Théorie des Noeuds

Sylvestre Blanc

Contents

Part I. Introduction

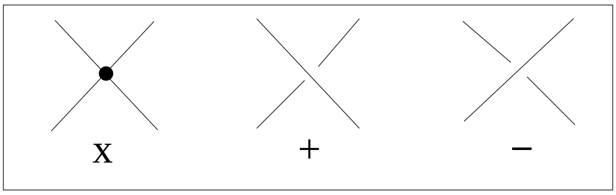
1 Définitions

Définition 1.1: Un **noeud** est une application de S^1 vers $\mathbb{R}^3$. On a une relation d'équivalence entre les noeuds. On dira que deux noeuds sont équivalents, s'il existe un homéomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui envoie un noeud sur l'autre. Un noeud sera **tempéré** si il est équivalent à un noeud polygonal. Un noeud peut avoir des points doubles et ces singularits sont les seules permises.

Définition 1.2: Un **invariant de Vassiliev de type** n , on dit aussi de type fini, est une application V de l'ensemble des noeuds avec points doubles vers un anneau. Il doit vérifier les deux conditions suivantes :

$V(X) = V(+) - V(-)$

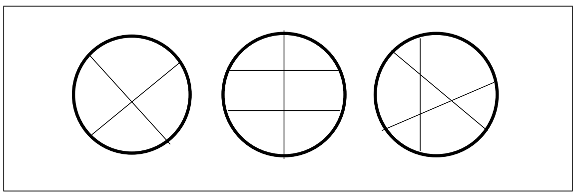
$V(K) = 0$ si K est un noeud avec plus de n points doubles



On note V_m, l'ensemble des invariants de Vassiliev de type m. Ceci est une graduation des invariants de Vassiliev .

Définition 1.3: Un **diagramme de cordes** est un cercle orienté muni d'un nombre fini de cordes. Les extrémités des cordes doivent être distinctes. On considère ces diagrammes homéomorphisme près préservant l'orientation. L'ensemble des diagrammes de cordes est gradué par le nombre de cordes. On note D^c_m, l'ensemble des diagrammes à m cordes.

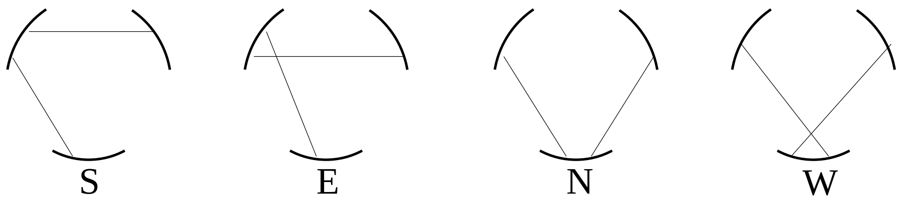
Exemples :



Définition 1.4: Un **système de poids** est une application W allant des diagrammes de cordes vers un anneau de caractéristique nulle. W doit vérifier les conditions suivantes :

- Si D est un diagramme de corde possédant une corde qui n'en intersecte aucune autre, alors $W(D) = 0$.
- Si quatre diagrammes ne diffrent que dans les parties suivantes alors, on a la relation :

$$W(S) - W(E) = W(N) - W(W) \quad (4T)$$

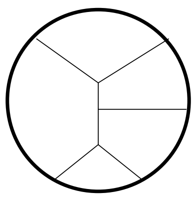


Définition 1.5: Un **diagramme chinois** est un graphe connexe constitué d'un cercle orienté et d'un certain nombre de lignes non orientées qui se rencontrent en deux types de sommets trivalents :

- Les sommets internes qui sont intersection de trois lignes non orientées. On donnera une orientation ce type de sommets.
- Les sommets externes en lesquelles se rencontrent une ligne non orientée et le cercle.

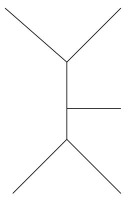
On note D^t, l'ensemble des diagrammes chinois. Cette ensemble est gradué par la moitié du nombre de sommets.

Exemple :



Définition 1.6: Un **caractère chinois** est un graphe dont les sommets sont soit trivalents, soit univalents et orientés. L'ensemble de tous les caractères chinois ayant au moins un sommet univalent est noté C.

Exemple :



2 Quotients

Définition 2.1: On quotiente l'ensemble des diagrammes de cordes par l'ensemble des relations (4T), et on note

$$A^c = D^c/(4T)$$

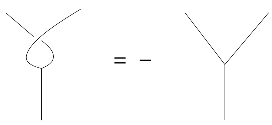
Définition 2.2: On quotiente l'ensemble des diagrammes chinois par l'ensemble des relations (STU), et on note

$$A^t = D^t/(STU)$$

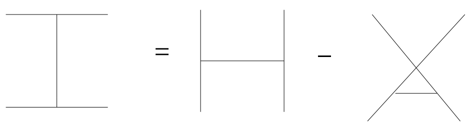
Définition 2.3: On quotiente l'ensemble des caractères chinois par les relation d'antisymétrie des sommets et par les relations (IHX).

Théorème 2.4: L'homomorphisme trivial entre A^c et A^t est un isomorphisme et de plus, A^t vérifie les deux relations suivantes :

- Antisymétrie des sommets



- Relation (IHX)



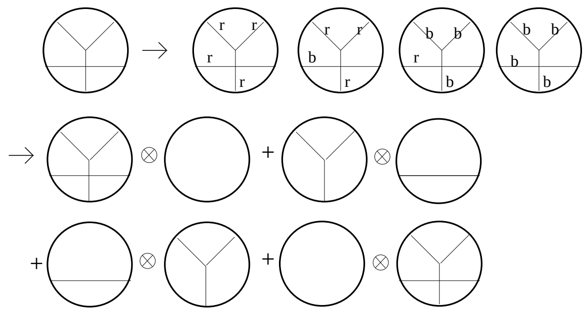
A cause de l'isomorphisme entre A^c et A^t, on notera ces ensembles tout simplement A.

Théorème 2.5: L'ensemble A peut-être muni d'une structure d'algèbre de Hopf commutative et co-commutative. Le produit sur A est la somme connexe. Le coproduit se définit de la manière suivante :
On appellera partage D_p d'un diagramme $D \in D^t$, un marquage des lignes non orientées par deux couleurs, rouge et bleu, de telle manière que si trois lignes se rencontrent en un sommet alors elles sont toutes les trois de même couleur. On définit alors,

$$\Delta(D) = \sum_{\text{Tous les partages}} R(D_s) \otimes B(D_s)$$

où $R(D_s)$ est le diagramme D où l'on a gardé que les somments rouges et $B(D_s)$ est celui où l'on a gardé que les sommets bleus.

Exemple :



Théorème 2.6: Les espaces A et B sont isomorphes.

3 Construire un système de poids depuis un invariant de Vassiliev

Soit V, un noeud de type m et $D \in D^c$, un diagramme de cordes de degré m. Un **plongement** de D dans $\mathbb{R}^3$ sera une injection $K_D : S^1 \to \mathbb{R}^3$ dont les uniques points doubles sont transversaux et satisfonts à,

$$K_D(\alpha) = K_D(\alpha') \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \alpha = \alpha' \\ \text{ou} \\ \alpha \text{ et } \alpha' \text{ sont deux} \\ \text{extrémités d'une corde} \end{array} \right)$$

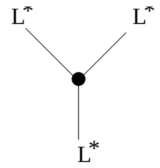
On peut vérifier que cette construction est bien définie. On peut alors poser

$$W_V(D) = V(K_D)$$

Part II. Constructions d'invariants

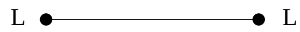
4 Construire un invariant à partir d'un groupe de Lie

Une algèbre de Lie L possède une application crochet f qui est un élément de $L^* \otimes L^* \otimes L$. On muni aussi L d'une forme bilinéaire $t \in L^* \otimes L^*$, *Ad*-invariante. Cette forme induit un isomorphisme de L dans L^*. Ainsi, on peut voir f comme un élément de $L^* \otimes L^* \otimes L^*$. f est alors complètement antisymétrique.
On peut maintenant associer à f, l'élément sommet trivalent :



f

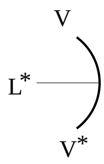
et à $t^{-1} \in L \otimes L$, l'élément ligne :



t⁻¹

On ne peut pas choisir t, car étant un élément de $L^* \otimes L^*$, il ne pourra être contracté avec les autres.

On choisit maintenant une représentation R d'un espace vectoriel V de L munie du tenseur $R \in L^* \otimes V \otimes V^*$ et on lui associe l'élément sommet univalent :



R

On peut maintenant obtenir un système de poids en contractant ces différents tenseurs sur leurs composantes extérieures reliées entre elles.

Exemple On va considérer l'algèbre de Lie $sl(2, \mathbb{C})$. On pose :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On définit maintenant une représentation R de dimension 3 en associant à H, X et Y, les applications linéaires dont les matrices sont :

$$R(H) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad R(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R(Y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose alors,$t(a,b) = Tr(R(a)R(b))$ et on calcule l'inverse de sa matrice,

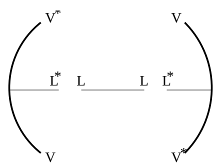
$$t^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

A partir de ceci, on peut calculer les composantes de l'élément sommet univalent ainsi que celui de l'élément ligne. On obtient

$$\begin{aligned} R_{ij}^{k} &= \delta_{Hi}(2\delta^{Xk}\delta_{Xj} - 2\delta^{Yk}\delta_{Yj}) \\ &+ \delta_{Xi}(-2\delta^{Hk}\delta_{Xj} + \delta_{Yj}\delta^{Hk}) \\ &+ \delta_{Yi}(2\delta^{Hk}\delta_{Yj} - \delta_{Xj}\delta^{Hk}) \end{aligned}$$

$$(t^{-1})^{ij} = \frac{1}{8}(\delta^{Hi}\delta^{Hj} + 2\delta^{Xi}\delta^{Yi} + 2\delta^{Yi}\delta^{Xj})$$

A partir de ces deux élément, on peut déjà vérifier que la valeur donnée au diagramme



est bien nulle, en faisant le calcul suivant

$$R_{ik}^{j} R_{jl}^{i} (t^{-1})^{kl}.$$

Après un travail un peu fastidieux, on trouve bien zéro.

5 Intégrale de Kontsevich

Définition 5.1: Soient n droites verticales orientées vers le haut. On notera P^n, l'ensemble des graphes constitués de n lignes orientées et de plusieurs autre ligne non orientées dont les extrémités sont sur les droites verticales. On quotiente cette ensemble par les relations (STU) pour obtenir l'ensemble A^n.

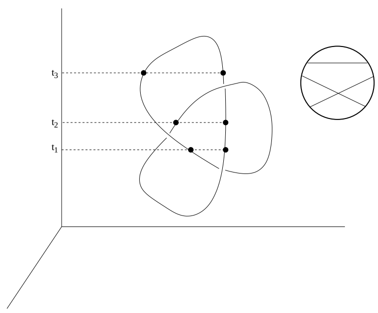
Cet ensemble a une structure d'algèbre ou la multiplication se définit en plaçant un diagramme sur l'autre.

Définition 5.2: Soit $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_t$, et $K : S^1 \to \mathbb{R}^3$, un noeud sur lequel la fonction altitude t est de Morse. L'**intégrale de Kontsevich** $Z(K)$ est alors,

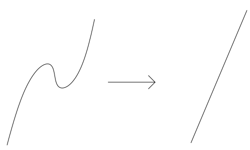
$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi i)^m} \int_{t_{min}<t_1<\ldots<t_m<t_{max}} \sum_{\substack{\text{couples possibles} \\ P=(z_i,z_i')}} (-1)^{\#P_-} D_P \bigwedge_{i=1}^{m} \frac{dz_i - dz_i'}{z_i - z_i'} \in A^r_{\mathbb{C}}$$

où

- t_{min} et t_{max} sont le minimum et le maximum de t sur K.
- Un couple possible est un choix de paires ordonnées (z_i, z_i') pour tout $i \in 1, \ldots, m$, tel que (z_i, t_i) et (z_i', t_i) sont deux points distincts de K.
- $\#P_-$ est le nombre de points de la forme (z_i, t_i) ou (z_i', t_i) sur lesquels K descend.
- A^r est le quotient de A par l'idéal engendré par le diagramme à une corde.
- D_P est le diagramme de corde associé à K et P



On peut montrer que cette intégrale est invariante si on déplace un peu le noeud. En divisant cette intégrale par $Z(\infty)^{(c/2)-1}$ où ∞ est le noeud trivial que l'on a présenté sous la forme d'un huit et c est le nombre de points critiques de t, on peut la rendre invariante aussi lorsque l'on fait disparaître une bosse suivie d'un creux en une ligne droite (cf figure).



Part III. Invariants d'écheveaux

6 Polynôme HOMFLY

Définition 6.1: Le **polynôme HOMFLY** est un invariant d'écheveaux sans points doubles. C'est un polynôme en x, y, z. On le calcule à partir de la règle suivante :

$$xP_+ + yP_- + zP_0 = 0$$

Une idée pour trouver des invariants de Vassiliev serait de généraliser cette règle aux échevaux à points doubles. Pour cela, on commence par définir les ensembles suivants :

Notation 6.2: L'ensemble des **noeuds à** n **points doubles** sera noté S^n.

On obtient ainsi une chaîne :

$$\dots \longrightarrow S^3 \xrightarrow{d} S^2 \xrightarrow{d} S^1 \xrightarrow{d} S^0 \longrightarrow 0$$

où la différentielle d est définie par

$$d(P_x) = xP_+ + yP_- + zP_0$$

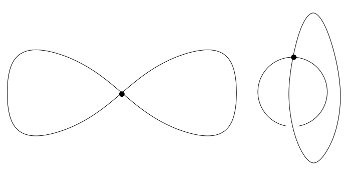
Notation 6.3: On pose

$$S^i_{i+j} = S^i / d^j(S^{i+j}).$$

Il s'agit de l'ensemble des écheveaux à i points doubles quotienté par les échevaux qui sont annulés par un invariant de type $i + j$.

On peut ensuite essayer de construire des invariants d'ordre supérieur à celui du polynôme HOMFLY en cherchant des générateurs de ces différents espaces.

Par exemple, pour S^1_2, on a les noeuds de base suivants :



On pose $\mu = -\frac{x+y}{z}$, et on trouve que pour tout noeud $K \in S^0_1$,

$$P(K \cup o) = \mu P(K)$$

Pour chacun des espaces S^i_j, il faut chercher une base. Pour montrer que toute la construction donne bien des invariants, il faut montrer que ceux-ci donnent bien le bon résultat lorsqu'on leur applique des mouvements de Reidemeister. Ceci donne pas mal de travail, mais est assez mécanique.

Part IV. Invariants d'enchevêtrement

7 Invariant de Conway

Définition 7.1: On appelle **enchevêtrement** un plongement d'une variété unidimensionnelle X, appelée base, dans $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$ où le bord de cette variété est sur $\mathbb{R} \times 0 \times \{0,1\}$. Cette construction est définie à une isotopie de $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$ près.

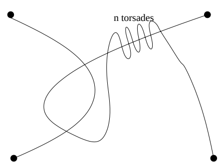
Définition 7.2: L'**invariant de Conway** est un invariant d'enchevêtrement de base $[0,1] \times 0, 1$ (cf figure 1). Il est défini comme suit :

- Il vaut zéro sur l'enchevêtrement trivial.
- On lui ajoute 1 lorsque l'on fait faire un demi tour aux deux lacets (figure 2)
- On l'inverse et le change de signe lorsqu'on le fait tourner de $\frac{\pi}{2}$(figure 3).

Remarque 7.3: Cette invariant n'est pas défini sur l'ensemble des enchevêtrements à deux brins.

Proposition 7.4: L'invariant de Conway n'est pas un invariant de Vassiliev .

preuve On considère pour cela, l'ensemble des noeuds à $n+2$ points doubles suivants :



On résoud ensuite les points doubles en utilisant la relation de Vassiliev . Si l'invariant de Conway est bien de Vassiliev , alors lorsque n sera assez grand, il devra s'annuler. On montre sans difficulté que l'invariant de Conway de ce noeud est nul si et seulement si l'expression suivante est nulle :

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{2}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ l \end{pmatrix}\frac{1}{k'-\frac{1}{l'}}i^{k'+l'}$$

où $k'=n-2k$ et $l'=2-2l$. On montre que ceci est effectivement non nul pour un nombre infini de valeurs de n.