Projet de semestre
Hiver 2006-07

Théorie des représentations des algèbres de Lie

Anna Devic

Professeur responsable : Donna Testerman

Table des matières

Introduction

L'objectif de ce projet de semestre est de présenter les outils nécessaires à l'étude des représentations des algèbres de Lie semi-simples de dimension finie sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Après une brève introduction théorique, nous allons illustrer à travers un exemple deux aspects fondamentaux de la théorie des représentations : étudier une représentation donnée et construire une représentation ayant certaines propriétés définies à l'avance.

1 Théorie abstraite des poids

1.1 Rappels et notations

Soit L une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie sur un corps F algébriquement clos de caractéristique 0 et H une sous-algèbre de Cartan de L. Soit $\Phi \subset H^*$ le système de racines par rapport à H et $\{L_\alpha\}_{\alpha\in\Phi}$ l'ensemble des espaces radiciels de L. Rappelons qu'on a

$$L = H \oplus (\bigoplus_{\alpha\in\Phi} L_\alpha).$$

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par les éléments de Φ. Soient $\alpha, \beta \in \Phi$. Soit de plus κ la forme de Killing sur L et t_α l'unique élément de H tel que $\alpha(h) = \kappa(t_\alpha, h)$ pour tout $h \in H$. Définissons alors l'application $(\alpha, \beta) \mapsto \kappa(t_\alpha, t_\beta)$ et étendons-la par linéarité à E. Cette application est bilinéaire, symétrique et définie positive, ainsi E est doté d'une structure d'espace euclidien. Pour définir le groupe de Weyl de Φ, nous allons considérer les réflexions de E déterminées par les racines. Soit $\alpha \in \Phi$ fixé. Pour tout $\beta \in \mathsf{E}$, posons

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha.$$

Il s'agit de la réflexion par rapport à l'hyperplan orthogonal à α et nous définissons le *groupe de Weyl* $\mathcal{W}$ de Φ comme étant le groupe engendré par les réflexions $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in\Phi}$. Les coefficients $\frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$ vont jouer un rôle important dans ce qui suit, nous allons donc désormais les abréger en $\langle\beta, \alpha\rangle$. Observons que cette application n'est plus bilinéaire mais seulement linéaire dans la première variable.

1.2 Réseaux de poids

Soit Λ l'ensemble de tous les $\lambda \in \mathsf{E}$ tels que $\langle \lambda, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$ pour tout $\alpha \in \Phi$. Les éléments de Λ sont appelés des *poids*. Comme $\langle \lambda, \alpha \rangle$ est linéaire en λ, Λ est un sous-groupe de E. De plus il contient Φ car $\langle \beta, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$ si $\alpha, \beta \in \Phi$.
Soit Δ une base de Φ. On peut montrer que $\lambda \in \Lambda$ si et seulement si $\langle \lambda, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$ pour tout $\alpha \in \Delta$. Soit Λ_r le sous-groupe de Λ engendré par les éléments de Φ. On l'appelle le *réseau de racines*. Un élément $\lambda \in \Lambda$ est dit *dominant* si tous les entiers $\langle \lambda, \alpha \rangle$, $\alpha \in \Delta$ sont non négatifs et *strictement dominant* si tous ces entiers sont positifs. On appelle Λ^+ l'ensemble des poids dominants.
Si $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$, alors les vecteurs $2\alpha_i/(\alpha_i, \alpha_i)$ forment une base de E également. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ la base duale de cette base par rapport au produit scalaire de E, autrement dit l'ensemble des éléments de E tels que

$$\frac{2(\lambda_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} = \delta_{ij}.$$

On remarque en particulier que $\langle \lambda_i, \alpha \rangle$ est un entier non négatif pour tout $\alpha \in \Delta$, par conséquent les λ_i sont des poids dominants. On les appelle les *poids dominants fondamentaux (relativement à la base Δ).*
Soit $\lambda \in \mathsf{E}$ arbitraire et posons $m_i = \langle \lambda, \alpha_i \rangle, 1 \leq i \leq l$. Alors $\langle \lambda - \sum m_i \lambda_i, \alpha \rangle = 0$ pour toute racine simple α, ce qui implique que $(\lambda - \sum m_i \lambda_i, \alpha) = 0$ pour tout $\alpha \in \Delta$. Par conséquent on a $\lambda = \sum m_i \lambda_i$. Il s'ensuit que $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_l\}$ est une $\mathbb{Z}$-base de Λ et $\lambda \in \Lambda^+$ si et seulement si tous les m_i sont des entiers non négatifs.
Par un résultat d'algèbre bien connu, Λ/Λ_r est un groupe fini. On l'appelle le *groupe fondamental* de Φ.

1.3 Poids dominants

Définissons sur Λ l'ordre partiel suivant : $\lambda \succ \mu$ si et seulement si $\lambda - \mu$ s'écrit comme une somme de racines positives. Au vu de cette définition, nous pouvons énoncer (sans preuve) les résultats suivants.

Proposition 1.
Tout poids $\lambda \in \Lambda$ est conjugué à un et un seul poids dominant sous l'action de $\mathcal{W}$. Si λ est un poids dominant, alors $\sigma\lambda \prec \lambda$ pour tout $\sigma \in \mathcal{W}$ et si λ est strictement dominant alors $\sigma\lambda = \lambda$ si et seulement si $\sigma = 1$.

Proposition 2.
Soit $\lambda \in \Lambda^+$. *Alors il n'existe qu'un nombre fini de poids dominants tels que* $\mu \prec \lambda$.

1.4 Ensembles saturés de poids

Certains ensembles finis de poids qui sont stables sous l'action de $\mathcal{W}$ jouent un rôle important dans la théorie des représentations. Un sous-ensemble Π de Λ est dit *saturé* si pour tout $\lambda \in \Pi, \alpha \in \Phi$ et $0 \leq i \leq \langle \lambda, \alpha \rangle$, le poids $\lambda - i\alpha$ se trouve également dans Π. On en déduit qu'un tel ensemble Π est stable sous l'action de $\mathcal{W}$.
On dit que l'ensemble saturé Π admet comme *poids maximal* $\lambda\,(\lambda \in \Lambda^+)$ si $\lambda \in \Pi$ et $\mu \prec \lambda$ pour tout $\mu \in \Pi$. On peut montrer qu'un ensemble saturé de poids qui admet λ comme poids maximal est fini.

Proposition 3.
Soit Π *un ensemble saturé de poids maximal* λ. *Si* $\mu \in \Lambda^+$ *et* $\mu \prec \lambda$, *alors* $\mu \in \Pi$.

La proposition décrit de façon précise à quoi ressemble l'ensemble saturé Π ayant λ comme poids maximal : Π contient tous les poids dominants plus petits ou égaux à λ, ainsi que leurs conjugués sous l'action de $\mathcal{W}$. En particulier pour tout $\lambda \in \Lambda^+$ il existe un unique ensemble saturé ayant λ comme poids maximal.
Réciproquement pour tout $\lambda \in \Lambda^+$ on peut définir $\Pi(\lambda)$ comme l'ensemble des poids dominants en-dessous de λ et leurs $\mathcal{W}$-conjugués. Comme $\Pi(\lambda)$ est stable sous l'action de $\mathcal{W}$, il est saturé et par la Proposition 1 il admet λ comme poids maximal.

2 Les représentations de $\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$

En guise d'introduction à la théorie générale des représentations des algèbres de Lie semi-simples de dimension finie, nous allons traiter le cas de $L = \mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$. Il est d'un intérêt tout particulier car plusieurs résultats généraux se ramènent ensuite à l'étude de ce cas.
Rappelons que la base standard de $\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$ est

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Un calcul rapide montre alors que

$$[hx] = 2x,\ [hy] = -2y,\ [xy] = h.$$

2.1 Poids et vecteurs maximaux

Dans le reste de la section, nous allons supposer que tous les modules sont de dimension finie. Soit V un L-module. Comme h est semi-simple, h agit diagonalement sur V. Cela permet de décomposer V en une somme directe d'espaces propres $V_\lambda = \{v \in V \mid h \cdot v = \lambda v\}$ avec $\lambda \in \mathsf{F}$. Si λ n'est pas une valeur propre de l'endomorphisme de V qui représente h, cet espace est nul. Si $V_\lambda \neq 0$, alors λ est appelé un *poids* de V et V_λ *l'espace poids (associé à λ)* de V.

Proposition 4.
Soit V_λ un espace poids de V. Si $v \in V_\lambda$, alors $x \cdot v \in V_{\lambda+2}$ et $y \cdot v \in V_{\lambda-2}$.

Preuve. Calculons

$$h \cdot (x \cdot v) = [hx] \cdot v + x \cdot h \cdot v = 2x \cdot v + \lambda x \cdot v = (\lambda + 2)x \cdot v.$$

Les calculs sont analogues pour y. □

Comme V est de dimension finie et que la somme $V = \coprod_{\lambda \in \mathsf{F}} V_\lambda$ est directe, il existe un $V_\lambda \neq 0$ tel que $V_{\lambda+2} = 0$. Par la proposition, cela revient à dire que $x \cdot v = 0$ pour tout $v \in V_\lambda$. Dans ce cas tout vecteur non nul de V_λ est appelé un *vecteur maximal (de poids λ)* de V.

2.2 Classification des $\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$-modules irréductibles

Soit $L = \mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$, V un L-module irréductible et soit $v_0 \in V_\lambda$ un vecteur maximal. Posons $v_{-1} = 0$, $v_i = (1/i!)y^i \cdot v_0$ pour tout $i \geq 0$. Les résultats suivants se démontrent alors par récurrence à partir de la proposition précédente :

(1) $h \cdot v_i = (\lambda - 2i)v_i$,

(2) $y \cdot v_i = (i + 1)v_{i+1}$,

(3) $x \cdot v_i = (\lambda - i + 1)v_{i-1}$ pour tout $i \geq 0$.

Par la formule (1) on peut remarquer que tous les v_i non nuls sont linéairement indépendants. Or comme V est de dimension finie, il existe un plus petit entier m tel que $v_m \neq 0$ et $v_{m+1} = 0$. Alors on a clairement que $v_{m+i} = 0$ pour tout $i > 0$. Prises ensemble, les formules (1)-(3) montrent que le sous-espace de V engendré par $(v_0, v_1, \ldots, v_m)$ est un L-sous-module. Or V est

irréductible, donc l'ensemble $(v_0, v_1, \ldots, v_m)$ engendre V tout entier. De plus, les matrices représentant h, x et y peuvent être écrites explicitement dans la base ordonnée $(v_0, v_1, \ldots, v_m)$ grâce aux formules.
Considérons maintenant la formule (3) de plus près. Pour $i = m + 1$, le côté gauche vaut 0 tandis que le côté droit vaut $(\lambda - m)v_m$. Comme v_m est non nul, il s'ensuit que $\lambda = m$. Autrement dit, le poids d'un vecteur maximal est toujours un entier non négatif (valant exactement $\dim V - 1$). On l'appelle le *poids maximal* de V.
Il s'ensuit de la première formule que la multiplicité de chaque poids μ vaut un, autrement dit $\dim V_\mu = 1$ si $V_\mu \neq 0$. Cela implique en particulier que v_0 est l'unique vecteur maximal dans V à multiple scalaire près ; nous avons en effet vu que le poids maximal λ est uniquement déterminé par V grâce à la formule $\lambda = \dim V - 1$.
Nous pouvons résumer tout ceci sous la forme d'un théorème :

Théorème 5.
Soit V un L-module irréductible de dimension $m + 1$. Alors

- *(a) le L-module V est la somme directe de ses espaces poids V_μ avec $\mu = m, m-2, \ldots, -(m-2), -m$ et $\dim V_\mu = 1$ pour tout μ.*
- *(b) V admet un unique vecteur maximal à multiple scalaire près. Ce dernier est de poids m.*
- *(c) L'action de L sur V peut être donnée explicitement en fonction de la base $(v_0, v_1, \ldots, v_m)$ par les formules précédemment citées. En particulier il existe (à isomorphisme près) au plus un L-module irréductible de dimension $m + 1$ pour tout $m \geq 0$.*

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate de ce théorème et du théorème de Weyl qui affirme que les modules de dimension finie admettent une décomposition en somme directe de sous-modules irréductibles.

Corollaire 6.
Soit V un L-module quelconque de dimension finie. Alors les valeurs propres de h sur V sont tous des entiers, chacun d'entre eux apparaissant le même nombre de fois que son opposé. De plus, dans chaque décomposition de V en une somme directe de sous-modules irréductibles, le nombre de termes dans la somme vaut exactement $\dim V_0 + \dim V_1$.

Nous n'avons pas encore démontré que pour tout entier positif m donné, il existe une représentation irréductible de L qui soit de dimension $m+1$. Toutefois les formules (1)-(3) peuvent être utilisées pour définir une représentation de L sur le F-espace vectoriel de dimension $m+1$ engendré par $(v_0, v_1, \ldots, v_m)$, appelé $V(m)$. Les mêmes formules permettent également de conclure qu'une telle représentation est irréductible, nous pouvons donc conclure à l'existence de tels L-modules pour tout $m \geq 0$.

3 Théorie des représentations

Après avoir traité le cas de $\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$, nous allons maintenant retrouver un cadre plus général. Soit, comme dans le premier chapitre, L une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie sur F, H une sous-algèbre de Cartan de L, Φ le système de racines, $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ une base de Φ et $\mathcal{W}$ le groupe de Weyl. Dans cette section nous allons nous intéresser de plus près à l'étude des L-modules de dimension finie. Grâce au théorème de Weyl, le rôle de ces derniers est prédominant dans la théorie des représentations des algèbres de Lie.

3.1 L'algèbre universelle enveloppante

La définition suivante est d'une importance capitale dans ce qui suit, mais elle peut être énoncée dans un cadre nettement plus général que celui des algèbres de Lie semi-simples de dimension finie.

Soit L une algèbre de Lie quelconque. *L'algèbre universelle enveloppante* de L est un couple $(\mathfrak{U}, \iota)$ où $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(L)$ est une F-algèbre et $\iota : L \to \mathfrak{U}$ un homomorphisme d'algèbres de Lie tel que pour tout F-algèbre A et pour tout homomorphisme d'algèbres de Lie $f : L \to A$ il existe un unique homomorphisme d'algèbres $f' : \mathfrak{U} \to A$ tel que $f'\iota = f$, autrement dit le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathfrak{U} \arrow[dl, "f'"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Remarques.

(1) Cette définition a un sens puisque toute F-algèbre A peut être dotée de manière naturelle d'une structure d'algèbre de Lie en posant $[xy] = xy - yx$ pour tout $x, y \in A$.

(2) Il est facile de voir que l'algèbre universelle enveloppante d'une algèbre de Lie est unique à isomorphisme près ; l'existence de $\mathfrak{U}$ est nettement

moins aisé à démontrer, mais nous n'entrerons pas dans les détails de la construction ici.

(3) Soit V un L-module et $\rho : L \to \mathrm{GL}(V)$ la représentation correspondante. Alors par la définition de l'algèbre universelle enveloppante il existe une représentation $\rho' : \mathfrak{U} \to \mathrm{GL}(V)$ telle que $\rho'\iota = \rho$ et V est donc muni de manière naturelle d'une structure de $\mathfrak{U}$-module. De plus, V est irréductible en tant que L-module si et seulement s'il est irréductible en tant que $\mathfrak{U}$-module. Ces faits seront implicitement utilisés dans les sections suivantes.

3.2 Espaces poids

Soit V un L-module de dimension finie. Comme H est une sous-algèbre commutative composée d'éléments semi-simples, H agit diagonalement sur V. Autrement dit on a

$$V = \coprod V_\lambda$$

où λ parcourt H^* et $V_\lambda = \{v \in V \mid h \cdot v = \lambda(h)v \text{ pour tout } h \in H\}$. Si $V_\lambda \neq 0$, alors λ est appelé un *poids* et V_λ *l'espace poids (associé à λ)* de V.

Exemple 1.
On peut considérer L elle-même comme L-module via la représentation adjointe. Soit l le rang de Φ. Dans ce cas les poids sont les racines $\{\alpha\}_{\alpha\in\Phi}$ et 0. Les espaces poids correspondants sont les L_α, tous de dimension un, et H, de dimension l.

Si V est un L-module de dimension infinie, alors V n'est pas forcément la somme de ses espaces poids. Par contre, la somme V' des espaces poids est une somme directe et un L-sous-module de V : en effet, H préserve les espaces poids un par un, tandis que les L_α avec $\alpha \in \Phi$ les permutent. Soit $x \in L_\alpha, v \in V_\lambda, h \in H$. Alors

$$h \cdot x \cdot v = x \cdot h \cdot v + [hx] \cdot v = (\lambda(h) + \alpha(h))x \cdot v,$$

autrement dit L_α envoie V_λ dans $V_{\lambda+\alpha}$. Si $\dim V < \infty$, alors on a $V = V'$.

3.3 Modules cycliques standards

Soit V un L-module et $\lambda \in H^*$. Un *vecteur maximal* (de poids λ) est un vecteur non nul $v^+ \in V_\lambda$ tel qu'on ait $x \cdot v^+ = 0$ pour tout $x \in \coprod_{\alpha\in\Phi^+} L_\alpha = \langle L_\alpha \mid \alpha \in \Delta\rangle$. Il suffit pour cela en fait qu'on ait $x_{\alpha_i} \cdot v^+ = 0$ pour tout

$\alpha_i \in \Delta$. Si $\dim V = \infty$ alors l'existence d'un tel vecteur maximal n'est pas assuré. Par contre si $\dim V < \infty$, alors la sous-algèbre de Borel

$$B(\Delta) = H + \coprod_{\alpha \in \Phi^+} L_\alpha$$

admet un vecteur propre commun (envoyé sur 0 par tous les $L_\alpha, \alpha \in \Phi^+$) par le théorème de Lie. Il s'agit donc d'un vecteur maximal au sens défini plus haut.
Nous allons désormais étudier la classe des L-modules engendrés par un vecteur maximal.

Définition 7.
Soit v^+ un vecteur maximal de poids λ dans un L-module V et $\mathfrak{U}(L)$ l'algèbre universelle enveloppante de L. Si $V = \mathfrak{U}(L) \cdot v^+$, alors V est un L-module *cyclique standard* de *poids maximal* λ.

Soit $\alpha \in \Phi^+$ et $x_\alpha \in L_\alpha$ un vecteur non nul. Il existe alors un unique élément $y_\alpha \in L_{-\alpha}$ tel que

$$[x_\alpha, y_\alpha] = \frac{2t_\alpha}{(t_\alpha, t_\alpha)},$$

t_α défini dans la section 1.1. L'ordre partiel défini dans la section 1.3 peut être également appliqué à l'espace dual $H^* : \lambda \prec \mu$ si et seulement si $\lambda - \mu$ est la somme de racines postives. Grâce à ces définitions, nous pouvons étudier les propriétés des modules cycliques standards.

Théorème 8.
Soit $\mathfrak{U}(L) \cdot v^+$ *cyclique standard et soit* $\Phi^+ = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$.

1. V *est engendré par l'ensemble* $\{y_{\beta_1}^{i_1} \cdots y_{\beta_m}^{i_m} \cdot v^+ \mid i_1, \dots, i_m \in \mathbb{Z}_+\}$.
2. *Pour tout poids* μ *de* V *on a*
$$\mu = \lambda - \sum_{i=1}^{l} k_i \alpha_i \text{ avec } k_i \in \mathbb{Z}_+ \quad \forall i.$$
3. *Pour tout* $\mu \in H^*, \dim V_\mu < \infty$ *et* $\dim V_\lambda = 1$.
4. *Tout sous-module de* V *est la somme directe de ses espaces de poids.*
5. V *est un* L*-module indécomposable avec un unique sous-module maximal et donc un unique quotient irréductible.*

6. *Si $\psi : V \to W$ est un homomorphisme de L-modules surjectif, alors W est également cyclique standard.*

Remarque.
Par le point (2) du théorème, tous les poids sont au-dessous de λ par rapport à l'ordre partiel précédemment défini, ce qui justifie bien l'utilisation du terme *poids maximal*.

Preuve. Nous avons $L = N^- + B$ avec $N^- = \coprod_{\alpha \in \Phi^-} L_\alpha$ et $B = B(\Delta)$ la sous-algèbre de Borel. Par le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt (PBW) il s'ensuit que

$$\mathfrak{U}(L) \cdot v^+ = \mathfrak{U}(N^-)\mathfrak{U}(B) \cdot v^+ = \mathfrak{U}(N^-) \cdot \mathsf{F}v^+$$

(rappelons en effet que v^+ est un vecteur propre commun pour B, donc également pour $\mathfrak{U}(B)$). Or $\mathfrak{U}(N^-)$ admet une base formée des monômes $y_{\beta_1}^{i_1} \cdots y_{\beta_m}^{i_m}$, ce qui entraîne (1).
Le vecteur $y_{\beta_1}^{i_1} \cdots y_{\beta_m}^{i_m} \cdot v^+$ est de poids $\lambda - \sum_j i_j \beta_j$ par un calcul effectué dans la section 3.2. Comme chaque β_j s'écrit comme combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire non négative de racines simples, on obtient (2).
Pour une somme $\sum_{i=1}^l k_i \alpha_i$ fixée, il n'existe qu'un nombre fini de vecteurs de la forme $y_{\beta_1}^{i_1} \cdots y_{\beta_m}^{i_m} \cdot v^+$ pour lesquels $\sum_j i_j \beta_j$ vaut $\sum_{i=1}^l k_i \alpha_i$. Par le point (1) ces vecteurs engendrent l'espace poids V_μ si $\mu = \lambda - \sum_{i=1}^l k_i \alpha_i$. De plus l'unique vecteur de cette forme qui est de poids $\mu = \lambda$ est v^+ lui-même, ce qui entraîne (3).
Pour montrer le point (4), soit W un sous-module de V et soit $w \in W$. Alors $w = v_1 + \cdots + v_n$ avec $v_i \in V_{\mu_i}$ et les V_{μ_i} tous distincts. Nous voulons montrer que $v_i \in W$ pour tout i. Supposons par absurde que ce ne soit pas le cas. Il existe alors un $w \in W$ tel que $w = v_1 + \cdots + v_n$ avec $n > 1$ minimal ; cela entraîne en particulier que $v_i \notin W$ pour tout i. Soit $h \in H$ tel que $\mu_1(h) \neq \mu_2(h)$. Alors $h \cdot w = \sum \mu_i(h) v_i$ appartient à W et donc

$$(h - \mu_1(h) \cdot 1) \cdot w = (\mu_2(h) - \mu_1(h))v_2 + \cdots + (\mu_n(h) - \mu_1(h))v_n \neq 0$$

y appartient également. Or par la minimalité de n on a alors $v_2 \in W$, contradiction. Cela démontre le point (4).
Soit W un sous-module propre de V. Alors $v^+ \notin W$ car v^+ engendre tout V. Ainsi $W \subset \coprod_{\mu \neq \lambda} V_\mu$, ce qui entraîne que la somme de tous les sous-modules propres de V est toujours propre. Par conséquent la somme de tous les sous-modules propres est l'unique sous-module maximal de V. Pour la

même raison V ne peut pas être égal à la somme de deux sous-modules propres, ce qui montre (5).
Pour finir, (6) est clair car $\psi(\mathfrak{U}(L) \cdot v^+) = \mathfrak{U}(L) \cdot \psi(v^+)$, ce qui termine la preuve. $\square$

Corollaire 9.
A multiplication par un scalaire près, un L-module cyclique standard a exactement un vecteur maximal.

3.4 Existence et unicité

Dans cette section nous allons montrer que pour tout $\lambda \in H^*$ il existe un unique L-module cyclique standard irréductible (à isomorphisme près) de poids maximal λ.

Théorème 10.
Soient V, W deux L-modules cycliques standards de poids maximal λ. Si V et W sont irréductibles, alors ils sont isomorphes.

Preuve. Posons $X = V \oplus W$. Comme v^+, w^+ sont maximaux dans V, respectivement W, (v^+, w^+) est maximal dans X. Soit Y le sous-module de X engendré par (v^+, w^+), il est alors cyclique standard. Soient $p : Y \to V, p' : Y \to W$ les projections canoniques. Il est clair que $\operatorname{Im} p = V, \operatorname{Im} p' = W$. Ainsi V et W sont les deux des quotients irréductibles d'un même module cyclique standard, donc isomorphes par le point (5) du théorème précédent. $\square$

Une fois l'unicité prouvée, il nous reste la question de l'existence. Voici comment on construit un L-module cyclique standard pour un poids $\lambda \in H^*$ donné. Pour commencer, remarquons qu'un module cyclique standard vu comme B-module contient un sous-module de dimension 1 engendré par le vecteur maximal donné. Soit donc $D_\lambda = \mathsf{F} \cdot v^+$ un F-espace vectoriel de dimension 1 et définissons l'action suivante de B sur D_λ :

$$(h + \sum_{\alpha \in \Phi^+} x_\alpha) \cdot v^+ = h \cdot v^+ = \lambda(h) v^+.$$

Grâce à cette action D_λ devient un B-module. De même, D_λ est également un $\mathfrak{U}(B)$-module ; ce qui nous permet de former le produit tensoriel

$$Z(\lambda) = \mathfrak{U}(L) \otimes_{\mathfrak{U}(B)} D_\lambda.$$

Le module $Z(\lambda)$ ainsi défini est cyclique standard de vecteur maximal $1 \otimes v^+$ que nous abrégerons désormais en v^+. Grâce à cette construction, on voit que si $N^- = \coprod_{\alpha \prec 0} L_\alpha$, alors $Z(\lambda)$ est isomorphe à $\mathfrak{U}(N^-)$ en tant que $\mathfrak{U}(N^-)$-module à gauche. Plus précisément, on a $\mathfrak{U}(L) \cong \mathfrak{U}(N^-) \otimes \mathfrak{U}(B)$ par le théorème PBW et donc $Z(\lambda) \cong \mathfrak{U}(N^-) \otimes \mathsf{F}$ en tant que $\mathfrak{U}(N^-)$-modules à gauche.

Théorème 11.
Soit $\lambda \in H^*$. Alors il existe à isomorphisme près un et un seul module cyclique standard irréductible de poids λ.

Preuve. Le module $Z(\lambda)$ construit ci-haut est cyclique standard de poids λ et par le théorème 8 il admet un unique sous-module maximal $Y(\lambda)$. Il s'ensuit que $Z(\lambda)/Y(\lambda)$ est irréductible et cyclique standard par le même théorème. Quant à l'unicité, le théorème 10 nous permet de conclure. □

Notation 12.
On note $V(\lambda)$ le module cyclique standard irréductible de poids λ.

3.5 Le cas de la dimension finie

Nous venons de montrer que pour tout $\lambda \in H^*$ il existe un module cyclique standard irréductible $V(\lambda)$ correspondant. Cependant la question de savoir si $V(\lambda)$ est de dimension finie reste ouverte. Le théorème suivant donne une condition nécessaire pour la finitude de $V(\lambda)$.

Théorème 13.
Soit V un L-module irréductible de dimension finie et de poids maximal λ. Alors pour tout $1 \leq i \leq l$ on a $\lambda(h_i) \in \mathbb{Z}_+$.

Preuve. Soit α_i une racine simple et S_i la sous-algèbre de Lie de L avec base $x_{\alpha_i}, y_{\alpha_i}, h_{\alpha_i}$ (définis dans la section 3.3). Rappelons que $S_i = S_{\alpha_i} \cong \mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$ pour tout i et posons $h_i = h_{\alpha_i}$. Le L-module $V(\lambda)$ est également un S_i-module de dimension finie et le vecteur maximal pour L est également un vecteur maximal pour S_i. En particulier comme il existe un vecteur maximal de poids λ, le poids pour la sous-algèbre de Cartan $H_i \subset S_i$ est entièrement déterminé par le scalaire $\lambda(h_i)$. Par le théorème 5 on conclut que $\lambda(h_i)$ est un entier non négatif. □

Le même raisonnement que celui effectué dans la preuve nous permet d'affirmer que si V est de dimension finie et μ est un poids de V, alors $\mu(h_i) = \langle \mu, \alpha_i \rangle \in \mathbb{Z}$ pour tout $1 \leq i \leq l$. Il s'ensuit que les poids définis dans ce chapitre correspondent aux poids abstraits définis dans le chapitre précédent. Nous pouvons donc appliquer les résultats précédemment obtenus à ce cas-ci. Toutefois pour éviter les ambiguïtés nous allons continuer à appeler tous les éléments de H^* des poids, alors que les fonctions linéaires λ telles que $\lambda(h_i) \in \mathbb{Z}_+$ pour tout i seront appelées *fonctions entières.* Si tous les $\lambda(h_i)$ sont strictement positifs, alors λ sera appelé *fontion entière dominante.* Comme dans le chapitre précédent, nous allons désigner par Λ^+ l'ensemble des fonctions entières dominantes.
Nous introduisons une dernière notation avant de démontrée que la condition énoncée ci-haut est non seulement nécessaire mais également suffisante pour la finitude de $V(\lambda)$; appelons $\Pi(\lambda)$ l'ensemble des poids de $V(\lambda)$.

Théorème 14.
Soit $\lambda \in \Lambda^+$. Alors le L-module irréductible $V(\lambda)$ est de dimension finie et $\mathcal{W}$ permute l'ensemble des poids $\Pi(\lambda)$ avec $\dim V_\mu = \dim V_{\sigma\mu}$ pour tout $\sigma \in \mathcal{W}$.

Corollaire 15.
L'application $\lambda \mapsto V(\lambda)$ est une bijection entre Λ^+ et les classes d'isomorphisme des L-modules de dimension finie irréductibles.

3.6 Chaînes de poids

Soit $\lambda \in \Lambda^+$. Alors $V = V(\lambda)$ est un L-module de dimension finie. Soit $\mu \in \Pi(\lambda)$ et $\alpha \in \Phi$. Par un calcul effectué dans la section 3.2, on peut voir que $W = \coprod_{i \in \mathbb{Z}} V_{\mu + i\alpha}$ est un sous-module stable de V sous l'action de $S_\alpha \cong \mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$. Par le théorème 5 et le théorème de Weyl, il s'ensuit que les poids de $\Pi(\lambda)$ de la forme $\mu + i\alpha$ forment une *chaîne connexe.* De plus la réflexion σ_α *renverse* la chaîne ; si la chaîne est composée de $\mu - r\alpha, \ldots, \mu, \ldots, \mu + q\alpha$, il s'ensuit que $r - q = \langle \mu, \alpha \rangle$. L'ensemble $\Pi(\lambda)$ est ainsi saturé.

Proposition 16.
Soit $\lambda \in \Lambda^+$ et $\mu \in \Lambda$. Alors μ appartient à $\Pi(\lambda)$ si et seulement si $\sigma\mu \prec \lambda$ pour tout $\sigma \in \mathcal{W}$.

Preuve. Par la proposition 1 il existe pour tout $\mu \in \Lambda$ un $\sigma \in \mathcal{W}$ tel que $\sigma\mu \in \Lambda^+$ et par hypothèse on a $\sigma\mu \prec \lambda$. Or par la proposition 3 on a $\sigma\mu \in \Pi(\lambda)$. Le résultat découle alors du théorème 14. $\square$

3.7 La formule de Freudenthal

Soit $V = V(\lambda)$ irréductible de dimension finie, $\lambda \in \Lambda^+$ et $\mu \in H^*$. Appelons $m_\lambda(\mu) = \dim V_\mu$ la *multiplicité* de μ dans V. La formule suivante nous permet de calculer la multiplicité des poids d'un module cyclique standard irréductible donné.

Théorème 17 (Formule de Freudenthal).
Soit $V = V(\lambda)$ un L-module irréductible de poids maximal λ, $\lambda \in \Lambda^+$. Soit $\delta = \frac{1}{2}\sum_{\alpha \succ 0} \alpha$. Si $\mu \in \Lambda$, alors la multiplicité $m_\lambda(\mu)$ de μ dans V est donnée récursivement par la formule suivante :

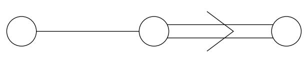
$$((\lambda + \delta, \lambda + \delta) - (\mu + \delta, \mu + \delta))m_\lambda(\mu) = 2\sum_{\alpha \succ 0}\sum_{i=1}^{\infty} m_\lambda(\mu + i\alpha)(\mu + i\alpha, \alpha).$$

4 Le cas B_3

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser au cas de l'algèbre de Lie linéaire de type B_3 en étudiant d'abord l'ensemble des poids de sa représentation naturelle et en construisant par la suite une représentation irréductible pour un poids dominant donné. Cet exemple sera ainsi une illustration des deux aspects principaux de la théorie des représentations que nous avons traités dans le chapitre précédent.

4.1 Le système de racines de type B_3

Le système de racines de type B_3 est donné par son diagramme de Dynkin



La matrice de Cartan correspondante est la suivante :

$$B_3 : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathsf{E} = \mathbb{R}^3$, (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}$ et I le réseau engendré par cette base. Posons

$$\Phi = \{\alpha \in I \mid (\alpha, \alpha) = 1 \text{ ou } 2\}.$$

L'ensemble Φ contient alors les vecteurs $\pm e_i$ et les vecteurs $\pm(e_i \pm e_j), i \neq j$ et il vérifie les axiomes pour être un système de racines. De plus, les vecteurs $\pm e_i$ sont de longueur au carré 1, les vecteurs $\pm(e_i \pm e_j)$ sont de longueur au carré 2 et les trois vecteurs $e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_3$ forment une base Δ de Φ. La matrice de Cartan par rapport à Δ est B_3. En posant

$$\alpha_1 = e_1 - e_2,\ \alpha_2 = e_2 - e_3,\ \alpha_3 = e_3,$$

on obtient la liste des éléments de Φ^+ comme suit :

$$\Phi^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1{+}\alpha_2, \alpha_2{+}\alpha_3, \alpha_1{+}\alpha_2{+}\alpha_3, \alpha_2{+}2\alpha_3, \alpha_1{+}\alpha_2{+}2\alpha_3, \alpha_1{+}2\alpha_2{+}2\alpha_3\}.$$

4.2 Les poids fondamentaux de B_3

La base duale de Δ, c'est-à-dire l'ensemble des éléments $\lambda_i \in \mathbb{R}$ avec $i = 1, 2, 3$ tels que $\frac{2(\lambda_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} = \delta_{ij}$, est formée des poids fondamentaux suivants :

$$\lambda_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,\ \lambda_2 = \alpha_1 + 2(\alpha_2 + \alpha_3),\ \lambda_3 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3),$$

ce qui s'exprime dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ comme

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \lambda_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

4.3 L'algèbre de Lie linéaire de type B_3

Soit V un F-espace vectoriel de dimension $2 \cdot 3 + 1 = 7$ et f la forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur V dont la matrice est

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \\ 0 & I_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'algèbre orthogonale $\mathfrak{o}(7, \mathsf{F})$ est formée des endomorphismes $x \in \operatorname{End} V$ qui satisfont

$$f(x(v), w) = -f(v, x(w)).$$

En partitionnant x de la même manière que s sous la forme

$$x = \begin{pmatrix} a & b_1 & b_2 \\ c_1 & m & n \\ c_2 & p & q \end{pmatrix},$$

la condition $sx = -x^t s$ entraîne que $a = 0, c_1 = -b_2^t, c_2 = -b_1^t, q = -m^t, n^t = -n, p^t = -p$. Pour la base de $\mathfrak{o}(7, \mathsf{F})$ on peut prendre pour commencer les trois matrices diagonales

$$e_{ii} - e_{3+i,3+i} \quad (2 \leq i \leq 4).$$

On peut y ajouter ensuite les matrices qui ne font intervenir que la première ligne et la première colonne

$$e_{1,4+i} - e_{1+i,1} \text{ et } e_{1,1+i} - e_{4+i,1} \quad (1 \leq i \leq 3).$$

Pour satisfaire l'équation $q = -m^t$ on prend

$$e_{i+1,j+1} - e_{j+4,i+4} \quad (1 \leq i \neq j \leq 3).$$

Pour n, respectivement p, on prend

$$e_{i+1,j+4} - e_{j+1,i+4} \quad (1 \leq i < j \leq 3),$$

respectivement

$$e_{i+4,j+1} - e_{j+4,i+1} \quad (1 \leq j < i \leq 3).$$

Le nombre total d'éléments dans la base est $2 \cdot 3^2 + 1 = 21$.

4.4 Décomposition radicielle de $\mathfrak{o}(7, \mathsf{F})$

Une des sous-algèbres de Cartan H de $\mathfrak{o}(7, \mathsf{F})$ est formée de toutes les matrices diagonales de la forme

$$h = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & a & & & & & \\ & & b & & & & \\ & & & c & & & \\ & & & & -a & & \\ & & & & & -b & \\ & & & & & & -c \end{pmatrix} \text{ avec } a, b, c \in \mathsf{F}.$$

Une base de son espace dual H^* peut être donnée par

$$\begin{aligned} \alpha &: h \mapsto a - b \quad \forall h \in H, \\ \beta &: h \mapsto b - c \quad \forall h \in H, \\ \gamma &: h \mapsto c \quad \forall h \in H. \end{aligned}$$

Il s'agit même d'une base du système de racines Φ qui s'identifie de manière naturelle à la base Δ précédemment trouvée du système de racines B_3. En effet, soient $x_1, x_2, x_3 \in L$ définis comme à la page suivante et soit $h \in H$. On observe alors que $[hx_1] = \alpha(h)x_1, [hx_2] = \beta(h)x_2, [hx_3] = \gamma(h)x_3$. Ainsi $\alpha, \beta, \gamma \in \Phi$ avec $L_\alpha = \langle x_1 \rangle, L_\beta = \langle x_2 \rangle, L_\gamma = \langle x_3 \rangle$. Rappelons que $[L_\sigma L_\tau] = L_{\sigma+\tau}$ pour tout $\sigma, \tau \in \Phi$ et remarquons que $[L_\alpha L_\beta], [L_\gamma L_\beta]$, $[L_\alpha L_{\beta+\gamma}]$, $[L_\gamma L_{\beta+\gamma}]$,$[L_\alpha L_{\beta+2\gamma}]$,$[L_{\alpha+\beta} L_{\beta+2\gamma}]$ sont tous des sous-espaces non nuls. Nous venons donc de trouver neuf racines qui s'écrivent comme combinaisons linéaires positives de α, β, γ. De plus, comme $\beta + 2\gamma$ est une racine, on conclut que $\alpha = \alpha_1, \beta = \alpha_2, \gamma = \alpha_3$ est une base de Φ.
Voici les éléments de la base de $S_{\alpha_i} \cong \mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$ pour $\alpha_i \in \Delta$:

$$h_1 = e_{22} - e_{33} - e_{55} + e_{66}$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & 0 & 1 & 0 & & & \\ & 0 & 0 & 0 & & & \\ & 0 & 0 & 0 & & & \\ & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & -1 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, y_1 = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & 0 & 0 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & 0 & & & \\ & 0 & 0 & 0 & & & \\ & & & & 0 & -1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$h_2 = e_{33} - e_{44} - e_{66} + e_{77}$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & 0 & 0 & 0 & & & \\ & 0 & 0 & 1 & & & \\ & 0 & 0 & 0 & & & \\ & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, y_2 = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & 0 & 0 & 0 & & & \\ & 0 & 0 & 0 & & & \\ & 0 & 1 & 0 & & & \\ & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & -1 \\ & & & & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$h_3 = 2e_{44} - 2e_{77}$$

$$x_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ -1 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \end{pmatrix}, \; y_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 2 & & & & & & \end{pmatrix}$$

Les x_i engendrent L_{α_i} tandis que les y_i engendrent $L_{-\alpha_i}$ pour tout $\alpha_i \in \Delta$. Les générateurs des autres espaces radiciels se calculent facilement grâce à la règle $[L_\alpha L_\beta] = L_{\alpha+\beta}$ pour tout $\alpha, \beta \in \Phi, \alpha \neq \beta$.

4.5 La représentation naturelle de B_3

Soit V un F-espace vectoriel de dimension 7 avec la base canonique $(e_1, \ldots, e_7)$ et $L = \mathfrak{o}(7, \mathsf{F})$. Alors $L \subset \operatorname{End} V$ et V est un L-module. C'est la représentation naturelle de L.
On va décomposer V en une somme directe d'espaces poids. Pour cela on commence par trouver un vecteur maximal. On peut remarquer que

$$x_i \cdot e_2 = 0 \text{ pour tout } 1 \leq i \leq 3,$$

il s'ensuit donc que $v^+ = e_2$ est un vecteur maximal. Soit $h \in H$. Alors

$$h \cdot v^+ = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(h)v^+ = \lambda_1(h)v^+,$$

ce qui entraîne que v^+ est de poids λ_1.

Nous allons nous intéresser maintenant à $V(\lambda_1)$ qui est un quotient irréductible du module cyclique standard $\mathfrak{U}(L)v^+$ inclus dans V. Nous avons alors en particulier $\dim V(\lambda_1) \leq \dim \mathfrak{U}(L)v^+ \leq \dim V = 7$.

Quels sont les autres poids de $V(\lambda_1)$? On sait que $\mathcal{W}(\Phi)$ permute les poids, on commence donc par calculer l'orbite de λ_1 sous l'action de $\mathcal{W}(\Phi)$:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha_1}(\lambda_1) &= \lambda_1 - \alpha_1 \\ \sigma_{\alpha_1+\alpha_2}(\lambda_1) &= \lambda_1 - \alpha_1 - \alpha_2 \\ \sigma_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}(\lambda_1) &= -\lambda_1 = \lambda_1 - 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \\ \sigma_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3}(\lambda_1) &= \lambda_1 - \alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3 \\ \sigma_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3}(\lambda_1) &= \lambda_1 - \alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\alpha_3 \end{aligned}$$

Les autres réflexions fixent λ_1. On a ainsi trouvé un total de six espaces poids qui sont tous de dimension 1 (car conjugués à V_{λ_1}). On remarque de plus que $\lambda_1 - \alpha_1 - \alpha_2$ et $\lambda_1 - \alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3$ sont des poids. Comme l'ensemble Π des poids de V est saturée, les chaînes de poids sont connexes et $\lambda_1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0$ doit être un poids également. Il est forcément de multiplicité un car $\dim V(\lambda_1) \leq 7$. Il s'ensuit alors que $\dim V(\lambda_1) = \dim V$; par conséquent $V(\lambda_1) = V$ et V est un L-module irréductible ! Pour résumer, on a

$$\begin{aligned}
\Pi_V \quad = \quad & \{\lambda_1, \\
& \lambda_1 - \alpha_1, \\
& \lambda_1 - \alpha_1 - \alpha_2, \\
& \lambda_1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3, \\
& \lambda_1 - \alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3, \\
& \lambda_1 - \alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\alpha_3, \\
& \lambda_1 - 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\}.
\end{aligned}$$

V est un L-module de plus haut poids λ_1 et ses espaces poids sont tous de dimension 1.

4.6 Le cas B_3 : construction de $V(\lambda_2)$

Dans cette section nous allons construire la représentation irréductible de B_3 qui admet comme poids maximal

$$\lambda_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pour commencer, nous allons trouver tous les poids dominants $\mu \in \mathbb{R}^3$ tels que $\mu \prec \lambda_2$ car nous savons déjà que $\Pi(\lambda_2)$ sera composé de tels μ ainsi que de leurs $\mathcal{W}$-conjugués.
Soit $\mu = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$ tel que $(\mu, \alpha_i) \geq 0$. Il s'ensuit alors que $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq 0$. De plus la condition $\mu \prec \lambda_2$ impose que $x_1 = 0$ ou $x_1 = 1$. Si $x_1 = 0$, on obtient le vecteur nul. Si $x_1 = 1$ alors on a deux possibilités : soit $x_2 = 0$, ce qui nous donne $\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, soit $x_2 = 1$, ce qui entraîne $x_3 = 0$ et $\mu = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_2$. Pour résumer, on trouve exactement trois poids dominants en-dessous de λ_2 pour l'ordre partiel $\prec$:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_2 - (\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3), \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_2 - (\alpha_2 + \alpha_3).$$

Combien de $\mathcal{W}$-conjugués les poids dominants admettent-ils ? Pour répondre à cette question, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 18.
Soit L une algèbre de Lie semi-simple arbitraire sur $\mathbb{C}$ et V un L-module irréductible. Soit Π_V l'ensemble des poids de V et $\mu \in \Pi_V$. Alors

$$\mathcal{W}_\mu = \{\sigma \in \mathcal{W} \mid \sigma\mu = \mu\} = \langle \sigma_{\alpha_i} \mid \sigma_{\alpha_i}\mu = \mu, \alpha_i \in \Delta \rangle.$$

De plus le nombre de $\mathcal{W}$-conjugués de μ est égal à

$$\frac{|\mathcal{W}|}{|\mathcal{W}_\mu|}.$$

Dans le cas de B_3, on a $|\mathcal{W}| = 2^3 \cdot 3! = 48$. Comme $\mathcal{W}_{\lambda_2}$ est de type $A_1 \times A_1$, $|\mathcal{W}_{\lambda_2}| = 4$, et on obtient que λ_2 admet $48/4 = 12$ $\mathcal{W}$-conjugués distincts. Pour μ_2 on remarque que $\mathcal{W}_{\mu_2}$ est de type B_2, donc $|\mathcal{W}_{\mu_2}| = 2^2 \cdot 2!$ et $\frac{|\mathcal{W}|}{|\mathcal{W}_\mu|} = 6$. Bien entendu 0 n'est conjugué qu'à lui-même.
Cherchons donc les 12 $\mathcal{W}$-conjugués de λ_2. Les calculs donnent

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_{\lambda_2} \quad = \quad & \{\lambda_2, \\
& \lambda_2 - \alpha_2, \\
& \lambda_2 - (\alpha_1 + \alpha_2), \\
& \lambda_2 - (\alpha_2 + 2\alpha_3), \\
& \lambda_2 - (\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3), \\
& \lambda_2 - (2\alpha_2 + 2\alpha_3), \\
& \lambda_2 - (2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3), \\
& \lambda_2 - (\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3), \\
& \lambda_2 - (2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3), \\
& \lambda_2 - (\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3), \\
& \lambda_2 - (2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3), \\
& \lambda_2 - (2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 4\alpha_3)\}.
\end{aligned}$$

Ces poids vont tous correspondre à un espace poids de dimension un car ils sont conjugués au poids maximal. Si l'on cherche les $\mathcal{W}$-conjugués de

$\mu_2 = \lambda_2 - (\alpha_2 + \alpha_3)$, on trouve

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\mu_2} &= \{\lambda_2 - (\alpha_2 + \alpha_3), \\ &\quad \lambda_2 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), \\ &\quad \lambda_2 - (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3), \\ &\quad \lambda_2 - (\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3), \\ &\quad \lambda_2 - (\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3), \\ &\quad \lambda_2 - (2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3)\}. \end{aligned}$$

On applique la formule de Freudenthal à μ_2 pour trouver que chaque élément de cette famille d'espaces poids est de dimension un également.

Il ne nous reste plus que la dimension de V_0 à déterminer. Comme nous connaissons déjà tous les poids au-dessus de 0 pour l'ordre partiel $\prec$ et leurs dimensions, nous pouvons de nouveau appliquer la formule de Freudenthal : cette fois-ci nous trouvons que $\dim V_0 = 3$. Nous concluons ainsi que $\dim V(\lambda_2) = 12 + 6 + 3 = 21$.

L'étape suivante serait de trouver une base pour chacun des espaces poids. Comme il s'agit d'un calcul long et fastidieux, nous allons nous contenter ici de trouver une base pour les espaces correspondant aux poids dominants.
Soit

$$\Phi^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1{+}\alpha_2, \alpha_2{+}\alpha_3, \alpha_1{+}\alpha_2{+}\alpha_3, \alpha_2{+}2\alpha_3, \alpha_1{+}\alpha_2{+}2\alpha_3, \alpha_1{+}2\alpha_2{+}2\alpha_3\}$$

$$= \{\beta_1, \dots, \beta_9\}$$

l'ensemble des racines positives, considéré désormais comme ensemble ordonné dans la notation du théorème 8. Soit v^+ le générateur d'un F-espace vectoriel de dimension 1 que nous allons prendre comme générateur de V_{λ_2}. Le théorème 8 nous dit alors que les générateurs des autres espaces poids V_μ s'expriment en fonction de v^+ sous la forme $y_{\beta_9}^{i_9} \cdots y_{\beta_1}^{i_1} \cdot v^+$ avec $i_1, \dots, i_m \in \mathbb{Z}_+$ et $\sum_j i_j \beta_j = \sum_{i=1}^3 k_i \alpha_i$ pour $\mu = \lambda_2 - \sum_{i=1}^3 k_i \alpha_i$.

Dans ce qui suit, nous allons adopter la notation suivante pour les racines composées : $x_{ijk} = x_{i\alpha_1 + j\alpha_2 + k\alpha 3}$ et de même pour les h_α et les y_α si $\alpha \in \Phi \backslash \Delta$.

En ce qui concerne l'espace poids V_{μ_2}, on peut remarquer que

$$x_3 y_3 y_2 v^+ = h_3 y_2 v^+ = 4 y_2 v^+ \neq 0$$

car y_2v^+ est une base de $V_{\lambda_2-\alpha_2}$. Ainsi $y_3y_2v^+ \neq 0$ et $y_3y_2v^+$ est une base de V_{μ_2}.

Pour trouver une base de l'espace poids V_0, nous vérifions que l'ensemble $\{y_{110}y_3^2y_2v^+, y_{111}y_3y_2v^+, y_{122}v^+, y_{112}y_2v^+\}$ constitue une famille de générateurs. Comme $\dim V_0 = 3$, il faut encore en extraire une base. Supposons qu'il existe $a, b, c, d \in \mathsf{F}$ tels que

$$ay_{110}y_3^2y_2v^+ + by_{111}y_3y_2v^+ + cy_{122}v^+ + dy_{112}y_2v^+ = 0.$$

Si l'on applique x_i, $i = 1, 2, 3$ à gauche, la somme doit toujours valoir 0. On utilise ce fait pour trouver des relations de dépendance entre les constantes. Commençons par appliquer x_1 terme à terme :

$$x_1y_{110}y_3^2y_2v^+ = -y_2y_3^2y_2v^+ = y_2y_3y_{011}v^+ = 4y_2y_{012}v^+ = 4y_{012}y_2v^+,$$

$$x_1y_{111}y_3y_2v^+ = -y_{011}y_3y_2v^+ = y_{011}^2v^+,$$
$$x_1y_{122}v^+ = 0,$$
$$x_1y_{112}y_2v^+ = y_{012}y_2v^+.$$

L'équation se réduit alors à

$$4ay_{012}y_2v^+ + by_{011}^2v^+ + dy_{012}y_2v^+ = 0.$$

Comme le poids $\lambda_2 - 2\alpha_2 - 2\alpha_3$ est de multiplicité 1, on a $y_{011}^2v^+ = \epsilon y_{012}y_2v^+$ pour un $\epsilon \in \mathsf{F}$. En appliquant x_{012} aux deux termes on trouve que $y_{011}^2v^+ = 4y_{012}y_2v^+$. D'un autre côté on a $y_{012}y_2v^+ \neq 0$. Ainsi on tire de l'équation que

$$4a + 4b + d = 0.$$

Appliquons ensuite x_2 aux termes de l'équation d'origine.

$$x_2y_{110}y_3^2y_2v^+ = y_1y_3^2y_2v^+ = -y_1y_3y_{011}v^+ = -4y_1y_{012}v^+ = -4y_{112}v^+,$$

$$x_2y_{111}y_3y_2v^+ = 0,$$
$$x_2y_{122}v^+ = y_{122}v^+,$$
$$x_2y_{112}y_2v^+ = y_{112}h_2v^+ = y_{122}v^+.$$

Etant donné que $y_{112}v^+ \neq 0$, on trouve alors l'équation

$$-4a + c + d = 0.$$

Pour finir, appliquons x_3 terme à terme à la première équation.

$$\begin{aligned} x_3 y_{110} y_3^2 y_2 v^+ &= y_{110} x_3 y_3^2 y_2 v^+ = y_{110} y_3 x_3 y_3 y_2 v^+ \\ &= y_{110} y_3 h_3 y_2 v^+ = 2 y_{110} y_3 y_2 v^+ = -2 y_{110} y_{011} v^+, \end{aligned}$$

$$x_3 y_{111} y_3 y_2 v^+ = y_{111} h_3 y_2 v^+ - 2 y_{110} y_3 y_2 v^+ = 2 y_{111} y_2 v^+ + 2 y_{110} y_{011} v^+,$$
$$x_3 y_{122} v^+ = 0,$$
$$x_3 y_{112} y_2 v^+ = -\frac{1}{2} y_{111} y_2 v^+.$$

En appliquant x_{111} à $y_{111} y_2 v^+$ et à $y_{110} y_{011} v^+$, on remarque que les deux termes sont sont nuls et de plus on a $y_{111} y_2 v^+ = -y_{110} y_{011} v^+$. On obtient ainsi l'équation
$$-2a + \frac{1}{2} d = 0.$$

Pour résumer, on a obtenu un système de trois équations à quatre inconnues :

$$\begin{cases} 4a + 4b + d = 0 \\ 4a - c - d = 0 \\ 4a - d = 0 \end{cases}$$

La variable d est libre ; si l'on pose $d = 0$ dans la toute première équation et on refait les calculs, on trouve que le système en trois inconnues a, b, c admet comme unique solution $a = b = c = 0$. Ainsi les vecteurs

$$y_{110} y_3^2 y_2 v^+, y_{111} y_3 y_2 v^+, y_{122} v^+$$

sont linéairement indépendants et forment une base de V_0.

Annexe

Voici la liste des éléments de l'algèbre de Lie linéaire de type B_3 que nous avons utilisé pour effectuer les calculs du dernier chapitre. On les exprime ici en fonction de la base canonique.
$x_1 = e_{23} - e_{65}$
$x_2 = e_{34} - e_{76}$
$x_3 = e_{17} - e_{41}$
$x_{011} = e_{16} - e_{31}$
$x_{012} = e_{37} - e_{46}$
$x_{110} = e_{24} - e_{75}$
$x_{111} = e_{15} - e_{21}$
$x_{112} = e_{45} - e_{27}$
$x_{122} = e_{26} - e_{35}$
$y_1 = e_{32} - e_{56}$
$y_2 = e_{43} - e_{67}$
$y_3 = 2e_{71} - 2e_{14}$
$y_{011} = 2e_{13} - 2e_{61}$
$y_{012} = e_{73} - e_{64}$
$y_{110} = e_{42} - e_{57}$
$y_{111} = 2e_{12} - 2e_{51}$
$y_{112} = e_{54} - e_{72}$
$y_{122} = e_{62} - e_{53}$

Les h_i se calculent selon la règle suivante : $h_i = [x_i, y_i]$ pour tout indice i.