Projet de Semestre

été 2005

Théorème de Sard et applications

Ismaïl Haddaoui

Professeur Responsable:

Marc Troyanov

Assistant: Stephen Ducret

Table des matières

Résumé

Après avoir défini les bases du calcul différentiel sur des variétés, nous établirons le théorème de Sard puis nous verrons quelques applications : le théorème de Morse, le théorème de Whitney et enfin quelques éléments en transversalité.

CHAPITRE 1

Variétés et calcul différentiel

Dans ce chapitre nous définissons les notions nécessaires à l'introduction des variétés différentiables, des dérivées et des espaces tangents. Nous adaptons également quelques théorèmes connus dans les espaces euclidiens aux variétés.

1. Variétés différentiables

DÉFINITION 1.1. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^m$. f est dite *différentiable* en $x \in U$ s'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ telle que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - Lh}{\|h\|} = 0$$

On a alors :

$$L(h) = df_x(h) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}$$

On appelle $L = df_x$ la *dérivée* de f en x. f est *différentiable* C^1 ou *continûment différentiable* si, de plus, $df : U \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ est continue.

f est dite *différentiable* C^k si f est C^1 et si $df : U \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ est C^{k-1}.

Les *dérivées partielles* de f sont

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+te_i) - f(x)}{t}$$

où e_i est le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^m$. Ainsi, une application est différentiable C^1 si ses dérivées partielles d'ordre 1 existent et sont continues. Une application est différentiable C^k si ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre k existent et sont continues. Enfin, nous appellerons application *différentiable* C^∞ ou *lisse* toute application dont les dérivées partielles existent et sont continues, à tous les ordres.

Plus généralement, si f est une application définie sur un sous-ensemble X de $\mathbb{R}^n$, elle est dite *différentiable* si elle peut être prolongée en une application différentiable sur un ouvert. C'est à dire, pour chaque $x \in X$, il existe un ouvert V contenant X et une fonction F définie sur cet ouvert tels que F est différentiable sur cet ouvert et $F|_X = f$.

DÉFINITION 1.2. Une application différentiable entre espaces euclidiens $f : X \to Y$ est un *difféomorphisme* si elle est bijective et que sa fonction réciproque est également différentiable. X et Y sont dits *difféomorphes* si une telle application existe.

Avec ces deux notions d'application lisse et d'espaces difféomorphes, nous pouvons introduire :

Définition 1.3. Un sous-ensemble X d'un espace euclidien réel $\mathbb{R}^N$ est appelé une *variété lisse de dimension* k s'il est localement difféomorphe à $\mathbb{R}^k$. C'est à dire, tout $x \in X$ possède un voisinage V difféomorphe à un ouvert U de $\mathbb{R}^k$. Le difféomorphisme lisse $\phi : U \to V$ est une *paramétrisation*. Son inverse ϕ^{-1} est un *système de coordonnées*. On appelle l'ensemble des paramétrisations de X la structure différentielle de X.
Un sous-ensemble $Z \subseteq X$ est une *sous-variété de dimension* m de X si pour tout $x \in Z$, il existe un difféomorphisme lisse $\phi : \operatorname{dom}\phi \to \mathbb{R}^n$, ϕ faisant partie de la structure différentielle de X, telle que $\phi^{-1}(V) = Y \cap \operatorname{dom}\phi$, où

$$V = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_{m+1} = \ldots = x_n = 0\}$$

Théorème 1.4. *Si X et Y sont deux variétés, alors $X \times Y$ en est aussi une, et* $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$

Démonstration. Supposons que X et Y sont deux variétés dans $\mathbb{R}^N$ et $\mathbb{R}^M$, respectivement. Alors $X \times Y$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^{N+M}$. Supposons X de dimension k et notons $\phi : W \to X$ une paramétrisation locale autour de $x \in X$, W étant un ouvert de $\mathbb{R}^k$. De même, l étant la dimension de Y, soit $\psi : U \to Y$ une paramétrisation locale autour de y, U étant un ouvert de $\mathbb{R}^k$. Définissons alors l'application :

$$\phi \times \psi : W \times U \to X \times Y$$
$$\phi \times \psi(w, u) = (\phi(w), \psi(u))$$

$W \times U$ est un ouvert de $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l = \mathbb{R}^{k+l}$. Il suffit maintenant de vérifier que $\phi \times \psi$ est une paramétrisation locale autour de $X \times Y$ de (x, y). Mais c'est le cas puisque $\phi \times \psi$ est bijective et différentiable. De plus, $(\phi \times \psi)^{-1}$ est différentiable.

□

2. Dérivées et espaces tangents

Nous introduisons la notion d'espace tangent à une variété en un point.

Proposition et Définition 1.5. *Soit X une variété dans $\mathbb{R}^N$ et $\phi : U \to X$ une paramétrisation locale autour de $x \in X$. Supposons que $\phi(0) = x$, alors la dérivée de ϕ en 0 est $d\phi_0 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^N$. On définit l'espace tangent à X en x par : $T_x(X) = \Im(d\phi_0)$. Un vecteur tangent à X en x est un vecteur $v \in T_x(X)$. Cette définition ne dépend pas du choix de la paramétrisation.*

La preuve de cette proposition est laissée pour plus tard. Nous définissons d'abord la notion d'application différentiable entre variétés.

Définition 1.6. Soit f une application entre deux variétés X et Y.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ U \subseteq \mathbb{R}^k \arrow[u, "\phi"] \arrow[r, "h"'] & V \subseteq \mathbb{R}^l \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

f est dite *lisse* en $x \in X$ si h est lisse en $\phi^{-1}(x)$. On définit alors df_x par $df_x = d\psi_0 \circ dh_0 \circ d\phi_0^{-1}$:

$$\begin{tikzcd}
T_x(X) \arrow[r, "df_x"] & T_y(Y) \\
\mathbb{R}^k \arrow[u, "d\phi_0"'] \arrow[r, "dh_0"'] & \mathbb{R}^l \arrow[u, "d\psi_0"']
\end{tikzcd}$$

THÉORÈME 1.7. *(dérivée de fonctions composées)*
Si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont des applications lisses entre variétés, alors leur composée $f \circ g : X \to Z$ est lisse et on a :

$$d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x$$

Une preuve de ce théorème peut être trouvé dans [1]. Elle se base sur les paramétrisations locales respectives de X, Y et Z et sur la version du théorème pour les espaces euclidiens.

Nous pouvons maintenant prouver la justesse de la définition de l'espace tangent, en utilisant la formule de la dérivée de fonctions composées.

DÉMONSTRATION. Soit ϕ une paramétrisation locale de $x \in X$ telle que $\phi(0) = x$. Prenons une autre paramétrisation $\psi : V \to X$. Supposons sans perte de généralité que $\psi(0) = x$. Quitte à prendre des ouverts plus petits, on peut supposer que $\phi(U) = \psi(V)$. Posons alors $h = \psi^{-1} \circ \phi : U \to V$. C'est un difféomorphisme. Il vient alors $\phi = \psi \circ h$. En dérivant, on obtient $d\phi_0 = d\psi_0 \circ dh_0$. Donc l'image de $d\phi_0$ est contenue dans l'image de $d\psi_0$. En inversant les rôles de ϕ et ψ, nous obtenons l'inclusion inverse. Et donc $T_x(X)$ est bien défini.

□

3. Théorème des fonctions inverses et immersions

Notre étude nous amène à étudier le comportement local des applications lisses entre variétés. Le formule de la composition des dérivées entraîne que si $f : X \to Y$ est un difféomorphisme, alors df_x est un isomorphisme entre $T_x(X)$ et $T_{f(x)}(Y)$. Le théorème de la fonction inverse nous dit que la réciproque est vraie.

THÉORÈME 1.8. *(fonction inverse) Soit $f : X \to Y$ une fonction lisse entre variétés, telle que df_x soit un isomorphisme. Alors f est un difféomorphisme local en x.*

DÉMONSTRATION. Nous connaissons le résultat du théorème de la fonction inverse pour une application entre ouverts U et V contenus dans des espaces euclidiens. En utilisant les paramétrisations locales autour de X et Y, on parvient au résultat pour les variétés.
Soit donc

$$\phi : U \subseteq \mathbb{R}^k \to X \text{ et } \psi : V \subseteq \mathbb{R}^l \to Y$$

des paramétrisations locales de X et Y.

Posons $h = \psi^{-1} \circ f \circ \phi$. h est une application lisse comme composée d'applications lisses. h est définie entre ouverts d'espaces euclidiens réels. De plus, $dh_0 = d\psi_0^{-1} \circ df_x \circ d\phi_0$ est un isomorphisme comme composée d'isomorphismes.

Par le théorème de la fonction inverse dans les espaces euclidiens, h est un difféomorphisme local. Enfin, écrivons $f = \psi \circ h \circ \phi^{-1}$, il vient donc que f est un difféomorphisme local.

$\square$

Le théorème de la fonction inverse est assez puissant car il nous donne un critère simple - voir si le déterminant de df_x est nul ou pas - pour déterminer la nature locale de l'application f. Ceci dit, cela reste une propriété locale.

Définition 1.9. Soit $f : X \to Y$ et $f' : X' \to Y'$ où X, X', Y, Y' sont des variétés. f et f' sont dites *équivalentes* s'il existe des difféomorphismes ϕ et ψ tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ X' \arrow[u, "\phi"] \arrow[r, "f'"'] & Y' \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

f et f' sont *localement équivalentes* si de tels difféomorphismes existent localement autour de tout $x \in X$.

Définition 1.10. Soit $f : X \to Y$ une application lisse entre variétés, avec $\dim X < \dim Y$.

- f est une *immersion en x* si $df_x : T_x(X) \to T_y(Y)$ est injective.
- Si f est une immersion pour tout $x \in X$, f est une *immersion*.
- L'*inclusion canonique* est l'application injective définie sur $\mathbb{R}^k$ vers $\mathbb{R}^l$, $k \leq l$, $(a_1, \ldots, a_k) \mapsto (a_1, \ldots, a_k, 0, \ldots, 0)$

Théorème 1.11. *(immersion locale)*
Soit $f : X \to Y$ une immersion en $x \in X$, $y = f(x)$. Alors il existe des coordonnées locales autour de x et y telles que

$$f(x_1, \ldots, x_k) = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$$

c'est à dire, f est localement équivalente à l'immersion canonique.

Démonstration. Soit ϕ, ψ des paramétrisations locales autour de $x \in X$ et $y \in Y$. Définissons $g = \psi^{-1} \circ f \circ \phi$. Le but est d'essayer d'"augmenter" g pour pouvoir appliquer le théorème de la fonction inverse. dg_0 est injective comme composée d'applications injectives. En effectuant un changement de base judicieux, sa matrice peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} I_k \\ \hline 0 \end{pmatrix}$$

On définit maintenant une application $G : U \times \mathbb{R}^{l-k} \to \mathbb{R}^l$ par $G(x, z) = g(x) + (0, z)$. G envoie un ouvert de $\mathbb{R}^l$ dans $\mathbb{R}^l$. La matrice de dG_0 est clairement I_l. Le théorème de la fonction inverse nous dit alors que G est un difféomorphisme local de $\mathbb{R}^l$ en 0. Notons $i : \mathbb{R}^{l-k} \to \mathbb{R}^l$ l'immersion canonique qui envoie $(a_1, \ldots, a_{l-k})$ sur $(a_1, \ldots, a_{l-k}, 0, \ldots, 0)$. Alors on a $G \circ i = g$.

$\psi \circ G$ est un difféomorphisme local comme composée de difféomorphismes locaux en 0. $\psi \circ G$ est donc une paramétrisation locale autour de $y \in Y$. On a alors :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] & & Y & \mathbb{R}^l \arrow[l, "\psi"'] \\ U \subseteq \mathbb{R}^k \arrow[u, "\phi"] \arrow[r, "g"'] & V \subseteq \mathbb{R}^l \arrow[rr, "G^{-1}"'] & & \mathbb{R}^{l-k} \arrow[u, "G"'] \end{tikzcd}$$

Ainsi, vu que $G^{-1} \circ g =$ immersion canonique, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ U \arrow[u, "\phi"] \arrow[r, "\text{immersion}", "\text{canonique}"'] & V \arrow[u, "\psi\circ G"'] \end{tikzcd}$$

Alors f est localement équivalente à l'immersion canonique.

□

Définition 1.12. Une application $f : X \to Y$ est dite *propre* si la préimage de tout compact de Y est un compact de X

Définition 1.13. Une immersion $f : X \to Y$ est un *plongement* si elle est injective et propre.

Théorème 1.14. *Soit $f : X \to Y$ un plongement. Alors l'image de X par f est une sous-variété de Y.*

Démonstration. Remarquons tout d'abord que pour prouver que $f(X)$ est une sous-variété de Y, il suffit de prouver que l'image de tout ouvert de X est un ouvert de $f(X)$. En effet, par le théorème d'immersion locale, f est localement équivalente à l'immersion locale donc elle envoie tout voisinage W suffisamment petit d'un $x \in X$ difféomorphiquement vers son image $f(W)$. Ainsi $f(W)$ est difféomorphe à W, lui-même difféomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^k$. Donc $f(W)$ sera difféomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^k$. Ceci étant vrai pour tout $x \in X$, $f(X)$ sera donc une variété.

Supposons donc que l'image d'un ouvert W ne soit pas un ouvert de Y. Alors $f(X) \backslash f(W)$ n'est pas fermé. Donc il existe un suite convergente de points $y_n \subseteq f(X) \backslash f(W)$ mais dont la limite y est dans $f(W)$. Considérons maintenant l'ensemble $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{y\}$. C'est un compact dans $f(X)$, donc sa préimage doit être compacte dans X, car f est un plongement. Tout y_n possède une unique préimage x_n, de même que y possède une unique préimage x. Comme dit précédemment $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{x\}$ est un compact, donc il existe une sous suite x_{n_k} qui converge vers un certain $z \in X$. Alors $f(x_{n_k}) \to f(z)$. Or $f(x_n) \to f(x)$. L'injectivité de f implique que $z = x$. W étant ouvert, il vient qu'à partir d'un certain rang, $x_n \in W$. Alors à partir de ce rang, $y_n \in f(W)$. Ceci contredit notre hypothèse de départ qu'aucun y_n n'appartient à $f(W)$. Donc $f(X)$ est une sous-variété de Y.
Enfin, il suffit de remarquer que f est bijective, et que donc son inverse est bien définie, et que c'est un difféomorphisme local. Nous concluons alors que $f : X \to f(X)$ est un difféomorphisme.

□

4. Submersions

Nous étudions maintenant le cas où $\dim X \geq \dim Y$. Nous nous intéressons plus particulièrement au cas où la dérivée de f est surjective.

DÉFINITION 1.15.
- Une application lisse $f : X \to Y$ est une *submersion en* x si $df_x : T_x(X) \to T_y(Y)$ est surjective.
- Si c'est le cas pour tout $x \in X$, f est une *submersion*.
- La *submersion canonique* est définie par la projection de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^l$, $k \geq l$, qui à $(a_1, \ldots, a_k)$ associe $(a_1, \ldots, a_l)$.

THÉORÈME 1.16. *(sans preuve) Soit $f : X \to Y$ une submersion en x, et $y = f(x)$. Alors il existe des coordonnées locales autour de x et de y telles que f est localement équivalente à la submersion locale. C'est à dire, $f(x_1, \ldots, x_k) = (x_1, \ldots, x_l)$.*

La preuve de ce théorème est analogue à celle du théorème d'immersion locale et peut être trouvée dans [**1**].

DÉFINITION 1.17. Soit $f : X \to Y$ une application lisse. $y \in Y$ est une *valeur régulière* de f si pour tout $x \in f^{-1}(y)$, $df_x : T_x(X) \to T_y(Y)$ est surjective.
Une *valeur critique* est une valeur non régulière.

THÉORÈME 1.18. *Si y est une valeur régulière de $f : X \to Y$, alors $f^{-1}(y)$ est une sous-variété de X de dimension $\dim X - \dim Y$.*

DÉMONSTRATION. Par le théorème de submersion locale, il existe des coordonnées locales de x et y telles que $f(x_1, \ldots, x_k) = (x_1, \ldots, x_l)$. Supposons, sans perte de généralité, que y correspond aux coordonnées $(0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^l$. Notons $V \subset \mathbb{R}^k$ l'ouvert où les coordonnées $(x_1, \ldots, x_k)$ sont définies. Alors, dans un voisinage de x,

$$f^{-1}(y) \cap V = \{(x_1, \ldots, x_k) | x_1 = \ldots = x_l = 0\}$$

De plus, $f^{-1}(y) \cap V$ est un ouvert de $f^{-1}(y)$ et est donc une paramétrisation locale de ce dernier. Ainsi $f^{-1}(y)$ est localement difféomorphe à $\{(x_1, \ldots, x_k) | x_1 = \ldots = x_l = 0\}$. Donc $f^{-1}(y)$ est une variété de dimension $k - l = \dim X - \dim Y$.

□

On dit par convention que les $y \in Y \backslash f(X)$ sont des valeurs régulières de f.
En résumé,
- si $\dim X > \dim Y$, y est une valeur régulière si f est une submersion pour tout $x \in f^{-1}(y)$.
- si $\dim X = \dim Y$, y est une valeur régulière si f est un difféomorphisme local pour tout $x \in f^{-1}(y)$. En effet, dans le cas où $\dim X = \dim Y$, l'application linéaire $df_x : T_x(X) \to T_y(Y)$ est bijective si et seulement si elle est surjective, *i.e.* y est une valeur régulière de f.
- si $\dim X < \dim Y$, y est une valeur régulière si $y \notin f(X)$, et les $y \in f(X)$ sont critiques.

Nous énonçons enfin une proposition qui pourra s'avérer utile par la suite.

PROPOSITION 1.19. *Soit $f : X \to Y$ lisse, y une valeur régulière de f, et $Z = f^{-1}(y)$. Alors $\ker df_x = T_x(Z)$ pour tout $x \in Z$.*

CHAPITRE 2

Théorème de Sard

Après avoir défini les bases nécessaires en matière de variétés, nous sommes en mesure de prouver le théorème de Sard. Il nous faut encore quelques notions comme la définition d'ensembles dit de mesure nulle, ainsi que de quelques résultats intermédiaires.

1. Préliminaires

Définition 2.1. Soit $a, b \in \mathbb{R}^n$ avec $a_i < b_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$.
- Un *rectangle de* $\mathbb{R}^n$ est $S(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^n | a_i < x_i < b_i\}$.
- S est un *cube* si $b_i - a_i = \text{cte}$
- Le *volume de* S est $\text{vol}(S) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$.

Définition 2.2. Un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ est dit de *mesure nulle* si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un recouvrement dénombrable de rectangles $S_1, S_2, \ldots$ tel que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(S_i) < \epsilon$$

Un sous-ensemble C d'une variété Y de dimension l est dit *de mesure nulle dans* Y si pour toute paramétrisation locale ψ de Y, $\psi^{-1}(C)$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^l$.

Remarque 2.3. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. Alors A est de mesure nulle au sens de 2.2 si et seulement si A est mesure de Lebesgue nulle. On le note $\lambda^n(A) = 0$.

Proposition 2.4. *Soient* S *un rectangle de* $\mathbb{R}^n$ *et* $S_1, S_2, \ldots$ *un recouvrement de rectangles de* $\overline{S}$. *Alors*

$$\sum_{j=1}^{\infty} vol(S_j) \geq vol(S)$$

Démonstration. Posons $S = S(a, b)$ avec $a = (a_1, \ldots, a_n)$ et $b = (b_1, \ldots, b_n)$. Le nombre d'entiers dans l'intervalle $[a_i, b_i]$ est compris entre $b_i - a_i - 1$ et $b_i - a_i + 1$. Supposons pour l'instant que $b_i - a_i > 1$, c'est à dire que les côtés de S sont plus grands que 1. Alors le nombre de points à coordonnées entières dans S est compris entre $\prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i - 1)$ et $\prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i + 1)$. S est un compact de $\mathbb{R}^n$ donc on peut extraire de $S_1, S_2, \ldots$ un recouvrement fini. Après une éventuelle permutation, notons-le $S_1, \ldots, S_N$. Le nombre de points à coordonnées entières dans S est au plus égal à la somme des nombres de points à coordonnées entières contenus dans chaque S_j, $j = 1, \ldots, N$. Si on note $S_j = S(a^j, b^j)$ avec $a^j = (a_1^j, \ldots, a_n^j)$ et $b^j = (b_1^j, \ldots, b_n^j)$, on a :

$$\prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i - 1) \leq \sum_{j=1}^{N} \prod_{i=1}^{n}(b_i^j - a_i^j + 1)$$

On peut pour tout $\lambda > 0$, définir $\lambda S(a,b) = S(\lambda a, \lambda b)$. Alors $\lambda S_1, \ldots, \lambda S_N$ est un recouvrement de $\lambda \overline{S}$. Donc

$$\prod_{i=1}^{n}(\lambda b_i - \lambda a_i - 1) \leq \prod_{i=1}^{n}(\lambda b_i^j - a_i^j + 1)$$

Pour un λ assez grand, λS aura des côtés de longueur plus grande que 1. Divisons maintenant la dernière inégalité par λ^n. Il vient :

$$\prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i - \frac{1}{\lambda}) \leq \sum_{j=1}^{N}\prod_{i=1}^{n}(b_i^j - a_i^j + \frac{1}{\lambda})$$

En laissant $\lambda \to \infty$, on a $\mathrm{vol}(S) \leq \sum_{j=1}^{N} \mathrm{vol}(S_j)$.

□

Pour montrer le théorème de Sard, nous allons avoir besoin du théorème de Fubini, appliqué aux ensembles de mesure nulle. Pour la suite, écrivons $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$.

DÉFINITION 2.5. Soit $c \in \mathbb{R}^k$. La *tranche verticale* en c est $V_c = \{c\} \times \mathbb{R}^l \subset \mathbb{R}^n$.

Un sous-ensemble $\{c\} \times U$ de V_c sera dit de mesure nulle si U est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^l$.

LEMME 2.6. *Soit $S_1, \ldots, S_N$ un recouvrement d'intervalles de $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Alors il existe un sous-recouvrement $S'_1, \ldots, S'_M$ de $[a,b]$ tel que $\sum_{j=1}^{\infty} vol(S'_j) < 2(b-a)$*

DÉMONSTRATION. Parmi tous les S_i, enlevons ceux qui sont entièrement inclus dans une union d'autres intervalles du recouvrement. Alors le recouvrement obtenu est un recouvrement *minimal*, au sens que si on enlève l'un des intervalles de ce recouvrement, le résultat n'est plus un recouvrement de $I = [a,b]$.
Réécrivons ce recouvrement (moyennant une permutation) $S_1, \ldots, S_M$, avec $M \leq N$ et ordonnons les intervalles de telle sorte que $a_1 \leq \ldots \leq a_M$. Alors $b_1 \leq \ldots \leq b_M$. En effet, si ce n'était pas le cas, un de intervalles serait inclus dans une union d'autres. De plus, on a $[a_k, b_k] \cap [a_{k+2}, b_{k+2}] = \emptyset$. Donc $[a_2, b_2], [a_4, b_4], \ldots$ ont une longueur totale inférieure à $b-a$. De même avec $[a_1, b_1], [a_3, b_3], \ldots$. D'où le résultat cherché.

□

LEMME 2.7. *Soit A un compact de $\mathbb{R}^n$. Supposons que $A \cap V_c$ soit contenu dans un ouvert U de V_c. Notons $V_I = I \times \mathbb{R}^{n-1}$*
Alors pour tout intervalle I suffisamment petit autour de c, $A \cap V_I \subset I \times U$

DÉMONSTRATION. Prouvons le résultat par l'absurde. Ainsi supposons que $A \cap V_I \not\subseteq I \times U$. Alors, il existe une suite de points (c_n, x_n) de A telle que $c_n \to c$ et $x_n \notin U$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Maintenant A est compact donc $A \cap V_c$ l'est aussi. Donc (c_n, x_n) admet une sous-suite convergente. Ainsi il y'a une infinité de x_n tels que $x_n \in U$. Contradiction.

□

THÉORÈME 2.8. *(Fubini pour la mesure nulle)*
Soit A un fermé de $\mathbb{R}^n$ tel que $A \cap V_c$ est de mesure nulle dans V_c (c'est à dire que $\lambda^l(A \cap V_c) = 0$). Alors $\lambda^n(A) = 0$.

DÉMONSTRATION. A peut être écrit comme union dénombrable de compacts, donc il suffit de prouver le résultat pour un compact. Nous allons le prouver pour $k = 1$ et $l = n-1$. Soit A un compact. On peut l'inclure dans un ensemble du type $V_I = I \times \mathbb{R}^{n-1} = [a, b] \times \mathbb{R}^{n-1}$. A est de mesure nulle donc $A \cap V_c$ l'est aussi et donc pour chaque $c \in I$, on peut recouvrir $A \cap V_c$ par N_c rectangles de dimension $n-1$: $S_1(c), \ldots, S_{N_c}(c)$, de volume total plus petit qu'un ϵ donné. Le lemme 2.7 nous garantit l'existence d'un intervalle $J(c) \subset \mathbb{R}$ tel que les $J(c) \times S_i$ forment un recouvrement de $A \cap V_J$. De plus, puisque les $J(c)$ forment un recouvrement de $[a, b]$, on peut en extraire (par le lemme 2.6) un recouvrement fini $\{J'_j\}$ de longueur totale plus petite que $2(b-a)$. Chaque J'_j est contenu dans un $J_{(c_j)}$. Donc les $J'_j \times S_i(c_j)$ forment un recouvrement de A, de volume total plus petit que $2\epsilon(b-a)$. Le théorème est donc prouvé pour $k = 1$ et $l = n-1$. Il suffit d'appliquer autant de fois que l'on veut cet argument pour avoir le résultat pour k et l quelconques.

□

THÉORÈME 2.9. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application différentiable définie sur un ouvert. Si $A \subseteq U$ est mesure nulle, alors $f(A)$ est de mesure nulle.*

DÉMONSTRATION. Nous pouvons nous restreindre à prouver le résultat pour les A tels que $\overline{A}$ est compact. Dans le cas général il suffira de considérer les unions dénombrables de compacts. Soit donc W un voisinage ouvert de A tel que $\overline{W} \subseteq U$ est compact.
Sur $\overline{W}$, f atteint son minimum et son maximum, donc df_x est bornée en norme pour tout $x \in \overline{W}$. Donc il existe $M > 0$ tel que :

$$|f(x) - f(y)| < M|x - y|$$

pour tous $x, y \in \overline{W}$. Considérons maintenant un cube S contenu dans W. Alors il existe une constante M' telle que $f(S)$ soit contenu dans un cube de volume moindre que $M'\text{vol}(S)$.
De plus, A étant de mesure nulle, il est possible de le recouvrir par une famille dénombrable de cubes S_i, chaque S_i étant contenu dans W, et de volume total moindre qu'un ϵ donné. Alors il existe un recouvrement de cubes $S'_1, S'_2, \ldots$ de $f(A)$, de volume total inférieur à $M'\epsilon$. Ceci vaut pour tout $\epsilon > 0$, donc $\lambda^n(f(A)) = 0$.

□

THÉORÈME 2.10. *(Mini-Sard) Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application différentiable définie sur un ouvert.*
Si $m > n$ alors $f(U)$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^m$ (i.e. $\lambda^m(f(U)) = 0$.

DÉMONSTRATION. Écrivons f comme la composée $f = F \circ \phi$, où

$$F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$$

$$(x_1, \ldots, x_m) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n)$$

et :

$$\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$$(x_1, \ldots, x_m) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$$

Alors $\lambda^m(\phi(\mathbb{R}^n)) = 0$. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Alors

$$\lambda^m(f(U)) = \lambda^m(F(\phi(U))) = 0$$

□

2. Preuve

Avant de prouver le théorème de Sard pour une application entre variétés, nous allons prouver une version pour applications entre espaces euclidiens du type $\mathbb{R}^n$.

THÉORÈME 2.11. *Soit $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application lisse. Soit C l'ensemble des points critiques de f. Alors $f(C)$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^n$. C'est à dire, $\lambda^m(f(C)) = 0$.*

DÉMONSTRATION. Nous allons prouver le résultat par récurrence sur n. Pour $n = 0$, il y'a au plus un point dans C et donc $f(C)$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^m$. Supposons donc le théorème vrai pour $n-1$ et prouvons-le pour n.

Pour montrer ce théorème, nous avons besoin de 3 lemmes. Notons C_i l'ensemble des $x \in U$ dont les dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à i sont nulles. Alors $C \supset C_1 \supset C_2 \ldots$.

LEMME 2.12. $\lambda^m(f(C - C_1)) = 0$

LEMME 2.13. $\lambda^m(f(C_k - C_{k+1})) = 0$ *si* $k \geq 1$

LEMME 2.14. $\lambda^m(f(C_k)) = 0$ *si* $k > \frac{n}{m} - 1$

DÉMONSTRATION. de 2.12

Soit $x \in C - C_1$. Il y a une des dérivées partielles d'ordre 1 de f en x qui est non nulle. Supposons sans perte de généralité que c'est $\frac{\partial f}{\partial x_1}$. Définissons alors $h : U \to \mathbb{R}^n$ par $h(x) = (f_1(x), x_2, \ldots, x_n)$. dh_x n'est pas singulière, le théorème de la fonction inverse dit que h est un difféomorphisme local. Soit donc V un voisinage de x que h envoie difféomorphiquement sur V'. L'application définie alors par $g = f \circ h^{-1}$ envoie V' sur $\mathbb{R}^m$, et elle a les mêmes valeurs critiques que la restriction de f à V. g envoie donc des points de V' de la forme $(t, x_2, \ldots, x_n)$ vers des points de $\mathbb{R}^m$ de la forme $(t, y_2, \ldots, y_m)$. Donc, pour tout t, g induit une application

$$g_t : (t \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap V' \to t \times \mathbb{R}^{m-1}$$

Ses dérivées partielles s'écrivent

$$(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ * & (\frac{\partial (g_t)_i}{\partial x_j}) \end{bmatrix} \tag{1}$$

Donc

$$\det(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}) = \det(\frac{\partial (g_t)_i}{\partial x_j})$$

Ainsi un point critique pour g si seulement si il est critique pour une certaine g_t. Appliquons l'hypothèse de récurrence à g_t : ses valeurs critiques ont mesure nulle, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Par le théorème de Fubini, les valeurs critiques de g ont mesure nulle.

□

DÉMONSTRATION. de 2.13

Soit $x \in C_k - C_{k+1}$. Donc il existe une dérivée partielle d'ordre k de f en x, disons ρ, qui est nulle sur C_k mais dont une des dérivées premières n'est pas nulle. Posons alors $h(x) = (\rho(x), x_2, \ldots, x_n)$. C'est un difféomorphisme local d'un voisinage V de x vers un ouvert V' de $\mathbb{R}^n$. h envoie donc $C_k \cap V$ dans $0 \times \mathbb{R}^{n-1}$. Posons $g = f \circ h^{-1} : 0 \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^m$. Alors les points critiques de g du type C_k

sont dans $0 \times \mathbb{R}^{n-1}$. Considérons maintenant la restriction $\overline{g}$ de g à $(0 \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap V'$. Par Sard appliqué à $\overline{g}$, les valeurs critiques de $\overline{g}$ sont de mesure nulle dans $\mathbb{R}^m$. Les points critiques de g étant les mêmes que ceux de $\overline{g}$, les valeurs critiques de g ont mesure nulle. Donc $\lambda^m(f(C_k \cap V)) = 0$. Comme on peut décrire $C_k - C_{k+1}$ par une réunion dénombrable d'ensembles $C_k \cap V$ de ce type, $\lambda^m(f(C_k - C_{k+1})) = 0$.

□

Démonstration. de 2.14

Soit $S \subseteq U$ un cube de côtés de longueur δ. Écrivons le développement de Taylor de f à l'ordre k :

$$f(x+h) = f(x) + R(x,h)$$

où $R(x,h)$ est un reste d'ordre $k+1$, c'est à dire :

$$\|R(x,h)\| < a\|h\|^{k+1}$$

pour tout $x \in C_k \cap S$, et $x + h \in S$. Écrivons maintenant S comme réunion de r^n cubes de côtés de longueur δ/r. Soit S_1 le cube contenant un $x \in C_k$ (sans perte de généralité). Alors n'importe quel point de S peut s'écrire comme $x + h$, avec

$$\|h\| < \sqrt{n}(\frac{\delta}{r})$$

Ainsi, $f(S_1)$ est entièrement contenu dans un cube de côtés de longueur $\frac{b}{r^{k+1}}$ où

$$b = 2a(\sqrt{n}\delta)^{k+1}$$

Alors $f(C_k \cap S)$ est entièrement contenu dans un cube de volume total

$$v \leq r^n(\frac{b}{r^{k+1}})^m = b^m r^{n-(k+1)m}$$

Ainsi si $k + 1 > n/m$, alors $v \to 0$ lorsque $r \to \infty$, alors $f(C_k \cap S)$ est de mesure nulle. Comme on peut recouvrir $f(C_k)$ par une réunion dénombrable d'ensembles du type $f(C_k \cap S)$, on a que $\lambda^m(f(C_k)) = 0$ si $k > n/m - 1$.

□

□

Théorème 2.15. *(Sard) Soit $f : X \to Y$ une application lisse entre variétés. Soit C l'ensemble des points critiques de f. Alors $f(C)$ est de mesure nulle dans Y.*

Démonstration. Considérons les paramétrisations locales ϕ_i et ψ_i de X et Y.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ U_i \subseteq \mathbb{R}^k \arrow[u, "\phi_i"] \arrow[r, "h_i"'] & V_i \subseteq \mathbb{R}^l \arrow[u, "\psi_i"'] \end{tikzcd}$$

On a que $h_i = \psi_i^{-1} \circ f \circ \phi_i$. Le théorème de Sard nous dit que les valeurs critiques de h ont mesure nulle dans $\mathbb{R}^l$. Or $x \in X$ est un point critique de f si et seulement si $\phi_i^{-1}(x)$ est un point critique de h_i, pour un certain $i \in \mathbb{N}$. On a en effet une famille dénombrable d'applications ϕ_i et ψ_i qui paramétrisent entièrement

X et Y. Donc pour chaque h_i, ses valeurs critiques sont de mesure nulle dans $\mathbb{R}^l$. Donc, les valeurs critiques de f ont mesure nulle dans Y. □

THÉORÈME 2.16. *(Sard reformulé)*
L'ensemble des valeurs critiques d'une application lisse entre variétés est de mesure nulle.

THÉORÈME 2.17. *L'ensemble des valeurs régulières d'une application lisse $f : X \to Y$ est dense dans Y.*
De plus, si $f_i : X \to Y$ est une famille dénombrable d'applications lisses, alors les valeurs régulières simultanées des f_i sont denses dans Y.

DÉMONSTRATION. Supposons l'ensemble des valeurs régulières de $f : X \to Y$ ne soit pas dense dans Y. Alors il existe un ouvert non vide $W \subset Y$ dont tous les éléments sont des valeurs critiques. Comme Y est une variété lisse, cet ensemble W est difféomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^l$. Or un ouvert de $\mathbb{R}^l$ n'est pas de mesure nulle (on peut l'exprimer comme union dénombrable de boules ouvertes de $\mathbb{R}^l$, aucune n'étant de mesure nulle). Ainsi W n'est pas de mesure nulle, en contradiction avec le théorème de Sard.
Pour prouver la deuxième assertion du corollaire, il suffit de montrer que l'union dénombrable $\cup A_i$ d'ensembles de mesure nulle est de mesure nulle (cela est une conséquence du fait qu'un ensemble de mesure nulle au sens de 2.2 est de mesure de Lebesgue nulle, le fait que la mesure de Lebesgue est σ-additive permettant de conclure). Prouvons-le tout de même. Pour chaque A_i, on peut trouver un recouvrement $S_{i,1}, S_{i,2}, \ldots$ de rectangles de $\mathbb{R}^n$ tel que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{vol}(S_{i,j}) < \frac{\epsilon}{2^i}$$

Alors la famille $\cup_j S_{i,j}$ est un recouvrement de $\cup A_i$. Son volume total est moindre que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^i} = \epsilon$$

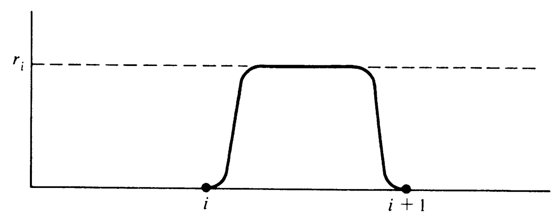
Il suffit de prendre A_i comme étant les points critiques de f_i pour terminer la preuve du corollaire.

□

3. Exemples

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction lisse. Alors l'ensemble C des points critiques de f est $\{x \in \mathbb{R} | f'(x) = 0\}$. Le théorème nous dit $\lambda^1(f(C)) = 0$. Remarquons que comme $C = C_1$, alors le lemme 2.12 du théorème de Sard est vide de sens. Le lemme 2.13 constitue alors à lui seul le théorème de Sard, de même que le lemme 2.14.

Prenons un cas particulier intéressant de fonction lisse sur $\mathbb{R}$. Définissons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la façon suivante : prenons $\{r_0, r_1, \ldots\}$ une énumération des nombres rationnels, et construisons f par blocs sur chaque intervalle $[i, i+1]$ comme ceci :



Une telle construction avec f lisse est possible, et on a $f(i) = f(i+1) = 0$ pour tout i entier naturel, et les valeurs critiques de f sont les r_i pour $i \in \mathbb{N}$. L'ensemble des valeurs critiques de f est donc $\mathbb{Q}$, qui est dense dans $\mathbb{R}$, mais qui reste de mesure nulle !

CHAPITRE 3

Applications

1. Théorème de Morse

Le théorème de Sard s'applique directement en théorie de Morse. On s'intéresse à certains points critiques d'une application lisse f.

DÉFINITION 3.1. Soit $f : U \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ lisse. Soit a un point critique de f. La matrice *Hessienne* de f en a est : $H(a) = (h_{ij}(a)) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)$. a est dit *non dégénéré* si $\det H(a) \neq 0$.

LEMME 3.2. *(Lemme de Morse) Soit f une fonction réelle de k variables réelles. Soit $a \in \mathbb{R}^k$ un point critique non dégénéré de f. Alors il existe un système de coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_k)$ autour de a tel que $f = f(a) + \sum h_{ij} x_i x_j$ dans un voisinage de a.*

Ainsi, à difféomorphisme près, on peut complètement déterminer le comportement local de f au voisinage de ses points critiques non dégénérés. Ainsi f est localement un polynôme de degré 2. Ce lemme est bien plus puissant que la caractérisation déjà connue des points critiques de f à l'aide de la matrice Hessienne.

LEMME 3.3. *Soit $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$. Supposons que 0 est un point critique non dégénéré de f. Soit ψ un difféomorphisme avec $\psi(0) = 0$. Alors 0 est aussi un point critique non dégénéré de $f \circ \psi$.*

DÉFINITION 3.4. Sont appelées *fonctions de Morse* les fonctions dont tous les points critiques sont non dégénérés.

LEMME 3.5. *Soit $f : U \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ lisse. Alors pour presque tout $a = (a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^k$, la fonction définie par :*

$$f_a(x) = f(x) + a_1 x_1 + \ldots a_k x_k = f(x) + < a, x >$$

est une fonction de Morse sur U.

DÉMONSTRATION. Soit $g : U \to \mathbb{R}^k$ définie par $g(x) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_k}(x))$. Alors

$$(df_a)_p = (\frac{\partial f_a}{\partial x_1}(p), \ldots, \frac{\partial f_a}{\partial x_k}(p)) = g(p) - a$$

Ainsi g et f_a ont les mêmes points critiques, et f et f_a ont les mêmes dérivées secondes. Ainsi l'Hessian de f en p est dg_p.
Si $-a$ est une valeur régulière de g, alors (dg_p) est non singulière et donc tous les points critiques de f_a sont non dégénérés. Donc les points critiques de f sont non dégénérés. Or, par Sard, ceci est vrai pour presque tout $a \in \mathbb{R}$. Ainsi f_a est une fonction de Morse pour presque tout $\in \mathbb{R}$.

$\square$

THÉORÈME 3.6. *Soit une fonction* ***quelconque*** $f : X \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. *Alors pour presque tout* $a \in \mathbb{R}^N$, *la fonction* f_a *définie par :*

$$f_a(x) = f(x) + a_1x_1 + \ldots a_Nx_N = f(x) + < a, x >$$

est une fonction de Morse.

2. Théorème de Whitney

Dans cette section nous essayons de voir comment il est possible de définir un plongement d'une variété de dimension k dans $\mathbb{R}^N$, et quelles conditions on doit imposer sur N pour que cela soit possible, et de déterminer si possible la valuer minimale de N, en fonction de k. Nous définissons d'abord le fibré tangent à une variété.

DÉFINITION 3.7. Soit X une variété lisse et $T_x(X)$ l'espace tangent à X en x. Le fibré tangent de X est

$$T(X) = \{(x, v) | v \in T_x(X)\}$$

PROPOSITION 3.8. *Le fibré tangent à une variété* X *est une variété, et*

$$\dim T(X) = 2 \dim X$$

DÉMONSTRATION. Soit W un ouvert de X, alors

$$T(W) = T(X) \cap (W \times \mathbb{R}^N) \subseteq T(X)$$

$T(W)$ est donc un ouvert de $T(X)$ car $W \times \mathbb{R}^N$ est un ouvert de $X \times \mathbb{R}^N$. Soit maintenant (U, ϕ) une carte de W, $U \subset \mathbb{R}^k$ un ouvert, k étant la dimension de X. Donc $d\phi : T(U) \to T(W)$ est un difféomorphisme. U étant de ouvert de $\mathbb{R}^k$, $T(U) = U \times \mathbb{R}^k$, qui est un ouvert de $\mathbb{R}^{2k}$. On a donc trouvé un difféomorphisme entre n'importe quel ouvert de $T(X)$ et un ouvert de $\mathbb{R}^{2k}$. Ceci est bien la définition d'une variété différentiable de dimension $2k$.

□

THÉORÈME 3.9. *Toute variété de dimension* k *admet une immersion injective dans* $\mathbb{R}^{2k+1}$.

DÉMONSTRATION. Soit $X \subseteq \mathbb{R}^N$ de dimension k. Soit $M > 2k+1$ et $f : X \to \mathbb{R}^M$ une immersion injective, et posons

$$h : X \times X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^M$$

$$(x, y, t) \mapsto h(x, y, t) = t(f(x) - f(y))$$

et :

$$g : T(X) \to \mathbb{R}^M$$

$$(x, v) \mapsto g(x, v) = df_x(v)$$

Comme $M > 2k+1$, par le théorème de Sard, il existe un élément a de $\mathbb{R}^M$ qui n'appartienne pas à $\Im g \cup \Im h$ (hormis $0 \in \mathbb{R}^M$). Soit π la projection de $\mathbb{R}^M$ sur le sous-espace vectoriel orthogonal à a, noté $H = \{b \in \mathbb{R}^M | < b, a >= 0\}$. Considérons maintenant $\pi \circ f : X \to H$. Cette application est injective. En effet, soit x, y distincts tels que $\pi \circ f(x) = \pi \circ f(y)$. Alors il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) - f(y) = ta$; $x \neq y$ donc $f(x) \neq f(y)$ donc $t \neq 0$. Or,

$$h(x, y, 1/t) = 1/t \cdot ta = a$$

Contradiction : $a \in \Im h$. Donc $x = y$ et $\pi \circ f$ est injective.
Montrons maintenant que $\pi \circ f$ est une immersion. Considérons donc sa dérivée $d(\pi \circ f)$ et supposons que v est un vecteur de $T_x(X)$ tel que $d(\pi \circ f)_x(v) = 0$. Ceci veut dire que $\pi \circ df_x(v) = 0$. Cela implique $df_x(v) \in H^\perp$. Donc $df_x(v) = ta$ pour un certain $t \in \mathbb{R}$. f est une immersion donc $t \neq 0$. Mais

$$g(x, 1/tv) = 1/t \cdot ta = a$$

Contradiction avec le fait que a n'est pas élément de $\Im g$.
En conclusion, on a trouvé un vecteur $a \in \mathbb{R}^M$ tel que la composée de f avec la projection orthogonale π envoie X sur H, qui est une variété de dimension $M-1$. Ce raisonnement est valable pour tout $M > 2k+1$, donc au minimum pour $M = 2k+2$, on obtient alors une immersion de X vers $\mathbb{R}^{2k+1}$.

□

Pour les variétés compactes, les immersions injectives sont des plongements. On a donc prouvé que toute variété compacte de dimension k admet un plongement dans $\mathbb{R}^{2k+1}$. Pour que le résultat soit vrai pour les variétés non compactes, on doit rendre l'immersion propre. On fait appel pour ceci aux partitions de l'unité, que l'on donnera sans preuve.

Théorème et Définition 3.10. *Soit $X \subseteq \mathbb{R}^N$. Alors pour tout recouvrement d'ouverts U_α, il existe une suite de fonctions différentiables $\{\theta_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ définies sur X (appelées partition de l'unité subordonnée aux ouverts $\{U_\alpha\}$) qui vérifient ces propriétés :*

- $0 \leq \theta_i(x) \leq 1$ *pour tout $x \in X$ et $i \in \mathbb{N}$*
- *Tout $x \in X$ admet un voisinage où toutes les θ_i sont identiquement nulles, sauf un nombre fini d'entre elles.*
- *Pour tout $x \in X$, $\sum_{i=1}^{\infty} \theta_i(x) = 1$.*

Corollaire 3.11. *Toute variété X admet une application propre $\rho : X \to \mathbb{R}$.*

Démonstration. Soit U_α un recouvrement dont la fermeture est compacte, et θ_i une partition de l'unité subordonnée. Posons alors $\rho = \sum_{i=1}^{\infty} i\theta_i$. Montrons que ρ est l'application propre cherchée. Soit donc K un compact de $\mathbb{R}$. Alors K est contenu dans $[-j, j]$ pour un certain $j \in \mathbb{N}$. Or par définition de ρ,

$$\rho^{-1}([-j, j]) \subseteq \bigcup_{i=1}^{j} \{x | \theta_i(x) \neq 0\}$$

a sa fermeture compacte, donc $\rho^{-1}(K)$ est un compact pour tout K compact de $\mathbb{R}$. ρ est donc propre.

□

Théorème 3.12. *(Whitney) Toute variété X de dimension k admet un plongement dans $\mathbb{R}^{2k+1}$.*

Démonstration. Nous allons, à partir des propositions et théorèmes précédents, construire ce plongement. Soit $g : X \to \mathbb{R}^{2k+1}$ une immersion injective. Composons la avec le difféomorphisme $\phi : \mathbb{R}^{2k+1} \to B(0, 1)$ défini par $\phi(z) = \frac{z}{1+|z|^2}$. Posons $f = \phi \circ g$. f est une immersion injective de X vers $\mathbb{R}^{2k+1}$, telle que pour tout $x \in X$, $|f(x)| < 1$. Soit par ailleurs $\rho : X \to \mathbb{R}$ dont l'existence est garantie par le corollaire 3.11. Définissons maintenant $F : X \to \mathbb{R}^{2k+2}$ comme $F(x) = (f(x), \rho(x))$.

Composons F avec la projection π sur le sous-espace H orthogonal à un certain $a \in \mathbb{R}^{2k+2}$. La composée $\pi \circ F$ reste injective pour presque tout $a \in S^{2k+1}$; en fait c'est le cas pour tous les a sauf les pôles nord et sud de S^{2k+1}. Il nous faut maintenant montrer que $\pi \circ F$ est propre. Soit $c \in \mathbb{R}$ une borne positive et considérons :

$$\{x \in X | \, |\pi \circ F(x)| \leq c\}$$

Si l'on montre que cet ensemble est inclus dans

$$\{x| \, |\rho(x)| \leq d\}$$

pour un certain $d \geq 0$, alors cela prouvera que $\pi \circ F$ est propre.
Supposons donc par l'absurde qu'il existe une suite de points $x_i \subset X$ telle que $|\pi \circ F(x_i)| < c$ mais $\rho(x_i) \to \infty$. $\pi \circ F(x_i)$ est un élément du sous espace vectoriel orthogonal à a, donc $F(x_i) - \pi \circ F(x_i)$ est un multiple de a, et ce pour tout i. On a :

$$\frac{F(x_i)}{\rho(x_i)} = \left(\frac{f(x_i)}{\rho(x_i)}, 1 \right)$$

$f(x_i)$ est borné en norme donc

$$\frac{f(x_i)}{\rho(x_i)} \to (0, \ldots, 0)$$

De plus,

$$| \, \frac{\pi \circ F(x_i)}{\rho(x_i)} \, | \leq \frac{c}{\rho(x_i)} \to 0$$

Posons alors

$$w_i = \frac{1}{\rho(x_i)} [F(x_i) - \pi \circ F(x_i)] \to (0, \ldots, 0, 1)$$

Or chaque w_i est un multiple de a, donc la limite aussi. Donc soit $a = (0, \ldots, 0, 1)$ soit $a = (0, \ldots, 0, -1)$, ce qui contredit l'assertion dite plus haut, selon laquelle a ne doit pas être un pôle de S^{2k+1}. Donc $|\rho(x_i)|$ est borné. Nous avons donc prouvé :

$$\{x| \, |\pi \circ F(x)| \leq c\} \subseteq \{x| \, |\rho(x)| \leq d\}$$

pour un certain $d \geq 0$. Donc, $\pi \circ F$ est une application propre, c'est à dire que la préimage de n'importe quelle boule dans H est incluse dans un compact de X. $\square$

Notons qu'il existe une version plus forte du théorème de Whitney qui dit qu'une variété de dimension k admet une immersion dans $\mathbb{R}^{2k}$.

CHAPITRE 4

Transversalité

Dans ce chapitre nous nous intéressons à des variétés avec bord et à quelques propriétés d'applications entre variétés à bord ou sans bord.

DÉFINITION 4.1.
- Un sous-ensemble $X \subseteq \mathbb{R}^N$ est une *variété à bord de dimension* k si tout point $x \in X$ possède un voisinage difféomorphe à un ouvert de $\mathbb{H}^k = \{x \in \mathbb{R}^k \mid x_k \geq 0\}$.
- Le *bord* de X, noté ∂X est défini comme la préimage de $\partial\mathbb{H}^k = \{x \in \mathbb{R}^k \mid x_k = 0\}$ par des paramétrisations de la structure différentielle de X.
- Si $f : X \to Y$ est une application entre variétés et X est à bord, alors on note ∂f la restriction de f à ∂X

DÉFINITION 4.2. Une application $f : X \to Y$ est dite *transversale* à la sous-variété $Z \subseteq X$ si

$$\Im(df_x) + T_y(Z) = T_y(Y)$$

pour tout $x \in f^{-1}(Z)$, $y = f(x)$. On le note $f \pitchfork Z$.
Deux sous-variétés X et Z de Y sont *transversales* si

$$T_x(X) + T_x(Z) = T_x(Y)$$

pour tout $x \in X \cap Z$. On note $X \pitchfork Z$.

EXEMPLE 4.3. Soit $A : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire et V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Alors $A \pitchfork V$ si et seulement si $\Im dA_x + T_{Ax}(V) = T_{Ax}(\mathbb{R}^n)$, c'est à dire $A(\mathbb{R}^k) + V = \mathbb{R}^n$.
Si V et W sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$, alors $V \pitchfork W \Leftrightarrow T_x(V) + T_x(W) = \mathbb{R}^n$ pour tout $x \in V \cap W$, c'est à dire $V + W = \mathbb{R}^n$.

THÉORÈME 4.4. *(sans preuve) L'intersection de deux sous-variétés transversales X et Z est une sous-variété. De plus,* $\operatorname{codim} X \cap Z = \operatorname{codim} X + \operatorname{codim} Z$.

THÉORÈME 4.5. *(Théorème de transversalité)*
Soit $F : X \times S \to Y$ une application différentiable entre variétés. Supposons que X ait un bord, mais pas S ni Y, et soit Z une sous-variété sans bord de Y. Supposons enfin que F et ∂F sont transversales à Z.
Alors pour presque tout $s \in S$, f_s et ∂f_s sont transversales à Z.

DÉMONSTRATION. Remarquons tout d'abord que $W = F^{-1}(Z)$ est une sous-variété de $X \times S$, son bord est $\partial W = W \cap \partial(X \times S)$. Notons $\pi : X \times S \to S$ la projection canonique. Nous allons montrer que pour toute valeur régulière s de $\pi|_W$ et pour toute valeur régulière t de $\partial\pi$, les applications f_s et ∂f_t sont transversales à Z. Le théorème de Sard nous permettra de conclure car presque tout $s \in S$ est une valeur régulière des deux applications susmentionnées.

Soit donc $x \in X \times S$ tel que $f_s(x) = z \in Z$. On sait que F est transversale à Z donc :

$$dF_{(x,s)}T_{(x,s)}(X \times S) + T_z(Z) = T_z(Y)$$

Ceci veut dire que pour tout $a \in T_z(Y)$, l'on peut trouver un élément b de $T_{(x,s)}(X \times S)$ tel que $dF_{(x,s)} - a \in Tz(Z)$. Maintenant $T_{(x,s)}(X \times S) = T_x(X) \times T_s(S)$, donc on peut écrire les deux composantes de b : $b = (w, e)$. Considérons d'abord le cas où $e = 0 \in T_s(S)$. Alors $dF_{(x,s)}(w, 0) = df_s(w)$ car la restriction de F à $X \times s$ n'est autre que f_s. Supposons maintenant $e \neq 0$. Alors la dérivée de π est :

$$d\pi_{(x,s)} : T_x(X) \times T_s(S) \to T_s(S)$$

C'est la projection sur $T_s(S)$. De plus, $d\pi_{(x,s)}T_{(x,s)}(W) = T_s(S)$ donc il existe un élément de la forme (u, e) de $T_{(x,s)}(W)$. Ainsi $dF_{(x,s)}(u, e) \in T_z(Z)$. Posons alors $v = w - u \in T_x(X)$. Alors

$$df_s(v) - a = dF_{(x,s)}[(w, e) - (u, e)] - a = \underbrace{dF_{(x,s)}(w, e) - a}_{\in T_z(Z)} - \underbrace{dF_s(u, e)}_{\in T_z(Z)}$$

Ainsi, pour tout $a \in T_z(Y)$, il existe $v \in T_x(X)$ tel que $df_s(v) - a \in T_z(Z)$, c'est à dire : $df_s(T_x(X)) + T_z(Z) = T_z(Y)$ pour tout $x \in f_s^{-1}(Z)$, autrement dit, f_s est transversale à Z.

Appliquons maintenant ce résultat à l'application $\partial F : \partial X \times S \to Y$. Alors $\partial_s f$ est transversale à $Z = f_s^{-1}(Z)$.

□

Théorème 4.6. *(ϵ-voisinage) (sans preuve) Soit Y une variété sans bord, compacte de $\mathbb{R}^M$, et $\epsilon > 0$. Soit $Y^\epsilon = \{y \in \mathbb{R}^M | d(y, Y) < \epsilon\}$. Pour autant que ϵ soit assez petit, chaque élément $z \in Y^\epsilon$ possède un point $\pi(z)$ qui est le point de Y le plus proche de z. L'application $\pi : Y^\epsilon \to Y$ est une submersion. Si Y n'est pas compacte, alors ϵ doit être une fonction de $y \in Y$.*

Corollaire 4.7. *Soit $f : X \to Y$ une application lisse entre variétés, Y sans bord. Alors il existe S une boule ouverte euclidienne et une application lisse $F : X \times S \to Y$ telle que $F(x, 0) = f(x)$ et telle que l'application $s \mapsto F(x, s)$ soit une submersion. En particulier, F et ∂F sont des submersions.*

Démonstration. Soit donc S une boule de $\mathbb{R}^M \supseteq Y$. Posons $F(x, s) = \pi[f(x) + \epsilon(f(x))s]$. Alors $F(x, 0) = f(x)$ car $\pi|_Y = \mathrm{id}_Y$. Fixons maintenant un $x \in X$. Alors $x \mapsto f(x) + \epsilon(f(x))s$ est une submersion en tant qu'application linéaire. Ainsi $s \mapsto F(x, s)$ est une submersion car composée de deux submersions. Enfin, puisque pour tout $x \in X$ fixé, $s \mapsto F(x, s)$ est une submersion, vu que $X \times S = \cup_{x \in X}\{x\} \times S$, F est une submersion. De même, $\partial X \times S = \cup_{x \in \partial X}\{x\} \times S$, donc ∂F est une submersion.

□

Théorème 4.8. *(Transversalité / Homotopie)*
Soit $f : X \to Y$ différentiable entre variétés. Soit Z une sous-variété sans bord de Y. Alors il existe une application lisse $g : X \to Y$ homotope à f telle que $g \pitchfork Z$ et $\partial g \pitchfork Z$.

Démonstration. Posons, comme dans le corollaire, $F(x, s) = \pi[f(x) + \epsilon(f(x))s]$. Par le théorème de transversalité, on a que f_s et ∂f_s sont transversales à Z pour presque tout $s \in S$. De plus, chaque f_s est homotope à f ; en effet, l'application $X \times [0,1] : (x,t) \mapsto F(x,ts)$ est la bonne homotopie. $\square$

PROPOSITION 4.9. *Soit $f : X \to Y$ une application lisse entre variétés, Z une sous-variété de Y. Supposons que* $\dim X < \operatorname{codim} Z$ *et que $f \pitchfork Z$. Alors $f(X) \cap Z = \emptyset$.*

DÉMONSTRATION. Prouvons le résultat par l'absurde. Supposons qu'il existe un $x \in X$ tel que $f(x) \in Z$. On a :

$$\begin{aligned}\dim(T_{f(x)}(Z) + df_x(T_x(X))) &\leq \dim T_{f(x)}(Z) + \dim T_x(X)\\ &= \dim Z + \dim X < \dim Y = \dim T_{f(x)}(Y)\end{aligned}$$

Ainsi on ne peut pas avoir $T_{f(x)}(Z) + df_x(T_x(X)) = T_{f(x)}(Y)$, et donc impossible d'avoir $f \pitchfork Z$.

$\square$

LEMME 4.10. *Soit $f : X \to Y$ lisse entre variétés. Z une sous-variété de Y. Soit $x \in f^{-1}(Z)$. Supposons qu'il existe un voisinage U de $f(x)$ dans Y et une submersion $\phi : U \to \mathbb{R}^k$, k étant la codimension de Z, et $Z \cap U = \phi^{-1}(0)$.*
Alors f est transversale à Z en x si et seulement si $\phi \circ f$ est une submersion en x. Ainsi $\phi \circ f$ est une submersion en x si et seulement si $f \pitchfork Z$.

DÉMONSTRATION. Remarquons d'abord que $\ker(d\phi)_{f(x)} = T_{f(x)}(Z)$. Alors

$$f \pitchfork Z \Leftrightarrow T_{f(x)}(Y) = T_{f(x)}(Z) + df_x T_x(X)$$

$$\Leftrightarrow T_{f(x)}(Y) = \ker d\phi_{f(x)} + df_x(T_x(X))$$

$d\phi_{f(x)}$ est surjective donc la dernière équivalence est vraie si et seulement si $d(\phi \circ f)_x$ est surjective. Ainsi $\phi \circ f$ est une submersion en p si et seulement si $f \pitchfork Z$ en p. $\square$

Nous énonçons enfin le théorème d'extension ainsi qu'un corollaire.

THÉORÈME 4.11. *(théorème d'extension) Soit Z une sous-variété fermée de Y, toutes deux sans bord, et soit C un fermé de X. Soit $f : X \to Y$ une application différentiable avec $f \pitchfork Z$ sur C et $\partial f \pitchfork Z$ sur $C \cap \partial X$.*
Alors il existe une application différentiable $g : X \to Y$, homotope à f, g et ∂g transversales à Z au sens usuel et telle que $f = g$ au voisinage de C.

COROLLAIRE 4.12. *Soit $f : X \to Y$ est une application et que $\partial f : \partial X \to Y$ est transversale à Z, alors il existe une application $g : X \to Y$ homotope à f, telle que $\partial g = \partial f$ et $g \pitchfork Z$.*

Bibliographie

[1] Guillemain, Victor & Pollack, Alan. *Differential Topology* Prentice-Hall, 1974.

[2] John W. Milnor. *Topology from the differential viewpoint.* The University Press of Virginia, 1965.

[3] Golubitsky, Martin & Guillemin, Victor. *Stable Mappings and Their Singularities.* Springer-Verlag, 1973.

[4] Spivak, Martin. *Calculus on Manifolds* W. A. Benjamin, Inc., 1965.