varphi(f(m)) = 0$ pour tout $m \in M$. Or φ est injective par hypothèse donc $f(m) = 0$ pour tout $m \in M$. Ainsi $f = 0$ et donc $\bar{\varphi}$ est injective.

2. Soit $f \in Hom(M, A)$ et $m \in M$, alors :
   $(\bar{\psi} \circ \bar{\varphi})(f)(m) = \psi(\varphi(f(m))) = 0 \ \forall m \in M$ puisque $Im(\varphi) \subset Ker(\psi)$ par hypothèse. Ainsi $\bar{\psi}(\bar{\varphi}(f)) \in Ker\bar{\psi}$ et donc $Im(\bar{\varphi}) \subset Ker\bar{\psi}$.

   Soit maintenant $g \in Ker(\bar{\psi})$, c'est-à-dire $(\bar{\psi}(g))(m) = \psi(g(m)) = 0 \ \forall m \in M$ i.e. $g(m) \in Ker\psi$.
   Comme $Ker\psi = Im\varphi$ et φ injective on a qu'il existe un unique $a_m \in A$ avec $\varphi(a_m) = g(m)$.

   Posons $\alpha : M \to A$ définie par $\alpha(m) = a_m$ et vérifions qu'il s'agit d'un R-homomorphisme :

– $\varphi(a_{m_1+m_2}) = g(m_1 + m_2) = g(m_1) + g(m_2) = \varphi(a_{m_1}) + \varphi(a_{m_2}) = \varphi(a_{m_1} + a_{m_2})$. Or φ est injectif donc $\alpha(m_1 + m_2) = a_{m_1+m_2} = a_{m_1} + a_{m_2} = \alpha(m_1) + \alpha(m_2)$.

– Exactement de la même façon on prouve que $\alpha(rm) = r\alpha(m)$.

Finalement $\alpha \in Hom_R(M, A)$ est tel que $(\bar{\varphi}(\alpha))(m) = \varphi(\alpha(m)) = \varphi(a_m) = g(m)\ \forall m \in M$, i.e. $\bar{\varphi}(\alpha) = g$.
Il en résulte que $Ker\bar{\psi} \subset Im\bar{\varphi}$, ce qui achève la preuve.

2.2 Modules projectifs

Définition 2.1 : Un R-module P est dit R-projectif (ou plus simplement projectif) s'il existe un R-module libre L et un R-module Q tels que $L \cong P \oplus Q$.

Exemple 2.1 :

1. Tout module libre est projectif.
2. Le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}/2$ n'est pas projectif puisque tout $\mathbb{Z}$-module libre est de la forme $\bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}_i$ et donc sans torsion. Or $\mathbb{Z}/2$ et de torsion, donc il ne peut pas être un sous-module de $\mathbb{Z}^n$ et ainsi il n'est pas projectif.
3. Le $\mathbb{Z}/6$-module $\mathbb{Z}/2$ n'est pas libre parce que il est de torsion et donc sans base sur $\mathbb{Z}/6$, mais il est projectif puisque l'isomorphisme de $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}/6 \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/3$ est $\mathbb{Z}/6$ linéaire.

Proposition 2.3 : Soit P un R-module, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. P est projectif.
2. Le foncteur $Hom_R(P, -)$ est exacte.
3. Pour tout R-modules A,B, pour tout R-homomorphismes $f : A \twoheadrightarrow B$ et $g : P \to B$, il existe un R-homomorphisme $h : P \to A$ tel que $g = f \circ h$, i.e. tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, two heads, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

4. Toute suite exacte de R-modules de la forme suivante est scindée :

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

Démonstration :

– <u>$1 \Rightarrow 3$</u> : Soit Q un R-module tel que $L := P \oplus Q$ est libre. Soit $\mathbb{B}$ une base de L et A,B,f,g comme dans l'enoncé 3. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{B} \arrow[r, "i"] \arrow[dr, dashed, "h=?"'] & L \arrow[r, two heads, "\pi_p"] & P \arrow[l, bend left, "j"] \arrow[d, "g"] \\ & A \arrow[r, two heads, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

On cherche h de telle sorte que le diagramme commute. Pour tout $b \in \mathbb{B}$ choisissons $a_b \in A$ vérifiant $f(a_b) = (g \circ \pi_p \circ i)(b)$, un tel a_b existe puisque f est suirjective, et posons $h(b) := a_b$.

Notons h_1 l'unique R-homomorphisme qui étend h de la base $\mathbb{B}$ sur tout L, posons $h_2 := h_1 \circ j$ et vérifions que h_2 satisfait la condition 3. Soit $p \in P$:

$$(f \circ h_2)(p) = f(h_1(j(p))) = f(h_1(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_k)) = f(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k h_1(b_k)) = f(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_{b_k}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(a_{b_k}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (g \circ \pi_p \circ i)(b_k) = g(\pi_p(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_k)) = g(p)$$

– <u>$3 \Rightarrow 4$</u> : Soit $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ une suite exacte et considérons :

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "id"] \\ B \arrow[r, two heads, "g"'] & P \end{tikzcd}$$

Par hypothèse il existe $h : P \to B$ telle que $g \circ h = id_P$ et ainsi h est une section de la suite exacte.

– <u>4 ⇒ 1</u> : Comme tout module, P est isomorphe à un quotient d'un module libre L. Alors on a $\pi : L \twoheadrightarrow P$ qui donne lieu à la suite exacte

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Ker\pi \arrow[r, "id_L"] & L \arrow[r, "\pi"] & P \arrow[r] \arrow[l, dashed, bend right, "s"'] & 0 \end{tikzcd}$$

Par hypothèse il existe une section s et donc, par une propriété bien connue des suites exactes scindées, on a que $L \cong Ker\pi \oplus P$. Ainsi P est projectif.

– <u>3 ⇒ 2</u> : Soit $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$ une suite exacte de R-modules et $f \in Hom_R(P, C)$. On a alors :

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "h"'] \\ B \arrow[r, two heads, "\psi"'] & C \end{tikzcd}$$

Ainsi $h \in Hom_R(P, B)$ est telle que $\psi \circ h = f$ et donc le foncteur exact à gauche $Hom_R(P, -)$ est exact à droite, i.e. il est exact.

– <u>2 ⇒ 3</u> : On considère le diagramme :

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, two heads, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

et la suite exacte $0 \longrightarrow Kerf \xrightarrow{id_A} A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0$. Alors par hypothèse on a une deuxième suite exacte :

$$0 \longrightarrow Hom_R(P, Kerf) \xrightarrow{id_A \circ -} Hom_R(P, A) \xrightarrow{f \circ -} Hom_R(P, B) \longrightarrow 0$$

Comme $g \in Hom_R(P, B)$ il existe $h \in Hom_R(P, A)$ telle que $f \circ h = g$, CQFD.

Chapitre 3

Fibrés vectoriels

3.1 Définitions

Pour faciliter la communication on restreindra toute la théorie qu'on va devélopper au corps $\mathbb{R}$. Il est néamoins important de remarquer que tout ce que sera presenté est aussi valable sur un corps arbitraire ($\mathbb{C}$ en particulier).

Convention : Dans tout ce chapitre on notera X pour un espace topologique.

Définition 3.1 : Soit X un espace topologique. Un $\mathbb{R}$-fibré vectoriel sur X (ou plus simplement un fibré vectoriel sur X) est un couple (E,p) vérifiant :

1. E est un espace topologique.
2. $p : E \to X$ est une application continue (appelée projection de E sur X).
3. $p^{-1}(x)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour tout x∈X.
4. Pour tout x∈X il existe un voisinage U_x de x dans X tel que $p^{-1}(U_x) = U_x \times \mathbb{R}^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

Notation : On note $E_x := p^{-1}(x)$-la fibre de x sur E.

Exemple 3.1 :
Posons $X = \mathbb{S}^1$, $E = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ et $P : E \to \mathbb{S}^1$; $(x, y) \mapsto x$.

Clairement p est une application continue et pour tout $x \in X$ on a que $p^{-1}(x) = x \times \mathbb{R}$ à un structure évidente de $\mathbb{R}$-espace vectoriel. De plus $p^{-1}(\mathbb{S}^1) = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ est de la forme voulue et on peut donc poser $U_x = \mathbb{S}^1 \ \forall x \in X$.

Le couple (E,p) ainsi défini est donc un $\mathbb{R}$-fibré vectoriel sur $\mathbb{S}^1$.

Définition 3.2 : Soit (E,p) un $\mathbb{R}$-fibré vectoriel sur X. $E^{'} \subset E$ est un sous-fibré de E si $E^{'} \cap E_x$ est un sous-espace vectoriel de E_x pour tout $x \in X$ et si $(E^{'}, p|_{E'})$ avec la structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel induite par (E,p) est un $\mathbb{R}$-fibré vectoriel sur X.

3.2 Sections de fibrés vectoriels

Dans ce paragraphe on va parler de sections sur un fibré vectoriel. Il s'agit d'une notion importante parce que elle nous pérmettera de mieux étudier les fibrés vectoriels en nous donnant des informations intéréssantes sur l'objet en question.

Définition 3.3 : Soit (E,p) un $\mathbb{R}$-fibré vectoriel sur X. Une section (globale) de (E,p) est une application continue $s : X \to E$ telle que $p \circ s = id_X$.

Une section locale en $U \subset X$ est une application continue $s_U : U \to E$ telle que $p \circ s_U = id_U$

Notation : On note $\Gamma(E, p) = \Gamma(E)$ l'ensemble des sections globales et $\mathbb{R}(X)$ l'ensemble des fonctions continue de X dans $\mathbb{R}$.

Exemple important 3.2 :
Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et posons $E = X \times V$ et $p : E \to X ; x, v \mapsto x$. Comme dans l'exemple précédent on a que (E,p) est un $\mathbb{R}$-fibré sur X puisque $p^{-1}(X) = X \times V$ et $p^{-1}(x) = x \times V \ \forall x \in X$.

Une section de $X \times V$ est une application continue $s : X \to X \times V$ avec $s(x, v) = (x, s^{'}(x))$ puisque on veut que $p \circ s = id_X$. Ainsi on a que $\Gamma(E) \cong \{s : X \to V |$ s est continue$\}$.

Remarque 3.1 : On remarque facilement que les lois de composition dans $\mathbb{R}$ induisent une structure naturelle d'anneau commutatif sur $\mathbb{R}(X)$.

Proposition 3.1 : Soit (E,p) un $\mathbb{R}$-fibré vectoriel sur X, alors $\Gamma(E)$ possède une structure de $\mathbb{R}(X)$-module.

Démonstration : Pour un $x \in X$ quelconque rappelons que $E_x = p^{-1}(x)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et notons $+_x$, $\cdot_x$ les deux operations sur E_x et e_x l'élément neutre pour $+_x$. Posons :

$$\star : \Gamma(E) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$$

$$(s_1, s_2) \mapsto s_1 \star s_2$$

$$\bullet : \mathbb{R}(X) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$$

$$(a, s) \mapsto a \bullet s$$

Définies par $(s_1 \star s_2)(x) := s_1(x) +_x s_2(x)$ et $(a \bullet s)(x) := a(x) \cdot_x s(x)$ pour tout $x \in X$. Clairement ces fonctions sont des sections de E et donc les deux lois sont bien définies.

De plus $s_e : X \to E\,;\, x \mapsto e_x$ est une section élément neutre pour $\star$ et $-s : X \to E\,;\, x \mapsto -s(x)$ est une section inverse de s par rapport a $\star$. Comme $\star$ est une lois abélienne, il s'ensuit que (Γ(E),⋆) est un groupe commutatif.

Les axiomes de $\mathbb{K}(X)$-module sur $\Gamma(E)$ découle directement des ceux $\mathbb{R}$-espace vectoriel sur toute fibre.

Définition 3.4 :

1. Une base d'un $\mathbb{R}$-fibré vectoriel (E,p) sur X est un ensemble $s_1, ..., s_n$ de sections globales telles que $s_1(x), ..., s_n(x)$ est une base de E_x pour tout $x \in X$.
2. Une base locale en $U \subset X$ est une famille de sections locales $s_1, ...s_n$ sur U telles que $s_1(x), ...s_n(x)$ est une base de E_x pour tout $x \in U$.

Lemme 3.1 : Soit (E,p) un fibré vectoriel sur X, alors pour tout $x \in X$ il existe une base locales sur un voisinage U_x de x.

Démonstration : Soit $x \in X$ et $x \in U_x \subset X$ tel que $p^{-1}(U_x) = U_x \times \mathbb{R}^n$. Soit $e_1, ..., e_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Pour $i = 1, ..., n$ posons $s_i : U_x \to U_x \times \mathbb{R}^n ; x \mapsto (x, e_i)$. Alors s_i est continue et $p \circ s_i = id_{U_x}$, donc s_i est une section locale. Comme $s_1(x), ..., s_n(x)$ est une base de E_x pour tout $x \in U_x$ il s'ensuit que $s_1, ..., s_n$ est une base locale.

Lemme 3.2 Soit (E,p) un fibré vectoriel sur X. Si $s_1, ..., s_n$ est une base locale sur $U \subset X$ alors $p^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{R}^n$.

Démonstration : Posons $\phi : p^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n ; \sum_{i=1}^n a_i s_i(x) \mapsto (x, \sum_{i=1}^n a_i e_i)$. Ainsi ϕ est clairement bijective, $\mathbb{R}$-linéaire sur tout fibre et continue d'inverse continue puisque les s_i le sont.

Proposition 3.2 : Soit (E,p) un $\mathbb{R}$-fibré vectoriel sur X et $s_1, ..., s_n$ une base locale sur $U \subset X$, alors toute section s sur U s'écrit de manière unique comme : $s = \sum_{i=1}^n a_i s_i$ avec $a_i \in \mathbb{R}(X)$ $\forall i = 1, ..., n$.

Démonstration : Soit $x \in U$, comme $s_1(x), ..., s_n(x)$ est une base de E_x on a l'écriture unique suivante : $s(x) = \sum_{i=1}^n a_i s_i(x)$ avec $a_i \in \mathbb{R}$. Ainsi $a_i(x)$ est uniquement détérminé sur U. Il reste à prouver la continuité.

Soit $U_x \subset U$ avec $x \in U_x$ et $p^{-1}(U_x) = U_x \times \mathbb{R}^n$ et notons $e_1, ..., e_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Ecrivons $s_i(x) = \sum_{j=1}^n b_{ij}(x) e_j$ avec $b_{ij}(x)$ la projection de $s_i(x)$ sur e_j. Ainsi :

$$s(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x) s_i(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x) \left(\sum_{j=1}^n b_{ij}(x) e_j \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_i(x) b_{ij}(x) e_j$$

Comme s est continue on a que $\sum_{i=1}^n a_i(x) b_{ij}(x)$ est continue pour tout $j = 1, ..., n$. Soit $B_x \in M_n(\mathbb{R})$ définie par $B_{ij} = b_{ij}(x)$ pour un x dans U_x fixé. Comme B_x est la matrice de changement de base de la base canonique vers $s_i(x), ..., s_n(x)$ B_x est inversible.

De plus on a que $\beta : U_x \to GL_n(\mathbb{R}) ; x \mapsto B_x$ est continue puisque les s_i le sont et b_{ij} est une projection. On sait aussi que $inv : GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$ est continue.

Posons $c : U_x \to GL_n(\mathbb{R})$ définie par $c := inv \circ \beta$; par ce qui précède c est continue. Il en résulte que pour tout $k = 1, ..., n$ la fonction suivante est continue en tant que produit et somme de fonctions continues :

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i(x)b_{ij}(x)\right)c_{jk}(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x)c_{jk}(x)\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\delta_{ik} = a_k(x)$$

CQFD.

Corollaire : Soit (E,P) un $\mathbb{R}$-fibré vectoriel sur X et $t_1, ..., t_k$ des sections sur $U \subset X$ linéairement indépendantes en $x_0 \in U$. Alors il exsite un voisinage $U_{x_0} \subset U$ de x_0 avec $t_1, ..., t_k$ linéairement indépendantes sur U_{x_0}.

Démonstration : Soit $s_1, ..., s_n$ une base locale en x_0 et écrivons $t_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}s_j$ sur un voisinage de x_0. Les a_{ij} existent et sont continues par la proposition précédente.

Soit $A_{x_0} \in M_{k\times n}(\mathbb{R})$ avec $A_{x_0,ij} = a_{ij}(x_0)$. Comme les $t_1, ..., t_k$ sont linéairement indépendantes il existe une sous-matrice B_{x_0} de A_{x_0} de taille $k \times k$ avec $det(B_{x_0}) \neq 0$.

Or $det : M_k(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est une application continue et les a_{ij} aussi, donc il existe un voisinage de x_0 sur lequel on a $detB_x \neq 0$. Ce qui implique que les $t_1, ..., t_k$ sont linéairement indépendantes sur ce voisinage.

3.3 Homomorphismes de fibrés vectoriels

Définition 3.5 : Soient (E,p) et $(E^{'},p^{'})$ deux $\mathbb{R}$-fibré vectoriel sur X. Un homomorphisme de fibrés vectoriels entre E et $E^{'}$ est une application continue $f : E \to E^{'}$ vérifiant :

1. $p = p^{'} \circ f$.
2. $f|_{E_x} : E_x \to E^{'}_x$ est $\mathbb{R}$-linéaire pour tout $x \in X$.

Exemple 3.3 : Soit $n, m \in \mathbb{N}$ et posons $E = X \times \mathbb{R}^n$ et $E^{'} = X \times \mathbb{R}^m$ avec p et $p^{'}$ les projections canoniques.

Comme on veut $p = p^{'} \circ f$ les homomorphismes de $\mathbb{R}$-fibré de E vers $E^{'}$ sont les applications $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.

Notation : On note $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}(X)$ la famille des $\mathbb{R}$-fibrés vectoriels sur X.

Proposition 3.3 : $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}(X)$ avec les homomorphismes définis ci-dessus est une catégorie additive.

Démonstration : On vérifie facilement que :

1. Pour tout $E \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}}(X)$ on a que $id_E \in Hom(E, E)$.
2. La composition d' homomorphismes est un homomorphisme.
3. Pour tout $E, E^{'} \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}}(X)$ on pose la loi de composition :

$$\star : Hom(E, E^{'}) \times Hom(E, E^{'}) \to Hom(E, E^{'})$$

$$(f, g) \mapsto f \star g$$

   définie par $(f \star g)(x) := f(x) + g(x)$ où + est la somme dans $E^{'}_x$.
   Cette loi est bien définie puisque par définition de homomorphisme de $\mathbb{R}$-fibré vectoriel on a que $f(x), g(x) \in E'_x$. De plus $(Hom(E, E^{'}), \star)$ est un groupe abélien avec élément neutre $f = 0$ et sur lequel la composition distribue.

Remarque 3.2 : Si $f : E \to E^{'}$ est un homomorphisme de $\mathbb{R}$-fibré vectoriel alors Imf et $Kerf$ ne sont pas forcement des sous-fibrés de E et E' !

Comme $p = p' \circ f$ on Remarque que la fibre de x sur l'image de f est l'image sous f de la fibre de x sur E, i.e. $Im(f|_{E_x}) = Im(f)_x$. De même pour$Kerf$.

Exemple 3.4 : Soient $X = I = [0, 1]$, $E = I \times \mathbb{R}$, p la projection canonique et $f : E \to E\,; (x, y) \mapsto (x, xy)$.

Clairement f est continue, $p = p \circ f$ et pour tout $x_0 \in I$ on a que $f_{x_0} : x_0 \times \mathbb{R} \to E\,; (x_0, y) \mapsto (x_0, x_0y)$ est $\mathbb{R}$-linéaire.

Ainsi f est un homomorphisme de fibrés, mais Imf n'est pas un fibré vectoriel sur I puisque $f(0, y) = 0 \ \forall y \in \mathbb{R}$ mais $f(x_0, y) \neq (0, 0)$ si $x_0 \neq 0$ et $y > 0$. Par discontinuité il n'existe donc pas un voisinage $U \subset I$ de 0 tel que $p^{-1}(U) = U \times \mathbb{R}^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

De la même façon on conclut que $Kerf$ n'est pas un fibré vectoriel sur X.

Proposition 3.4 : Soient (E,p) et (E′,p′) deux $\mathbb{R}$-fibrés vectoriels sur X et $f : E \to E'$ un homomorphisme de fibrés. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. Imf est un sous-fibré de E′.
2. $Kerf$ est un sous-fibre de E.
3. Les dimensions des fibres de Imf sont localement constantes.
4. Les dimensions des fibres de $Kerf$ sont localement constantes.

Démonstration :

1. $\underline{1 \Rightarrow 3}$: Par définition de sous-fibré.
2. $\underline{2 \Rightarrow 4}$: Par définition de sous-fibré.

3. $\underline{4 \Leftrightarrow 3}$: Pour toute fibre E_x, $f|_{E_x}$ est une application $\mathbb{R}$-linéaire, ainsi : $dim(E_x) = dim(Im(f|_{E_x})) + dim(Ker(f|_{E_x})) = dim((Imf)_x) + dim((Kerf)x)$. Le fait que $dim(E_x)$ est localement constante par définition de fibré vectoriel, permet de conclure.

4. $\underline{3 \Rightarrow 1}$: Soient $x \in X$, $s_1, ..., s_m$ une base locale en x sur E et $t_1, ..., t_n$ une base locale en x sur E′. Soit aussi $k := dim((Imf)_x)$.

   En renumérotant, si nécéssaire, on a que $fs_1(x), ..., fs_k(x)$ est une base du sous-espace vectoriel $f(E_x) \subset E'_x$. Encore en renumérotant si nécéssaire, on peut completer cette dernière en une base $fs_1(x), ..., fs_k(x)$, $t_{k+1}(x), ..., t_n(x)$ de E'_x.
   Ainsi les $fs_1(x), ..., fs_k(x), t_{k+1}(x), ..., t_n(x)$ sont linéairement indépendantes en E'_x et donc par le corollaire à la proposition 3.2 elles le sont sur E'_y pour un y suffisament proche de x. Il existe donc un voisinage de x sur lequel les $fs_1, ..., fs_k$ sont linéairement indépendantes et $dim((Imf)_x) = k$ par hypothèse.
   Il en résulte que $fs_1, ..., fs_k$ est une base locale de $Im(f)$ en x, définissant sur ce même voisinage une trivialization locale de $Im(f)$.

   On remarque au passage que, sans hypothèse, cela implique qu'il existe un voisinage de x sur lequel $dim((Imf)_y) \geq k$. Cette remarque sera importante pour prouver le théprème de Swan.

   Comme $p = f \circ p'$ on que $Im(f) \cap E'_x = Im(f|_{E_x})$ qui est un sous-espace vectoriel de E'_x puisque $f|_{E_x}$ est $\mathbb{R}$-linéaire. De plus $p'|_{Imf}$ est continue et par ce qui précède pour tout $x \in X$ il existe un voisinage $U_x \subset X$ de x avec $(p'|_{Imf})^{-1}(U_x) = U_x \times \mathbb{R}^l,\ l \in \mathbb{N}$.

Il en résulte que $(Imf, p'|_{Imf})$ est un sous fibré de (E',p').

5. $\underline{3 \Rightarrow 2}$: Soit $x \in X$, $s_1, ..., s_m$ une base locale en x sur E et $k := dim((Imf)_x)$.
   Au point précédént on a prouvé que $fs_1, ..., fs_k$ est une base locale en x sur Imf pour un certain $k \leq m$. Si $k = m$ on a que $Kerf = 0$ sur un voisinage de x et $(0, p|_0)$ est clairement un sous-fibré de E.

   Si $k < m$ on a que pour tout y assez proche de x $fs_i(y) = \sum_{j=1}^{k} a_{ij}(y) fs_j(y)$ avec $k < i \leq m$. Posons $s'_i(y) = s_i(y) - \sum_{j=1}^{k} a_{ij}(y) s_j(y)$ avec $k < i \leq m$. s'_i est une section locale en x sur E puisque chaque sommand l'est. De plus pour un y proche de x :

$$f(s'_i(y)) = f(s_i(y)) - \sum_{j=1}^{k} a_{ij}(y) fs_j(y) = 0$$

   Donc $s'_i(y) \in Kerf$ sur un voisinage de x.

   Soient maintenant $\lambda_{k+1}, ..., \lambda_m \ \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=k+1}^{m} \lambda_i s'_i(y) = 0$ pour un y proche de x. Alors :

$$0 = \sum_{i=k+1}^{m} \lambda_i s'_i(y) = \sum_{i=k+1}^{m} \lambda_i s_i(y) + \sum_{j=1}^{k} \mu_j s_j(y) \quad \mu_j \in \mathbb{R} \ \forall j = 1, ..., k$$

   Or les $s_1, ..., s_m$ forment une base locale en y donc $\lambda_{k+1} = ... = \lambda_m = 0$ et ainsi les $s'_{k+1}, ..., s'_m$ sont linéairement indépendantes sur un voisinage de x.

   Comme $dim((kerf)_x) = dim(E_x) - dim((Imf)_x) = m - k$ est localement constante on a que $s'_{k+1}, ..., s'_m$ est une base locale en x. Cela nous permet de définir une trivialization locale de $Kerf$ en x.
   Comme au point précédént on conclut que $(Kerf, p|_{Kerf})$ est un sous fibré de (E,p).

3.4 Produit scalaire sur un fibré vectoriel

Après les sections on présente maintenant un deuxième outil qui nous pérmettera de mieux comprendre les fibrés vectoriels.

Notation : Soit (E,p) un $\mathbb{R}$-fibré vectoriel sur X, on note alors $A := \{(e_1, e_2) \in E \times E| \ p(e_1) = p(e_2)\}$.

Définition 3.6 : Un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-fibré vectoriel (E,p) sur X est la donnée d'un produit scalaire $< -, - >_x$ sur toute fibre E_x variant continuement avec x, i.e. la famille des produits scalaires $\{< -, - >_x |x \in X\}$ définit une application continue de A vers $\mathbb{R}$.

Proposition 3.5 : Si X est un espace topologique compact, tout $\mathbb{R}$-fibré vectoriel (E,p) sur X admet un produit scalaire.

Démonstration : Pour tout $x \in X$ notons $U_x \subset X$ le voisinage de x sur lequel E est trivial. Par compacité on a que $X = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$ pour des certains x_i.

Soit $< -, - >_{x_i}: p^{-1}(U_{x_i}) \to \mathbb{R}$ le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^n$, et soit $\{h_i\}_{i=1,\ldots,n}$ une partion de l'unité associée au recouvrement $\{U_{x_i}\}_{i=1,\ldots,n}$.

Posons $< -, - >_x: E_x \times E_x \to \mathbb{R}; (e_1, e_2) \mapsto \sum_{i=1}^n h_i(x) < e_1, e_2 >_{x_i}$. Cette application est clairement un produit scalaire sur toute fibre. De plus ça varie continuement avec x puisque les $\{h_i\}_{i=1,\ldots,n}$ sont continues.

Définition 3.7 : La somme directe de deux $\mathbb{R}$-fibrés vectoriels (E_1, p_1) et (E_2, p_2) sur X est le fibré vectoriels $(E_1 \oplus E_2, p)$ défini par $E_1 \oplus E_2 := \{(e_1, e_2) \subset E_1 \times E_2 | p_1(e_1) = p_2(e_2)\}$ et

$$p : E_1 \oplus E_2 \to X$$

$$(e_1, e_2) \mapsto p(e_1, e_2) = p_1(e_1) = p_2(e_2)$$

Remarque 3.3 : Il s'agit bien d'un fibré vectoriel puisque :

- Pour tout $x \in X$ on a $p^{-1}(x) = p_1^{-1}(x) \times p_2^{-1}(x) = E_{1,x} \times E_{2,x}$ sur lequel on peut mettre la structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel de $E_{1,x}$ et $E_{2,x}$.
- Pour tout $x \in X$ il existe un voisinage $U_x \subset X$ de x avec $p^{-1}(U_x) = p_1^{-1}(U_x) \times p_2^{-1}(U_x) = X \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Proposition 3.6 : Si X est un espace topologique compact, alors tout sous-fibré (E',p') d'un fibré vectoriel (E,p) est sommand direct de (E,p).

Démonstration : Soit $< -,- >$ un produit scalaire sur E et $g_1, ..., g_n$ une base locale en x sur E'. Posons :

$$f_x : E_x \to E_x \cap E'$$

$$e \mapsto \sum_{i=1}^{n} < e, g_i(x) > g_i(x)$$

L'ensemble $\{f_x | x \in X\}$ définit une projection $f : E \to E'$ qui est $\mathbb{R}$-linéaire et varie continuement avec x parce que $< -,- >$ est $\mathbb{R}$-linéaire sur toute fibre et continue en x. Il s'ensuit que f est un homomorphisme de fibrés vectoriels.

Comme $Imf = E'$, par la proposition 3.4 on a que $\check{E} := Kerf$ est un sous-fibré de E. De plus $E_x = E'_x \oplus \check{E}_x$ donc $E = E' \oplus \check{E}$.

Chapitre 4

Le théorème de Swan

4.1 Un foncteur pleinement fidèle

On attaque enfin le théorème de Swan. Dans cette première section on prouve quelques propositions qu'on utilisera dans la démonstration du théorème qui se trouve dans la section suivante.

Notation : On note $\mathbb{R}(X)$-mod la catégorie des $\mathbb{R}(X)$-modules.

Proposition 4.1 : Pour un espace topologique X fixé, l'application suivante est un foncteur additif de la catégorie des $\mathbb{R}$-fibrés vectoriels sur X vers celle des $\mathbb{R}(X)$-modules :

$$\Gamma : \mathbb{B}_{\mathbb{R}}(X) \to \mathbb{R}(X) - mod$$

$$(E,p) \xrightarrow{f} (E',p') \longmapsto \Gamma(E) \xrightarrow{\Gamma(f):=f\circ -} \Gamma(E')$$

Démonstration :

1. Γ est bien défini puisque on a déjà prouvé que $\Gamma(E)$ est un $\mathbb{R}(X)$-module et la définition de homomorphisme de fibrés assure que pour tout $E, E' \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}}(X)$, $f \in Hom(E,E')$ et $s \in \Gamma(E)$ on a que $\Gamma(f)(s) = f \circ s \in \Gamma(E')$.

2. $\Gamma(f)$ est un homomorphisme de $\mathbb{R}(X)$-module :
   Soient $E, E' \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}}(X)$, $f \in Hom(E, E')$ et $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$. Pour tout $x \in X$ on a : $(\Gamma(f)(s_1+s_2))(x) = f(s_1(x)+s_2(x)) = f(s_1(x))+f(s_2(x)) = (\Gamma(f)(s_1))(x)+(\Gamma(f)(s_2))(x)$ puisque f est linéaire sur toute fibre.
   Soit maintenant $a \in \mathbb{R}(x)$, alors : $(\Gamma(f)(as_1))(x) = f(a(x)s_1(x)) = a(x)f(s_1(x)) = (a(\Gamma(f)(s_1)))(x)$ toujours par linéarité de f.

3. $\Gamma(id_E)(s_1) = id_E \circ (s_1) = s_1$ donc $\Gamma(id_E) = id_{\Gamma(E)}$.

4. Si de plus $E'' \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}}(X)$ et $g \in Hom(E', E'')$ alors $\Gamma(g \circ f)(s_1) = (g \circ f) \circ s_1 = g \circ (f \circ s_1)) = (\Gamma(g) \circ \Gamma(f))(s_1)$.

5. Soient maintenant $f, g \in Hom(E, E')$, $s \in \Gamma(E)$ et $x \in X$. On a alors : $(\Gamma(f+g)(s))(x) = (f+g)(s(x)) = f(s(x)) + g(s(x)) = (\Gamma(f)(s))(x) + (\Gamma(g)(s))(x) = (\Gamma(f)(s) + \Gamma(g)(s))(x)$.

6. Il en résulte que Γ est un foncteur additif.

Convention : Dans le reste du paragraphe X sera toujours un espace topologique normal.

Proposition 4.2 : Soit X un espace topologique normal, (E,p) un fibré vectoriel sur X, $x \in X$ et s une section locale sur un voisinage $U_x \subset X$ de x. Il exsite alors un voisinage $V_x \subset U_x$ de x et une section globale s' tels que $s|_{V_x} = s'|_{V_x}$.

Démonstration : Par normalité de X et par le théorème de Uryshon il existe une fonction $f : X \to [0,1]$ et trois voisinages $V_x \subset W_x \subset U_x$ de x vérifiant : $\overline{V}_x \subset W_x$, $\overline{W}_x \subset U_x$, $f|_{V_x} = 1$ et $f|_{x \setminus U_x} = 0$.
Posons alors $s' : X \to E ; x \mapsto f(x)s(x)$. Ainsi $s' \in \Gamma(E)$ et $s'|_{V_x} = s|_{V_x}$.

Corollaire : Soit (E,p) un fibré vectoriel sur X. Pour tout $x \in X$ il existe des sections globales $s_1, ..., s_n \in \Gamma(E)$ qui sont une base locale en x.

Démonstration : Par définition de fibré vectoriel il existe une base locale en tout $x \in X$, qu'on peut étendre en des sections globales par la proposition précédénte.

Corollaire : Soient (E,p), (E′,p′) deux fibrés vectoriels sur X et $f, g : E \to E'$ deux homomorphismes de fibrés. Si $\Gamma(f) = \Gamma(g)$ alors f=g.

Démonstration : Soit $x \in X$, $e \in E_x$ et $s \in \Gamma(E)$ avec $s(x) = e$.
Une telle section existe puisque par le corollaire précédent il existe des sections globales $s_1, ..., s_n \in \Gamma(E)$ qui sont une base locale en x. Il suffit alors de poser $s = \sum_{i=1}^n a_i s_i$ avec $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^n a_i s_i(x) = e$.
On a donc : $f(e) = f(s(x)) = (\Gamma(f)(s))(x) = (\Gamma(g)(s))(x) = g(s(x)) = g(e)$.

Notation : Soit $\widetilde{ev}_x : \mathbb{R}(x) \to \mathbb{R}\,; f \mapsto f(x)$. On note $m_x := Ker(ev_x)$.

Proposition 4.3 : Soit (E,p) un fibré vectoriel sur X et $x \in X$. Le $\mathbb{R}$-homomorphisme $ev_x : \Gamma(E) \to E_x\,; s \mapsto s(x)$ induit un isomorphisme $\overline{ev}_x : \Gamma(E)/m_x\Gamma(E) \cong E_x$ de $\mathbb{R}$-module.

Démonstration :

1. ev_x est bien un $\mathbb{R}$-homomorphisme puisque si $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $ev_x(s_1 + s_2) = (s_1 + s_2)(x) = s_1(x) + s_2(x) = ev_x(s_1) + ev_x(s_1)$ et $ev_x(\lambda s_1) = (\lambda s_1)(x) = \lambda(s_1(x)) = \lambda(ev_x(s_1))$.

2. L'existence de sections globales qui sont base locale en x assure la surjectivité de ev_x. En effet si $s_1, ..., s_n$ sont des telles sections et $e \in E_x$ alors il suffit de poser $s := \sum_{i=1}^n a_1 s_1$ avec $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ tels que $s(x) = \sum_{i=1}^n a_1 s_1(x) = e$.

3. Si $s \in m_x\Gamma(E)$ alors $s = \sum_{i=1}^n a_i s'_i$ avec $a_1, ...a_n \in m_x = Ker(\widetilde{ev}_x)$ et $s'_1, ..., s'_n \in \Gamma(E)$. Donc $s(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x) s'_i(x) = 0$ et donc $m_x\Gamma(E) \subset Ker(ev_x)$.

4. Soit maintenant $s \in Ker(ev_x)$ et $s_1, ..., s_n \in \Gamma(E)$ une base locale en x. Par laproposition 3.2 il existe alors $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}(x)$ et un voisinage $U_x \subset X$ de x tels que $s|_{U_x} = (a_1 s_1 + ... + a_n s_n)|_{U_x}$.
   Par hypothèse on a $0 = s(x) = a_1(x)s_1(x) + ... + a_n(x)s_n(x)$, comme $s_1(x), ..., s_n(x)$ est une base on a que $a_1(x) = ... = a_n(x) = 0$ et donc $a_1, ...a_n \in m_x$. On en déduit que sur un voisinage de x $s \in m_x\Gamma(E)$, il faut "étendre" cette propriété sur tout X.

   Par normalité de X il existe une fonction $f : X \to [0, 1]$ et trois voisinages $V_x \subset W_x \subset U_x$ de x vérifiant : $\overline{V}_x \subset W_x$, $\overline{W}_x \subset U_x$, $f|_{V_x} = 0$ et $f|_{x \setminus U_x} = 1$. On remarque que $f \in m_x$.

Posons $\tilde{s} := s - \sum_{i=1}^{n} a_i s_i$, alors $\tilde{s}|_{U_x} = 0$ et donc $\tilde{s} = f \cdot \tilde{s} \in m_x\Gamma(E)$. Finalement $s = f \cdot \tilde{s} + \sum_{i=1}^{n} a_i s_i \in m_x\Gamma(E)$, i.e. $Ker(ev_x) \subset m_x\Gamma(E)$.

Proposition 4.4 : $\Gamma(E) : \mathbb{B}_{\mathbb{R}}(X) \to \mathbb{R}(X) - mod$ est un foncteur pleinement fidèle.

Démonstration : La fidélité a déjà été prouvé dans le deuxième corollaire de la proposition 4.2. Soit alors $E, E' \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}}(X)$, $F \in Hom(\Gamma(E), \Gamma(E'))$ et montrons qu'il existe $f \in Hom(E, E')$ avec $F = \Gamma(f)$.

Pour un $x \in X$ fixé arbitrairement considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(E) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"'] & \Gamma(E') \arrow[d, "\pi'"] \\
\Gamma(E)/m_x\Gamma(E) \arrow[r, dashed, "F_x"] \arrow[d, "\alpha:=\overline{ev}_x"', "\cong"] & \Gamma(E')/m_x\Gamma(E') \arrow[d, "\cong"', "\alpha':=\overline{ev}_x"] \\
E_x \arrow[r, dashed, "f_x"] & E'_x
\end{tikzcd}$$

Pour tout $\bar{s} \in \Gamma(E)/m_x\Gamma(E)$ posons $F_x(\bar{s}) := \widehat{F(s)}$. F_x est bien défini puisque si $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$ avec $\bar{s}_1 = \bar{s}_2$ alors il existe $a_1, ..., a_n \in m_x$ et $t_1, ..., t_n \in \Gamma(E)$ avec :

$$s_1 - s_2 = \sum_{i=1}^{n} a_i t_i$$

$$F(s_1 - s_2) = F(\sum_{i=1}^{n} a_i t_i)$$

$$F(s_1) - F(s_2) = \sum_{i=1}^{n} a_i F(t_i)$$

Par $\mathbb{R}(X)$-linéarité de F. Ainsi $\widehat{F(s_1)} = \widehat{F(s_2)}$ et F est bien défini.

Posons maintenant $f_x := \alpha' \circ F_x \circ \alpha^{-1}$, alors f_x est $\mathbb{R}$-linéaire puisque chaque composante l'est. Posons aussi $f : E \to E'$; $e_x \mapsto f_x(e_x)$ ou x est tel que $e_x \in E_x$.

Alors f est $\mathbb{R}$-linéaire sur toute fibre (par ce qui précède) et $p'(f(e_x)) = p'(f_x(e_x)) = p(x)$ puisque f_x va de E_x dans E'_x par définition. Il s'ensuit que si f est continue il est alors un homomorphisme de fibré de E dans E'.

De plus on a déjà que si $s \in \Gamma(E)$ alors :

$$(\Gamma(f)(s))(x) = (f \circ s)(x) = f(s(x)) = f_x(s(x)) = (\overline{ev}_x \circ F_x \circ \overline{ev}_x^{-1})(s(x)) = \overline{ev}_x(F_x(s)) = (F(s))(x)$$

Donc f fait l'affaire une fois montrée sa continuité.

Soit $s_1, ..., s_n \in \Gamma(E)$ une base locale sur un voisinage $U_x \subset X$ de x. Pour tout $e \in E$ avec $p(e) \in U_x$ on a que $e = \sum_{i=1}^n a_i(p(e))s_i(p(e))$ avec $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}(X)$.

Par linéarité de f on a $f(e) = \sum_{i=1}^n a_i(p(e))f(s_i(p(e)))$, or $f(s_i(x)) = F(s_i)(x)$ donc $f(e) = \sum_{i=1}^n a_i(p(e))F(s_i)(p(e))$. Mais $F(s_i) \in \Gamma((E')$ donc $F(s_i)$ est continue et ainsi f est continue en tant que somme et produit de fonctions continues.

Il en résulte que le foncteur Γ est pleinement fidèle.

4.2 Le théorème de Swan

Lemme 4.1 : Soit X un espace topologique compact et de Hausdorff et $E \in \mathbb{B}_{\mathbb{K}}(X)$. Il existe alors un fibré vectoriel trivial $E' = X \times \mathbb{R}^n$ et un homomorphisme de fibré surjectif $f : E' \twoheadrightarrow E$.

Démonstration : Pour un $x \in X$ soient $s_{x,1}, ..., s_{x,k} \in \Gamma(E)$ des sections globales qui forment une base locale sur un voisinage U_x de x.

Comme X est compact $X = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$ pour des certains $x_1, ..., x_n$. Donc les sections globales $s_{x_1,1}, ..., s_{x_1,k_1}, ..., s_{x_n,1}, ..., s_{x_n,k_n}$ engendrent $E = \bigcup_{i=1}^n p^{-1}(U_{x_i})$. Soit m le nombre des sections ci-dessus et posons $E' = X \times \mathbb{R}^m$

Comme dans l'exemple 3.2 on a $\Gamma(E') = \{f : X \to \mathbb{R}^m | f \ est \ continue\} = (\mathbb{R}(X))^m$-le $\mathbb{R}(X)$-module libre de base $e_1, ..., e_m$.

Posons $g : \Gamma(E') \to \Gamma(E)\,;\, e_i \mapsto s_i$ et étendons par $\mathbb{R}(X)$-linéarité. Il s'agit clairement d'un homomorphisme de $\mathbb{R}(X)$-module, donc par la proposition 4.4 il existe un homomorphisme de fibré $f : E' \to E$ avec $\Gamma(f) = g$.

De plus f est surjectif puisque si $e \in E_x$ il existe $a_1, ..., a_m \in \mathbb{R}(X)$ avec $e = \sum_{i=1}^m a_i(x)s_i(x)$. On a alors :

$$f\left(\sum_{i=1}^m a_i(x)e_i(x)\right) = \left(f \circ \left(\sum_{i=1}^m a_i e_i\right)\right)(x) =$$

$$= \left(\Gamma(f)\left(\sum_{i=1}^{m} a_i e_i\right)\right)(x) = \left(\sum_{i=1}^{m} a_i \Gamma(f) e_i\right)(x) = \left(\sum_{i=1}^{m} a_i g(e_i)\right)(x) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{m} a_i s_i\right)(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i(x) s_i(x) = e$$

Corollaire : Si X est un espace topologique compact et de Hausdorff et E un fibré vectoriel sur X, alors E est sommand direct d'un fibré vectoriel trivial E′.

Démonstration : Soit E′ un fibré trivial avec $f : E' \twoheadrightarrow E$ comme dans l'enoncé du lemme précédent.

Comme $Im(f) = E$ est un fibré vectoriel la proposition 3.4 nous dit que $Kerf$ est un sous-fibré de E′. Par la proposition 3.6 il existe un sous-fibré $\check{E} \subset E'$ avec $E' = Kerf \oplus \check{E}$.

On observe que $\check{E} \cong E$ via $f|_{\check{E}}$ puisque $Im(f) = E$ mais $Im(f|_{Kerf}) = 0$ donc $Im(f|_{\check{E}}) = E'$ et de plus si $e \in \check{E}$ est tel que $(f|_{\check{E}})(e) = 0$ alors $e \in Kerf$ or $(Kerf)_x \cap (\check{E})_x = 0 \ \forall x \in X$ donc $e = 0$ et donc $Ker(f|_{\check{E}}) = 0$.

Cela nous donne bien que $E \cong \check{E}$ qui est sommand direct de E′.

Lemme 4.2 : Soient $E_1, E_2 \in \mathbb{B}_{\mathbb{K}}(X)$ et posons :

$$i_{1,x} : (E_1)_x \longrightarrow (E_1 \oplus E_2)_x \qquad\qquad i_{2,x} : (E_2)_x \longrightarrow (E_1 \oplus E_2)_x$$

$$e_1 \longmapsto (e_1, 0_{2,x}) \qquad\qquad e_2 \longmapsto (0_{1,x}, e_2)$$

Alors $(i_1, i_2, E_1 \oplus E_2)$ est le coproduit de E_1 et E_2 dans $\mathbb{B}_{\mathbb{K}}(X)$, où i_1, i_2 sont les applications définies par les familles $\{i_{1,x}\}_{x\in X}$ et $\{i_{2,x}\}_{x\in X}$.

Démonstration : On remarque que chaque application $i_{1,x}$ est $\mathbb{R}$-linéaire puisque sur $(E_1 \oplus E_2)_x$, par définition de somme directe, on a que $(e_1, 0_{2,x}) + (e'_1, 0_{2,x}) = (e_1 + e'_1, 0_{2,x})$ et $\lambda(e_1, 0_{2,x}) = (\lambda e_1, 0_{2,x})$ pour tout $e_1, e'_1 \in (E_1)_x$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. De même toute application $i_{2,x}$ est $\mathbb{R}$-linéaire.

Ainsi les ensembles $\{i_{1,x}\}_{x\in X}$ et $\{i_{2,x}\}_{x\in X}$ définissent deux applications continues et $\mathbb{R}$-linéaire sur toute fibre. Comme $p_{E_1\oplus E_2}(i_1(e_1)) = p_{E_1\oplus E_2}(e_1, 0_{2,x}) = p_1(e_1)$ et $p_{E_1\oplus E_2}(i_2(e_2)) = p_{E_1\oplus E_2}(0_{1,x}, e_2) = p_2(e_2)$ on a que i_1 et i_2 sont deux homomorphismes de fibrés vectoriels.

Soit maintenant $E \in \mathbb{B}_{\mathbb{K}}(X)$ et $\alpha : E_1 \to E$, $\beta : E_2 \to E$ deux homomorphismes de fibrés :

$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[dr, "i_1"] \arrow[drr, bend left, "\alpha"] & & \\
& E_1 \oplus E_2 \arrow[r, dashed, "?"] & E \\
E_2 \arrow[ur, "i_2"'] \arrow[urr, bend right, "\beta"'] & &
\end{tikzcd}$$

On cherche un homomorphisme $\varphi : E_1 \oplus E_2 \to E$ faisant commuter le diagramme. On doit donc avoir $\varphi(e_1, 0_{2,x}) = \alpha(e_1)$ et $\varphi(0_{1,x}, e_2) = \beta(e_2)$ pour tout $x \in X$.

Comme on veut que φ soit $\mathbb{R}$-linéaire on a forcement que $\varphi(e_1, e_2) = \varphi((e_1, 0_2) + (0_1, e_2)) = \varphi(e_1, 0_2) + \varphi(0_1, e_2) = \alpha(e_1) + \beta(e_2)$. Comme α et β sont deux homomorphismes de fibrés vectoriels on a que φ est l'unique homomorphisme de fibrés faisant commuter le diagramme.

On a donc prouver que $(i_1, i_2, E_1 \oplus E_2)$ est le coproduit de E_1 et E_2 dans $\mathbb{B}_{\mathbb{K}}(X)$.

Notation : On note $P(\mathbb{R}(x))$ la catégorie de $\mathbb{R}(X)$-modules projectifs de type fini.

Théorème de Swan : Si X est un espace topologique compact et de Hausdorff, alors le foncteur $\Gamma : \mathbb{B}_{\mathbb{K}}(X) \to P(\mathbb{R}(x))$ est une équivalence de catégorie.

Démonstration : Par la proposition 1.1 on a que Γ est une équivalence de catégorie $\Leftrightarrow$ Γ est pleinement fidèle et dense.

1. Prouvons d'abord que $\Gamma(E) \in P(\mathbb{R}(x))$ pour tout $E \in \mathbb{B}_{\mathbb{K}}(X)$.
   Soit donc $E \in \mathbb{B}_{\mathbb{K}}(X)$ et E' un fibré vectoriel trivial avec $E' = E \oplus \check{E}$ pour un certain $\check{E}$. Un tel E'existe par le corollaire au lemme 4.2.
   Par additivité du foncteur Γ on a que $\Gamma(E') = \Gamma(E \oplus \check{E}) = \Gamma(E) \oplus \Gamma(\check{E})$ et donc $\Gamma(E)$ est projectif. Comme on l'a déjà vu $\Gamma(E')$ est lo module libre de base $e_1, ..., e_n$.
   Soit $\pi : \Gamma(E') \to \Gamma(E)$ la projection de $\Gamma(E')$ dans $\Gamma(E)$. Alors $\Gamma(E) \cong \Gamma(E')/Ker(\pi)$ qui est engendré par $\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n$ et donc $\Gamma(E)$ est de type fini.
   Ainsi Γ est bien défini.

2. Comme X est compact et de Hausdorff, X est normal et donc Γ est pleinement fidèle par la proposition 4.4.

3. Pour completer la preuve il ne reste plus que a prouver la densité de Γ.

   (a) Soit $P \in \mathrm{P}(\mathbb{R}(x))$, alors il existe un $\mathbb{R}(X)$-module libre de type fini L et un $\mathbb{R}(X)$-module P_1 avec $L = P \oplus P_1$.
   Soit $\pi : L \to P$ la projection de L dans P, alors $\pi^2 = \pi \circ \pi = \pi$.
   Soit encore $n = dim(L)$, alors si on pose $E := X \times \mathbb{R}^n$ on a que $L = \Gamma(E)$.

   Comme $\pi : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ est un $\mathbb{R}(X)$-homomorphisme et Γ est plein, il existe un homomorphisme de fibrés vectoriels $f : E \to E$ avec $\Gamma(f) = \pi$.
   De plus $\Gamma(f) = \pi = \pi^2 = \Gamma(f)^2 = \Gamma(f^2)$, par fidélité de Γ on a $f = f^2$.

   (b) Montrons que Imf est un sous-fibré de E. Pour cela il suffira de voir que $dim((Imf)_x)$ est localement constante et invoquer la proposition 3.4.
   On a que :

   $$x \in Kerf \;\Rightarrow\; f(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = x - f(x) \;\Rightarrow\; x \in Im(id_E - f)$$

   $$x \in Im(id_E - f) \;\Rightarrow\; x = y - f(y) \;\Rightarrow\; f(x) = f(y) - f(f(y)) = \\ = f(y) - f(y) = 0 \;\Rightarrow\; x \in Kerf$$

   Ainsi $Kerf = Im(id_E - f)$.
   Comme f est une application linéaire sur toute fibre, on a que $E_x = Imf_x \oplus Kerf_x = Imf_x \oplus Im(id_E - f)_x$.

   Soient $k = dim(Imf_x)$ et $h = dim(Im(id_E - f))_x$, alors par la remarque au passage de la quatrième étape de la preuve à la proposition 3.4, il existe un voisinage $U_x \subset X$ de x sur lequel $dim((Imf)_y) \geq k$ et $dim((Im(id_e - f))_y) \geq h$. Or $dim(E_x) = dim((Imf)_x) + dim((Im(id_e - f))_x) = k + h$ qui est localement constante puisque E est un fibré. Il s'ensuit que $dim((Imf)_x)$ est localement constante.

(c) Prouvons maintenant que $P \cong \Gamma(Imf)$.
Par choix de π et comme $\Gamma(f) = \pi$ on a que $P \cong Im\pi = Im\Gamma(f)$.
Or si $s \in Im\Gamma(f)$ il existe $s_1 \in \Gamma(E)$ avec $s = \Gamma(f)(s_1) = f \circ s_1$ qui est une section de Imf, donc $s = f \circ s_1 \in \Gamma(Imf)$.
Reciproquement si $s \in \Gamma(Imf)$ il existe un unique $s_1 \in \Gamma(E)$ avec $s = \Gamma(f)(s_1)$ puisque Γ est pleinement fidéle. Ainsi $s \in Im\Gamma(f)$.

Finalement on a que $P \cong Im\pi = Im\Gamma(f) = \Gamma(Imf)$, i.e. Γ est dense.

Chapitre 5

Exemples

5.1 Le fibré tangent sur $\mathbb{S}^1$

On définit le fibré vectoriel trivial de dimension 1 par :

$$E_t := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$$

$$p_t : E_t \to \mathbb{S}^1$$

$$(x, y) \mapsto x$$

Comme on l'a déjà vu plusieurs fois il s'agit bien d'un fibré vectoriel.

Considérons le fibré vectoriel tangent défini par :

$$E := \left\{(x, y, a, b) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} | \ a = -\lambda y \ \ et \ \ b = \lambda x, \ \ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

$$p : E \to \mathbb{S}^1$$

$$(x, y, -\lambda y, \lambda x) \mapsto (x, y)$$

La fonction p est clairement continue et on a que :

- Pour tout $(x, y) \in \mathbb{S}^1$, $p^{-1}(x, y) \cong \{\lambda(-y, x) | \ \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$; $p^{-1}(x, y)$ est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- Pour tout $(x, y) \in \mathbb{S}^1$ il existe un voisinage $U_{x,y} \subset \mathbb{S}^1$ avec $p^{-1}(U_{x,y}) = U_{x,y} \times \mathbb{R}$. Ce voisinage est en fait $\mathbb{S}^1$ tout entier puisque on a la section

  $$s : \mathbb{S}^1 \to E$$

  $$(x, y) \mapsto (x, y, -y, x)$$

  qui est une base globale définissant une trivialization globale de dimension 1 sur $\mathbb{S}^1$ tout entier.

Ainsi on a directement que (E,p) est un fibré vectoriel sur $\mathbb{S}^1$ et de plus $E \cong E_t$.

Comme E est trivial de dimension 1 on a que $\Gamma(E) = \left\{ f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R} |\ f\ \ est\ \ continue \right\}$ est le $\mathbb{R}(\mathbb{S}^1)$-module $\mathbb{R}(\mathbb{S}^1)$.

5.2 Le fibré de Möbius sur $\mathbb{S}^1$

Posons $E := \left\{ (\theta, x, y) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2 |\ x = \lambda \cos \frac{\theta}{2}\ \ et\ \ y = \lambda \sin \frac{\theta}{2},\ \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ et

$$p : E \to \mathbb{S}^1$$

$$(\theta, \lambda \cos \frac{\theta}{2}, \lambda \sin \frac{\theta}{2}) \mapsto \theta$$

Il s'agit bien d'un fibré vectoriel parce que :

- Pour tout $\theta \in \mathbb{S}^1$ on a que $p^{-1}(\theta) = \left\{ (\theta, \lambda(\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2})) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2 |\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1.
- Soit $\varepsilon < \pi$ et pour tout $\theta \in \mathbb{S}^1$ considérons $U_\theta :=]\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon[\subset \mathbb{S}^1$ et posons :

$$s_1 : U_\theta \to E$$

$$\varphi \mapsto (\varphi, \cos \frac{\varphi}{2}, \sin \frac{\varphi}{2})$$

  s_1 est une section sur U_θ qui est une base locale. Cela nous permet de établir une trivialization locale de E en tout point $\theta \in \mathbb{S}^1$.

Comme toute fibre est de dimension 1, si E est un fibré vectoriel trivial il est de dimension 1. Supposons que E soit trivial, alors il existe une base globale $s : \mathbb{S}^1 \to E$. Par définition de base s doit être continue et $s(\theta)$ doit être une base de $p^{-1}(\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{S}^1$.

Il faut donc que s soit de la forme $s(\theta) = (\theta, f(\theta) \cos \frac{\theta}{2}, f(\theta) \sin \frac{\theta}{2})$ avec $f \in C^\circ(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^*)$.

Or si $f \in C^\circ(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^*)$ alors $f(\theta) \cdot f(\tau) > 0\ \ \forall \theta, \tau \in \mathbb{S}^1$, ce qui entraine que

$$\lim_{\theta \to 2\pi, \theta < 2\pi} s(\theta) = (0, -f(2\pi), 0) \neq (0, f(0), 0) = s(0)$$

Ainsi s est discontinue, donc il n'existe pas de bases globales et donc E n'est pas un fibré vectoriel trivial.

Calculons maintenant le $\mathbb{R}(\mathbb{S}^1)$-module $\Gamma(E)$:

$$\Gamma(E) = \left\{ f : \mathbb{S}^1 \to E|\ f\ \textit{est continue et}\ p \circ f = id_{\mathbb{S}^1} \right\} =$$

$$= \left\{ f : \mathbb{S}^1 \to E|\ f\ \textit{est continue et}\ f(\theta) = (\theta, \lambda_\theta \cos\frac{\theta}{2}, \lambda_\theta \sin\frac{\theta}{2}),\ \ \lambda_\theta \in \mathbb{R} \right\} \cong$$

$$\cong \mathbb{R}(\mathbb{S}^1)(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2})$$

Or $(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}) \notin \mathbb{R}^2(\mathbb{S}^1)$ puisque $\theta \in \mathbb{S}^1$. Pour decrire $\Gamma(E)$ comme $\mathbb{R}(\mathbb{S}^1)$-module il faut écrire $(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2})$ comme combinaison d'éléments de $\mathbb{R}^2(\mathbb{S}^1)$. On remarque que :

- $(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}) = \cos\theta(\cos^2\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}) + \sin\theta(\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}, \sin^2\frac{\theta}{2})$
- $\frac{\cos\theta+1}{2} = \cos^2\frac{\theta}{2}$
- $\frac{\sin\theta}{2} = \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

Ainsi avec $x = \cos\theta$ et $y = \sin\theta$ on a $(\cos^2\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}) = (\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2})$ et $(\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}, \sin^2\frac{\theta}{2}) = (\frac{y}{2}, \frac{1-x}{2})$. Si on pose maintenant

$$s_1 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \mapsto \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2}\right)$$
$$s_2 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \mapsto \left(\frac{y}{2}, \frac{1-x}{2}\right)$$

On a $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^2(\mathbb{S}^1)$ et $(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}) = xs_1 + ys_2$.

Finalement : $\Gamma(E) = \mathbb{R}(\mathbb{S}^1)s_1 + \mathbb{R}(\mathbb{S}^1)s_2$ - le sous-module de $\mathbb{R}^2(\mathbb{S}^1)$ engendré par s_1 et s_2.

5.3 Le fibré tangent sur $\mathbb{S}^2$

Considérons le fibré tangent sur $\mathbb{S}^2$ défini par :

$$E := \left\{(a,b,c,x,y,z) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3 |\ ax + by + cz = 0\right\}$$

$$p : E \to \mathbb{S}^2$$
$$(a,b,c,x,y,z) \mapsto (a,b,c)$$

Alors :

- $p^{-1}(a,b,c)$ a une structure évidente de $\mathbb{R}$-espace vectoriel puisque il est isomorphe au plan tangent à la sphère au point (a,b,c).
- Soit $(a,b,c) \in \mathbb{S}^2$, ψ l'angle entre le vecteur (a,b,c) et l'axe Oz et φ l'angle entre l'axe Ox et la projection du vecteur (a,b,c) dans le plan xy. Alors les vecteurs $(\cos\varphi\cos\psi, \sin\varphi\cos\psi, -\sin\psi)$ et $(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$ obtenus par rotation forment une base de $p^{-1}(a,b,c)$. On définit les deux fonctions suivantes :

$$s_1 : \mathbb{S}^2 \to E$$
$$(a,b,c) \mapsto (a,b,c,\cos\varphi\cos\psi, \sin\varphi\cos\psi, -\sin\psi)$$
$$s_2 : \mathbb{S}^2 \to E$$
$$(a,b,c) \mapsto (a,b,c,-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$$

  Qui sont une base locale sur un voisinage de (a,b,c) et donc définissent une trivialization locale du fibré vectoriel en tout point $(a,b,c) \in \mathbb{S}^2$.

Calculons maintenant le $\mathbb{R}(\mathbb{S}^1)$-module $\Gamma(E)$:

$\Gamma(E) = \{(f,g,h) \in \mathbb{R}^3(\mathbb{S}^2) |\ \forall (a,b,c) \in \mathbb{S}^2\ af(a,b,c) + bg(a,b,c) + ch(a,b,c) = 0\} \subset \mathbb{R}^3(\mathbb{S}^2)$. Soit :

$$\delta : \mathbb{R}^3(\mathbb{S}^2) \to \mathbb{R}(\mathbb{S}^2)$$
$$(f,g,h) \mapsto xf + yg + zh$$

Alors $\Gamma(E) = Ker\delta$.

Posons $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3(\mathbb{S}^2)$ définies par $e_1(x,y,z) = (1,0,0)$, $e_2(x,y,z) = (0,1,0)$ et $e_3(x,y,z) = (0,0,1)$. Clairement e_1, e_2, e_3 forment une base du $\mathbb{R}(\mathbb{S}^2)$-module $\mathbb{R}^3(\mathbb{S}^2)$. Considérons la suite exacte :

$$\begin{tikzcd} Ker\delta \arrow[r, "i"] & \mathbb{R}^3(\mathbb{S}^2) \arrow[r, "\delta"] & \mathbb{R}(\mathbb{S}^2) \arrow[l, bend left, "s"] \end{tikzcd}$$

Avec la section $s : \mathbb{R}(\mathbb{S}^2) \to \mathbb{R}^3(\mathbb{S}^2)$; $g \mapsto (xg, yg, zg)$. Il s'agit d'une section puisque $(\delta \circ s)(g) = x^2g + y^2g + z^2g = g(x^2 + y^2 + z^2) = g$. On alors que $Ker\delta = \{f \in \mathbb{R}^3(\mathbb{S}^2)|\ f = f - s(\delta(f))\}$ parce que :

$$f \in Ker\delta \ \Rightarrow\ \delta(f) = 0 \ \Rightarrow\ s\delta(f) = 0 \ \Rightarrow\ f = f - s\delta(f)$$

$$f = f - s\delta(f) \ \Rightarrow\ \delta(f) = \delta(f) - (\delta \circ s)(\delta(f)) = \delta(f) - \delta(f) = 0 \ \Rightarrow\ f \in Ker\delta$$

Maintenant si $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}(\mathbb{S}^2)$ on a que :

$$s\delta(a_1e_1 + a_2e_2 + a_3b_3) = s(xa_1 + ya_2 + za_3) =$$

$$= (x^2a_1 + xya_2 + xza_3, xya_1 + y^2a_2 + yza_3, xza_1 + zya_2 + z^2a_3)$$

et

$$a_1s\delta(e_1) + a_2s\delta(e_2) + a_3s\delta(e_3) = a_1s(x) + a_2s(y) + a_3s(z) =$$
$$= a_1(x^2, xy, zx) + a_2(xy, y^2, zy) + a_3(zx, zy, z^2)$$

Donc $s\delta(a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3) = a_1s\delta(e_1) + a_2s\delta(e_2) + a_3s\delta(e_3)$.

Il s'ensuit que :

$$f \in Ker\delta \ \Rightarrow\ f = f - s\delta(f) \ \Rightarrow\ f = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 - s\delta(b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3)$$
$$\Rightarrow\ f = b_1(e_1 - s\delta(e_1)) + b_2(e_2 - s\delta(e_2)) + b_3(e_3 - s\delta(e_3))$$
$$\Rightarrow\ f \in < e_1 - s\delta(e_1), e_2 - s\delta(e_2), e_3 - s\delta(e_3) >$$

et inversement :

$$f \in < e_1 - s\delta(e_1), e_2 - s\delta(e_2), e_3 - s\delta(e_3) >$$

$$\Rightarrow\ f = c_1(e_1 - s\delta(e_1)) + c_2(e_2 - s\delta(e_2)) + c_3(e_3 - s\delta(e_3))$$
$$\Rightarrow\ f = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3 - s\delta(c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3)$$
$$\Rightarrow\ \delta(f) = 0 \ \Rightarrow\ f \in Ker\delta$$

Finalement : $\Gamma(E) = Ker\delta = \{f \in \mathbb{R}^3(\mathbb{S})^2|\ f = f - s\delta(f)\} =$
$=< e_1 - s\delta(e_1), e_2 - s\delta(e_2), e_3 - s\delta(e_3) >$.

Bibliographie

[1] Horst Herrlich, George E. Strecker, *Category theory : an introduction*, Allyn and bacon, Boston, 1973.

[2] Hyman Bass, *Algebraic K-theory*, W.A. Benjamin, New York, 1968.

[3] Richard G. Swan, *Vector bundles and projective modules*, Transactions of the mathematical society, 105, october-december 1962.

[4] Michel Matthey, *Introduction à la K-théorie algébrique*, EPFL, 2003.