ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Projet de semestre

Hiver 2006, semestre 5

La sphère homologique de Poincaré

Emanuele Dotto
(sous la direction de Samuel Wüthrich)

Table des matières

Introduction

En 1904 le mathématicien français Henri Poincaré a formulé sa célèbre conjecture. Il s'est demandé si toute variété topologique compacte de dimension 3, connexe par arcs, avec groupe fondamental trivial était homéomorphe à une sphère à trois dimensions. Ce problème est d'une telle importance pour les mathématiques théoriques, et en particulier pour la topologie, qu'en 1999 l'Institut de Mathématiques Clay a inscrit la conjecture de Poincaré parmi les sept «problèmes du millénaire», offrant un million de dollars au mathématicien capable de prouver cette conjecture. Il a fallu attendre jusqu'en 2006, pour que le mathématicien russe Grigori Perelman, de l'Institut de Mathématiques Steklov de Saint-Pétersbourg, reçoive la confirmation de la part d'un consensus d'experts que sa démonstration de la conjecture, contenue dans une série d'articles publiés entre 2002 et 2003, était correcte. L'importance de cette démonstration a été confirmée le 22 Août 2006 à Madrid, quand la Médaille Fields lui a été décernée. Cependant le mathématicien russe a refusé la médaille ainsi que la somme offerte d'un million.

La démonstration de Perelman est basée sur des mathématiques beaucoup trop avancées pour être traitées dans ce travail. Nous allons plutôt nous intéresser à un problème relié qui a amené Poincaré à formuler sa célèbre conjecture. Dans la même année, Poincaré a énoncé une autre conjecture. Il s'est demandé si toute variété topologique compacte de dimension 3, ayant mêmes groupes d'homologies que la 3-sphère, était en fait homéomorphe à une 3-sphère. Nous appellerons cette conjecture la "conjecture forte" de Poincaré, car si elle était vrai impliquerait directement la conjecture célèbre. Mais la conjecture forte ne deviendra jamais un théorème. En effet, le même Poincaré a trouvé un contrexemple, connu aujourd'hui comme la "sphère homologique de Poincaré". C'est la fausseté de cette première version de sa conjecture qui l'a amené à renforcer les hypothèses et à utiliser le groupe fondamental comme invariant homotopique dans sa célèbre conjecture. Le but principal de ce travail est de construire, et d'étudier, ce contrexemple.

Aperçu. Dans la première section nous introduisons les notions de base de la topologie générale que l'on utilisera tout le long du travail. Dans la deuxième section nous étudions les revêtements et ses liens avec les actions continues de groupes discrets sur des espaces topologiques. Nous commençons par rappeler la définition de groupe fondamental et ses propriétés de base. Ensuite on expose des éléments de la théorie des revêtements qui, avec la notion d'action de groupe proprement discontinue, nous donne les moyens pour construire la sphère homologique de Poincaré et pour identifier son groupe fondamental. Dans la troisième section nous introduisons les notions de variétés topologiques et de variétés différentiables. Ensuite on montre comment construire des nouvelles variétés à partir d'une action de groupe proprement discontinue sur une variété donnée. Cela nous permettra de construire la sphère homologique de Poincaré comme variété de dimension 3. Dans la quatrième section nous construisons et étudions la sphère homologique de Poincaré. Nous commençons par étudier le groupe des rotations du dodécaèdre, appelé le groupe icosaédral. Le produit des quaternions nous permet de munir la 3-sphère d'une structure de groupe topologique. Ensuite, nous expliquons la construction dûe à Hamilton d'un homomorphisme de groupes entre la 3-sphère et le groupe des rotations de $\mathbb{R}^3$. A l'aide de cette application, nous définissons le groupe icosaédral binaire, un sous-groupe fini de la 3-sphère, comme la préimage du groupe icosaédral. Nous définissons la sphère homologique de Poincaré comme l'espace des orbites de l'action du groupe icosaédral, par multiplication à gauche, sur la 3-sphère. Pour finir, nous déterminerons les groupes d'homologies de la 3-sphère et de la sphère homologique de Poincaré, en se basant sur une liste de propriétés fondamentales des groupes d'homologies. A ce point nous avons assemblé tous les résultats nécessaires pour montrer que la sphère homologique de Poincaré est un contrexemple à la conjecture forte de Poincaré.

1. Notions de topologie générale

1.1. **Rappels élémentaires.**

Ce chapitre a pour but de donner les définitions fondamentales de topologie générale que nous utiliserons tout le long de ce travail. Nous commençons par rappeler, brièvement, quelques définitions de base.

Une famille $\mathcal{T}$ de sous-ensembles d'un ensemble X est appelée **topologie** sur X si elle satisfait les conditions suivantes :

(1) L'ensemble vide et l'ensemble totale X appartiennent à $\mathcal{T}$.

(2) La famille $\mathcal{T}$ est fermée par union quelconque, i.e. pour toute collection $\{U_i \mid i \in I\}$ d'ensembles de $\mathcal{T}$, leur union $\cup_{i\in I} U_i$ est encore dans $\mathcal{T}$.

(3) La famille $\mathcal{T}$ est fermée par intersection finie, i.e. pour toute collection finie $\{U_i \mid 1 \leq i \leq n\}$, leur intersection $\cap_{i=1}^{n} U_i$ est encore dans $\mathcal{T}$.

Un ensemble X muni d'une topologie $\mathcal{T}$ est appelé **espace topologique**, et sera noté $(X, \mathcal{T})$. Nous dirons aussi que X est muni de la topologie $\mathcal{T}$. Les éléments de $\mathcal{T}$ s'appellent les sous-ensembles **ouverts** de X. Par abus de notation nous noterons souvent un espace topologique seulement avec X. Dans ce cas la topologie sera sous-entendue. En cas d'ambiguïté nous utiliserons toujours la notation $(X, \mathcal{T})$.

Un voisinage d'un élément $x \in X$ est un sous-ensemble $V \subset X$ tel qu'il existe un ouvert U de X avec $x \in U \subset V$.

On appelle **sous-espace topologique** de $(X, \mathcal{T})$ un sous-ensemble E de X muni de la topologie formée des intersections de E avec les ouverts de X. Cette topologie, notée $\mathcal{T}_E$, s'appelle la **topologie induite** sur E.

Une application $f \colon X \longrightarrow Y$ entre espaces topologiques X et Y est dite **continue** si la préimage de tout ouvert de Y est un ouvert de X, i.e. pour tout $U \in \mathcal{T}_Y$ on a $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$. Une application continue bijective, dont l'inverse est aussi continue, est appelée **homéomorphisme**.

Un **espace pointé** (X, x_0) est un espace topologique X muni d'un point distingué $x_0 \in X$, que l'on appellera point de base. Une **application pointée** $f \colon (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ est une application continue $f \colon X \longrightarrow Y$ entre espaces pointés telle que $f(x_0) = y_0$.

Soit X un espace topologique arbitraire par la suite. Une **séparation** de X est un couple (A, B) d'ouverts non vides de X tels que $A \cup B = X$ et $A \cap B = \emptyset$. Si X n'admet aucune séparation, il est appelé **connexe**. Une **composante connexe** C de X est un sous-espace topologique connexe de X maximale, c'est à dire que tout sous ensemble connexe $A \subset X$ contenant C, coïncide avec C. On rappelle que tout espace topologique est la réunion disjointe de ses composantes connexes.

L'espace X est de **Hausdorff** si pour tout $x, y \in X$ avec $x \neq y$ ils existent deux ouverts de X disjoints U et V tels que $x \in U$ et $y \in V$.

On rappelle qu'une application continue et bijective d'un compact vers un Hausdorff est un homéomorphisme.

1.2. **Base de topologie.** On sera souvent confronté au problème de devoir munir un ensemble d'une topologie, ou plus précisément de devoir construire des nouveaux espaces topologiques en partant d'espaces connus. On montre ici une méthode simple pour construire des topologies sur un ensemble, en partant d'une famille de sous-ensembles qui satisfait des conditions moins restrictives de celles d'une topologie. Cet outil nous servira aussi pour étudier une topologie donnée à travers une famille plus simple.

Définition 1.2.1. Soit X un ensemble. On dit qu'une famille $\mathcal{B}$ de sous-ensembles de X est une **base de topologie** si les conditions suivantes sont satisfaites :

(1) Les éléments de $\mathcal{B}$ recouvrent l'ensemble X, i.e. $X = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$.

(2) Pour tout ensembles $U, V \in \mathcal{B}$ et pour tout $x \in U \cap V$, il existe $W \in \mathcal{B}$ tel que $x \in W \subset U \cap V$.

La définition d'une base nous aide à définir une structure d'espace topologique sur X. En effet, la famille contenant toutes les unions d'éléments d'une base forme une topologie.

Proposition 1.2.2. *Soit $\mathcal{B}$ une base de topologie sur un ensemble X. Alors la famille $\mathcal{T}$ formée de toutes les unions d'éléments de la base de topologie,*

$$\mathcal{T} = \left\{ \bigcup_{B \in \mathcal{A}} B | \ \mathcal{A} \subset \mathcal{B} \right\},$$

définit une topologie sur X.

Démonstration. Vérifions les trois axiomes pour une topologie. L'ensemble vide est dans $\mathcal{T}$ car est l'union sur la famille vide, et X est dans $\mathcal{T}$ car $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ par la première propriété d'une base.
Une union quelconque d'éléments de $\mathcal{T}$ est dans $\mathcal{T}$ par définition même de $\mathcal{T}$. En effet, soit $\{U_i, i \in I\}$ une famille d'éléments de $\mathcal{T}$. Alors chaque U_i s'écrit comme union d'éléments de $\mathcal{B}$, $U_i = \bigcup_{B \in \mathcal{A}_i} B$, où $\mathcal{A}_i$ est une sous ensemble de $\mathcal{B}$. On forme l'union de tous les U_i et on voit qu'on obtient encore une union d'éléments de $\mathcal{B}$:

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{B \in \mathcal{A}_i} B = \bigcup_{B \in \mathcal{A}} B,$$

avec $\mathcal{A} = \cup_{i \in I} \mathcal{A}_i$.

Pour montrer que $\mathcal{T}$ est fermée par intersection finie il suffit, par induction, de vérifier que $U \cap V \in \mathcal{T}$ pour tout $U, V \in \mathcal{T}$. Assumons d'abord que $U, V \in \mathcal{B}$, et montrons $U \cap V \in \mathcal{T}$.
Si $U \cap V$ est vide l'affirmation est triviale. Soit donc $U \cap V$ non vide. Grâce à la deuxième propriété d'une base on peut choisir pour tout $x \in U \cap V$ un ensemble $W_x \in \mathcal{B}$ tel que $x \in W_x \subset U \cap V$. Ainsi $U \cap V$ est l'union de tout les W_x, et donc $U \cap V$ est dans $\mathcal{T}$, comme union d'éléments de $\mathcal{B}$.

Soient maintenant U, V des éléments de $\mathcal{T}$ quelconques. Supposons $U \cap V$ non vide, sans quoi $U \cap V$ est trivialement dans $\mathcal{T}$. Par hypothèse on a $U = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ et $V = \bigcup_{A' \in \mathcal{A}'} A'$ pour certains $\mathcal{A}, \mathcal{A}' \subset \mathcal{B}$. Alors on a pour l'intersection

$$U \cap V = \left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \right) \cap \left(\bigcup_{A' \in \mathcal{A}'} A' \right) = \bigcup_{A \in \mathcal{A}, A' \in \mathcal{A}'} A \cap A' \in \mathcal{T},$$

car $A \cap A' \in \mathcal{T}$ comme on vient de démonter, et car $\mathcal{T}$ est fermée par union comme on a déjà vu. $\square$

Définition 1.2.3. On appellera la topologie $\mathcal{T}$ définie dans la Proposition 1.2.2 la **topologie engendrée par** $\mathcal{B}$. Inversement, si on a une topologie donnée $\mathcal{S}$ qui est engendrée par une base $\mathcal{A}$, on dit que la topologie $\mathcal{S}$ **admet** $\mathcal{A}$ **comme base**.

Définition 1.2.4. Si un espace topologique admet une base de topologie dénombrable on dit qu'il satisfait le **deuxième axiome de dénombrabilité**.

Notation 1.2.5. Pour un espace métrique M muni d'une distance d on note $B(c, \epsilon) = \{x \in M | d(c, x) < \epsilon\}$ la boule ouverte centrée en $c \in M$ de rayon $\epsilon \in (0, \infty)$.

Exemple 1.2.6. Montrons que la famille dénombrable de boules

$$\{B(q, 1/n) | q \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}\}$$

est une base pour la topologie métrique de $\mathbb{R}$. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}$ et $x \in U$ quelconque. Par la définition d'un ouvert d'un espace métrique, il existe $\epsilon_x > 0$ tel que $B(x, \epsilon_x) \subset U$. Ainsi pour tout $q \in \mathbb{Q} \cap U$ il existe $\epsilon_q > 0$ tel que $B(q, \epsilon_q) \subset U$. De plus il existe $n_q \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ tel que $1/n_q < \epsilon_q$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ tout $x \in U$ appartient à une boule $B(q, 1/n_q)$ pour un $q \in \mathbb{Q} \cap U$. Ainsi on trouve que $U = \cup_{q \in \mathbb{Q} \cap U} B(q, 1/n_q)$.

1.3. **Produits finis d'espaces topologiques.** On utilise le concept de base de topologie pour définir une structure d'espace topologique sur le produit cartésien d'un nombre fini d'espaces topologiques donnés.

Proposition/Définition 1.3.1. *Soit $\{(X_i, \mathcal{T}_i) | 1 \leq i \leq n\}$ une collection finie d'espaces topologiques. La famille de sous-ensembles du produit $\prod_{i=1}^n X_i$ formée par les produits cartésiens d'ouverts des X_i,*

$$\mathcal{B} = \{(U_1 \times \cdots \times U_n) \mid U_i \in \mathcal{T}_i, 1 \leq i \leq n\},$$

*est une base de topologie. On appelle la topologie engendrée par $\mathcal{B}$ la **topologie produit** sur l'espace produit $\prod_{i=1}^n X_i$.*

Démonstration. Vérifions que la famille $\mathcal{B}$ ainsi définie satisfait effectivement les propriétés d'une base. On voit clairement que la famille $\mathcal{B}$ recouvre l'espace produit. En effet $X_1 \times \cdots \times X_n \in \mathcal{B}$ car chaque X_i est un élément de la topologie $\mathcal{T}_i$. Soient $U = U_1 \times \cdots \times U_n$ et $V = V_1 \times \cdots \times V_n$ des éléments de $\mathcal{B}$. On remarque que $U \cap V = (U_1 \cap V_1) \times \cdots \times (U_n \cap V_n)$. De plus pour tout i on a que $U_i \cap V_i$ appartient à $\mathcal{T}_i$, ainsi $U \cap V$ est contenu dans $\mathcal{B}$. Le résultat s'ensuit car $W = U \cap V$ satisfait la deuxième propriété d'une base. $\square$

Exemple 1.3.2. L'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de la topologie produit satisfait le deuxième axiome de dénombrabilité. En effet, généralisant l'Exemple 1.2.6, on peut facilement voir que la famille

$$\{B(q, 1/m) | q \in \mathbb{Q}^n, m \in \mathbb{N} \backslash \{0\}\}$$

forme une base dénombrable pour la topologie métrique, qui coïncide avec la topologie produit.

Remarque 1.3.3. La projection $\pi_i \colon \prod_{j=1}^n X_j \longrightarrow X_i$, qui envoie un élément $(x_1, \ldots, x_n)$ de l'espace produit sur sa i-ème composante x_i, est continue. En effet, la préimage d'un ouvert U de X_i est le produit cartésien $\prod_{j=1}^n U_j$, avec $U_j = X_j$ pour j différent de i, et avec $U_i = U$. Ce produit est un élément de la base, et donc un ouvert.

La topologie produit a été construite pour qu'elle satisfait la propriété énoncée ci-dessous. En effet il est intuitif et sensé d'imposer qu'une application d'un espace topologique dans un produit d'espaces soit continue si et seulement si ses compositions avec les projections sont continues.

Théorème 1.3.4 (Propriété universelle de la topologie produit)**.** *Soient X_i des espaces topologiques pour $1 \leq i \leq n$, $\prod_{j=1}^n X_j$ l'espace produit et $\pi_i \colon \prod_{j=1}^n X_j \longrightarrow X_i$ la projection canonique sur la composante i. Alors pour tout espace topologique Y, une application donnée $f \colon Y \longrightarrow \prod_{j=1}^n X_j$ est continue si et seulement si chacune de ses fonctions composantes $f_i = \pi_i \circ f$ est continue.*

Démonstration. Soient $\mathcal{T}_i$ les topologies sur les espaces X_i et $\mathcal{T}_Y$ la topologie sur Y. Supposons que f_i soit continue pour tout i. Montrons d'abord que la préimage par f d'un élément de la base de la topologie produit est un ouvert de Y. Soit U un ouvert de base du produit $\prod_{j=1}^n X_j$. Nous écrivons donc $U = U_1 \times \cdots \times U_n$ avec $U_i \in \mathcal{T}_i$ pour $1 \leq i \leq n$. Or la préimage d'un produit par f est l'intersection des préimages de chaque U_i par f_i, en effet $U = \bigcap_{1 \leq i \leq n} \pi^{-1}(U_i)$. Donc

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(\cap_{1\leq i \leq n} \pi^{-1}(U_i)) = \cap_{1 \leq i \leq n} f^{-1}(\pi^{-1}(U_i)) = \cap_{1 \leq i \leq n} f_i^{-1}(U_i),$$

qui est un ouvert de Y comme intersection finie d'ouverts. Soit maintenant V un ouvert quelconque de $\prod_{j=1}^n X_j$. On écrit V comme union $V = \cup_{A \in \mathcal{A}} A$ sur une sous-famille $\mathcal{A}$ de notre base. On utilise enfin que la préimage d'une union est l'union des préimages, donc

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(\cup_{A \in \mathcal{A}} A) = \cup_{A \in \mathcal{A}} f^{-1}(A).$$

On a déjà vu que chaque $f^{-1}(A)$ est ouvert, et donc $f^{-1}(V)$ l'est aussi en tant qu'union d'ouverts.

Réciproquement supposons f continue. On fixe un i entre 1 et n, et on considère la préimage par f_i d'un ensemble U_i ouvert de X_i. On a alors que

$$f_i^{-1}(U_i) = (\pi_i \circ f)^{-1}(U_i) = f^{-1}(\pi_i^{-1}(U_i)).$$

Or la préimage par π_i d' un ensemble E est le produit $A_1 \times \cdots \times A_n$ où A_j est égal à X_j pour $j \neq i$ et A_i est égal à E. Ainsi

$$f_i^{-1}(U_i) = f^{-1}(X_1 \times \cdots \times X_{i-1} \times U_i \times X_{i+1} \times \cdots \times X_n)$$

est ouvert, comme préimage par une application continue d'un ouvert de base. □

La topologie produit satisfait donc la propriété universelle, mais a priori on pourrait avoir choisi une topologie particulière, parmi plusieurs qui satisfont cette propriété. Le théorème suivant nous assure que ce n'est pas le cas.

Théorème 1.3.5. *Soient $(X_i, \mathcal{T}_i)$ des espaces topologiques pour $1 \leq i \leq n$, et soit $X = \prod_{j=1}^n X_j$ l'ensemble produit. Alors la topologie produit est la seule topologie à satisfaire la propriété universelle.*

Démonstration. Soient $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux topologies sur X, muni desquelles X satisfait la propriété universelle. On montre que $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$. Les projections π_i sont continues pour les deux topologies. En effet, si on applique la propriété universelle à la fonction identité de X muni de $\mathcal{T}_1$, qui est clairement continue, on obtient que $\pi_i \circ id = \pi_i$ est aussi continue. Le même raisonnement se fait sur X muni de $\mathcal{T}_2$.
Maintenant on considère l'identité de X muni de $\mathcal{T}_1$ vers X muni de $\mathcal{T}_2$. La projection π_i est continue et $\pi_i = \pi_i \circ id$, ce qui implique, grâce à la propriété

universelle, que l'identité est aussi continue. Ainsi pour tout U dans $\mathcal{T}_2$ on a que sa préimage $id^{-1}(U) = U$ est dans $\mathcal{T}_1$. En échangeant les rôles de $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ on obtient que tout ouvert de $\mathcal{T}_1$ est un ouvert de $\mathcal{T}_2$. Donc on a montré l'égalité des topologies. □

1.4. **Quotients d'espaces topologiques.** Le problème à résoudre maintenant est le suivant : On a une application surjective définie sur un espace topologique à valeurs dans un ensemble qu'on cherche à munir d'une topologie d'une manière naturelle, de telle façon que notre application soit continue. Voici comment on procède.

Proposition/Définition 1.4.1. *Soient $(X, \mathcal{T}_X)$ un espace topologique, Y un ensemble et $\pi \colon X \longrightarrow Y$ une application surjective. On définit une topologie $\mathcal{T}_Y$ sur Y par*

$$\mathcal{T}_Y = \left\{ U \subset Y \mid \pi^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X \right\}.$$

On appelle $\mathcal{T}_Y$ la ***topologie quotient*** *induite par π.*

Démonstration. Vérifions que ce qu'on a définit est effectivement une topologie. La préimage de l'ensemble vide est l'ensemble vide, qui est un ouvert de X. Ainsi l'ensemble vide est un ouvert de Y. La préimage de Y par π est X par surjectivité. Comme X est un ouvert de X on a bien que Y est un ouvert de Y.
Soit I un ensemble d'indices non vide et soient $U_i \in \mathcal{T}_Y$ pour tout $i \in I$. Considérons la préimage par π de l'union des U_i :

$$\pi^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) = \bigcup_{i \in I} \pi^{-1}(U_i)$$

qui est un ouvert de X, vu que les U_i sont ouverts de Y, et donc chaque $\pi^{-1}(U_i)$ est un ouvert de X. Ainsi l'union des U_i est ouvert dans Y, et donc $\mathcal{T}_Y$ est fermé par union quelconque.
Soient $U_1, \ldots, U_n$ des ouverts de Y. On considère la préimage par π de leur intersection : $\pi^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^n U_i\right) = \bigcap_{i=1}^n \pi^{-1}(U_i)$, qui est un ouvert de X car chaque $\pi^{-1}(U_i)$ l'est par définition de $\mathcal{T}_Y$. Ainsi l'intersection $\bigcap_{i=1}^n U_i$ est un ouvert de Y. Finalement $\mathcal{T}_Y$ est fermé par intersection finie. □

Remarque 1.4.2. L'application π est effectivement continue par rapport à la topologie qu'elle induit. En effet la topologie quotient est par définition la topologie la plus fine qui rende π continue.

Définition 1.4.3. Soient X et Y deux espaces topologiques, et $\pi : X \longrightarrow Y$ une application surjective. On dit que π est une **application quotient**, si Y est muni de la topologie quotient induite par π.

Remarquons que la donnée d'une application surjective $\pi \colon X \longrightarrow Y$ définit une partition de l'espace X donnée par la famille $\left\{\pi^{-1}(\{y\}) \mid y \in Y\right\}$. De plus la donnée d'une partition de X est équivalente à une relation d'équivalence sur X. Ainsi, en faisant le raisonnement inverse, pour une relation d'équivalence donnée sur un espace topologique X on peut mettre une structure d'espace topologique sur l'ensemble des classes d'équivalence en utilisant la topologie induite par l'application qui envoie chaque $x \in X$ sur sa classe d'équivalence.

Définition 1.4.4. Soient $\sim$ une relation d'équivalence sur un espace topologique X, et $X/_\sim$ l'ensemble des classes d'équivalence. Soit $\pi\colon X \longrightarrow X/_\sim$ l'application qui envoie chaque élément de X sur sa classe d'équivalence. L'ensemble $X/_\sim$ muni de la topologie induite par π est appelé l'**espace quotient** de X par $\sim$.

Théorème 1.4.5. *Soit $\pi\colon X \longrightarrow Y$ une application quotient. Pour tout espace topologique Z et pour tout application $f : Y \longrightarrow Z$, on a que f est continue si et seulement si la composée $f \circ \pi$ est continue.*

Démonstration. Si f est continue, $f \circ \pi$ l'est aussi par composition. Réciproquement, soit U un ouvert de Z. Par continuité $(f \circ \pi)^{-1}(U) = \pi^{-1}(f^{-1}(U))$ est un ouvert de X. Par définition de la topologie quotient on a que $f^{-1}(U)$ est un ouvert de Y, ce qui montre la continuité de f. $\square$

Corollaire 1.4.6 (Propriété universelle de la topologie quotient)**.** *Soient $\pi\colon X \longrightarrow Y$ une application quotient et $f\colon X \longrightarrow Z$ une application continue dans un espace topologique Z, constante sur $\pi^{-1}(\{y\})$ pour tout $y \in Y$. Alors il existe une unique application continue $\widetilde{f}\colon Y \longrightarrow Z$ telle que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Y \arrow[r, "\widetilde{f}"'] & Z. \end{tikzcd}$$

Démonstration. Soit y un élément de Y. Par surjectivité de π, il existe x dans X tel que $\pi(x) = y$. On définit pour tout y dans Y : $\widetilde{f}(y) = f(x)$. L'hypothèse sur f nous garanti que $\widetilde{f}$ est bien définie. En effet, si x et x' sont dans la fibre $\pi^{-1}(\{y\})$ on a $f(x) = f(x')$. La continuité de $\widetilde{f}$ découle immédiatement du Théorème 1.4.5. Pour l'unicité, supposons qu'il existe un $\overline{f}\colon Y \longrightarrow Z$ qui satisfait les mêmes propriétés de $\widetilde{f}$, alors $f = \overline{f} \circ \pi = \widetilde{f} \circ \pi$. Soit y dans Y, alors il existe x dans X tel que $\pi(x) = y$. Ainsi on peut écrire $\overline{f}(y) = \overline{f}(\pi(x)) = f(x) = \widetilde{f}(\pi(x)) = \widetilde{f}(y)$, ce qui démontre l'unicité. $\square$

Illustrons comment on peut utiliser cette propriété à l'aide d'un exemple.

Exemple 1.4.7. Soient I l'intervalle $I = [0, 1]$, muni de la topologie induite de $\mathbb{R}$, et $A = \{0, 1\}$. On considère la relation d'équivalence sur I définie par

$$x \sim y \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \text{ou} \\ x, y \in A \end{cases}.$$

On note l'ensemble des classes d'équivalence I/A, et $\pi\colon I \longrightarrow I/A$ l'application qui envoie chaque élément de I sur sa classe. Intuitivement, π "colle" les points 0 et 1, avec le résultat de déformer I en un cercle. Montrons formellement que I/A est homéomorphe à un cercle à l'aide du Corollaire 1.4.6. Soit $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ le cercle d'unité, centré à l'origine. En identifiant $\mathbb{R}^2$ avec le plan complexe $\mathbb{C}$ on décrit le cercle de la manière suivante : $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Définissons $f\colon I \longrightarrow S^1$ par $f(x) = \exp(2\pi i x)$. Cette fonction est continue. De plus elle est constante sur $\pi^{-1}(y)$ pour tout

$y \in I/A$, car $f(0) = f(1)$. Soit donc $\widetilde{f}\colon I/A \longrightarrow S^1$ l'unique application continue telle que $\widetilde{f} \circ \pi = f$. Vue que f est injective sur l'intérieur de I, et que 0 et 1 sont envoyés sur la même classe d'équivalence on a que $\widetilde{f}$ est injective sur I/A. La surjectivité de $\widetilde{f}$ découle directement de celle de f.

L'intervalle I est compact, donc I/A l'est aussi, comme image d'un compact par l'application continue π. De plus, S^1 est un espace de Hausdorff en tant qu'espace métrique, et $\widetilde{f}$ est une application bijective. Donc $\widetilde{f}$ est un homéomorphisme.

1.5. **Groupes topologiques.** Pour un groupe, qui est au même temps un espace topologique, il est naturel d'exiger que ces deux structures soient liées de la manière suivante.

Définition 1.5.1. Un **groupe topologique** G est un groupe (G, μ) muni d'une topologie telle que l'application produit $\mu\colon G \times G \longrightarrow G$ et l'application inverse $(\cdot)^{-1}\colon G \longrightarrow G$ sont continues. On dit dans ce cas que la topologie est **compatible** avec la structure de groupe.

Remarque 1.5.2. Tout sous-groupe H d'un groupe topologique G est un groupe topologique. En effet, soit $\mu\colon G \times G \longrightarrow G$ la multiplication de G. La restriction $\nu = \mu|_{H \times H}\colon H \times H \longrightarrow G$ est continue comme restriction d'une application continue. Or, par stabilité de H, l'image $h(H \times H)$ est contenue dans H. De plus $\nu\colon H \times H \longrightarrow H$ est surjective. Soit U un ouvert de H, qu'on écrit $U = V \cap H$ pour un certain ouvert V de G. Sa préimage est $\nu^{-1}(U) = \nu^{-1}(V) \cap \nu^{-1}(H) = \nu^{-1}(V) \cap (H \times H) = \nu^{-1}(V)$, qui est ouvert dans $H \times H$. Ainsi la multiplication de H est continue. Un raisonnement similaire s'applique à l'inverse.

Définition 1.5.3. Soient G et H deux groupes topologiques. Un **morphisme de groupes topologiques** de G vers H est un homomorphisme de groupes continu $\phi\colon G \longrightarrow H$.

Exemple 1.5.4. Soit $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ le groupe multiplicatif des nombres complexes. Muni de la topologie métrique, $\mathbb{C}^*$ est également un espace topologique. Montrons qu'il est un groupe topologique pour cette topologie. Comme la famille de boules $\{B(c,r) | c \in \mathbb{C}^*, r \in (0,\infty)\}$ forme une base pour la topologie métrique, pour montrer la continuité de μ il suffit de montrer que la préimage d'une boule est un ouvert de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$. Donc il faut voir que pour tout couple (x, y) qui vérifie $|\mu(x, y) - c| < r$, ils existent des réels positifs ϵ et δ tels que le produit des boules $B(x, \epsilon) \times B(y, \delta)$ reste inclus dans $\mu^{-1}(B(c, r))$. On pose $\epsilon = \frac{r-|xy-c|}{2|y|}$ et $\delta = \frac{r-|xy-c|}{2(\epsilon+|x|)}$. Ces deux quantités sont strictement positives vue que $|xy - c| < r$. Soient $(z_1, z_2) \in B(x, \epsilon) \times B(y, \delta)$. En utilisant l'inégalité du triangle, on obtient

$$|z_1 z_2 - c| \leq |z_1||z_2 - y| + |y||z_1 - x| + |xy - c| \leq (|x - z_1| + |x|)|z_2 - y| + \\ + |y||z_1 - x| + |xy - c| < (\epsilon + |x|)\delta + |y|\epsilon + r = r.$$

L'application inverse est clairement continue. Avec un raisonnement similaire, on obtient que $\mathbb{R}^*$ est un groupe topologique pour la multiplication.

Exemple 1.5.5. Vu qu'on a $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, le cercle S^1 est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$. Munissant le cercle de la topologie induite par

$\mathbb{C}$, on obtient, par restriction à S^1 des applications μ et $(\cdot)^{-1}$, que S^1 est un groupe topologique.

1.6. **Le groupe topologique $SO(3)$.** Soit $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels. Nous envisageons munir $M_n(\mathbb{R})$ d'une structure d'espace topologique. Construisons alors un isomorphisme d'espaces vectoriels $\alpha\colon M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{n^2}$. Soit E_{ij} la matrice avec toutes les composantes nulles sauf la composante ij qui vaut un. Ces matrices composent la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$. Nous définissons α sur cette base, en posant $\alpha(E_{ij}) = e_{(i-1)n+j}$, où $\{e_1, \ldots, e_n\}$ note la base canonique de $\mathbb{R}^{n^2}$. On peut ainsi étendre α de manière linéaire à tout $M_n(\mathbb{R})$. Comme $\mathbb{R}^{n^2}$ est un espace topologique, on peut définir une topologie sur $M_n(\mathbb{R})$ à travers de cet isomorphisme. Explicitement, un sous-ensemble $U \subset M_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$ si et seulement si l'image $\alpha(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{n^2}$.

Proposition 1.6.1. *Le produit matriciel $\mu\colon M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ est continue.*

Esquisse de la démonstration. La multiplication est constituée de compositions de produits et sommes des composantes des matrices, et ces applications sont continues sur $\mathbb{R}^{n^2}$. $\square$

Définition 1.6.2. Soit $GL(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) | \det(A) \neq 0\}$ l'ensemble des matrices inversibles.

Proposition 1.6.3. *Le groupe $GL(n)$ est un groupe topologique pour la multiplication, ouvert dans $M_n(\mathbb{R})$.*

Esquisse de la démonstration. Le fait que $GL(n)$ soit un groupe est bien connu. On muni $GL(n)$ de la topologie induite par celle de $M_n(\mathbb{R})$. On obtient par restriction que la multiplication $\mu|_{GL(n)}$ est continue. Considérons l'application inverse $(\cdot)^{-1}\colon GL(n) \longrightarrow GL(n)$, donnée par $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{cof}(A)^T$, où $\mathrm{cof}(A)$ est la matrice des cofacteurs de A. Comme le déterminant est une composition de sommes et produits des composantes, et la matrice des cofacteurs est une composition de déterminants et projections on a que l'application inverse $(\cdot)^{-1}$ est une composition d'applications continues, donc continue. Ainsi $GL(n)$ est un groupe topologique. De plus, $GL(n)$ est donné par la préimage $\det^{-1}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$. On a donc que $GL(n)$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$. $\square$

Définition 1.6.4. Soit $O(n) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) | MM^T = I_n\}$ le sous-groupe topologique de $GL(n)$ composé des matrices orthogonales.

Définition 1.6.5. Soit $SO(n)$ le sous-groupe topologique de $O(n)$ des matrices de détérminant 1.

Proposition 1.6.6 ([11, Th. XXIII.2.3.1])**.** *Le groupe $SO(3)$ coïncide avec l'ensemble des matrices qui représentent une rotation de $\mathbb{R}^3$.*

Proposition 1.6.7. *Soit $M \in SO(3)$ une matrice non-diagonale. Alors il existe $1 \leq i \leq 3$ tel que M est entièrement déterminée par Me_i.*

Démonstration. Toute rotation M est déterminée par la donnée d'un axe et d'un angle de rotation. Comme M n'est pas diagonale il existe $i \in \{1, 2, 3\}$ tel que $Me_i \neq \pm e_i$. Alors l'axe de rotation est donné par le produit vectoriel

$e_i \times Me_i$, et l'angle par $\arccos(\langle e_i, Me_i \rangle)$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire euclidien. $\square$

2. Revêtements et groupe de transformations

2.1. **Groupe fondamental.** Le groupe fondamental est une application qui associe à un espace topologique pointé un groupe. Le groupe fondamental a la propriété d'associer à deux espaces pointés homéomorphes le même groupe.

Définition 2.1.1. Un **chemin** d'un espace topologique X est une application continue $f\colon I \longrightarrow X$. On appelle **extrémités** de f les points $f(0)$ et $f(1)$. Le **chemin inverse** de f est le chemin $\overline{f}\colon I \longrightarrow X$ définit par $\overline{f}(t) = f(1-t)$. Un **lacet basé** en $x_0 \in X$ est un chemin dont les deux extrémités sont x_0. On note $\Omega(X, x_0)$ l'ensemble des lacets de X basés en x_0.

Définition 2.1.2. Soient (X, x_0) un espace pointé et $f, g\colon I \longrightarrow X$ deux lacets basés en x_0. On dit que f est **homotope** à g, et on le notera $f \simeq_* g$, s'il existe une application continue $H : I \times I \longrightarrow X$ telle que :

(1) $H(0, s) = f(s) \ \forall\ s \in I$;
(2) $H(1, s) = g(s) \ \forall\ s \in I$;
(3) $H(t, 0) = H(t, 1) = x_0 \ \forall\ t \in I$.

Une telle application H est appelée **homotopie** de f vers g.

Intuitivement, une homotopie entre lacets est une application qui déforme un lacet dans un autre de manière continue et de telle façon que toutes les applications intermédiaires $H(t, -)$ soient encore des lacets.

Proposition 2.1.3. *Soit (X, x_0) un espace pointé. Alors la relation $\simeq_*$ définie sur $\Omega(X, x_0)$ est une relation d'équivalence.*

Démonstration. Soient f, g, h des lacets basés en x_0. On vérifie que $\simeq_*$ est réflexive, symétrique et transitive.

(1) Réflexivité : L'application $H(s, t) = f(s)$ pour tout $s, t \in I$ définie une homotopie de f vers f.
(2) Symétrie : Soit $H(s, t)$ une homotopie de f vers g. Alors $F(s, t) = H(s, 1-t)$ est une homotopie de g vers f.
(3) Transitivité : Soient H et F homotopies de f vers g et de g vers h respectivement. Alors
$$G(s,t) = \begin{cases} H(s, 2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ F(s, 2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$
est une homotopie de f vers h. $\square$

Notation 2.1.4. Soit (X, x_0) un espace pointé. La **classe d'homotopie** d'un lacet f basé en x_0, notée $[f]_*$, est la classe d'équivalence de f par la relation $\simeq_*$. Elle est constituée de tous les lacets basés homotopes à f. On note $\pi_1(X, x_0)$ l'ensemble des classes d'homotopies des lacets de $\Omega(X, x_0)$.

On envisage munir l'ensemble $\pi_1(X, x_0)$ d'une structure de groupe. À cet effet nous définissons d'abord une opération binaire sur les lacets, pour ensuite l'étendre aux classes d'homotopie.

Définition 2.1.5. Soient (X, x_0) un espace pointé. Définissons l'application de **concaténation** $\star \colon \Omega(X, x_0) \times \Omega(X, x_0) \longrightarrow \Omega(X, x_0)$ sur l'ensemble des lacets basés en x_0 par

$$(f, g) \longmapsto (f \star g)(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{si} \quad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ g(2t-1) & \text{si} \quad t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} .$$

Intuitivement, cela revient à parcourir les deux lacets de suite et au double de la vitesse.

Lemme 2.1.6 ([10, §51])**.** *Soient $f, f', g, g' \in \Omega(X, x_0)$ des lacets tels que $f \simeq_* f'$ et $g \simeq_* g'$. Alors $f \star g \simeq_* f' \star g'$*

Grâce à ce lemme la concaténation $\star$ induit une opération $\cdot$ sur $\pi_1(X, x_0)$.

Proposition/Définition 2.1.7 ([10, Th. 51.2])**.** *L'ensemble $\pi_1(X, x_0)$ muni de l'opération $\cdot$ est un groupe, appelé le **groupe fondamental** de l'espace (X, x_0).*

Esquisse de la démonstration. Soient $f, g, h \in \Omega(X, x_0)$. Les images des applications $([f]_* \cdot [g]_*) \cdot [h]_*$ et $[f]_* \cdot ([g]_* \cdot [h]_*)$ sont égales. La seule chose qui change est la vitesse de parcours. On peut ainsi changer la paramétrisation de manière continue avec une homotopie.

L'élément neutre de $\pi_1(X, x_0)$ est la classe d'homotopie du lacet constant, défini par $c_{x_0}(t) = x_0$ pour tout $t \in I$. Les images de $[c_{x_0}]_* \cdot [f]_*$, de $[f]_* \cdot [c_{x_0}]_*$, et de $[f]_*$ sont égales. Les homotopies consistent encore en des changements de paramétrisation.

L'inverse de la classe d'un lacet f est la classe d'homotopie du lacet inverse $\overline{f}$. On a effectivement $[f]_* \cdot [\overline{f}]_* = [\overline{f}]_* \cdot [f]_* = [c_{x_0}]$. □

Remarque 2.1.8. On peut étendre la définition 2.1.5 de concaténation de lacets aussi aux chemins, sous la condition que la fin du premier chemin coïncide avec le début du deuxième. On peut aussi de manière analogue définir des homotopies à extrémités fixées entre chemins, et ensuite introduire une relation d'homotopie $\simeq_*$.

Proposition 2.1.9. *Soit X un espace topologique connexe par arcs. Alors $\pi_1(X, x_0)$ est isomorphe à $\pi_1(X, x_1)$ pour tout $x_0, x_1 \in X$.*

Démonstration. Soit $g \colon I \longrightarrow X$ un chemin de x_0 à x_1. Il est facile de vérifier que l'application $\alpha_g \colon \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_1)$ définie par $\alpha_g([\sigma]_*) = [\overline{g}]_*[\sigma]_*[g]_*$ est un isomorphisme de groupes, d'inverse $\alpha_{\overline{g}}$. □

Convention 2.1.10. Dans le cas d'un espace connexe par arcs X, on notera son groupe fondamental $\pi_1(X)$, car par la dernière proposition il est indépendant, à isomorphisme près, du point de base choisi.

Définition 2.1.11. Un espace topologique **simplement connexe** est un espace topologique connexe par arcs dont le groupe fondamental est trivial.

Proposition 2.1.12. *Soit (X, x_0) un sous-espace topologique pointé convexe d'un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Alors X est simplement connexe.*

Démonstration. Soit f un lacet basé en x_0. L'application $F \colon I \times I \longrightarrow X$, définie par $F(t, s) = sf(t) + (1-s)x_0$, est une homotopie de f vers le lacet constant c_{x_0}. Ainsi, tout lacet est homotope au lacet constant. □

Proposition 2.1.13. *Une application pointée* $p\colon (X,x_0) \longrightarrow (Y,y_0)$ *induit un homomorphisme de groupe* $p_*\colon \pi_1(X,x_0) \longrightarrow \pi_1(Y,y_0)$*, défini par* $p_*([f]_*) = [p\circ f]_*$.

Démonstration. Cette application est bien définie. En effet, soient f et g deux lacets dans la même classe d'homotopie, et H une homotopie de f vers g. Il est facile de voir que $p\circ H$ définit une homotopie de $p\circ f$ vers $p\circ g$.

Montrons que p_* est un homomorphisme de groupes. L'image du lacet constant $[c_{x_0}]_*$ est la classe $[p\circ c_{x_0}]_* = [c_{y_0}]_*$. Soient $[\sigma]_*, [\tau]_* \in \pi_1(X,x_0)$, on a alors

$$p_*([\sigma]_*\cdot[\tau]_*) = p_*([\sigma\star\tau]_*) = [p\circ(\sigma\star\tau)]_* =$$
$$= [(p\circ\sigma)\star(p\circ\tau))]_* = [p\circ\sigma]_*\cdot[p\circ\tau]_* = p_*([\sigma]_*)\cdot p_*([\tau]_*). \qquad \square$$

2.2. **Revêtements.** Nous introduisons la notion de revêtement, qui sera utile pour calculer les groupes fondamentaux de certains espaces topologiques.

Définition 2.2.1. Soient E, B deux espaces topologiques, et $p : E \longrightarrow B$ une application continue et surjective. Un sous-ensemble U de B est appelé **ouvert distingué** si U est ouvert, connexe, et si les deux propriétés suivantes sont satisfaites :

(1) Il existe une famille $\{V_j\}_{j\in I}$ d'ouverts de E telle que $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{j\in I} V_j$.
(2) La restriction de p à chaque V_j est un homéomorphisme dans U.

On appelle les V_j les **tranches au dessus de** U.

Définition 2.2.2. Soit $p : E \longrightarrow B$ comme ci-dessus. On dit que le triple (E,B,p) est un **revêtement** de B si tout $b\in B$ admet un ouvert distingué comme voisinage. Pour tout $b\in B$ on définit la **fibre** de b comme l'ensemble $p^{-1}(\{b\})$. On appelle B la **base** du revêtement et E l'**espace total**.

Comme la donnée de l'application $p\colon E \longrightarrow B$ comprend base et espace totale, on appellera souvent p le revêtement (E,B,p).

Définition 2.2.3. On dit qu'un revêtement (E,B,p) est **normal** si le groupe $p_*\pi_1(E,e_0)$ est un sous groupe normal de $\pi_1(B,p(e_0))$, pour tout $e_0\in E$.

On illustre la notion en donnant deux exemples.

Exemple 2.2.4. Soit B un espace topologique et A un ensemble. On définit sur A la topologie constituée de tous les sous-ensembles de A, appelée la topologie discrète. La projection $p\colon B\times A \longrightarrow B$, définie par $p(x,i) = x$, est clairement continue et surjective. Pour tout $x\in B$, l'espace B est un voisinage ouvert distingué. En effet, $p^{-1}(B) = B\times A = \bigsqcup_{a\in A} B\times\{a\}$. Dans la topologie discrète chaque sous-ensemble est ouvert, ainsi on a que $B\times\{a\}$ est un ouvert de l'espace produit. De plus, la restriction de p à chaque $B\times\{a\}$ est un homéomorphisme. On a alors que $(B\times A, B, p)$ est un revêtement.

Considérons maintenant un exemple moins banal.

Exemple 2.2.5. Soient $S^1\subset\mathbb{C}$ le cercle et $p\colon \mathbb{R}\longrightarrow S^1$ l'application définie par $p(x) = \exp(2\pi i x)$. Cette application est clairement continue et surjective. De plus, $\widetilde{p}\colon \mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$, définie par $\widetilde{p}(z) = \exp(2\pi i z)$, est holomorphe. Par conséquent $\widetilde{p}$ est une application ouverte. Un ouvert de $\mathbb{R}$ s'écrit $U \cap \mathbb{R}$, pour un ouvert U de $\mathbb{C}$. L'image par p de $U \cap \mathbb{R}$ est donnée par

$$p(U \cap \mathbb{R}) = \widetilde{p}(U \cap \mathbb{R}) = \widetilde{p}(U) \cap \widetilde{p}(\mathbb{R}) = \widetilde{p}(U) \cap S^1.$$

Ainsi p est une application ouverte de $\mathbb{R}$ dans S^1. Montrons que tout $b_0 \in S^1$ admet un voisinage ouvert distingué. Pour un b_0 quelconque de S^1 choisissons l'unique x_0 dans l'intervalle $[0, 1[$ tel que $p(x_0) = b_0$. Le demi cercle défini par $U = \{\exp(2\pi i x) |\ x \in]x_0 - \frac{1}{4}, x_0 + \frac{1}{4}[\}$ contient b_0 et est ouvert, car p est ouverte. Considérons sa préimage

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{Z}}]x_0 - \frac{1}{4} + \lambda, x_0 + \frac{1}{4} + \lambda[,$$

une réunion disjointe d'intervalles ouverts $V_\lambda =]x_0 - \frac{1}{4} + \lambda, x_0 + \frac{1}{4} + \lambda[$. Il reste à montrer que les restrictions $p|_{V_\lambda} \colon V_\lambda \longrightarrow p(V_\lambda)$ sont des homéomorphismes. La bijectivité est évidente. Comme $p|_{V_\lambda}$ est ouverte, il s'agit d'un homéomorphisme.

De plus, ce revêtement est normal. En effet, vu que $\mathbb{R}$ est convexe, son groupe fondamental $\pi_1(\mathbb{R})$ est trivial par 2.1.12, et donc $p_*\pi_1(\mathbb{R})$, est trivial.

2.3. **Propriété de relèvement.**

Définition 2.3.1. Soient E, B et X des espaces topologiques et $p \colon E \longrightarrow B$, $f \colon X \longrightarrow B$ deux applications continues. Un **relèvement** de f est une application continue $\widetilde{f} \colon X \longrightarrow E$ telle que $p \circ \widetilde{f} = f$, i.e. telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "p"'] & \\ B & X \arrow[l, "f"] \arrow[ul, "\widetilde{f}"'] \end{tikzcd}$$

commute.

On énonce maintenant quelques propriétés importantes des revêtements qu'on utilisera dans la prochaine section. Ce n'est pas dans les buts de ce travail de démontrer ces propriétés, c'est pourquoi les démonstrations seront omises.

Proposition 2.3.2 (Propriété d'unicité des relèvements, [9, Prop. 11.9])**.** *Soient (E, B, p) un revêtement et X un espace topologique connexe. Soit de plus $f \colon X \longrightarrow B$ une application continue qui admette deux relèvements $\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2 \colon X \longrightarrow E$ qui coïncident sur un point de X. Alors $\widetilde{f}_1 = \widetilde{f}_2$.*

Proposition 2.3.3 (Relèvement de chemins, [9, Prop. 11.10])**.** *Soient (E, B, p) un revêtement, $f \colon I \longrightarrow B$ un chemin de B, et e_0 un point dans la fibre $p^{-1}(\{f(0)\})$. Alors il existe un unique relèvement $\widetilde{f} \colon I \longrightarrow E$ de f tel que $\widetilde{f}(0) = e_0$.*

Proposition 2.3.4 (Relèvement d'homotopies, [9, Prop. 11.11])**.** *Soit (E, B, p) un revêtement. Soient f et g deux chemins de B tels que $f \simeq_* g$. Soient $\widetilde{f}, \widetilde{g} \colon I \longrightarrow E$ des relèvements de f et g tels que $\widetilde{f}(0) = \widetilde{g}(0)$. Alors $\widetilde{f} \simeq_* \widetilde{g}$.*

Remarque 2.3.5. Cette dernière proposition peut être généralisée. En effet, toute fois qu'on a un relèvement $h\colon X \longrightarrow E$ d'une application $f\colon X \longrightarrow B$ définie sur un espace X quelconque, et une homotopie $H\colon X \times I \longrightarrow B$ partant à f, il existe une homotopie $\widetilde{H}\colon X \times I \longrightarrow E$ partant à h.

Corollaire 2.3.6. *Sous les mêmes hypothèses de la Proposition 2.3.4, l'homomorphisme de groupes $p_*\colon \pi_1(E, e_0) \longrightarrow \pi_1(B, b_0)$ est injectif.*

Démonstration. Soient $[\sigma]_*, [\tau]_* \in \pi_1(E, e_1)$ tels que $[p \circ \sigma]_* = [p \circ \tau]_*$. Or σ et τ sont des relèvements de $p \circ \sigma$ et de $p \circ \tau$ respectivement. Comme $[p \circ \sigma]_* = [p \circ \tau]_*$ la Proposition 2.3.4 nous assure que les relèvements σ et τ sont aussi homotopes, ainsi $[\sigma]_* = [\tau]_*$. □

Regardons comment les relèvements se comportent par rapport aux concaténations de chemins.

Proposition 2.3.7. *Soient (E, B, p) un revêtement, f et g des chemins de B tels que $f(1) = g(0)$. Soient $\widetilde{f}$ l'unique relèvement de f partant à $e_0 \in p^{-1}(\{f(0)\})$, et $\widetilde{g}$ un relèvement de g partant de $\widetilde{f}(1)$. Alors le relèvement de la concaténation $f \star g$ partant à e_0 est $\widetilde{f} \star \widetilde{g}$.*

Démonstration. Il est facile de voir que $p\circ(\widetilde{f}\star\widetilde{g}) = (p\circ\widetilde{f})\star(p\circ\widetilde{g})$. L'affirmation s'ensuit, car $(p \circ \widetilde{f}) \star (p \circ \widetilde{g}) = f \star g$. □

Le théorème suivant nous montre comment on peut déterminer l'existence d'un relèvement d'une application $f\colon X \longrightarrow B$ dans la base d'un revêtement $p\colon E \longrightarrow B$ à partir d'une condition sur les images des homomorphismes induits par p et f.

Théorème 2.3.8. *Soit (E, B, p) un revêtement. Soient X un espace topologique connexe par arcs et localement connexe par arcs et $f\colon X \longrightarrow B$ une application continue. Soient $x_0 \in X$ et $e_0 \in E$ tels que $f(x_0) = p(e_0)$. Alors f admet un relèvement $\widetilde{f}\colon X \longrightarrow E$ tel que $\widetilde{f}(x_0) = e_0$ si et seulement si $f_*\pi_1(X, x_0) \subset p_*\pi_1(E, e_0)$. Si ce relèvement existe, il est unique.*

Démonstration. Supposons qu'un tel relèvement $\widetilde{f}$ existe. Comme $p \circ \widetilde{f} = f$ on a directement que $f_*\pi_1(X, x_0) = p_*(\widetilde{f}_*\pi_1(X, x_0)) \subset p_*\pi_1(X, x_0)$.

Réciproquement, supposons cette dernière inclusion satisfaite et construisons un relèvement $\widetilde{f}$ de f. Pour tout $x \in X$ on choisi un chemin g_x de x_0 à x. Soit $\widetilde{f \circ g_x}$ l'unique relèvement de $f \circ g_x$ dans E tel que $\widetilde{f \circ g_x}(0) = e_0$. On vise à définir une application $\widetilde{f}\colon X \longrightarrow E$, en posant

$$\widetilde{f}(x) = \widetilde{f \circ g_x}(1).$$

Cette application est un candidat pour le rôle du relèvement de f cherché. En effet nous avons l'égalité

$$p \circ \widetilde{f}(x) = p \circ \widetilde{f \circ g_x}(1) = f \circ g_x(1) = f(x).$$

Il faut montrer que notre $\widetilde{f}$ est bien défini, i.e. qu'elle ne dépende pas des choix des chemins g_x. Soient g et h deux chemins de x_0 à x. Alors l'application $h \star \overline{g}$ est un lacet de X basé en x_0. Maintenant nous utilisons l'hypothèse de l'inclusion des groupes fondamentaux pour obtenir que $f_*([h \star \overline{g}]_*) \in p_*\pi_1(E, e_0)$. Cela signifie qu'il existe un lacet σ de E basé en e_0 tel que

$[f \circ (h \star \overline{g})]_* = [p \circ \sigma]_*$. Il est facile de voir que $f \circ (h \star \overline{g}) = (f \circ h) \star (\overline{f \circ g})$. Ainsi les lacets $p \circ \sigma$ et $(f \circ h) \star (\overline{f \circ g})$ sont homotopes, on a donc $[p \circ \sigma]_* = [(f \circ h) \star (\overline{f \circ g})]_* = [(f \circ h)]_* \cdot [(\overline{f \circ g})]_*$. En multipliant à droite par $[f \circ g]_*$ on obtient $[(p \circ \sigma) \star (f \circ g)]_* = [f \circ h]_*$. Considérons les relèvements de ces deux lacets qui envoient 0 sur e_0. Par la Proposition 2.3.4, ils sont homotopes, donc en particulier ils coïncident en 1. De plus remarquons que le relèvement de $p \circ \sigma$ qui part à e_0 est le lacet σ lui-même, qui termine aussi en e_0. Soit $\widetilde{f \circ g}$ le relèvement de $f \circ g$ qui part à e_0. Par la Proposition 2.3.7 la concaténation de ces deux relèvements donne le relèvement de $(p \circ \sigma) \star (f \circ g)$ qui part à e_0. Ainsi $\widetilde{f \circ h}(1) = \sigma \star (\widetilde{f \circ g})(1) = \widetilde{f \circ g}(1)$. Donc on a démontré que $\widetilde{f}$ est bien définie.

La vérification de la continuité de $\widetilde{f}$ est technique et sera donc omise. C'est dans cette partie de la démonstration que l'hypothèse de connexité locale est utilisée. Une référence pour la démonstration de la continuité est [9, Prop. 11.15]. L'unicité découle directement de la Proposition 2.3.2. □

Définition 2.3.9. Soient $p\colon E \longrightarrow B$ et $p'\colon E' \longrightarrow B$ deux revêtements d'un même espace B. Un **morphisme** de p vers p' est une application continue $\phi\colon E \longrightarrow E'$ telle que $p = p' \circ \phi$. Les **endomorphismes** de $p\colon E \longrightarrow B$ sont les morphismes de p vers p, et les **automorphismes** de p sont les endomorphismes de p qui sont aussi des homéomorphismes. Par composition les automorphismes de p forment un groupe, appelé le **groupe de transformations** du revêtement p, noté $\mathcal{C}_p(E)$.

Remarque 2.3.10. Une application du groupe de transformations d'un revêtement p est un relèvement de p.

2.4. **Détermination du groupe de transformations.** Le but de cette section est d'exprimer le groupe de transformations d'un revêtement en terme du groupe fondamental de sa base.

Dans toute cette section, (E, B, p) note un revêtement, b_0 un point de B et e_0 un point de la fibre $p^{-1}(\{b_0\})$. On supposera aussi l'espace E connexe par arcs et localement connexe par arcs.

On commence par associer à une classe d'homotopie de $\pi_1(B, b_0)$ un point de la fibre $p^{-1}(\{b_0\})$.

Proposition/Définition 2.4.1. *Pour tout $e_0 \in p^{-1}(\{b_0\})$ il existe une application naturelle $\Psi\colon \pi_1(B, b_0) \longrightarrow p^{-1}(\{b_0\})$. Cette application est définie par $\Psi([\sigma]_*) = \widetilde{\sigma}(1)$, où $\widetilde{\sigma}$ est le relèvement de σ tel que $\widetilde{\sigma}(0) = e_0$.*

Démonstration. Remarquons tout d'abord que par la Proposition 2.3.3 un tel relèvement $\widetilde{\sigma}$ existe. De plus, vue qu'on a fixé $\widetilde{\sigma}(0) = e_0$, $\widetilde{\sigma}$ est unique par la Proposition 2.3.2. Le fait que cette application ne dépende pas du choix de représentant de la classe $[\sigma]$ découle de la Proposition 2.3.4. □

Le prochain résultat montre de quelle manière change l'image par p_* du groupe fondamental de E, si on fait varier le point de base dans la fibre $p^{-1}(\{b_0\})$.

Lemme 2.4.2. *Pour tout e_0, e_1 dans la fibre $p^{-1}(\{b_0\})$ les groupes $p_*\pi_1(E, e_0)$ et $p_*\pi_1(E, e_1)$ sont conjugués dans $\pi_1(B, b_0)$.*

Démonstration. Soient $e_0, e_1 \in p^{-1}(\{b_0\})$. Soit $\widetilde{g}$ un chemin dans E de e_0 à e_1, et considérons la composition $g = p \circ \widetilde{g}$. Vu que les extrémités de $\widetilde{g}$ sont dans la fibre de b_0, on a que g est un lacet basé en b_0. Définissons deux isomorphismes de groupes

$$\Phi_{\widetilde{g}} \colon \pi_1(E, e_0) \longrightarrow \pi_1(E, e_1), \Phi_g \colon \pi_1(B, b_0) \longrightarrow \pi_1(B, b_0)$$

par $\Phi_{\widetilde{g}}([f]_*) = [\widetilde{g}]_*^{-1}[f]_*[\widetilde{g}]_*$, et de la même manière $\Phi_g([h]_*) = [g]_*^{-1}[h]_*[g]_*$. Comme on a :

$$p_* \circ \Phi_{\widetilde{g}}([f]_*) = [p \circ (\overline{\widetilde{g}} \star f \star \widetilde{g})]_* = [(\overline{p \circ \widetilde{g}}) \star (p \circ f) \star (p \circ \widetilde{g})]_* =$$
$$= [g]_*^{-1} \cdot p_*([f]_*) \cdot [g] = \Phi_g \circ p_*([f]_*),$$

on obtient que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(E, e_0) \arrow[r, "\Phi_{\widetilde{g}}"] \arrow[d, "p_*"'] & \pi_1(E, e_1) \arrow[d, "p_*"] \\
\pi_1(B, b_0) \arrow[r, "\Phi_g"'] & \pi_1(B, b_0).
\end{tikzcd}$$

Cela signifie que le sous-groupe $p_*\pi_1(E, e_0)$ de $\pi_1(B, b_0)$ est envoyé par Φ_g dans le sous-groupe $p_*\pi_1(E, e_1)$. Ainsi on obtient par restriction un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(E, e_0) \arrow[r, "\Phi_{\widetilde{g}}"] \arrow[d, "p_*"'] & \pi_1(E, e_1) \arrow[d, "p_*"] \\
p_*\pi_1(E, e_0) \arrow[r, "\Phi_g"'] & p_*\pi_1(E, e_1).
\end{tikzcd}$$

Montrons que $p_* \colon \pi_1(E, e_1) \longrightarrow p_*\pi_1(E, e_1)$ est aussi un isomorphisme. Par le Corollaire 2.3.6 on a l'injectivité, et la surjectivité est évidente car $p_*\pi_1(E, e_1)$ est l'image de p_*. Avec le même raisonnement on peut montrer que $p_* \colon \pi_1(E, e_0) \longrightarrow p_*\pi_1(E, e_0)$ est, lui aussi, un isomorphisme. La commutativité du diagramme, et le fait que ces trois applications soient des isomorphismes, forcent $\Phi_g \colon p_*\pi_1(E, e_0) \longrightarrow p_*\pi_1(E, e_1)$ à être aussi un isomorphisme, donc en particulier surjectif. De plus l'image de Φ_g est exactement $[g]_*^{-1} \cdot p_*\pi_1(E, e_0) \cdot [g]_*$. Ce qui montre que

$$[g]_*^{-1} \cdot p_*\pi_1(E, e_0) \cdot [g]_* = p_*\pi_1(E, e_1). \qquad \square$$

Soit $\mathcal{N}(p_*\pi_1(E, e_0))$ le normalisateur de $p_*\pi_1(E, e_0)$ dans $\pi_1(B, b_0)$. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(B, b_0) \arrow[r, "\Psi"] & p^{-1}(\{b_0\}) \arrow[r, phantom, "\ni"] & \phi(e_0) \\
\mathcal{N}(p_*\pi_1(E, e_0)) \arrow[u, hook] \arrow[r, dotted, "\eta"'] & \mathcal{C}_p(E) \arrow[u, hook, "\omega_{e_0}"'] \arrow[r, phantom, "\ni"] & \phi, \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

où la flèche verticale à gauche est l'inclusion. L'application ω_{e_0} d'évaluation en e_0 est injective par le Théorème 2.3.8. L'existence d'une telle application η qui rende le diagramme commutatif est garantie par le résultat suivant :

Théorème 2.4.3. *Soit* $[\sigma]_* \in \mathcal{N}(p_*\pi_1(E,e_0))$. *Alors il existe un unique* $\phi \in \mathcal{C}_p(E)$ *tel que* $\phi(e_0) = \Psi([\sigma]_*)$. *L'application*

$$\eta\colon \mathcal{N}(p_*\pi_1(E,e_0)) \longrightarrow \mathcal{C}_p(E)$$

ainsi définie est un homomorphisme de groupes surjectif, dont le noyau est $p_*\pi_1(E,e_0)$.

Démonstration. On se donne une classe de lacet $[\sigma]_* \in \mathcal{N}(p_*\pi_1(E,e_0))$. Soit $\widetilde{\sigma}$ son relèvement qui commence à e_0. On pose $e_1 = \widetilde{\sigma}(1)$. Montrons l'existence d'un automorphisme ϕ de p qui envoie e_0 sur e_1. Remarquons que $p(e_1) = p(\widetilde{\sigma}(1)) = \sigma(1) = b_0 = p(e_0)$. Ainsi, grâce au Théorème 2.3.8, il suffit de montrer que $p_*\pi_1(E,e_0)$ est inclus dans $p_*\pi_1(E,e_1)$. Comme e_0 et e_1 appartiennent à la fibre de b_0, le Théorème 2.4.2 nous assure que les deux groupes sont conjugués. De plus, depuis la preuve de ce théorème, on sait que l'élément qui conjugue ces deux groupes est la classe de la projection $p \circ \widetilde{g}$ d'un chemin $\widetilde{g}$ de e_0 à e_1. Mais $\widetilde{\sigma}$ est bien un chemin de e_0 à e_1. Alors les deux sous-groupes sont conjugués par $p \circ \widetilde{\sigma} = \sigma$. Ainsi $[\sigma]_*^{-1} \cdot p_*\pi_1(E,e_0) \cdot [\sigma]_* = p_*\pi_1(E,e_1)$. Finalement, vu que σ est dans le normalisateur, on a l'égalité $p_*\pi_1(E,e_0) = p_*\pi_1(E,e_1)$. Ainsi le relèvement cherché ϕ existe. Vue qu'on a l'égalité entre les deux sous-groupes, on peut appliquer le Théorème 2.3.8 avec l'inclusion inverse, et on obtient l'existence d'un relèvement ψ de p qui envoie e_1 sur e_0. Montrons alors que ψ est l'inverse de ϕ. On a que $\psi \circ \phi(e_0) = e_0$, et la composition $\psi \circ \phi$ est un relèvement de p. De plus, l'identité de E est aussi un relèvement de p qui envoie e_0 sur lui même. Par 2.3.2, on a que $\psi \circ \phi$ est l'identité. Le même argument montre que $\phi \circ \psi$ est aussi l'identité. Ainsi $\phi^{-1} = \psi$.

Montrons maintenant que η est un homomorphisme. Considérons l'image de l'élément neutre $[c_{b_0}]_*$. Le relèvement de c_{b_0} partant à e_0 est le lacet constant c_{e_0}. En effet, on a $p \circ c_{e_0}(t) = b_0$ pour tout $t \in I$. Nous obtenons donc que $\eta([c_{b_0}]_*)(e_0) = c_{e_0}(1) = e_0$. Ainsi $\eta([c_{b_0}]_*)$ coïncide avec l'identité en e_0. Par 2.3.2, on a que l'image de $[c_{b_0}]_*$ est l'identité de E, i.e. le neutre de $\mathcal{C}_p(E)$.

Soient $[\sigma]_*$ et $[\tau]_*$ des classes du normalisateur $\mathcal{N}(p_*\pi_1(E,e_0))$. Soient $\widetilde{\sigma}$ et $\widetilde{\tau}$ les relèvement de σ et de τ qui commencent à e_0, et posons $e_1 = \widetilde{\sigma}(1)$ et $e_2 = \widetilde{\tau}(1)$. Il faut montrer que $\eta([\sigma \star \tau]_*) = \eta([\sigma]_*) \circ \eta([\tau]_*)$. Toujours grâce à 2.3.2, il nous suffit de montrer que ces deux applications coïncident en un point. Montrons qu'effectivement les images de e_0 sont les mêmes. Considérons $\eta([\sigma]_*) \circ \eta([\tau]_*)(e_0) = \eta([\sigma]_*)(e_2)$. Pour montrer que l'image de e_2 est égale à $\eta([\sigma \star \tau]_*)(e_0)$ on aimerait exprimer le relèvement de la concaténation $\sigma \star \tau$ en fonction de $\widetilde{\sigma}$ et $\widetilde{\tau}$. Le fait qu'en générale e_1 n'est pas égale à e_0 nous empêche de concaténer $\widetilde{\sigma}$ et $\widetilde{\tau}$, ainsi 2.3.7 ne s'applique pas. Il faut donc trouver un relèvement de τ qui commence à e_1. Définissons le chemin $\overline{\tau} = \eta([\sigma]_*) \circ \widetilde{\tau}$. On a que $\overline{\tau}$ est aussi un relèvement de τ. En effet, en utilisant que $\eta([\sigma]_*)$ est un relèvement de p, on obtient

$$p \circ \overline{\tau} = (p \circ \eta([\sigma]_*)) \circ \widetilde{\tau} = p \circ \widetilde{\tau} = \tau.$$

On note aussi que $\overline{\tau}(0) = \eta([\sigma]_*)(e_0) = e_1$. Maintenant nous appliquons 2.3.7 pour obtenir que $\widetilde{\sigma} \star \overline{\tau}$ est le relèvement de $\sigma \star \tau$ qui commence à e_0. Ainsi on trouve que

$$\eta([\sigma \star \tau]_*)(e_0) = \widetilde{\sigma} \star \overline{\tau}(1) = \overline{\tau}(1) = \eta([\sigma]_*) \circ \widetilde{\tau}(1) = \eta([\sigma]_*) \circ \eta([\tau]_*)(e_0),$$

ce qui fallait démontrer.

Montrons la surjectivité de η. Soit $\phi \in \mathcal{C}_p(E)$ et soit $e_1 = \phi(e_0)$. Il faut trouver une classe $[\sigma]_* \in \mathcal{N}(p_*\pi_1(E, e_0))$ telle que $\Psi([\sigma]_*) = e_1$. Soit g un chemin dans E de e_0 à e_1. Comme ϕ est un relèvement de p, les points e_0 et e_1 sont dans la fibre de b_0. Ainsi $p \circ g$ est un lacet basé en b_0. De plus son relèvement partant à e_0 est clairement g, qui se termine à $g(1) = e_1$. On obtient, par unicité du relèvement de p, que $\eta([p \circ g]_*) = \phi$. Il nous reste à montrer que $[p \circ g]_*$ est contenu dans $\mathcal{N}(p_*\pi_1(E, e_0))$. Cela revient à montrer que pour tout $[\omega]_* \in p_*\pi_1(E, e_0)$ la conjugaison $[p \circ g]_*^{-1} \cdot [\omega]_* \cdot [p \circ g]_*$ appartient à $p_*\pi_1(E, e_0)$. On écrit $[\omega]_* = [p \circ \tau]_*$ pour un certain $[\tau]_* \in \pi_1(E, e_0)$. Comme l'inverse ϕ^{-1} est un relèvement de p, on peut substituer $p \circ \phi^{-1}$ à p, pour obtenir que

$$[p \circ g]_*^{-1} \cdot [p \circ \tau]_* \cdot [p \circ g]_* = [p \circ \phi^{-1} \circ g]_*^{-1} \cdot [p \circ \phi^{-1} \circ \tau]_* \cdot [p \circ \phi^{-1} \circ g]_* =$$

$$[p \circ ((\phi^{-1} \circ \overline{g}) \star (\phi^{-1} \circ \tau) \star (\phi^{-1} \circ g))]_* = p_*([(\overline{\phi^{-1} \circ g}) \star (\phi^{-1} \circ \tau) \star (\phi^{-1} \circ g)]_*).$$

Or, le lacet $(\overline{\phi^{-1} \circ g}) \star (\phi^{-1} \circ \tau) \star (\phi^{-1} \circ g)$ est basé en e_0, ainsi $[p \circ g]_*$ est dans le normalisateur.

Pour démontrer que $\ker(\eta) = p_*\pi_1(E, e_0)$, on procède par double inclusion. Soit $[\sigma]_* \in \mathrm{Ker}(\eta)$. On a donc que $\eta([\sigma]_*)(e_0) = e_0$. En terme de relèvement cela signifie que le relèvement $\widetilde{\sigma}$ de σ qui commence à e_0 se termine aussi à e_0, i.e. $[\widetilde{\sigma}]_* \in \pi_1(E, e_0)$. Or par définition de relèvement $[\sigma]_* = [p \circ \widetilde{\sigma}]_*$. Ainsi $[\sigma]_* \in p_*\pi_1(E, e_0)$. Inversement soit $[\sigma]_* \in p_*\pi_1(E, e_0)$. On écrit donc $[\sigma]_* = [p \circ \widetilde{\sigma}]_*$ pour un certain $\widetilde{\sigma} \in \pi_1(E, e_0)$. Cela signifie que le relèvement de σ qui commence à e_0 est homotope à $\widetilde{\sigma}$. En particulier ils ont le même point d'arrivée. Ainsi $\eta([\sigma]_*)(e_0) = \widetilde{\sigma}(1) = e_0$. Par unicité, $\eta([\sigma]_*)$ est l'identité de E. Ainsi $[\sigma]_* \in \mathrm{Ker}(\eta)$. □

Ce théorème a des conséquences importantes :

Corollaire 2.4.4. *Sous les mêmes hypothèses du théorème ci-dessus, on a un isomorphisme de groupes canonique*

$$\mathcal{N}(p_*\pi_1(E, e_0))/p_*\pi_1(E, e_0) \cong \mathcal{C}_p(E).$$

Corollaire 2.4.5. *Supposons de plus que p soit un revêtement normal. Alors on a*

$$\pi_1(B, b_0)/p_*\pi_1(E, e_0) \cong \mathcal{C}_p(E).$$

Remarque 2.4.6. Si E est simplement connexe, on a donc un isomorphisme canonique $\pi_1(B, b_0) \cong \mathcal{C}_p(E)$.

2.5. Actions de groupes proprement discontinues.

Rappel 2.5.1. Soient G un groupe et X un ensemble. Une **action de groupe** de G sur X est une application $G \times X \longrightarrow X : (g, x) \longmapsto g \cdot x$ telle que $1_G \cdot x = x \ \forall x \in X$ et $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) \ \forall x \in X \ \forall g, h \in G$.

On dit que l'action est **libre** si pour tout $x \in X$ le seul élément g de G tel que $g \cdot x = x$ est l'élément neutre. L'**orbite** de $x \in X$ est l'ensemble $G \cdot x = \{g \cdot x |\ g \in G\}$. La relation $x \sim y$ si et seulement si $y \in G \cdot x$ est une relation d'équivalence sur X. La classe d'équivalence de x est son orbite $G \cdot x$. On note l'ensemble des orbites X/G. On dit que l'action est **transitive** s'il n'y a qu'une seule orbite, ou plus explicitement si pour tout $x, y \in X$ il existe $g \in G$ tel que $g \cdot x = y$.

Remarque 2.5.2. La donnée d'une action de groupe $\gamma \colon G \times X \longrightarrow X$ d'un groupe G sur un ensemble X est équivalente à la donnée d'un homomorphisme de groupes $\rho \colon G \longrightarrow \mathrm{Sym}(X)$ entre G et le groupe des bijections de X, noté $\mathrm{Sym}(X)$. Cet homomorphisme associe à chaque $g \in G$ l'application $\rho_g \colon X \longrightarrow X$ définie par $\rho_g(x) = \gamma(g, x)$. Les conditions sur l'application γ entraînent que ρ est un homomorphisme. Inversement, pour un homomorphisme de groupes $\rho \colon G \longrightarrow \mathrm{Sym}(X)$ donné on construit une application $\gamma \colon G \times X \longrightarrow X$ définie par $\gamma(g, x) = (\rho(g))(x)$. Dans ce cas aussi est simple vérifier que γ est bien une action de groupe. On appelle ρ l'**homomorphisme associé à l'action** γ.

Pour une action d'un groupe sur un espace topologique il est naturel d'imposer la condition suivante.

Définition 2.5.3. Soient G un groupe topologique et X un espace topologique. Une action de G sur X est une **action continue de groupe** si l'application $G \times X \longrightarrow X : (g, x) \longmapsto g \cdot x$ est continue. On dit aussi que G agit de manière continue sur X.

Si G est un groupe arbitraire on peut toujours le munir de la topologie discrète, formée de toutes les parties de G. On dit alors que G est un groupe topologique discret.

Proposition 2.5.4. *Soient G un groupe topologique discret et X un espace topologique. Alors une action de groupe $\gamma \colon G \times X \longrightarrow X$ de G sur X est continue si et seulement si l'homomorphisme associé $\rho \colon G \longrightarrow \mathrm{Sym}(X)$ envoie chaque $g \in G$ sur un homéomorphisme de X.*

Démonstration. On note ρ_g l'application $\rho(g)$ pour tout $g \in G$. Supposons d'abord que l'action soit continue. Comme γ est continue sur $G \times X$, l'est en particulier sur $\{g\} \times X$ pour tout $g \in G$. Ainsi $\rho_g = \gamma(g, -)$ est continue pour chaque $g \in G$. De plus $\rho_{g^{-1}}$ est l'inverse de ρ_g car ρ est un homomorphisme. Ainsi ρ_g est un homéomorphisme pour tout $g \in G$.

Réciproquement, supposons que ρ_g soit un homéomorphisme de X pour tout $g \in G$. Notons que $\gamma(g, y) = x$ si et seulement si $y = g^{-1} \cdot x$. Ainsi pour tout $W \subset X$ on a que $\gamma(g, V) = W$ si et seulement si $V = g^{-1} \cdot W$. Cela signifie que la préimage par γ d'un ouvert U de X est donnée par

$$\gamma^{-1}(U) = \bigcup_{g \in G} \{g\} \times g^{-1} \cdot U = \bigcup_{g \in G} \{g\} \times \rho_{g^{-1}}(U).$$

Chaque singleton de G est ouvert car G est un groupe topologique discret, et $\rho_{g^{-1}}(U)$ est ouvert pour tout $g \in G$ car ρ_g est un homéomorphisme. Ainsi $\gamma^{-1}(U)$ est un ouvert de $G \times U$ comme union d'éléments de la base de la topologie produit. Donc on a montré que γ est continue. $\square$

Remarque 2.5.5. La continuité de l'action implique que ρ_g est un homéomorphisme même si G n'est pas discret. C'est pour la réciproque qu'on doit faire cette hypothèse.

Proposition 2.5.6. *L'action du groupe de transformations $\mathcal{C}_p(E)$ d'un revêtement $p\colon E \longrightarrow B$ sur l'espace total E par évaluation est une action continue et libre.*

Démonstration. Soit $\phi \in \mathcal{C}_p(E)$. Pour la continuité de l'action il suffit de remarquer que $\phi(e) = \rho_\phi(e)$ pour tout $e \in E$. Ainsi ρ_ϕ est un homéomorphisme. La Proposition 2.5.4 termine la preuve. Cette action est libre par la propriété d'unicité des relèvements 2.3.2. En effet si $\phi(e) = e$ pour un certain $e \in E$ on a que ϕ coïncide en e avec l'identité. Ainsi ϕ est l'identité. □

Définition 2.5.7. Soit G un groupe topologique qui agit de manière continue sur un espace topologique X. Pour tout $g \in G$ et pour tout sous-ensemble U de X on pose $g \cdot U = \{g \cdot u |\ u \in U\}$. On dit que l'action est une **action proprement discontinue** si tout $x \in X$ admet un voisinage U tel que l'intersection $U \cap (g \cdot U)$ est vide pour tout $g \in G$ différent de l'élément neutre.

Remarque 2.5.8. Cette propriété implique que pour tout $g, h \in G$ avec $g \neq h$, et pour un ouvert U comme dans la définition on a $g \cdot U \cap h \cdot U = \emptyset$. En effet, le produit $h^{-1}g$ est différent de l'identité. Ainsi $h^{-1}g \cdot U \cap U$ est vide. Si on multiplie à gauche par h cette expression, on obtient $\emptyset = h \cdot \emptyset = h(h^{-1}g \cdot U \cap U) = g \cdot U \cap h \cdot U$.

Voici une situation particulière où une action est automatiquement proprement discontinue.

Proposition 2.5.9. *Soit G un groupe fini qui agit de manière libre sur un espace topologique de Hausdorff X. Alors l'action est proprement discontinue.*

Démonstration. Supposons G non trivial, sinon l'action serait l'identité. Soit $n+1$ le cardinal de G pour un n naturel, $n \geq 1$, et écrivons $G = \{id, g_1, \ldots, g_n\}$. Soit $x \in X$ quelconque, et trouvons un voisinage W de x tel que $W \cap g_i W$ est vide pour tout $1 \leq i \leq n$. Comme l'action est libre $g_i x \neq x$ pour tout i. Par la condition de Hausdorff, on peut trouver U_i et V_i ouverts disjoints de X tels que $x \in U_i$ et $g_i x \in V_i$. Posons $U = \cap_{i=i}^n U_i$. Alors U est un voisinage ouvert de x disjoint avec tout le V_i. Ce voisinage U n'est pas encore "assez petit" pour ne pas intersecter les $g_i \cdot U$. On pose alors $W = \cap_{i=1}^n g_i^{-1} V_i \cap U$. Ce W est encore ouvert et contient x car chaque $g_i x$ est dans V_i. Montrons que W est un voisinage de la forme cherchée. Soit $g_j \in G$, alors

$$\begin{aligned} W \cap g_j W \quad &= \cap_{i=1}^n g_i^{-1} V_i \cap U \cap \textstyle\bigcap_{i=1}^n g_j g_i^{-1} V_i \cap g_j U \\ &= \cap_{i=1}^n g_i^{-1} V_i \cap U \cap \textstyle\bigcap_{1 \leq i \leq n, i \neq j} g_j g_i^{-1} V_i \cap V_j \cap g_j U \\ &\subset U \cap V_j \end{aligned}$$

qui est vide pour tout j. Cela montre que l'action est proprement discontinue. □

Théorème 2.5.10. *Soit $p\colon E \longrightarrow B$ un revêtement. Supposons E connexe. Alors l'action du groupe de transformations $\mathcal{C}_p(E)$ sur l'espace total E est une action proprement discontinue.*

Démonstration. Il faut montrer que tout $e \in E$ admet un voisinage V tel que, pour tout $\phi \in \mathcal{C}_p(E)$ différent de l'identité, l'intersection $V \cap \phi(V)$ est vide. Soit $U \subset B$ un voisinage ouvert distingué de $p(e)$. Soit V la tranche au dessus de U qui contient e. Par hypothèse V est un ouvert de E, donc un voisinage de e. Soit maintenant $\phi \in \mathcal{C}_p(E)$ différent de l'identité de E et montrons que $\phi(V) \cap V$ est vide. Supposons par l'absurde qu'il existe $y \in \phi(V) \cap V$, i.e. $y \in V$ et il existe $x \in V$ tel que $\phi(x) = y$. Comme ϕ est différent de l'identité on a que x est différent de y, sans quoi ϕ coïnciderait en x avec l'identité, et on aurait donc $\phi = id_E$. Considérons les images de x et de y par p. On a $p(x) = p(\phi(x)) = p(x)$. Cela contredit l'injectivité de p sur V, ainsi $V \cap \phi(V)$ est vide. □

Théorème 2.5.11. *Soit G un groupe topologique qui agit sur un espace topologique X de manière continue. Soit $\pi\colon X \longrightarrow X/G$ l'application quotient qui associe à chaque $x \in X$ son orbite. On muni X/G de la topologie quotient. Alors $(X, X/G, \pi)$ est un revêtement si et seulement si l'action de G sur X est proprement discontinue. De plus, si on a cela, G s'identifie de manière naturelle au groupe de transformations de $(X, X/G, \pi)$.*

Pour démontrer ce théorème on a besoin d'un résultat intermédiaire.

Lemme 2.5.12. *Sous les mêmes hypothèses du théorème ci-dessus, soit U un ouvert de X. Alors la préimage par π de l'ensemble $\pi(U)$ est la réunion des ensembles $g \cdot U$ pour $g \in G$, i.e. $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g\in G} g \cdot U$.*

Démonstration. Soit x dans $\pi^{-1}(\pi(U))$, alors $\pi(x) = G \cdot x$ est dans $\pi(U)$, c'est à dire que $G \cdot x = G \cdot y$ pour un certain $y \in U$. Ainsi il existe $g \in G$ tel que $x = gy$. Donc $x \in g \cdot U$, ce qui montre que x appartient aussi à l'union des $g \cdot U$. Ainsi l'inclusion $\pi^{-1}(\pi(U)) \subset \bigcup_{g\in G} g \cdot U$ est montrée.

Réciproquement, soit x dans l'union des $g \cdot U$. Alors il existe $h \in G$ tel que $x \in h \cdot U$. Ainsi il existe $y \in U$ tel que $x = hy$. Cela signifie que $\pi(x) = \pi(y)$, donc que $\pi(x) \in \pi(U)$, et enfin que x est un élément de la préimage de $\pi(U)$. □

Démonstration de 2.5.11. Supposons que l'action soit proprement discontinue et montrons que $(X, X/G, \pi)$ est un revêtement. La projection π est par définition de la topologie sur X/G continue et surjective. Remarquons de plus que π est une application ouverte. En effet, pour un ouvert $U \subset E$, l'ensemble $\pi^{-1}(\pi(U))$ est un ouvert par le Lemme 2.5.12. Par définition de la topologie quotient, $\pi(U)$ est donc un ouvert de X/G.

Il faut montrer que tout $y \in X/G$ admet un voisinage ouvert distingué. Par surjectivité, on peut choisir un $x \in X$ tel que $\pi(x) = y$. Soit V un voisinage de x tel que $g \cdot V \cap V$ est vide pour tout $g \in G$ différent du neutre 1_G. Sans perte de généralité on peut supposer V ouvert. Comme π est ouverte, $\pi(V)$ est un voisinage ouvert de y. Montrons alors que $\pi(V)$ est un ouvert distingué. Par le Lemme 2.5.12, la préimage $\pi^{-1}(\pi(V))$ est l'union sur les $g \in G$ des $g \cdot V$. De plus, par la Remarque 2.5.8, cette union est disjointe. Soit ρ l'homomorphisme associé à l'action. Par la Proposition 2.5.4, ρ_g est un homéomorphisme pour tout $g \in G$, ainsi $g \cdot V = \rho_g(V)$ est un ouvert de X. Il nous reste à montrer que la restriction de π à chaque $g \cdot V$ est un homéomorphisme. Pour l'injectivité il faut montrer que tout $x, y \in g \cdot V$ avec $x \neq y$ ont orbites différentes. Cela revient à montrer que pour tout $h \in G$ différent du neutre on a $h \cdot x \neq y$. Cela découle encore une fois de la remarque citée au-dessus, car $h \cdot x \in hg \cdot V$, qui n'intersecte pas $g \cdot V$, où se trouve

y. Pour la surjectivité, il suffit de remarquer que $\pi(g \cdot V) = \cup_{v \in V} Gg \cdot v = \cup_{v \in V} G \cdot v = \pi(V)$. Ainsi la restriction $\pi|_{g \cdot V} \colon g \cdot V \longrightarrow \pi(V)$ est bijective. Le fait que π soit aussi continue et ouverte montre que la restriction est un homéomorphisme.

Inversement, supposons que π soit un revêtement. Soient $x \in X$ et $U \subset X/G$ un voisinage ouvert distingué de $\pi(x)$. Soit V la tranche au-dessus de U contenant x. Alors $g \cdot V \cap V$ est vide pour tout $g \in G$ différent de 1_G, comme nous demontrons par l'absurde dans la suite. Soit donc $y = g \cdot z \in V$ pour un certain $z \in V$. Ainsi y et z ont la même orbite, i.e. $\pi(y) = \pi(z)$. Cela contredit l'injectivité de π sur V. Ainsi $g \cdot V \cap V$ est vide pour tout $g \in G$, $g \neq 1_G$, ce qui montre que l'action est proprement discontinue.

Supposons que $\pi \colon X \longrightarrow X/G$ soit un revêtement et montrons l'existence d'un isomorphisme entre G et le groupe de transformations $\mathcal{C}_\pi(X)$. Considérons l'homomorphisme associé $\rho \colon G \longrightarrow \mathrm{Sym}(X)$. Or pour tout $g \in G$ on a que $\rho_g \in \mathcal{C}_\pi(X)$. En effet, $\pi \circ \rho_g(x) = Gg \cdot x = G \cdot x = \pi(x)$ pour tout $x \in X$. Montrons l'injectivité de ρ. Soient $g, h \in G$ tels que $\rho_g = \rho_h$, alors $g \cdot x = h \cdot x$, i.e. $x = g^{-1}h \cdot x$. Comme une action proprement discontinue est en particulier libre on a que $g^{-1}h = 1_G$, donc $g = h$. Pour la surjectivité soient $\phi \in \mathcal{C}_\pi(X)$ et $x \in X$. On a alors $\pi(\phi(x)) = \pi(x)$, donc x et $\phi(x)$ ont la même orbite, i.e. il existe $g \in G$ tel que $\phi(x) = g \cdot x = \rho_g(x)$. Comme ϕ et ρ_g sont deux relèvements de π qui coïncident en x on a $\rho_g = \phi$. On a donc montré que $\rho \colon G \longrightarrow \mathcal{C}_\pi(X)$ est un isomorphisme de groupes. □

Corollaire 2.5.13. *Soit G un groupe qui agit de manière proprement discontinue sur un espace simplement connexe X. Alors le groupe fondamental de l'espace des orbites s'identifie naturellement au groupe G.*

Démonstration. Par la Remarque 2.4.6, le groupe $\pi_1(X/G)$ s'identifie au groupe de transformation de $\pi \colon X \longrightarrow X/G$. Par 2.5.11, celui-ci est isomorphe à G. □

3. Variétés

3.1. **Variétés topologiques.**

Définition 3.1.1. On dit que qu'un espace topologique M est **localement euclidien** de dimension n si tout $x \in M$ admet un voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On appelle un tel voisinage un **voisinage euclidien**. Un **atlas** de M est une famille $\mathcal{U} = \{(U_i, \phi_i) | i \in I\}$ telle que les U_i sont des voisinages euclidiens qui recouvrent M, et les $\phi_i \colon U_i \longrightarrow V_i$ sont des homéomorphismes dans des ouverts $V_i \subset \mathbb{R}^n$.

Remarque 3.1.2. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) M est localement euclidien de dimension n.

(2) Tout élément de M admet un voisinage homéomorphe à $\mathbb{R}^n$.

(3) Tout élément de M admet un voisinage homéomorphe à une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$.

Comme $\mathbb{R}^n$ et les boules ouvertes sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$, les implications (2) $\Rightarrow$ (1) et (3) $\Rightarrow$ (1) sont automatiquement satisfaites.

Montrons l'équivalence (2) $\Leftrightarrow$ (3). Soit $B(c, \epsilon)$ une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$. Alors l'application $f \colon B(c, \epsilon) \longrightarrow B(0,1)$ définie par $f(x) = \frac{x-c}{\epsilon}$ est clairement un homéomorphisme. Ainsi toutes les boules de $\mathbb{R}^n$ sont homéomorphes. La boule ouverte unitaire $B(0,1)$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$. En effet, l'application $g \colon B(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $g(x) = \frac{x}{1-|x|^2}$ est un homéomorphisme dont l'inverse est $g^{-1}(x) = \frac{2x}{1+\sqrt{1+4|x|^2}}$. Ainsi toute boule ouverte est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$.

Il nous reste à montrer l'implication (1) $\Rightarrow$ (3). Supposons M localement euclidien. Soit $x \in M$ et U un voisinage euclidien de x. Soit $\phi \colon U \longrightarrow V$ un homéomorphisme dans un ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$. Alors il existe une boule $B(\phi(x), \epsilon)$ incluse dans V. Ainsi $\phi^{-1}(B(\phi(x), \epsilon))$ est un voisinage de x, homéomorphe à une boule de $\mathbb{R}^n$.

Définition 3.1.3. Une **variété topologique** de dimension n est un espace topologique de Hausdorff, localement euclidien de dimension n, qui satisfait le deuxième axiome de dénombrabilité.

On appellera par la suite une variété topologique seulement variété, ou n-variété si on veut spécifier sa dimension.

Par la suite, on va donner quelques exemples de variétés topologiques, en utilisant les résultats sur les revêtements obtenus dans les sections précédentes.

Exemple 3.1.4. Soit n un entier positif. On défini la **n-sphère** S^n par

$$S^n = \left\{ x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} |\ \|x\| = \left(x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2\right)^{1/2} = 1 \right\}.$$

La n-sphère est un exemple classique de n-variété, pour $n \geq 1$. Soit N le pôle nord $(0, \dots, 0, 1) \in S^n$. La projection stéréographique est l'application $p \colon S^n \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ défini par

$$p(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \frac{x_2}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right).$$

Cette application est clairement continue. De plus elle est bijective, d'inverse continue

$$p^{-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{2x_1}{||x||^2 + 1}, \dots, \frac{2x_n}{||x||^2 + 1}, \frac{||x||^2 - 1}{||x||^2 + 1} \right).$$

Ainsi, pour tout $x \in S^n \setminus \{N\}$, le voisinage $S^n \setminus \{N\}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$.

Soit $S = (0, \dots, 0, -1) \in S^n$ le pôle sud. L'ensemble $S^n \setminus \{S\}$ est un voisinage de N. Soit $\lambda \colon S^n \setminus \{S\} \longrightarrow S^n \setminus \{N\}$ l'homéomorphisme défini par $\lambda(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n, -x_{n+1})$. La composition $p \circ \lambda$ est alors un homéomorphisme de $S^n \setminus \{S\}$ dans $\mathbb{R}^n$. Par conséquent $S^n \setminus \{S\}$ est un voisinage euclidien de N. Ainsi la famille

$$\mathcal{A} = \{(S^n \setminus \{N\}, p), (S^n \setminus \{S\}, p \circ \lambda)\}$$

est un atlas de S^n.

Proposition 3.1.5 ([7, Prop. 1.14])**.** *Le groupe fondamental $\pi_1(S^n)$ est trivial pour tout $n \geq 2$.*

La démonstration est une application directe du théorème de Seifert-Van Kampen, voir [10, Th. 70.1].

Proposition 3.1.6. *Tout sous-ensemble ouvert U d'une n-variété M est une n-variété.*

Démonstration. Les propriétés de Hausdorff et de dénombrabilité d'une base sont clairement satisfaites pour U. Soient $x \in U$ et V un voisinage euclidien de x dans M. Or $U \cap V$ est de toute façon un voisinage de x dans U, même sans l'hypothèse d'ouverture de U. Soit $\phi\colon V \longrightarrow W$ un homéomorphisme dans un ouvert $W \subset \mathbb{R}^n$. La restriction à $U \cap V$ de ϕ est un homéomorphisme. De plus l'image de $U \cap V$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ car U est ouvert. Ainsi U est une n-variété. □

Voilà une méthode de construire des "nouvelles" variétés à partir de variétés connues.

Proposition 3.1.7. *Soient M_1 une n-variété et M_2 une k-variété. Alors leur produit cartésien $M_1 \times M_2$ est une $(n+k)$-variété.*

Démonstration. Montrons d'abord que $M_1 \times M_2$ satisfait le deuxième axiome de dénombrabilité. Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ les bases dénombrables des topologies sur M_1 et M_2 respectivement. Alors la famille $\mathcal{B} = \{B_1 \times B_2 | B_1 \in \mathcal{B}_1, B_2 \in \mathcal{B}_2\}$ est clairement dénombrable, et forme une base pour la topologie produit sur $M_1 \times M_2$.

L'espace produit est également de Hausdorff. En effet pour deux point arbitraires $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in M_1 \times M_2$ ils existent des voisinages ouverts disjoints U_1 de x_1 et U_2 de x_2, et des voisinages ouverts disjoints V_1 de y_1 et V_2 de y_2. Alors $U_1 \times V_1$ et $U_2 \times V_2$ sont des voisinages ouverts disjoints dans $M_1 \times M_2$ de (x_1, y_1) et (x_2, y_2) respectivement.

Soit $(x, y) \in M_1 \times M_2$. Soient $\phi\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $\eta\colon V \longrightarrow \mathbb{R}^k$ des homéomorphismes entre voisinages de x et y et ouverts de $\mathbb{R}^n$. Alors $U \times V$ est un voisinage de (x, y). On définit une application $\phi \times \eta\colon U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ par $(\phi \times \eta)(x, y) = (\phi(x), \eta(y))$. Par la propriété universelle de la topologie produit $\phi \times \eta$ est continue car ses composantes ϕ et η le sont. Pour la même raison l'inverse $\phi^{-1} \times \eta^{-1}(x, y) = (\phi^{-1}(x), \eta^{-1}(y))$ est continue. On a donc que $\phi \times \eta$ est un homéomorphisme. Or $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ est clairement homéomorphe à $\mathbb{R}^{n+k}$. Ainsi $U \times V$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^{n+k}$ par transitivité. □

Remarquons que par induction on peut étendre ce résultat à un nombre fini de produit de variétés. Voici un exemple concret.

Exemple 3.1.8. Le tore $T = S^1 \times S^1$ est une 2-variété. En effet, par l'Exemple 3.1.4 on a que S^1 est une 1-variété. Par la proposition ci-dessus T est une 2-variété.

On applique maintenant les théorèmes sur les actions proprement discontinues pour obtenir une autre méthode de construction de variétés :

Théorème 3.1.9. *Soit G un groupe topologique qui agit de manière proprement discontinue sur un n-variété M. Alors l'espace des orbites M/G admet aussi une structure de n-variété.*

Démonstration. Par le Théorème 2.5.11 on sait que la projection canonique $\pi\colon M \longrightarrow M/G$ est un revêtement. Soit $x \in M/G$. Construisons un voisinage euclidien de x. On sait que x admet un voisinage ouvert distingué U. Ecrivons

$\pi^{-1}(U)$ comme union disjointe d'ouverts $\pi^{-1}(U) = \bigsqcup_{i\in I} V_i$. Soient $e \in M$ tel que $\pi(e) = x$ et V_x l'ouvert de la famille $\{V_i\}_{i\in I}$ contenant e. L'application $\pi|_{V_x}\colon V_x \longrightarrow U$ est alors un homéomorphisme. Soit (U_x, ϕ_x) un élément de l'atlas de M tel que U_x contient e. Considérons l'intersection $U_x \cap V_x$. Cet ensemble est clairement un voisinage de e, ainsi $(\pi|_{V_x})(U_x \cap V_x)$ est un voisinage de x contenu dans U. Montrons que $(\pi|_{V_x})(U_x \cap V_x)$ est un voisinage euclidien de x. La restriction de $\phi_x \circ \pi^{-1}$ à $(\pi|_{V_x})(U_x \cap V_x) = \pi(U_x) \cap U$ est un homéomorphisme sur son image $\phi_x((\pi|_{V_x})^{-1}(\pi|_{V_x}(U_x \cap V_x))) = \phi_x(U_x \cap V_x)$, qui est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Ainsi la famille

$$\mathcal{A} = \left\{(\pi|_{V_x}(U_x \cap V_x), (\phi_x \circ (\pi|_{V_x})^{-1})|_{\pi(U_x\cap V_x)}) | x \in M/G\right\}$$

est un atlas de M/G.

Montrons que M/G est un espace de Hausdorff. Soient $x, y \in M/G$. Comme π est un revêtement, choisissons U_x et U_y des ouverts distingués de x et y respectivement. Si U_x et U_y sont disjoints on a déjà trouvé les ouverts pour la condition de Hausdorff. Supposons donc le contraire. Par surjectivité de π la préimage $\pi^{-1}(U_x \cap U_y) = \pi^{-1}(U_x) \cap \pi^{-1}(U_y)$ est aussi non vide. Cela signifie qu'ils existent des tranches V_x au dessus de U_x et V_y au dessus de U_y non disjointes. Soient x' l'élément de la fibre de x contenu dans V_x et y' l'élément de la fibre de y contenu dans V_y. Comme M est de Hausdorff ils existent des ouverts disjoints W_x et W_y de M contenants respectivement x' et y'. Posons alors $A = \pi(V_x \cap W_x)$ et $B = \pi(V_y \cap W_y)$. On voit clairement que $x \in A$ et que $y \in B$. Comme la restriction de π à V_x est un homéomorphisme, et comme $V_x \cap W_x$ est un ouvert de V_x, on a que A est un ouvert de U_x. Comme U_x est un ouvert de M/G on a que A est aussi un ouvert de M/G. Le même argument montre que B est un ouvert de M/G. On affirme que $A \cap B$ est l'ensemble vide. Supposons par l'absurde qu'il existe $z \in A \cap B$. Alors ils existent $z' \in V_x \cap W_x$ et $z'' \in V_y \cap W_y$ tels que $\pi(z') = \pi(z'') = z$. Comme $A \subset U_x$ et $B \subset U_y$ on a que z est aussi un élément de $U_x \cap U_y$. Ainsi z' et z'' sont dans l'intersection $V_x \cap V_y$. Si $z' \neq z''$ on a une contradiction avec l'injectivité de π sur $V_x \cap V_y$. Mais $z' = z''$ contredit le fait que W_x et W_y sont disjoints. Par conséquent, A et B sont disjoints.

Pour montrer que M/G admet une base de topologie dénombrable on utilise l'argument suivant. Soit $\mathcal{B}$ une base dénombrable de la topologie sur M. Soit U un ouvert de M/G. Alors $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert de M, on l'écrit donc $\pi^{-1}(U) = \cup_{j=1}^{\infty} B_j$, union dénombrable d'éléments de $\mathcal{B}$. Ainsi par surjectivité $U = \pi(\cup_{j=1}^{\infty} B_j) = \cup_{j=1}^{\infty}\pi(B_j)$. Donc la famille $\{\pi(B) |\ B \in \mathcal{B}\}$ est une base de topologie dénombrable sur M/G. On a enfin démontré que M/G est une n-variété. □

On utilisera ce théorème pour la construction de la sphère homologique de Poincaré. Voilà deux exemples plus simples.

Exemple 3.1.10 (Espaces projectifs réels). Soit $\mathbb{Z}/2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ le groupe cyclique à deux éléments. Considérons l'action de $\mathbb{Z}/2$ sur la sphère S^n définie par $\overline{0} \cdot x = x$ et $\overline{1} \cdot x = -x$. L'homomorphisme associé envoie $\overline{0}$ sur l'identité de S^n et $\overline{1}$ sur l'application $\rho_{\overline{1}}(x) = -x$ pour tout $x \in S^n$. Comme ces deux applications sont des homéomorphismes et vu que $\mathbb{Z}/2$ est discret, on a que l'action est continue, par la Proposition 2.5.4. L'espace projectif $\mathbb{RP}^n$ est défini comme l'espace quotient des orbites $\mathbb{RP}^n = S^n/(\mathbb{Z}/2)$.

Pour montrer que $\mathbb{RP}^n$ est une variété de dimension n il suffit de voir que l'action est proprement discontinue, grâce au théorème ci-dessus. Ceci découle directement de la Proposition 2.5.9, comme l'action est clairement libre. Or, vu que c'est un exemple simple, on donne aussi une preuve explicite. Le seul élément non trivial de $\mathbb{Z}/2$ est la classe $\overline{1}$. Ainsi il suffit de trouver, pour tout $x \in S^n$, un voisinage V tel que $V \cap (-V)$ soit vide. Intuitivement on choisi comme voisinage V de $x \in S^n$ une calotte ouverte symétrique autour de x, de telle façon qu'elle n'intersecte pas la demi sphère symétrique autour de $-x$. Choisissons par exemple $V = \{z \in S^n | \ d(x, z) < \sqrt{2}/2\}$, où d est la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^{n+1}$. Supposons par l'absurde qu'il existe $z \in V \cap (-V)$. Alors z satisfait $d(x, z) < \sqrt{2}/2$ et $d(-x, z) < \sqrt{2}/2$. Par l'inégalité du triangle on a que $d(-x, x) \leq d(-x, z) + d(x, z) < \sqrt{2}$. Or la distance entre $-x$ et x est $2d(x, 0) = 2$. On a donc obtenu la contradiction $2 < \sqrt{2}$. Ainsi $V \cap (-V)$ est vide.

Par le Corollaire 2.5.13, on trouve que le groupe fondamental de $\mathbb{RP}^n$ est donné par $\pi_1(\mathbb{RP}^n) \cong \mathbb{Z}/2$. Un représentant de la classe non triviale est la projection d'un lacet de S^n dont l'image est un demi méridien.

Exemple 3.1.11 (Espaces lentilles). Soit n un entier strictement positif. En identifiant $\mathbb{R}^{2n}$ à $\mathbb{C}^n$ on peut représenter la sphère de dimension $2n-1$ par $S^{2n-1} = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n | \ \sum_{i=1}^n |z_i|^2 = 1\}$. Soient k un entier non nul et $p_1, \dots, p_n$ des entiers non nuls premiers à k. Le groupe cyclique $\mathbb{Z}/k$ agit sur la sphère S^{2n-1} par

$$\bar{l} \cdot (z_1, \dots, z_n) = (\exp(2i\pi l p_1/k) z_1, \dots, \exp(2i\pi l p_n/k) z_n).$$

Clairement cette action est bien définie. De plus, elle est continue car $\mathbb{Z}/k$ est discret et $\exp(2i\pi l p_i/k) z_i$ est un homéomorphisme pour tout l entier et pour tout $1 \leq i \leq n$.

L'espace lentille $L(k; p_1, \dots, p_n)$ est défini comme l'espace des orbites de l'action. Comme la sphère S^{2n-1} est une variété et $\mathbb{Z}/k$ est fini, par les Propositions 2.5.9 et 3.1.9, pour montrer que $L(k; p_1, \dots, p_n)$ est une $(2n-1)$-variété il suffit de montrer que cette action est libre. Soient donc $x = (z_1, \dots, z_n) \in S^{2n-1}$ et $\bar{l} \in \mathbb{Z}/k$ tels que $\bar{l} \cdot x = x$. Cela implique que $\exp(2i\pi l p_j/k) z_j = z_j$ pour tout $1 \leq j \leq n$. Fixons un j. On a alors $l p_j = km$ pour un certain m entier. Par le théorème de Bézout, ils existent $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $u p_j + vk = 1$. En multipliant par l, on obtient $l p_j u = l(1 - kv)$. Ainsi on a que $kmu = l(1 - kv)$. On met k en évidence et on obtient $k(mu + lv) = l$. En terme de modulo, on a que $\bar{l} = 0$. Ainsi l'action est libre, et $L(k; p_1, \dots, p_n)$ est donc une $(2n-1)$-variété.

Par le Corollaire 2.5.13, le groupe fondamental de $L(k; p_1, \dots, p_n)$ est donné par $\pi_1(L(k; p_1, \dots, p_n)) \cong \mathbb{Z}/k$.

3.2. **Variétés lisses.**

Définition 3.2.1. Soit $\mathcal{U} = \{(U_i, \phi_i) | i \in I\}$ un atlas. On dit que $\mathcal{U}$ est un **atlas lisse** si pour tout $i, j \in I$ avec $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ on a que

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1}|_{\phi_i(U_i \cap U_j)} \colon \phi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$$

est un difféomorphisme entre ouverts de $\mathbb{R}^n$.

Définition 3.2.2. Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ deux atlas lisses sur une variété topologique M. On dit que $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ sont équivalents si leur union $\mathcal{U}\cup\mathcal{U}'$ est encore un atlas lisse de M. La classe d'équivalence d'un atlas lisse est appelée **structure différentiable**.

Définition 3.2.3. Soient M une variété topologique et $[\mathcal{U}]$ une structure différentiable sur M. Le couple $(M, [\mathcal{U}])$ est appelé une **variété lisse** (ou différentiable).

Convention 3.2.4. Comme la notation $(M, [\mathcal{U}])$ est lourde on appellera seulement M une variété lisse, en laissant sous-entendu que nous avons fixé une structure différentiable.

Définition 3.2.5. Une variété lisse M est dite **orientable** s'il existe un atlas lisse $\mathcal{U} = \{(U_i, \phi_i)|i \in I\}$ sur M tel que pour tout $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ le jacobien du difféomorphisme

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1}|_{\phi_i(U_i\cap U_j)} \colon \phi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$$

est strictement positif. Un tel atlas est appelé **atlas orientable**.

Remarque 3.2.6. Il existe une notion d'orientabilité définie pour une variété topologique quelconque, et qui coïncide avec celle qu'on a proposé dans le cas d'une variété lisse. Pour en savoir plus voir [7, III.3].

Exemple 3.2.7. Considérons à nouveaux S^n. L'atlas $\mathcal{A}$ de l'Exemple 3.1.4 ne satisfait pas la condition d'orientabilité car $\lambda\colon S^n\setminus\{S\} \longrightarrow S^n\setminus\{N\}$ ne préserve pas l'orientation. On rappelle toujours que $n \geq 1$. Définissons un homéomorphisme $\mu\colon S^n\setminus\{S\} \longrightarrow S^n\setminus\{N\}$ par

$$\mu(x_1 \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n, -x_{n+1}).$$

Définissons un nouveaux atlas

$$\mathcal{U} = \{(S^n\setminus\{N\}, p), (S^n\setminus\{S\}, p \circ \mu)\}.$$

La seule intersection entre voisinages euclidiens à considérer est $S^n\setminus\{S, N\}$. Pour que S^n, munie de la classe de $\mathcal{U}$, soit une variété lisse il faut que $p \circ (p \circ \mu)^{-1}$ soit un difféomorphisme de $p \circ \mu(S^n\setminus\{S, N\}) = \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ à $p(S^n\setminus\{S, N\}) = \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. On obtient

$$p \circ (p \circ \mu)^{-1}(x_1, \ldots x_n) = (\frac{x_1}{\|x\|^2}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{\|x\|^2}, -\frac{x_n}{\|x\|^2})$$

qui est différentiable sur $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. Son inverse est égale à $p \circ (p \circ \mu)^{-1}$, donc différentiable sur $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. Le jacobien $J(x)$ de cette application est le déterminant de la matrice jacobienne

$$M(x) = \frac{1}{\|x\|^4}\begin{pmatrix} \|x\|^2 - 2{x_1}^2 & -2x_1x_2 & \ldots & -2x_1x_{n-1} & 2x_1x_n \\ -2x_1x_2 & \|x\|^2 - 2{x_2}^2 & \ldots & -2x_2x_{n-1} & 2x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -2x_1x_n & -2x_2x_n & \ldots & -2x_{n-1}x_n & -\|x\|^2 + 2{x_n}^2 \end{pmatrix}.$$

Par calcul on voit que $M(x)$ est une matrice orthogonale pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Ainsi son déterminant $J(x)$ prend les valeurs 1 et -1. Or le déterminant $J(x) = \det(M(x))$ est une application continue sur le connexe $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, car toutes les composantes de $M(x)$ sont continues. Par conséquent $J(x)$ peut prendre un seul des valeurs -1 ou 1 pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Il suffit donc de calculer $J(0, \dots, 0, 1)$, qui vaut $\det(I_{n+1}) = 1 > 0$. Donc $J(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Ce qui montre que S^n est orientable pour tout $n \geq 2$.

Définition 3.2.8. Soient $(M, [\mathcal{U}])$ et $(N, [\mathcal{V}])$ deux variétés lisses. Soient $\mathcal{U} = \{(U_i, \phi_i) | i \in I\}$ et $\mathcal{V} = \{(V_j, \psi_j) | j \in J\}$ des représentants de $[\mathcal{U}]$ et de $[\mathcal{V}]$ respectivement, et $f \colon M \longrightarrow N$ une application. On dit que f est une **application lisse** si pour tout $(U_i, \phi_i) \in \mathcal{U}, (V_j, \psi_j) \in \mathcal{V}$ tels que $W = f(U_i) \cap V_j \neq \emptyset$ on a que l'application

$$(\psi_j \circ f \circ \phi_i^{-1})|_{\phi_i(f^{-1}(W))} \colon \phi_i(f^{-1}(W)) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

est une application différentiable.

Définition 3.2.9. Soient M une variété lisse et $f \colon M \longrightarrow M$ une application lisse bijective. On dit que f est un **difféomorphisme de** M si son inverse $f^{-1} \colon M \longrightarrow M$ est aussi lisse.

Définition 3.2.10. Soit M une variété lisse, munie d'une structure différentiable définie par un atlas orientable $\mathcal{U} = \{(U_i, \phi_i) | i \in I\}$. Soit $g \colon M \longrightarrow M$ un difféomorphisme de $(M, [\mathcal{U}])$. On dit que g **préserve l'orientation** si le jacobien de l'application

$$(\phi_j \circ g \circ \phi_i^{-1})|_{\phi_i(g^{-1}(U_j) \cap U_i)} \colon \phi_i(g^{-1}(U_j) \cap U_i) \longrightarrow \phi_j(U_j \cap g(U_i))$$

est strictement positif pour tout $i, j \in I$ tels que $g^{-1}(U_j) \cap U_i \neq \emptyset$.

Théorème 3.2.11. *Soit M une n-variété lisse et G un groupe de difféomorphismes de M qui agit de manière proprement discontinue sur M. Alors il existe une structure différentiable sur l'espace des orbites M/G telle que la projection $\pi \colon M \longrightarrow M/G$ est lisse. Supposons de plus M orientable, et que tout $g \in G$ préserve l'orientation. Alors M/G est orientable.*

Démonstration. Soit $\mathcal{U} = \{(U_i, \phi_i) | i \in I\}$ un atlas lisse de M. Par le Théorème 3.1.9, la famille

$$\mathcal{A} = \left\{(\pi|_{V_x}(U_x \cap V_x), (\phi_x \circ (\pi|_{V_x})^{-1})|_{\pi(U_x \cap V_x)}) | x \in M/G\right\}$$

est un atlas de M/G. Rappelons que (U_x, ϕ_x) est un élément d'un atlas de M tel que U_x contient un élément fixé de la préimage de $x \in M/G$, et que V_x est la tranche au dessus d'un voisinage ouvert distingué de x contenant ce point. De plus, par la démonstration du Théorème 2.5.11, les tranches au dessus d'un voisinage distingué de x sont les $g \cdot V_x$ pour $g \in G$. Montrons que $\mathcal{A}$ est un atlas lisse de l'espace topologique M/G. On va noter $W_x = \pi|_{V_x}(U_x \cap V_x)$ et $\psi_x = (\phi_x \circ (\pi|_{V_x})^{-1})|_{\pi(U_x \cap V_x)}$ pour tout $x \in M/G$. Soient $(W_x, \psi_x), (W_y, \psi_y) \in \mathcal{A}$ tels que $W_x \cap W_y$ soit non vide. Or il existe $g \in G$ tel que le diagramme d'homéomorphismes suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\pi|_{V_x}^{-1}(W_x \cap W_y) \arrow[d, "\pi|_{\pi^{-1}(W_x \cap W_y)}"'] & \pi|_{V_y}^{-1}(W_x \cap W_y) \arrow[l, "g"'] . \\
W_x \cap W_y \arrow[ur, "(\pi|_{V_y})^{-1}|_{W_x \cap W_y}"'] &
\end{tikzcd}$$

On a donc l'égalité $(\psi_x \circ \psi_y^{-1})|_{\psi_y(W_x \cap W_y)} = (\phi_x \circ g \circ \phi_y^{-1})|_{\psi_y(W_x \cap W_y)}$, qui est un difféomorphisme, car g est supposé un difféomorphisme de M.

Si de plus les $g \in G$ sont orientables on a directement que les jacobiens des $(\psi_x \circ \psi_y^{-1})|_{\psi_y(W_x \cap W_y)}$ sont positifs. Ainsi M/G est orientable. Il reste à montrer que $\pi\colon M \longrightarrow M/G$ est lisse. Soient $(U_y, \phi_y) \in \mathcal{U}$ et $(W_x, \psi_x) \in \mathcal{A}$ tels que $\pi(U_y) \cap W_x$ est non vide. Alors on a les égalités

$$(\psi_x \circ \pi \circ \phi_y^{-1})|_{\phi_y(\pi^{-1}(\pi(U_x) \cap W_y))}$$

$$= (\phi_x \circ (\pi|_{V_x})^{-1}) \circ \pi \circ \phi_y^{-1})|_{\phi_y(\pi^{-1}(\pi(U_x)) \cap U_x \cap V_x))}$$

$$= (\phi_x \circ \phi_y^{-1})|_{\phi_y(\pi^{-1}(\pi(U_x)) \cap U_x \cap V_x)}.$$

Cette composition est différentiable par hypothèse, et π est donc une application lisse. □

Corollaire 3.2.12. *L'espace projectif $\mathbb{RP}^n$ est une variété lisse pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si de plus n est impair, $\mathbb{RP}^n$ est aussi orientable.*

Démonstration. Nous avons vu dans l'Exemple 3.2.7 que S^n est orientable pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Le Théorème 3.2.11 nous dit que $\mathbb{RP}^n$ est une variété lisse pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Les difféomorphismes qui agissent sur $\mathbb{RP}^n$ sont l'identité et la symétrie centrale ξ, définie par $\xi(x) = -x$ pour tout $x \in S^n$. L'identité préserve toujours l'orientation. En considérant l'atlas $\mathcal{U}$ de l'Exemple 3.2.7, on voit que

$$p \circ \xi \circ (p \circ \mu)^{-1} = (-x_1, \ldots, -x_{n-1}, x_n).$$

Son jacobien est $J = (-1)^{n-1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, qui est positif si n est impair. □

Le prochain théorème dit comment déterminer si une variété est orientable, à partir d'une condition sur son groupe fondamental. On ne va pas donner de démonstration.

Théorème 3.2.13 ([7, Prop. 3.25])**.** *Soit M une variété lisse connexe. Supposons qu'il n'existe aucun sous-groupe $G \subset \pi_1(M)$ d'indice 2 dans $\pi_1(M)$, i.e. tel que $[\pi_1(M) : G] = 2$. Alors M est orientable.*

Remarque 3.2.14. Ce théorème se généralise au cas d'une variété topologique non forcement lisse, avec la notion d'orientabilité dont on a parlé dans la Remarque 3.2.6.

4. La sphère homologique de Poincaré $\mathcal{P}$

4.1. **Présentations de groupes.** L'idée est de décrire un groupe, de façon générale, à travers des générateurs et des relations entre générateurs.

Définition 4.1.1. Soit $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un ensemble. Soit A^{-1} un ensemble disjoint à A de cardinal $n+1$, dont on nomme les éléments $a_1^{-1}, \ldots, a_n^{-1}, 1$. On définit l'ensemble $\mathcal{M}(A)$ des **mots en** A comme l'ensemble des chaînes de caractères

$$\mathcal{M}(A) = \{m_1 m_2 \ldots m_j | j \in \mathbb{N}, m_i \in A \cup A^{-1} \ \forall\ 1 \leq i \leq j\}.$$

On définit sur $\mathcal{M}(A)$ une relation d'équivalence $\sim$, comme suit. On définit d'abord des opérations inversibles de trois types α, β, γ sur $\mathcal{M}(A)$. Soit $m = m_1 \ldots m_j \in \mathcal{M}(A)$ un mot en A. Une opération de type α remplace un couple consécutive $m_i m_{i+1}$ de m telle que $m_i = a_i$ et $m_{i+1} = a_i^{-1}$ par l'élément 1. Une opération de type β remplace un couple de la forme $m_i 1$ par le caractère m_i. Une opération de type γ remplace un couple de la forme $1m_i$ par le caractère m_i. Une opération de type α^{-1}, inverse de α, remplace un symbole 1 par un couple $a_i a_i^{-1}$. Une opération de type β^{-1}, inverse de β, remplace un symbole m_i par un couple $m_i 1$. Une opération de type γ^{-1}, inverse de γ, remplace un symbole m_i par un couple $1m_i$. On dit enfin que deux mots m et m' sont équivalentes si on peut passer de m à m' avec un nombre fini d'opérations de type $\alpha, \beta, \gamma, \alpha^{-1}, \beta^{-1}, \gamma^{-1}$.

Proposition/Définition 4.1.2 ([13, I.§2])**.** *Soient $A = \{a_1 \ldots, a_n\}$ un ensemble et $\mathcal{M}(A)/_\sim$ l'ensemble des classes d'équivalence des mots en A par la relation $\sim$. La concaténation de deux mots induit sur $\mathcal{M}(A)/_\sim$ une opération binaire $c\colon \mathcal{M}(A)/_\sim \times \mathcal{M}(A)/_\sim \longrightarrow \mathcal{M}(A)/_\sim$ définie par $c(m, m') = mm'$. Cette opération muni $\mathcal{M}(A)/_\sim$ d'une structure de groupe. On l'appelé* ***le groupe libre en*** *A et on le note par $\langle A \rangle$, ou de même par $\langle a_1 \ldots, a_n \rangle$.*

On introduit maintenant la notion de relation entre des générateurs du groupe libre $\langle A \rangle$.

Définition 4.1.3. Soit $R = \{r_1, \ldots, r_m\}$ un sous-ensemble de $\langle A \rangle$. Soit N le groupe normal engendré par R, i.e. le plus petit sous-groupe normal de $\langle A \rangle$ contenant R. Le groupe $\langle A|R \rangle$ est par définition le groupe quotient $\langle A|R \rangle = \langle A \rangle / N$. On dit que A est l'ensemble des **générateurs** de $\langle A|R \rangle$, et que les éléments de R sont les **relations** de $\langle A|R \rangle$.

Définition 4.1.4. Soit G un groupe. Une **présentation de** G est un isomorphisme entre G et un groupe du type $\langle A|R \rangle$. On dit aussi que G **admet** $\langle A|R \rangle$ **comme présentation**.

On sera confronté au problème de trouver une présentation $\langle A|R \rangle \cong G$ d'un groupe G donné. Voyons comment on peut construire des homomorphismes de groupes de $\langle A|R \rangle$ dans G. On commence par décrire les homomorphismes entre un groupe libre $\langle A \rangle$ et G.

Proposition 4.1.5. *Soient $\langle A \rangle = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ un groupe libre et $\{g_1, \ldots, g_n\}$ un sous-ensemble d'un groupe G. Alors il existe un unique homomorphisme de groupes $\phi\colon \langle A \rangle \longrightarrow G$ tel que $\phi(a_i) = g_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Si de plus $\{g_1, \ldots, g_n\}$ génère G, cet homomorphisme est surjectif.*

Démonstration. On commence par définir une application

$$\phi'\colon \{a_1, \ldots, a_n\} \cup \{a_1^{-1}, \ldots, a_n^{-1}, 1\} \longrightarrow G$$

par $\phi'(a_i) = g_i$, $\phi(a_i^{-1}) = g_i^{-1}$ et $\phi(1) = 1_G$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Ensuite on étend ϕ' à une application $\phi\colon \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \longrightarrow G$, en posant $\phi(m_1 \ldots m_j) = \phi(m_1) \cdot \cdots \cdot \phi(m_j)$. Par construction ϕ est un homomorphisme. Si de plus G est engendré par $\{g_1, \ldots, g_n\}$, on a donc que tout $g \in G$ s'écrit comme $g = h_1 \cdot \cdots \cdot h_k$ avec $h_i = g_{l_i}^{\pm 1}$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Par construction de ϕ, le mot $m = a_{l_1}^{\pm 1} \ldots a_{l_k}^{\pm 1} \in \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ est alors envoyé par ϕ sur g.

Pour montrer l'unicité de ϕ, supposons qu'il existe un homomorphisme $\psi\colon \langle A \rangle \longrightarrow G$ tel que $\psi(a_i) = g_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Soit un mot $m_1 \ldots m_j \in \langle A \rangle$, on a alors que

$$\psi(m_1 \ldots m_j) = \psi(m_1) \ldots \psi(m_j) = \phi(m_1) \ldots \phi(m_j) = \phi(m_1 \ldots m_j).$$

Ainsi ϕ est unique. □

Rappelons un résultat fondamental de la théorie des groupes :

Proposition 4.1.6 (Propriété universelle du groupe quotient)**.** *Soit H un sous-groupe normal d'un groupe G et $\pi\colon G \longrightarrow G/H$ l'homomorphisme canonique. Alors pour tout groupe L et pour tout homomorphisme de groupes $\phi\colon G \longrightarrow L$ qui vérifie l'inclusion $H \subset \ker\phi$, il existe un unique homomorphisme $\overline{\phi}\colon G/H \longrightarrow L$ tel que $\overline{\phi}\circ\pi = \phi$.*

Esquisse de la démonstration. On définit $\overline{\phi}(xH) = \phi(x)$. Le fait que $\phi(h) = 1_L$ pour tout $h \in H$ montre que $\overline{\phi}$ est bien définit. De plus $\overline{\phi}$ "hérite" de ϕ les propriétés d'un homomorphisme. □

Corollaire 4.1.7. *Soient G un groupe arbitraire et $\{g_1, \ldots, g_n\}$ un ensemble de générateurs de G. Soient $\langle A\rangle = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ le groupe libre à n générateurs et R un sous groupe normal fini de $\langle A\rangle$. Alors l'homomorphisme ϕ de 4.1.5 se relève à un homomorphisme $\phi^*\colon \langle A|R\rangle \longrightarrow G$, si $R \subset \ker(\phi)$.*

Exemple 4.1.8. Soient $C_n = \{1, g, g^2, \ldots, g^{n-1}\}$ le groupe cyclique d'ordre n et $\langle a\rangle$ le groupe libre à un générateur. Soit $\phi\colon \langle a\rangle \longrightarrow C_n$ l'unique homomorphisme de groupes tel que $\phi(a) = g$. Remarquons que tout élément $x \in \langle a\rangle$ s'écrit $x = a^k$. Par conséquent, comme $a^k a^n a^{-k} = a^n$, on a que le groupe N engendré par a^n est normal dans $\langle a\rangle$. Montrons que $N = \ker(\phi)$. Soit $a^{jn} \in N$, alors $\phi(a^{jn}) = g^{nj} = 1$. Soit maintenant $a^k \in \ker(\phi)$, on a alors que $\phi(a^k) = g^k = 1$. Ceci signifie que k est un multiple de n, ainsi $a^k \in N$. Par le dernier corollaire, on a une présentation de groupe $C_n \cong \langle a|a^n\rangle$.

Rappel 4.1.9. Soit n un entier strictement positif. Le **groupe des permutations de n éléments** (ou groupe symétrique) S_n est le groupe des bijections $\sigma\colon \{1, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$. Une **transposition** est une permutation de S_n qui permute deux élément et laisse fixe les autre. On rappelle que toute permutation de S_n s'écrit comme composition de transpositions. La **signature** sur S_n est l'unique homomorphisme de groupes $\mathrm{sgn}\colon S_n \longrightarrow \{-1, 1\}$ qui associe la valeur -1 aux transpositions. Le **groupe des permutations paires de n éléments** A_n, ou groupe alterné, est le noyau de la signature.

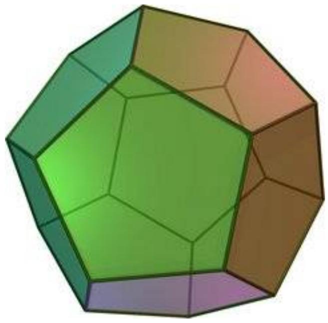
Proposition 4.1.10 ([4, §6.4])**.** *Dans le cas $n = 5$, on a la présentation de groupe*

$$A_5 \cong \left\langle a, b|a^2, b^3, (ab)^5\right\rangle.$$

Esquisse de la démonstration. Le groupe A_5 est engendré par les permutations $\sigma = (12)(32)$, d'ordre 2, et $\tau = (135)$, d'ordre 3. Soit $\phi\colon \langle a, b\rangle \longrightarrow A_5$ l'unique homomorphisme de groupes tel que $\phi(a) = \sigma$ et $\phi(b) = \tau$. De plus, comme σ et τ engendrent A_5, ϕ est surjectif par la Proposition 4.1.5. Le produit $\sigma\tau = (14352)$ est d'ordre 5. Par le Corollaire 4.1.7, ϕ se relève à un homomorphisme de groupes surjectif $\phi^*\colon \left\langle a, b|a^2, b^3, (ab)^5\right\rangle \longrightarrow A_5$. La démonstration de l'injectivité de ϕ^* ne sera pas proposée dans ce travail. □

Théorème 4.1.11 ([13, Th. III.2.11])**.** *Le groupe A_5 est simple, i.e. n'admet aucun sous-groupe normal propre non trivial.*

4.2. **Le groupe icosaédral $\mathcal{I}$.** Le centre de la construction de la sphère homologique de Poincaré que nous proposons est le dodécaèdre, et son groupe de rotations.



Le dodécaèdre est le solide platonique composé de 12 faces pentagonales, de 20 sommets et de 30 arêtes. Pour identifier son groupe de rotations, nous fixons un plongement du dodécaèdre dans $\mathbb{R}^3$. Une manière convenable de décrire un tel plongement est de fixer les images des sommets du dodécaèdre, que l'on pose

$$\{(\pm 1, \pm 1, \pm 1), (0, \pm 1/\phi, \pm\phi), (\pm 1/\phi, \pm\phi, 0), (\pm\phi, 0, \pm 1/\phi)\},$$

où ϕ est le nombre d'or $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$. On ne démontre pas que ces points sont effectivement les sommets d'un plongement du dodécaèdre. Pour une référence voir [5, §3.7]. À partir de ces points, on peut retrouver l'image du plongement par la proposition suivante.

Rappel 4.2.1. Soit A un sous-ensemble d'un espace vectoriel E. **L'enveloppe convexe** $\mathrm{co}(A)$ de A est l'intersection de tous les sous-ensembles convexes de E contenants A.

Proposition 4.2.2 ([1, Th. 1.3.2])**.** *L'image d'un plongement du dodécaèdre dans $\mathbb{R}^3$ est l'enveloppe convexe de l'image de ses sommets.*

Par la suite on appellera dodécaèdre l'image D de ce plongement, donnée par

$$D = co(\{(\pm 1, \pm 1, \pm 1), (0, \pm 1/\phi, \pm\phi), (\pm 1/\phi, \pm\phi, 0), (\pm\phi, 0, \pm 1/\phi)\}).$$

Remarquons que D ne corresponde pas à l'image du début de la section. En effet les deux sont orientées de manière différente.

Définition 4.2.3. Le **groupe icosaédral** $\mathcal{I}$ est le groupe des rotations de D, donné par

$$\mathcal{I} = \{M \in SO(3) | M(D) = D\}.$$

Proposition 4.2.4. *Le groupe icosaédral $\mathcal{I}$ est constitué de 60 rotations.*

Démonstration. Pour raisons de symétrie les axes des rotations de $\mathcal{I}$ doivent toujours passer par l'origine, et soit par un sommet, soit par le milieu d'une arête, soit par le milieu d'une face. Pour chaque paire de sommets opposés on a trois rotations, dont l'une est l'identité. Les deux autres sont clairement d'ordre 3. Ainsi, il y a 20 axes passants par les sommets. Pour chaque paire de milieux d'arêtes opposées on a une rotation, d'ordre 2, qui est différente de l'identité. Ainsi il y a 15 rotations d'axes passants par le milieu d'une arête. Finalement on a, pour chaque paire de faces opposées, 4 rotations d'ordre

5 qui sont différentes de l'identité, donc en total 24. Incluant l'identité, on obtient $|\mathcal{I}| = 20 + 15 + 24 + 1 = 60$. $\square$

Proposition 4.2.5. *Ils existent dans $\mathcal{I}$ une rotation μ d'ordre 2, et une rotation ν d'ordre 3, telles que leur produit $\mu\nu$ est d'ordre 5.*

Démonstration. Une rotation ν d'ordre 3, d'axe passant par le sommet $(1, 1, 1)$ et d'angle $2\pi/3$, est donnée par la matrice

$$\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Une rotation μ d'ordre 2, d'axe passant par le milieu de l'arête entre les sommets $(1, 1, 1)$ et $(0, 1/\phi, \phi)$, est donnée par la matrice

$$\mu = \begin{pmatrix} -\phi/2 & (\phi-2)/2 & 1/2 \\ (\phi-2)/2 & -1/2 & \phi/2 \\ 1/2 & \phi/2 & (\phi-2)/2 \end{pmatrix}.$$

De plus on peut vérifier par calcul que l'ordre de $\mu\nu$ est 5. $\square$

Proposition 4.2.6. *Le groupe icosaédral admet une présentation de la forme*

$$\mathcal{I} \cong \left\langle a, b | a^2, b^3, (ab)^5 \right\rangle.$$

Démonstration. D'après les Propositions 4.1.5 et 4.2.5 il existe un unique homomorphisme $\phi\colon \left\langle a, b | a^2, b^3, (ab)^5 \right\rangle \longrightarrow \mathcal{I}$ tel que $\phi(a) = \mu$ et $\phi(b) = \nu$. Comme $\left\langle a, b | a^2, b^3, (ab)^5 \right\rangle$ est une présentation de A_5 par la Proposition 4.1.10, on sait que ce groupe possède 60 éléments. Par la Proposition 4.2.4, $\mathcal{I}$ a la même cardinalité. Pour montrer que ϕ est un isomorphisme il suffit donc de montrer son injectivité. Le noyau K de ϕ est un sous-groupe normal de $\left\langle a, b | a^2, b^3, (ab)^5 \right\rangle$, différent de $\left\langle a, b | a^2, b^3, (ab)^5 \right\rangle$ car, par exemple, $\phi(a) = \mu$. Par le Théorème 4.1.11 et la Proposition 4.1.10 on a que $\left\langle a, b | a^2, b^3, (ab)^5 \right\rangle$ est simple, donc K doit être trivial. $\square$

4.3. **L'algèbre des quaternions.** On veut maintenant construire un groupe $\mathcal{I}^*$, à partir de $\mathcal{I}$, qui agit sur S^3 par multiplication à gauche. Pour atteindre ce but nous définissons une structure de groupe sur S^3, et nous construisons un homomorphisme de groupes ρ de S^3 dans le groupe des rotations $SO(3)$. Ensuite nous définissons $\mathcal{I}^*$ comme la préimage de I par ρ.

Définition 4.3.1. Soit $(1, i, j, k)$ la base orthonormée standard de $\mathbb{R}^4$. On définit une opération binaire $\cdot\colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ par

$$\begin{aligned}(a + bi + cj + dk) \cdot (a' + b'i + c'j + d'k) &= aa' - bb' - cc' - dd' \\ &+(ab' + ba' + cd' - dc')i \\ &+(ac' + ca' + db' - bd')j \\ &+(ad' + da' + bc' - cb')k.\end{aligned}$$

Proposition/Définition 4.3.2. *Cette opération définit sur $\mathbb{R}^4$ une structure de $\mathbb{R}$-algèbre. On l'appelle* ***algèbre des quaternions****, et on la note par $\mathbb{H}$. On définit l'application de* ***conjugaison*** $\bar{\cdot}\colon \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ *par*

$$\overline{x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k} = x_1 - x_2 i - x_3 j - x_4 k.$$

De plus l'application $\|\cdot\|\colon \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $\|x\| = \sqrt{p_1(x\cdot\overline{x})}$*, où* $p_1\colon \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est la projection sur la première composante, muni* $\mathbb{H}$ *d'une norme. Cette norme est multiplicative pour le produit des quaternions, i.e.* $\|x\cdot y\| = \|x\|\|y\|$ *pour tout* $x, y \in \mathbb{H}$.

Remarque 4.3.3. Les composantes en i, j et k de $x\cdot\overline{x}$ sont nulles. Ainsi la projection sert seulement à injecter $x\cdot\overline{x}$ dans $\mathbb{R}_+$ pour pouvoir prendre sa racine.

Remarque 4.3.4. La norme $\|\cdot\|$ coïncide avec la norme euclidienne de $\mathbb{R}^4$. Par calcul on obtient effectivement que $p_1(x\cdot\overline{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$. Cela permet de représenter la sphère $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ par $S^3 = \{x \in \mathbb{H} | x\cdot\overline{x} = 1\}$.

Remarque 4.3.5. On muni $\mathbb{H}$ de la topologie relative à cette métrique. D'après la dernière remarque $\mathbb{H}$ et $\mathbb{R}^4$ ont la même topologie.

Proposition 4.3.6. *L'espace* $\mathbb{H}\backslash\{0\}$ *muni du produit des quaternions forme un groupe topologique.*

Démonstration. Le neutre du groupe est donné par l'unité de $\mathbb{H}$: le vecteur de base 1. Tout élément non nul $x \in \mathbb{H}$ admet un inverse x^{-1} donné par $x^{-1} = \frac{\overline{x}}{\|x\|^2}$. En effet par la Remarque 4.3.3 on a que la seule composante non nulle de $x\cdot x^{-1}$ est en direction de 1. On calcule sa norme et on a $\|x\cdot\frac{\overline{x}}{\|x\|^2}\| = \frac{\|x\cdot\overline{x}\|}{\|x\|^2} = \frac{\|x\|^2}{\|x\|^2} = 1_{\mathbb{R}}$. Ainsi $x\cdot x^{-1}$ est le neutre 1. Il est facile de voir que cette application $(\cdot)^{-1}\colon \mathbb{H}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{H}\backslash\{0\}$ est continue. On a montré dans l'Exemple 1.5.4 que $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ est un groupe topologique pour la multiplication. Dans cette démonstration on a utilisé seulement la distributivité du produit sous la somme, les propriétés d'une norme, et le fait que la norme est multiplicative. Comme le produit des quaternions satisfait aussi ces propriétés, la preuve de la continuité du produit des quaternions est exactement analogue à celle dans l'exemple. □

Corollaire 4.3.7. *La sphère* S^3 *est un groupe topologique pour la multiplication des quaternions.*

Démonstration. Par la multiplicativité de la norme, $S^3 \subset \mathbb{H}$ est stable par multiplication. De plus pour $x \in S^3$ on a $\|x^{-1}\| = \|\frac{\overline{x}}{\|x\|^2}\| = \frac{\|\overline{x}\|}{\|x\|^2} = 1$, ainsi l'inverse x^{-1} est encore dans S^3. On a donc montré que S^3 est effectivement un sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{H}\backslash\{0\}$. Comme $\mathbb{H}\backslash\{0\}$ est un groupe topologique, S^3 l'est aussi par restriction. □

Corollaire 4.3.8. *L'espace projectif de dimension* 3 *est un groupe topologique.*

Démonstration. On rappelle que $\mathbb{RP}^3$ est définit comme l'espace des orbites $S^3/(\mathbb{Z}/2)$. Ainsi tout élément $\{-x, x\} \in \mathbb{RP}^3$ s'écrit $x\cdot\{-1, 1\}$, avec $\pm 1 = \pm 1 + 0i + 0j + 0k \in S^3$. Cela signifie que $\mathbb{RP}^3$ est aussi le quotient de groupes $S^3/\{-1, 1\}$. Comme $\{-1, 1\}$ est un sous-groupe normal de S^3 on a que $\mathbb{RP}^3$ est un groupe quotient. Soit $\pi\colon S^3 \longrightarrow S^3/\{-1, 1\}$ l'homomorphisme canonique. Le produit $\mu_\sim$ sur $\mathbb{RP}^3$ est définie de telle manière que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} S^3 \times S^3 \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\pi\times\pi"'] & S^3 \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{RP}^3 \times \mathbb{RP}^3 \arrow[r, "\mu_\sim"'] & \mathbb{RP}^3. \end{tikzcd}$$

Par la propriété 1.4.5 de la topologie quotient $\mu_\sim$ est continue car $\pi \circ \mu$ est continue. De la même manière l'application inverse $(\cdot)_\sim^{-1}$ de l'espace quotient fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} S^3 \arrow[r, "(\cdot)^{-1}"] \arrow[d, "\pi"'] & S^3 \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{RP}^3 \arrow[r, "(\cdot)_\sim^{-1}"'] & \mathbb{RP}^3. \end{tikzcd}$$

Par la même propriété $(\cdot)_\sim^{-1}$ est continue car $\pi \circ (\cdot)^{-1}$ l'est. $\square$

On veut maintenant associer à chaque élément du groupe topologique S^3 un endomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^3$. Considérons l'action de S^3 sur $\mathbb{H}$ par conjugaison, i.e. $\gamma' \colon S^3 \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ définie par $\gamma'(z, x) = z \cdot x \cdot z^{-1}$. On a clairement à faire avec une action de groupe. Comme le produit des quaternions dans $\mathbb{H}$ est continue cette action est aussi continue. Identifions $\mathbb{R}^3$ au sous-espace de $\mathbb{H}$ engendré par le vecteurs de base i, j, k. Munissons ensuite $\mathbb{R}^3$ de la structure de $\mathbb{R}$-algèbre induite par $\mathbb{H}$.

Proposition 4.3.9. *L'espace $\mathbb{R}^3$ est invariant sous γ', i.e. $\gamma'(S^3, \mathbb{R}^3) \subset \mathbb{R}^3$. De plus, pour $z \in S^3$ fixé, l'application $\gamma(z, -) = \gamma'(z, -)|_{\mathbb{R}^3} \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est linéaire.*

Démonstration. Soit $z = z_1 + z_2 i + z_3 j + z_4 k \in S^3$. Un calcul montre que les images des éléments de base (i, j, k) par γ' sont données par

$$\begin{aligned} ziz^{-1} &= (z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 - z_4^2)i + 2(z_1 z_4 + z_2 z_3)j + 2(z_2 z_4 - z_1 z_3)k, \\ zjz^{-1} &= 2(z_2 z_3 - z_1 z_4)i + (z_1^2 - z_2^2 + z_3^2 - z_4^2)j + 2(z_1 z_2 + z_3 z_4)k, \\ zkz^{-1} &= 2(z_1 z_3 + z_2 z_4)i + 2(z_3 z_4 - z_1 z_2)j + (z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 + z_4^2)k. \end{aligned}$$

En particulier, tous les coefficients de 1 sont nuls, ceci veut dire que le sous-espace engendré par (i, j, k) est envoyé sur lui même.

Comme $\mathbb{H}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre on a que

$$\gamma(z, \lambda x + \mu y) = z \cdot (\lambda x + \mu y) \cdot z^{-1} = \lambda z \cdot x \cdot z^{-1} + \mu z \cdot y \cdot z^{-1} = \lambda \gamma(z, x) + \mu \gamma(z, y)$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}^3$ et pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ce qui prouve la linéarité. $\square$

Grâce à cette dernière proposition, l'homomorphisme $\rho \colon S^3 \longrightarrow \mathrm{Homéo}(\mathbb{R}^3)$ associé à γ envoie les éléments de S^3 sur des transformations linéaires de $\mathbb{R}^3$.

Scholie 4.3.10. *Pour $z \in S^3$ la matrice $\rho(z)$ est donnée par*

$$\rho(z) = \begin{pmatrix} z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 - z_4^2 & 2(z_2z_3 - z_1z_4) & 2(z_1z_3 + z_2z_4) \\ 2(z_1z_4 + z_2z_3) & z_1^2 - z_2^2 + z_3^2 - z_4^2 & 2(z_3z_4 - z_1z_2) \\ 2(z_2z_4 - z_1z_3) & 2(z_1z_2 + z_3z_4) & z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 + z_4^2 \end{pmatrix}.$$

Proposition 4.3.11. *Pour tout $z \in S^3$, l'application $\rho(z)$ définie ci-dessus est une rotation.*

Démonstration. On sait que $\rho(z)$ est linéaire. Ainsi pour montrer qu'il s'agit d'une isométrie il suffit de montrer que la norme est préservée. Notons que la norme de $\mathbb{R}^3$ coïncide avec la restriction de la norme de $\mathbb{H}$ sur l'espace engendré par $\{i, j, k\}$. Comme la norme est multiplicative, on a bien que $\|\rho(z)(x)\| = \|z \cdot x \cdot z^{-1}\| = \|z\|\|x\|\|z^{-1}\| = \|x\|$. Comme $\rho(z)$ est une isométrie, pour montrer qu'elle est une rotation, il suffit de montrer que l'orientation est préservée, i.e. que le déterminant de $\rho(z)$ est 1. Montrons que le produit vectoriel $ziz^{-1} \times zjz^{-1}$ est égale à zkz^{-1}. Après quelques calcules on obtient

$$\begin{aligned} ziz^{-1} \times zjz^{-1} &= 2(z_1z_3(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2) + z_2z_4(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2))i \\ &\quad + 2(z_3z_4(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2) + z_1z_2(-z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - z_4^2))j \\ &\quad + (z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 + z_4^2)(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2)k. \end{aligned}$$

Compte tenu du fait que $\|z\| = 1$ on a bien $ziz^{-1} \times zjz^{-1} = zkz^{-1}$. Or, le déterminant de $\rho(z)$ est donné par $\left\langle ziz^{-1} \times zjz^{-1}, zkz^{-1}\right\rangle$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire euclidien. On a donc que $\det(\rho(z)) = \left\langle zkz^{-1}, zkz^{-1}\right\rangle = \|k\|^2 = 1$. $\square$

Le prochain théorème, dû à Hamilton, est un résultat remarquable qui est crucial pour la construction de la sphère homologique de Poincaré

Théorème 4.3.12 (Hamilton)**.** *L'application $\rho\colon S^3 \longrightarrow SO(3)$ est un morphisme de groupes topologiques surjectif, de noyau $\{-1, 1\}$.*

Démonstration. On sait déjà que ρ est un homomorphisme. Pour la surjectivité il faut montrer que pour tout rotation $M \in SO(3)$ il existe un élément $z \in S^3$ tel que $M = \rho(z)$. Supposons pour l'instant que M ne soit pas diagonale. Par la Proposition 1.6.7 il existe un vecteur de base parmi e_1, e_2 et e_3 tel que son image détermine M. Pour raisons de symétrie de la matrice générale $\rho(z)$ de 4.3.10 on peut supposer sans perte de généralité que c'est l'image de e_1 qui détermine la matrice. Soit donc $ae_1 + be_2 + ce_3 = Me_1$. On trouve un $z \in S^3$ tel que $\rho(z) = M$ en résolvant l'équation matricielle $\rho(z) \cdot (1, 0, 0)^T = (a, b, c)^T$ et en imposant la condition $|z| = 1$. On vérifie qu'une solution de ce système d'équations est donnée par

$$z = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2(1-a)}}i + \frac{b}{2}\sqrt{\frac{2(1-a)}{b^2 + c^2}}j + \frac{c}{2}\sqrt{\frac{2(1-a)}{b^2 + c^2}}k.$$

Remarquons que, comme on a supposé que M est déterminée par l'image de e_1, a doit être différent de 1. Sinon, comme M est une isométrie, on aurait $b = c = 0$, et l'axe de rotation ne serait pas déterminé par e_1.

Supposons maintenant que M soit diagonale. Si M est l'identité I_3, on choisi $z = 1$ et on a $\rho(1) = I_3$. Sinon, comme $\det(M) = 1$, il y a deux termes de la diagonale qui valent -1, et un qui vaut 1. Sans perte de généralité supposons que $Me_1 = 1$. Alors par 4.3.10, on voit que $z = i$ est envoyé sur M.

Pour déterminer le noyau de ρ, on doit déterminer toutes les solutions $z \in S^3$ de $\rho(z) = I_3$. Soit $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$. Les entrées de la matrice de 4.3.10 qui ne se trouvent pas sur la diagonale nous disent que tous les produits $z_\mu z_\nu$ doivent être nuls pour $\mu \neq \nu$. Ainsi au moins trois parmi les quatre composantes de z valent 0. La seule possibilité, pour satisfaire les équations sur la diagonale, est $z_1^2 = 1$. Ainsi le noyau de ρ s'identifie au sous-groupe $\{-1, 1\}$.

Rappelons que $SO(3)$ est identifié à un sous-espace de $\mathbb{R}^9$. Vue que chacune des applications qui envoient $z \in S^3$ sur la composante $\mu\nu$ de la matrice $\rho(z)$ est clairement continue, l'homomorphisme ρ est continue par la propriété universelle de la topologie produit. $\square$

Corollaire 4.3.13. *Le morphisme de groupes topologiques $\rho\colon S^3 \longrightarrow SO(3)$ induit un isomorphisme de groupes topologiques $\rho^*\colon \mathbb{RP}^3 \longrightarrow SO(3)$ tel que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} S^3 \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\rho"] & \\ \mathbb{RP}^3 \arrow[r, "\rho^*"'] & SO(3) \end{tikzcd}$$

commute.

Démonstration. On a déjà vu dans le Corollaire 4.3.8 que le quotient de groupes $S^3/_{\{-1,1\}}$ est l'espace projectif de dimension 3. Par le théorème de l'isomorphisme et le dernier théorème démontré on a que $\mathbb{RP}^3 \cong SO(3)$ comme groupes. On a ainsi une bijection $\rho^*\colon \mathbb{RP}^3 \longrightarrow SO(3)$ telle que $\rho^* \circ \pi = \rho$. Ici π est l'application quotient qui envoie les éléments de S^3 sur les orbites de $\mathbb{RP}^3$. Par le Théorème 1.4.5 on a que ρ^* est continue, comme ρ l'est par le Théorème 4.3.12. Il reste à vérifier que l'inverse de ρ^* est continue. Or S^3 est un compact de $\mathbb{R}^4$ car fermée et bornée et $SO(3)$ est un Hausdorff, comme sous-espace de $M_3(\mathbb{R})$ qui est homéomorphe à $\mathbb{R}^9$. De plus ρ^* est bijective. Ainsi ρ^* est un homéomorphisme. $\square$

Grâce au Théorème de Hamilton on peut interpréter le groupe icosaédral $\mathcal{I}$ comme sous-groupe de l'espace projectif $\mathbb{RP}^3$.

4.4. **Le groupe icosaédral binaire $\mathcal{I}^*$.**

Définition 4.4.1. Le **groupe icosaédral binaire** $\mathcal{I}^*$ est le sous-groupe de S^3 donné par la préimage du groupe icosaédral par l'application ρ, i.e.

$$\mathcal{I}^* = \rho^{-1}(\mathcal{I}).$$

C'est le groupe icosaédral binaire $\mathcal{I}^*$ qui va finalement nous permettre de définir la sphère homologique de Poincaré. Déterminons sa cardinalité.

Proposition 4.4.2. *Le groupe icosaédral binaire $\mathcal{I}^*$ a 120 éléments.*

Démonstration. Par le Corollaire 4.3.13 on a que $\mathcal{I}^* = \rho^{-1}(\mathcal{I}) = \pi^{-1}({\rho^*}^{-1}(\mathcal{I}))$. Comme ρ^* est une bijection on a $|{\rho^*}^{-1}(\mathcal{I})| = 60$. Par le théorème de Lagrange $|\mathcal{I}^*| = 60|\{-1, 1\}| = 120$. $\square$

Le groupe icosaédral binaire agit sur S^3 par multiplication à gauche, i.e. par l'action $\delta\colon \mathcal{I}^* \times S^3 \longrightarrow S^3$ définie par $\delta(g, z) = gz$.

Définition 4.4.3. La **sphère homologique de Poincaré** $\mathcal{P}$ est l'espace des orbites $\mathcal{P} = S^3/\mathcal{I}^*$ par l'action δ, muni de la topologie quotient.

Proposition 4.4.4. *La sphère homologique de Poincaré $\mathcal{P}$ est une variété lisse de dimension 3, compacte, connexe par arcs, et de groupe fondamental $\pi_1(\mathcal{P}) \cong \mathcal{I}^*$.*

Démonstration. La sphère S^3 est un compact en tant que sous-ensemble fermé et borné de $\mathbb{R}^4$. La projection $\pi\colon S^3 \longrightarrow \mathcal{P}$ est continue, donc $\mathcal{P}$ est compact. Pour la même raison, comme S^3 est connexe par arcs, $\mathcal{P}$ l'est aussi. De plus $\mathcal{I}^*$ est fini par 4.4.2, S^3 est un Hausdorff et δ est continue. Ainsi il suffit de montrer que δ est une action libre pour montrer que $\mathcal{P}$ est une 3-variété. Cela par les propositions 2.5.9 et 3.1.9. Mais l'action d'un sous-groupe par multiplication à gauche sur le groupe qui le contient est toujours libre. Finalement, on a un isomorphisme entre $\mathcal{I}^*$ et $\pi_1(\mathcal{P})$ par le Corollaire 2.5.13. ☐

Corollaire 4.4.5. *La sphère homologique de Poincaré $\mathcal{P}$ n'est pas homéomorphe à S^3.*

Démonstration. Il suffit de montrer que les groupes fondamentaux de $\mathcal{P}$ et de S^3 sont différents. Or $\pi_1(S^3) = 1$ par la Proposition 3.1.5, et par la Proposition 4.4.4 on a $\mathcal{I}^* \cong \pi_1(\mathcal{P})$. Par 4.4.2 le groupe fondamental de $\mathcal{P}$ a donc 120 éléments, tandis que $\pi_1(S^3)$ en a un seul. ☐

4.5. **Les groupes d'homologies.** Les **groupes d'homologies** $(H_n(X))_{n\in\mathbb{N}}$ sont des groupes abéliens associés à un espace topologique X. La définition des groupes d'homologies dépasse le cadre de ce projet, et ne sera donc pas proposée dans ce travail. On se contente de donner une liste de propriétés, sans les démontrer, qui nous suffisent pour calculer les groupes d'homologies de la 3-sphère et de la sphère homologique de Poincaré.

Il nous faut d'abord rappeler une notion de la théorie des groupes.

Rappel 4.5.1. Soit G un groupe. Le **sous-groupe des commutateurs** $[G, G]$ de G est le groupe engendré par tout les éléments $ghg^{-1}h^{-1}$, avec $g, h \in G$. Il s'agit d'un sous-groupe normal de G. L'**abélianisé** G^{ab} de G est le groupe quotient $G^{\mathrm{ab}} = G/[G, G]$. L'abélianisé G^{ab} est le plus grand quotient abélien de G. De plus, l'abélianisé de G satisfait la propriété universelle suivante : Pour tout groupe abélien A, tout homomorphisme de groupes $\phi\colon G \longrightarrow A$ se relève à un homomorphisme de groupes $\phi^*\colon G^{\mathrm{ab}} \longrightarrow A$.

Soit $Hom(H_1(M), \mathbb{Z})$ le groupe additif des homomorphismes de groupes de $H_1(M)$ dans $\mathbb{Z}$.

Proposition 4.5.2 ([6]). *Soit M une n-variété lisse, connexe par arcs, et compacte. Alors :*

(1) *Pour les indices $k > n$ on a $H_k(M) = 0$.*
(2) *On a un isomorphisme $H_0(M) \cong \mathbb{Z}$.*
(3) *Il existe un homomorphisme canonique $h\colon \pi_1(M) \longrightarrow H_1(M)$ qui induit un isomorphisme $\pi_1(M)^{ab} \cong H_1(M)$.*

(4) *On a un isomorphisme* $H_{n-1}(M) \cong Hom(H_1(M), \mathbb{Z})$.

(5) *La variété* M *est orientable si et seulement si on a un isomorphisme* $H_n(M) \cong \mathbb{Z}$. *Sinon* $H_n(M)$ *est trivial.*

Corollaire 4.5.3. *Les groupes d'homologies de* S^3 *sont donnés par*

$$H_j(S^3) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \textit{si } j{=}0{,}3 \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Comme S^3 est une variété lisse, compacte, et connexe par arcs on peut appliquer la Proposition 4.5.2 pour calculer ses groupes d'homologies. On a donc $H_0(S^3) \cong \mathbb{Z}$ par (2). Par la proposition 3.1.5 on a que $\pi_1(S^3) = 1$, son abélianisé est donc aussi trivial. Ainsi on a $H_1(S^3) = 0$ par (3). Le seul homomorphisme de groupes de $H_1(S^3) = 0$ à $\mathbb{Z}$ est celui qui envoie 0 sur $0 \in \mathbb{Z}$. Donc on a $H_2(S^3) = 0$ par (4). Comme S^3 est orientable on a que $H_3(S^3) \cong \mathbb{Z}$ par (5). Enfin, par (1), on a $H_j(S^3) = 0$ pour $j > 3$. □

4.6. **Les groupes d'homologies de $\mathcal{P}$.**

Définition 4.6.1. Une **n-sphère homologique** est une n-variété M compacte dont les groupes d'homologies sont isomorphes à ceux de la sphère S^n.

Le but de cette section est de calculer les groupes d'homologies de $\mathcal{P}$ pour montrer que la sphère homologique de Poincaré est effectivement une 3-sphère homologique.

Pour trouver $H_1(\mathcal{P})$ il nous faut calculer l'abélianisé de $\mathcal{I}^*$. Déterminons d'abord celui de $\mathcal{I}$.

Lemme 4.6.2. *L'abélianisé* $\mathcal{I}^{ab}$ *est trivial.*

Démonstration. On a vu dans la Proposition 4.2.6 que

$$\mathcal{I} \cong \left\langle g, h | g^3 = h^2 = (gh)^5 = 1 \right\rangle.$$

On note $\overline{x}$ la classe d'un élément $x \in \mathcal{I}$ dans $\mathcal{I}^{\text{ab}}$. Or, comme la projection $\pi\colon \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{I}^{\text{ab}}$ est un homomorphisme de groupes on a que $\overline{g}^3 = \overline{h}^2 = (\overline{g}\overline{h})^5 = \overline{1}$. Comme $\mathcal{I}^{\text{ab}}$ est abélien, on a que $\overline{1} = (\overline{g}\overline{h})^5 = \overline{g}^5\overline{h}^5 = \overline{g}^2\overline{h}$. Or comme $\overline{h}^2 = \overline{1}$ on a $\overline{h}^{-1} = \overline{g}^2 = \overline{h}$, et donc $\overline{g} = \overline{g}^4 = \overline{h}^2 = \overline{1}$. Ce qui implique que $\overline{h} = \overline{g}^2 = \overline{1}$. Comme les générateurs sont égaux à $\overline{1}$, on a que $\mathcal{I}^{\text{ab}} = \{\overline{1}\}$. □

Lemme 4.6.3. *L'élément* $-1 \in S^3$ *appartient au sous-groupe des commutateurs* $[\mathcal{I}^*, \mathcal{I}^*]$.

Démonstration. On commence par montrer que $i, k \in S^3$ sont des éléments de $\mathcal{I}^*$. Une preuve calculatoire montre que les rotations $\rho(i)$ et $\rho(k)$ appartiennent à $\mathcal{I}$. En effet, soient μ et ν les éléments de $\mathcal{I}$ définis dans la démonstration de 4.2.5. On a alors que

$$\mu\nu(\nu\mu)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \rho(k)$$

et

$$(\nu^2)^{-1}\rho(k)\nu^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \rho(i).$$

Ce qui montre que $\rho(i)$ et $\rho(k)$ sont contenus dans $\mathcal{I}$. Ainsi i et k sont dans la préimage $\pi^{-1}(\mathcal{I}) = \mathcal{I}^*$. On écrit -1 comme $-1 = j^2 = jki = ki(-k)(-i) = kik^{-1}i^{-1}$. Vu que $i, k \in \mathcal{I}^*$ on a bien que $-1 \in [\mathcal{I}^*, \mathcal{I}^*]$. $\square$

Proposition 4.6.4. *L'abélianisé $\mathcal{I}^{*ab}$ est trivial.*

Démonstration. Soient $\pi\colon S^3 \longrightarrow \mathbb{RP}^3$ la surjection qui envoie tout élément de S^3 sur son orbite, et $\rho^*\colon \mathbb{RP}^3 \longrightarrow SO(3)$ l'isomorphisme de groupes topologiques du Corollaire 4.3.13. Soit $x \in \mathcal{I}^*$ et considérons $\pi(x)$. Par le Lemme 4.6.2 on a que $\mathcal{I} = [\mathcal{I}, \mathcal{I}]$. Comme le diagramme de 4.3.13 commute, on a aussi que

$$\pi(\mathcal{I}^*) = \rho^{*-1}(\mathcal{I}) = [\rho^{*-1}(\mathcal{I}), \rho^{*-1}(\mathcal{I})] = [\pi(\mathcal{I}^*), \pi(\mathcal{I}^*)].$$

Ainsi on écrit $\pi(x) = g_1 h_1 g_1^{-1} h_1^{-1} \dots g_n h_n g_n^{-1} h_n^{-1}\{-1, 1\}$, avec $g_i, h_i \in \mathcal{I}^*$ pour $1 \leq i \leq n$. Pour x nous avons donc deux possibilités :

$$x = \pm g_1 h_1 g_1^{-1} h_1^{-1} \dots g_n h_n g_n^{-1} h_n^{-1}.$$

Par le Lemme 4.6.3 on a $x \in [\mathcal{I}^*, \mathcal{I}^*]$ dans les deux cas. Ce qui montre que $\mathcal{I}^* = [\mathcal{I}^*, \mathcal{I}^*]$, et donc que $\mathcal{I}^{*\mathrm{ab}} = 0$. $\square$

Corollaire 4.6.5. *La sphère homologique de Poincaré $\mathcal{P}$ est orientable.*

Démonstration. Pour montrer l'orientabilité de $\mathcal{P}$ il suffit, par le théorème 3.2.13, de montrer qu'il n'existe aucun sous-groupe G de $\mathcal{I}^*$ d'indice 2 dans $\mathcal{I}^*$. Supposons qu'un tel G existe. Alors G est normal dans $\mathcal{I}^*$ comme il est d'indice 2. Ainsi le groupe quotient $\mathcal{I}^*/G$ est isomorphe aux groupe cyclique $\mathbb{Z}/2$. On a deux homomorphismes de groupes canoniques $\alpha\colon \mathcal{I}^* \longrightarrow \mathbb{Z}/2$ et $\pi\colon \mathcal{I}^* \longrightarrow \mathcal{I}^{*\mathrm{ab}}$. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{I}^* \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathcal{I}^{*\mathrm{ab}} \arrow[dl, dotted, "\exists\beta"] \\ \mathbb{Z}/2 & \end{tikzcd} .$$

Comme le sous-groupe G est contenu dans le noyau de α, il existe, par la propriété universelle énoncée dans la Remarque 4.5.1, un unique homomorphisme $\beta\colon \mathcal{I}^{*\mathrm{ab}} \longrightarrow \mathbb{Z}/2$. De plus β est surjectif car α et π le sont. Or $\mathcal{I}^{*\mathrm{ab}}$ est trivial par 4.6.4. Ainsi pour $\overline{1} \in \mathbb{Z}/2$ la préimage $\beta^{-1}(\{\overline{1}\})$ est vide, ce qui contredit la surjectivité de β. Un sous-groupe G d'indice 2 dans $\mathcal{I}^*$ ne peut donc pas exister. $\square$

Proposition 4.6.6. *Les groupes d'homologies de $\mathcal{P}$ sont donnés par*

$$H_j(\mathcal{P}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } j\text{=0,3} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration. Par la Proposition 4.4.4, $\mathcal{P}$ satisfait les propriétés de 4.5.2. On a donc que $H_0(\mathcal{P}) \cong \mathbb{Z}$, par (2). Par le Lemme 4.6.4 on a que $\mathcal{I}^{*\mathrm{ab}} = 0$. On a donc que $H_1(\mathcal{P}) = 0$ par (3). Par conséquent $H_2(\mathcal{P}) = 0$ par (4). Comme $\mathcal{P}$ est orientable par 4.6.5 on a que $H_3(\mathcal{P}) \cong \mathbb{Z}$ par (5). Enfin, par (1), on a $H_j(\mathcal{P}) = 0$ pour $j > 3$. $\square$

Voici donc la conclusion de ce travail.

Conjecture 4.6.7 (Conjecture forte de Poincaré)**.** *Toute 3-sphère homologique est homéomorphe à* S^3*.*

Contre-exemple 4.6.8. La sphère homologique de Poincaré $\mathcal{P}$ est une 3-sphère homologique par la Proposition 4.6.6 qui n'est pas homéomorphe à S^3 par la Proposition 4.4.5.

Remarque 4.6.9. Si la conjecture forte était vraie, elle impliquerait directement la conjecture de Poincaré. En effet, vu le calcul des groupes d'homologie de S^3, et vu le Théorème 3.2.13, toute 3-variété compacte simplement connexe est une 3-sphère homologique.

Références

[1] A. D. Alexandrov, *Convex polyhedra*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2005. Translated from the 1950 Russian edition by N. S. Dairbekov, S. S. Kutateladze and A. B. Sossinsky, With comments and bibliography by V. A. Zalgaller and appendices by L. A. Shor and Yu. A. Volkov.

[2] Marcel and Gostiaux Berger Bernard, *Differential geometry : manifolds, curves, and surfaces*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 115, Springer-Verlag, New York, 1988. Translated from the French by Silvio Levy.

[3] H. S. M. Coxeter, *Introduction to geometry*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1961.

[4] H. S. M. and Moser Coxeter W. O. J., *Generators and relations for discrete groups*, Springer-Verlag, Berlin, 1957.

[5] H. S. M. Coxeter, *Regular polytopes*, 3rd ed., Dover Publications Inc., New York, 1973.

[6] Albrecht Dold, *Lectures on algebraic topology*, Second, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 200, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[7] Allen Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[8] R. C. and Scharlemann Kirby M. G., *Eight faces of the Poincaré homology* 3-*sphere*, Geometric topology (Proc. Georgia Topology Conf., Athens, Ga., 1977), 1979, pp. 113–146.

[9] John M. Lee, *Introduction to topological manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 202, Springer-Verlag, New York, 2000.

[10] J. R. Munkres, *Topology (2nd Edition)*, Prentice Hall, 2000.

[11] Henri Roudier, *Algèbre linéaire*, Vuibert, 1998.

[12] John Stillwell, *The story of the 120-cell*, Notices Amer. Math. Soc. **48** (2001), no. 1.

[13] Michio Suzuki, *Group theory. I*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 247, Springer-Verlag, Berlin, 1982. Translated from the Japanese by the author.

[14] http ://wikipedia.org.

[15] http ://www.mathcurve.com.