Un exemple de fonction elliptique: le sinus lemniscatique

Un travail réalisé par Olivier Kneuss sous la direction
du professeur Francisco Gonzalez

10 février 2005

Résumé

Le but de ce projet sera, dans un premier temps, de montrer quelques résultats fondamentaux sur les fonctions elliptiques et, dans un deuxième temps, de constuire rigoureusement une telle fonction : le sinus lemniscatique. Ce dernier, que l'on doit à Gauss, a une certaine importance historique. En effet, il s'agit de la toute première fonction elliptique découverte.

Table des matières

Chapitre 1

Résultats théoriques

1.1 Rappel sur les fonctions holomorphes

Définition 1. *Une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ où U est un ouvert de $\mathbb{C}$ est dite* holomorphe sur U *si pour tout $z \in U$ la limite*

$$\lim_{\substack{z \to a \\ z \neq a}} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

existe, auquel cas cette limite est la dérivée de f en a, *$f'(a)$.*

Théorème 1. *Soit $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe sur un ouvert étoilé U de centre c. Alors la fonction*

$$F(z) := \int_{[c,z]} f(z) dz$$

est une primitive de f sur U.

Définition 2. *Une fonction $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est dite* entière *si elle est holomorphe sur tout $\mathbb{C}$.*

Proposition 1. *Toute fonction entière ayant son module borné est constante.*

Définition 3. *Soient X un espace métrique et $A \subset X$; alors $x \in X$ est un* point d'accumulation de A *si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$, $a \neq x$ avec $d(x, a) < \varepsilon$.*

Proposition 2. *Soit $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe sur un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$f \equiv 0$ sur U*
2. *l'ensemble $Z(f)$ des zéros de f possède un point d'accumulation dans U*
3. *il existe $z_0 \in U$ avec $f^{(n)}(z_0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$.*

Théorème 2. *Toute fonction f holomorphe sur une couronne $C(a, r, R)$ y possède exactement un développement de Laurent en a, ie*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

pour tout $z \in C(a, r, R)$.

Lemme 1. *Soient $a \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$ et f une fonction holomorphe sur $B(a, \varepsilon)\backslash\{a\}$. S'il existe $\varepsilon' \leq \varepsilon$ tel que f est bornée sur $B(a, \varepsilon')\backslash\{a\}$, alors f se prolonge en une fonction holomorphe sur $B(a, \varepsilon)$.*

Définition 4. *Soient α un chemin fermé dans $\mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}\backslash Im(\alpha)$. Nous appelons* indice de α par rapport à z *le nombre*

$$ind(\alpha, z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{d\tau}{\tau - z}.$$

Proposition 3. *Pour un chemin fermé $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ fixé, l'application définie sur $\mathbb{C} \backslash \alpha([a, b])$ par $z \mapsto ind(\alpha, z)$ est continue et ne prend que des valeurs entières.*

Théorème 3. *Soient U un ouvert étoilé de $\mathbb{C}$, S une partie finie de U, f une fonction holomorphe sur $U\backslash S$ et α un chemin fermé dans $U\backslash S$. Alors*

$$\int_{\alpha} f(\tau)d\tau = 2\pi i \sum_{z\in S} Res(f,z)\cdot ind(\alpha,z).$$

Proposition 4. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in U$ et f holomorphe sur $U\backslash\{a\}$ ayant a comme singularité isolée non essentielle. Alors, si $deg(f,a) < \infty$,*

$$Res(f'/f,a) = deg(f,a)$$

Définition 5. *Soit $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C}\cup\{\infty\}$. Une application $f : U \to \overline{\mathbb{C}}$ est dite* méromorphe *sur U si*

1. *l'ensemble $P(f) := f^{-1}(\{\infty\})$ ne possède pas de point d'accumulation*
2. *$f|_{U\backslash P(f)}$ est holomorphe sur $U\backslash P(f)$*
3. *chaque point de $P(f)$ est un pôle de f.*

Proposition 5. *Soient U un ouvert étoilé de $\mathbb{C}$ et f une fonction méromorphe sur U. Supposons que l'ensemble $Z(f)$ des zéros de f et $P(f)$ celui des pôles de f soient finis. Alors, si α est un chemin fermé dans $U\backslash(Z(f)\cup P(f))$,*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{z\in Z(f)} deg(f,z)\cdot ind(\alpha,z) + \sum_{p\in P(f)} deg(f,p)\cdot ind(\alpha,p).$$

Proposition 6. *Soit f une fonction holomorphe sur $B(a,\varepsilon)\backslash\{a\}$, $\varepsilon > 0$. Alors $\lim_{z\to a}|f(z)| = \infty \Leftrightarrow a$ est un pôle de f.*

Démonstration. Si a est un pôle, alors clairement $\lim_{z\to a}|f(z)| = \infty$. Réciproquement, si $\lim_{z\to a}|f(z)| = \infty$, alors, par continuité, il existe $\varepsilon' < \varepsilon$ tel que $f(z) \neq 0$ sur $B(a,\varepsilon')\backslash\{a\}$. Il suit que $g := 1/f$ est holomorphe sur $B(a,\varepsilon')\backslash\{a\}$. Comme $\lim_{z\to a} g(z) = 0$, g est borné au voisinage de a. Par le lemme de Riemann (lemme 1), g est holomorphe sur $B(a,\varepsilon')$. g y admet donc un développement de la forme $\sum_{k=j}^{\infty} l_k(z-a)^k$ avec $j > 0$ et $l_j \neq 0$ (car $g(0) = 0$). Alors

$$\lim_{z\to a}(z-a)^j f(z) = \lim_{z\to a}\frac{(z-a)^j}{g(z)} = \frac{1}{l_j} \neq 0.$$

Donc a est un pôle de f. □

Définition 6. *Soient f et g deux fonctions méromorphes de $\mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$. On dit que $f = g$* sur $\mathbb{C}$ *si $P(f) = P(g)$ et $f|_{U\setminus P(f)} = g|_{U\setminus P(g)}$.*

Proposition 7. *Soient f et g deux fonctions méromorphes de $\mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ et $P \supset (f^{-1}(\{\infty\}) \cup g^{-1}(\{\infty\}))$ une partie de $\mathbb{C}$ sans point d'accumulation. Alors, si $f = g$ sur $\mathbb{C}\setminus P$, $f = g$ sur $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Soit $p \in P$, alors il existe $\delta > 0$ tel que $(B(p,\delta)\setminus\{p\})\cap P = \emptyset$. Si $p \notin P(f)$, il existe δ' tel que f soit borné sur $B(p,\delta')$. Soit $\varepsilon = min(\delta,\delta')$, alors comme $f = g$ sur $B(p,\varepsilon)\setminus\{p\}$, le lemme 1 implique que g se prolonge en une fonction holomophe sur p. Alors, par continuité, $f(p) = g(p)$.
Si $p \in P(f)$, nous avons par la proposition précédente

$$\lim_{z\to p}|f(z)| = \infty \text{ donc } \lim_{z\to p}|g(z)| = \infty.$$

Il vient que $P(f) \subset P(g)$. On montre de même que $P(f) \supset P(g)$. La proposition suit. □

Proposition 8. *Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ à valeurs complexes. Notons $u(x,y) := Re(f(x+iy))$ et $v(x,y) := Im(f(x+iy))$. Ainsi $u, v : U \to \mathbb{R}$ (ici U est vu comme un ouvert de $\mathbb{R}^2$). Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est holomorphe sur U*
2. *u et v sont C^1 sur U et satisfont aux equations de Cauchy-Riemann :*

$$\partial_x u = \partial_y v \text{ et } \partial_y u = -\partial_x v.$$

Démonstration. Montrons 2. ⇒ 1. Nous avons $f(x+iy) = u(x,y) + i\cdot v(x,y)$. Nous allons montrer que

$$\lim_{\substack{z\to a+ib \\ z\neq a+ib}} \frac{f(z) - f(a+ib)}{z-(a+ib)} = \partial_x u(a,b) - i\cdot\partial_y u(a,b) \tag{1.1}$$

pour $a + ib \in U$. Cela signifiera que f est holomorphe sur U.
Nous avons

$$f(x+iy) - f(a+ib) = u(x,y) - u(a,b) + i(v(x,y) - v(a,b)).$$

Comme u et v sont C^1 sur U, on aura pour tout $x + iy \in U$

$$u(x,y) - u(a,b) = (x-a)\partial_x u(a,b) + (y-b)\partial_y u(a,b) + o(\|x-a, y-b\|);$$

et de même pour $v(x,y) - v(a,b)$.
Comme $\partial_x u = \partial_y v$ et $\partial_y u = -\partial_x v$, on obtient

$$f(x+iy) - f(a+ib) = (x-a)\partial_x u(a,b) + (y-b)\partial_y u(a,b) + o(\|x-a, y-b\|)$$

$$+i(-(x-a)\partial_y u(a,b) + (y-b)\partial_x u(a,b) + o(\|x-a, y-b\|)). \tag{1.2}$$

Pour montrer (1.1), il faut montrer que

$$\lim_{\substack{x+iy\to a+ib\\ x+iy\neq a+ib}} \frac{f(x+iy) - f(a+ib) - (x+iy-(a+ib))(\partial_x u(a,b) - i\cdot\partial_y u(a,b))}{x+iy-(a+ib)} = 0.$$

En utilisant (1.2) dans la limite précédente on voit qu'il reste

$$\lim_{\substack{x+iy\to a+ib\\ x+iy\neq a+ib}} \frac{o(\|x-a, y-b\|) + i\cdot o(\|x-a, y-b\|)}{x-a+i(y-b)}.$$

Cette dernière limite tend bien vers 0, car la norme de celle-ci est plus petite que

$$\frac{o(\|x-a, y-b\|) + o(\|x-a, y-b\|)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} \longrightarrow 0 + 0 = 0.$$

Donc, f est holomorphe sur U.

Montrons 1. $\Rightarrow$ 2. Soit $a+ib \in U$ quelconque. Comme f est holomorphe

$$\lim_{\substack{x+iy\to a+ib\\ x+iy\neq a+ib}} \frac{f(x+iy) - f(a+ib)}{x+iy-(a+ib)}$$

existe et est indépendante de la façon dont $x+iy$ tend vers $a+ib$.
En posant dans la limite ci-dessus $y = b$, on aura que

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{u(x,b) - u(a,b) + i(v(x,b) - v(a,b))}{x-a}$$

existe et vaut $\partial_x u(a,b) + i\cdot\partial_x v(a,b)$ (donc les dérivés partielles par rapport à x de u et v existent).
De même, en posant $x = a$, on obtiendra que $f'(a+ib) = -i\cdot\partial_y u(a,b) + \partial_y v(a,b)$. Par unicité de la limite, on aura donc que $\partial_x u = \partial_y v$ et $\partial_y u = -\partial_x v$.
Comme f est holomorphe, f' sera aussi holomorphe et donc continue. On aura alors que $\partial_x u$, $\partial_y v$, $\partial_x v$ et $\partial_y u$ sont continus sur U ce qui implique que u et v sont C^1 sur U. $\square$

1.2 Périodes des fonctions méromorphes

Remarque 1. Dans ce qui suit, nous ne considérerons que des fonctions méromorphes de $\mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$.

Définition 7. *Une fonction méromorphe sera dite* périodique *s'il existe une constante $w \in \mathbb{C}$ tel que $f(z+w) = f(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Le nombre complexe w sera appelé* période de f *et le nombre zéro sera appelé* période triviale de f.

Remarque 2. *Il est clair que si w et w' sont deux périodes de f, alors, $nw + mw'$ est également une période pour tous n et $m \in \mathbb{Z}$.*

Proposition 9. *Soit f une fonction méromorphe, alors $\mathbb{C} \setminus f^{-1}(\{\infty\})$ est ouvert connexe.*

Démonstration. Comme $f^{-1}(\{\infty\})$ n'a pas de point d'accumulation dans $\mathbb{C}$, il vient que pour tout $z \in \mathbb{C} \backslash f^{-1}\{\infty\}$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(z,\epsilon) \cap f^{-1}\{\infty\} = \emptyset$. Donc $\mathbb{C} \backslash f^{-1}(\{\infty\})$ est ouvert. Le fait que $\mathbb{C} \backslash f^{-1}(\{\infty\})$ est connexe sera une conséquence de la démonstration de la proposition 11. □

Proposition 10. *Soit f une fonction méromorphe non constante alors :*

1. *le module de toutes les périodes non triviales de f admet une borne inférieure > 0.*
2. *l'ensemble des périodes de f n'a pas point d'accumulation (cette ensemble est donc fermé par la propositon précédente).*

Démonstration. Montrons 1. Supposons par absurde que la borne inférieure vale zéro, alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe une période w_ϵ tel que $|w_\epsilon| < \epsilon$. Formons alors la suite (u_n) $n \in \mathbb{N}$ avec $u_n = w_{\frac{1}{n}}$. Nous avons $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Soit z_0 un point où f est holomorphe, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(z_0) = f(z_0 + u_n)$. Il suit que z_0 est un point d'accumulation des zéros de $f(z) - f(z_0)$. Donc par la proposition 2, f est constante. Contradiction.

Montrons 2. Par absurde, supposons que x_0 soit un point d'accumulation de l'ensemble des périodes de f. Alors pour tout $\epsilon > 0$, nous pouvons trouver deux périodes distinctes w_1 et w_2 dans $B(x_0, \epsilon)$. Comme $w_1 - w_2 \neq 0$ est une période de f avec $|w_1 - w_2| < 2\epsilon$, nous avons que f a des périodes aussi petites que l'on veut. Contradiction avec le point 1. □

Corollaire 1. *Une conséquence de cette proposition est que le module de toutes les périodes non triviales de f possède un minimum strictement positif.*

Lemme 2. *Soient a,b et c trois nombres complexes non nuls. Nous avons*

$$\inf_{(l,m,n)\in\mathbb{Z}^3\setminus(0,0,0)} |la+mb+nc| = 0.$$

Démonstration. Soit $\mathrm{E} := \{la+mb+nc \mid (l,m,n) \neq (0,0,0)\}$.

<u>cas 1</u>

Il existe un élement de E qui est nul. Dans ce cas a,b et c sont linéairement dépendants sur $\mathbb{Z}$ et il n'y a rien à prouver.

<u>cas 2</u>

Chaque élément de E est différent de zéro. Sans perte de généralité, on peut supposer que $|a| \geq |b| \geq |c|$. On a alors que a, b et c sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$. Par l'absurde, supposons qu'il existe $\delta > 0$ tel que $|la+mb+nc| > 2\delta$ pour tout élément de E. Si $(l,m,n) \neq (l',m',n')$, nous avons en particulier

$$|(l-l')a+(m-m')b+(n-n')c| > 2\delta. \tag{1.3}$$

Soit $N \in \mathbb{N}$, $N > 0$, et laissons l,m et n prendre les valeurs $-N$ à N par pas de 1 avec la condition suplémentaire que $(l,m,n) \neq (0,0,0)$. Nous obtenons $(2N+1)^3-1$ éléments distincts de E (sinon E serait linéairement dépendant). Pour chacun des $(2N+1)^3-1$ éléments distincts de E nous avons

$$|la+mb+nc| \leq 3N|a|.$$

Il y a donc au moins $(2N+1)^3-1$ éléments de E dans $\overline{B(0,3N|a|)}$. Le disque de rayon δ centré en chacun de ces points est dans $\overline{B(0,3N|a|+\delta)}$. Par (3), nous avons que tous les $(2N+1)^3-1$ petits disques ne s'intersectent pas entre eux. En comparant les aires, nous avons (en rajoutant le cercle centré en 0)

$$(3N|a|+\delta)^2 > (2N+1)^3\delta^2 \text{ ou bien}$$

$$\delta((2N+1)^{\frac{3}{2}}-1) < 3N|a| \text{ donc}$$

$$\delta < \frac{3N|a|}{(2N+1)^{\frac{3}{2}}-1}.$$

Le terme de droite tend vers 0 quand $N \to \infty$, ce qui contredit $\delta > 0$. Il suit que E doit contenir un élément $la + mb + nc$ tel que $|la + mb + nc| \leq 2\delta$ ce qui implique que

$$\inf_{(l,m,n)\in\mathbb{Z}^3\setminus(0,0,0)} |la + mb + nc| = 0$$

$\square$

Théorème 4. *Une fonction méromorphe non constante f ne peut pas avoir trois périodes linéairement indépendantes sur $\mathbb{Z}$.*

Démonstration. Considérons la fonction méromorphe $\varphi(\mathrm{z}) = f(z) - f(z_0)$ où z_0 est un point en lequel f est holomorphe. Evidemment, z_0 est un zéro de φ et parce que les zéros de φ ne posséde de point d'accumulation, il existe $\epsilon > 0$ tel que φ n'ait pas de zéro dans $B(z_0, \epsilon)$.
Par l'absurde, soit a, b et c trois périodes de f linéairement indépendantes sur $\mathbb{Z}$. Alors $la + mb + nc$ est aussi une période où l,m et $n \in \mathbb{Z}$, donc $f(z_0) = f(z_0 + la + mb + nc)$. Par le lemme 2, il existe l,m et $n \in \mathbb{Z}$ tel que $0< |la + mb + nc| < \epsilon$. Dans ce cas, φ a un zéro en $z_0 + la + mb + nc$ dans $B(z_0, \epsilon)$. Contradiction. Donc f ne peut pas avoir trois périodes linéairement indépendantes sur $\mathbb{Z}$. $\square$

Corollaire 2. *Soient α et $\beta \in \mathbb{R}$ avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ et $(l, m) \in \mathbb{Z}^2\setminus(0, 0)$. Alors*

$$\inf_{(l,m)\in\mathbb{Z}^2\setminus(0,0)} |l\alpha + m\beta| = 0.$$

Démonstration. Prenons $a = \alpha$, $b = \beta$ et $c = i$. Par le lemme 2, pour tout $0 < \epsilon < 1$, il existe trois entiers l', m' et n' non tous nuls avec $|l'a+m'b+n'c| < \epsilon < 1$ ce qui implique que n' =0. Donc $|l'a + m'b| < \varepsilon$. $\square$

Corollaire 3. *Une fonction méromorphe non constante ne peut pas avoir deux périodes réelles linéairement indépendantes sur $\mathbb{Z}$.*

Démonstration. Par absurde, supposons que $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$ soient deux périodes réelles linéairement indépendantes sur $\mathbb{Z}$. Nous avons donc $\frac{\beta}{\alpha} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Par le corollaire 2, il existe l et $m \in \mathbb{Z}$ avec $(l, m) \neq (0, 0)$ tel que $0 < |l\alpha + m\beta| < \epsilon < 1$.
Soit z_0 un point où f est holomorphe et soit $\varphi(\mathrm{z}) := f(z) - f(z_0)$. Il existe $\epsilon < 1$ tel que $f(z) - f(z_0)$ n'ait pas de zéro dans $B(z_0, \epsilon)$. Mais comme $f(z_0)$ $= f(z_0 + l\alpha + m\beta)$, on aura comme avant que $z_0 + l\alpha + m\beta$ est un zéro dans $B(z_0, \epsilon)$. Contradiction. $\square$

Corollaire 4. *Une fonction méromorphe non constante ne peut pas avoir deux périodes $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$ linéairement indépendantes sur $\mathbb{Z}$ et telles que $\frac{\alpha}{\beta}$ soit réel.*

Démonstration. Sinon $g(z) := f(\alpha z)$ aurait deux périodes réelles 1 et $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, ce qui est impossible par le corollaire précédent. □

Théorème 5. *Soient f une fonction méromorphe non constante et S l'ensemble de toutes ses périodes. Alors, un et un seul des trois cas suivants a lieu :*

1. $S = \{0\}$.
2. *il existe $w_1 \neq 0 \in S$ tel que $S = \{nw_1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Dans ce cas f sera dite* simplement périodique.
3. *il existe $w_1 \neq 0$et $w_2 \neq 0 \in S$ avec $Im\ \frac{w_1}{w_2} \neq 0$ tel que $S = \{nw_1 + mw_2 \mid n,m \in \mathbb{Z}\}$. Dans ce cas f sera dite* elliptique.

Démonstration. Cela découle des résultats précédents. Par exemple, si f est elliptique, on pourra prendre w_1 et w_2 telles que

$$|w_1| = \min_{w \in S\backslash\{0\}} |w| \text{ et } |w_2| = \min_{\substack{w' \in S\backslash\{0\} \\ w' \notin \mathbb{Z}w_1}} |w'|$$

. □

Définition 8. *Soit f une fonction méromorphe elliptique,*

1. *Nous dirons que (w_1, w_2) est une* paire de périodes basique de f *si $S = \{nw_1 + mw_2 \mid n,m \in \mathbb{Z}\}$.*
2. *Nous dirons que (w_1, w_2) est une* paire de périodes primitive de f *si elle est basique et si w_1 et w_2 sont telles que pour toute autre paire basique (w_1', w_2') on ait $\min(|w_1|, |w_2|) \leq \min(|w_1'|, |w_2'|)$ et $\max(|w_1|, |w_2|) \leq \max(|w_1'|, |w_2'|)$.*

Remarque 3. Les paires de périodes primitives ne sont pas uniques. En effet, si (w_1, w_2) en est une alors $(-w_1, -w_2)$ en sera également une.
Les paires de périodes basiques ne sont pas forcement primitives. En effet, si (w_1, w_2) est primitive (donc basique) alors $(w_1, w_1 + w_2)$ sera basique non primitive.

Théorème 6. *Une paire basique de périodes* (w_1, w_2) *avec* $|w_1| \leq |w_2|$ *est primitive* $\Leftrightarrow$ $|\tau| \geq 1$, $Im\ \tau \neq 0$ *et* -$\frac{1}{2} \leq Re\ \tau \leq \frac{1}{2}$ *où* $\tau = \frac{w_2}{w_1}$.

Démonstration. $\Rightarrow$
Soit ζ et $\eta \in \mathbb{R}$ tel que $\tau = \zeta + i\eta$. Si (w_1, w_2) est primitive alors nous avons $Im\ \tau \neq 0$ et $|w_2 \pm w_1| \geq |w_2| \geq |w_1|$ donc en divisant par w_1 nous avons

$$|\tau \pm 1|^2 \geq |\tau|^2 \geq |1| \text{ ou bien}$$

$$(\zeta \pm 1)^2 + \eta^2 = |\tau \pm 1|^2 \geq |\tau|^2 = \zeta^2 + \eta^2 \geq 1 \text{ donc } \pm 2\zeta + 1 \geq 0$$

$$\text{donc } \frac{1}{2} \leq Re\ \tau \leq \frac{1}{2}.$$

On a donc bien $Im\ \tau \neq 0$, $|\tau| \geq 1$ et $\frac{1}{2} \leq Re\ \tau \leq \frac{1}{2}$.

$\Leftarrow$
Supposons les trois conditions satisfaites et soit (w_1, w_2) une paire basique de périodes. Soit $w = mw_1 + nw_2$ où $n, m \in \mathbb{Z}$ une période non triviale. On a alors $Im\ |\tau| \neq 0$, donc $\frac{w_2}{w_1} \notin \mathbb{R}$.
Si $n = 0$, alors $\frac{w}{w_1} = m \neq 0$, donc $|w| = |m|\ |w_1| \geq |w_1|$ et w_1 est colinéaire à w.
Si $n \neq 0$, alors $\frac{w}{w_1}$ n'est pas réel, car $\frac{w_2}{w_1}$ ne l'est pas. Soit $D := |\frac{w}{w_1}|^2 - |\frac{w_2}{w_1}|^2$ $= |m + n\tau|^2 - |\tau|^2 = (m + n\zeta)^2 - \zeta^2 + (n^2 - 1)\eta^2$.

- Si $n \neq \pm 1$, alors $n^2 - 1 \geq 3$ et comme $\eta^2 = (\zeta^2 + \eta^2) - \zeta^2 \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, nous avons D $\geq -\frac{1}{4} + 3\frac{3}{4} > 0$
- Si n =± 1, alors $D = (m \pm \zeta)^2 - \zeta^2 \geq 0$, car $|\zeta| \leq \frac{1}{2}$.

Donc $|w| \geq |w_2|$ si n$\neq 0$.
Il suit que (w_1, w_2) est une paire de périodes primitive. $\square$

1.3 Propriétés des fonctions elliptiques

Définition 9. *Soit f une fonction elliptique et soit (w_1, w_2) une paire de périodes basique de f et soit encore $a \in \mathbb{C}$ quelconque. Alors, on définit le* parallélogramme de base associé à (w_1, w_2) et à a *comme l'ensemble* $\{a + xw_1 + yw_2 \mid x, y \in [0, 1)\}$. *Il sera noté* $P_{(a,w_1,w_2)}$.

Remarque 4. Dans ce qui suit, il sera implicite que (w_1, w_2) sera une paire de périodes basique quelconque de f.

Proposition 11. *Soit f une fonction elliptique non constante, alors pour tout $a \in \mathbb{C}$, $P_{(a,w_1,w_2)}$ ne contient qu'un nombre fini de pôles et de zéros.*

Démonstration. Nous savons que l'ensemble des pôles de f n'a pas de point d'accumulation. De même, comme f n'est pas constante, ses zéros n'en ont pas.
Clairement, $\overline{P_{(a,w_1,w_2)}}$ est compact. Pour démontrer la proposition, il suffira de prouver que tout sous-ensemble sans point d'accumulation d'un compact ne contient qu'un nombre fini d'éléments.
Soit A un tel ensemble. Comme A ne contient pas de point d'accumulation, la proposition 9 nous assure qu'il est fermé donc compact. De même, tous les points de A sont ouverts dans la topologie induite. Il vient alors que A est muni de la topologie discrète et donc par compacité de A, A doit être fini. La proposition suit. $\square$

Corollaire 5. *Le nombre de zéros et de pôles d'une fonction elliptique non constante est dénombrable.*

Démonstration. $\{\mathrm{P}_{(a,w_1,w_2)} \mid a \in w_1\mathbb{Z}+w_2\mathbb{Z}\}$ est un recouvrement dénombrable de $\mathbb{C}$. Le corollaire suit de la proposition précédente. $\square$

Théorème 7. *Il n'existe pas de fonction elliptique f non constante qui soit entière.*

Démonstration. Sinon, comme f n'a pas de pôle dans $\overline{P_{(0,w_1,w_2)}}$, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|f(z)| < M$ pour tout $z \in P_{(0,w_1,w_2)}$. Mais alors par périodicité double, on aura que $|f(z)| < M$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Alors par Liouville (prop 2), f doit être constante. Contradiction. $\square$

Corollaire 6. *Une fonction elliptique non constante a au moins un pôle dans $P_{(a,w_1,w_2)}$ pour tout $a \in \mathbb{C}$.*

Théorème 8. *Soit f une fonction elliptique. Alors la somme de tous ses résidus se trouvant dans un parallélogramme de base quelconque (ie dans $P_{(a,w_1,w_2)}$) est nul.*

Démonstration. Soit $P_{(a,w_1,w_2)}$ un parallélogramme de base dont on a orienté le bord $\partial P_{(a,w_1,w_2)}$ de façon positive (sens inverse des aiguilles d'une montre). Supposons d'abord qu'il n'y ait aucun pôle de f sur $\partial P_{(a,w_1,w_2)}$. Dans ce cas, on peut appliquer le théorème des résidus. Comme $ind(\partial P_{(a,w_1,w_2)}, z) = 1$, il vient

$$\oint_{\partial P_{(a,w_1,w_2)}} f(\tau)d\tau = 2\pi i \sum_{z \in P_{(a,w_1,w_2)} \cap P(f)} Res(f,z)$$

Posons $b = a + w_1$, $c = a + w_1 + w_2$ et $d = a + w_2$. Supposons que (w_1, w_2) est tel que

$$\partial P_{(a,w_1,w_2)} = [a,b] \cup [b,c] \cup [c,d] \cup [c,a]$$

Si ce n'es pas le cas (ie si on va dans le sens négatif), on intervertit simplement w_1 et w_2. Alors, par périodicité de $f(z)$, nous avons $\int_{[a,b]} f(z)dz + \int_{[c,d]} f(z)dz = 0$ et de même $\int_{[b,c]} f(z)dz + \int_{[d,a]} f(z)dz = 0$. Il vient

$$\sum_{z \in P_{(a,w_1,w_2)} \cap P(f)} Res(f,z) = 0.$$

S'il y des pôles sur $\partial P_{(a,w_1,w_2)}$, on considère le parallélogramme $P_{(b,w_1,w_2)}$ avec b proche de a de telle sorte que le bord de $P_{(b,w_1,w_2)}$ ne contienne plus de pôle et que tous les pôles dans $P_{(a,w_1,w_2)}$ soit à l'intérieur de $P_{(b,w_1,w_2)}$. Ceci est possible par la proposition 11. Alors, on applique le même argument que précédemment. □

Corollaire 7. *Une fonction elliptique non constante ne peut pas avoir un seul pôle dans un parallélogramme de base. Elle doit avoir au moins 2 pôles simples, ou au moins un pôle non simple dans un parallélogramme de base.*

Lemme 3. *L'ensemble des fonctions elliptiques de périodes w_1 et w_2 avec $Im\ \frac{w_1}{w_2} \neq 0$ est un corps que l'on note $K_{(w_1,w_2)}$. De plus, si $f \in K_{(w_1,w_2)}$, alors $f' \in K_{(w_1,w_2)}$.*

Démonstration. Soient f et $g \in K_{(w_1,w_2)}$. Alors, $f + g$ est holomorphe avec $P(f+g) \subseteq P(f) \cup P(g)$ et $f + g$ a comme périodes w_1 et w_2. On a donc $f + g \in K_{(w_1,w_2)}$. Un raisonnement similaire montre que $f \cdot g \in K_{(w_1,w_2)}$. Evidemment, la fonction identiquement égale à 1 appartient à $K_{(w_1,w_2)}$. Soit f non identiquement égale à zéro sur $\mathbb{C}$; alors comme les zéros de f n'ont pas de point d'accumation, $1/f$ est méromorphe et possède w_1 et w_2 comme périodes. On a donc que $1/f \in K_{(w_1,w_2)}$. On sait que f est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash P(f) := U$, on a que f' est holomorphe sur U et donc $P(f') = P(f)$. Clairement, f' a comme périodes w_1 et w_2, donc $f' \in K_{(w_1,w_2)}$. □

Théorème 9. *Soit f une fonction elliptique non constante, alors, dans tout parallélogramme de base le nombre de ses zéros est égal au nombre de ses pôles, en tenant compte de leur multiplicité.*

Démonstration. Si f est elliptique, le lemme précédent nous dit que f'/f est aussi elliptique. Supposons d'abord qu'aucun pôle de f'/f ne se trouve sur le bord du parallélogramme de base considéré. Alors, le théorème 8 et la proposition 4 nous donne que

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial P_{(a,w_1,w_2)}} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} d\tau = \sum_{z \in P_{(a,w_1,w_2)} \cap Z(f)} deg(f,z) + \sum_{s \in P_{(a,w_1,w_2)} \cap P(f)} deg(f,s) = 0.$$

Cela donne le résultat cherché, car si s est un pôle de f alors $deg(f,s) = -ordre(f,s)$.
Si il y un ou plusieurs pôles de f'/f dans $\partial P_{(a,w_1,w_2)}$, on déplace le parallélogramme comme dans le théorème 8. □

Définition 10. L'ordre *d'une fonction elliptique est le nombre de pôles se trouvant dans $P_{(a,w_1,w_2)}$, chaque pôle étant compté avec multiplicité. Ce nombre ne dépend ni de $a \in \mathbb{C}$ ni de la paire de périodes basique (w_1, w_2).*

Définition 11. *Soient f une fonction holomorphe sur un ouvert U , $s \in U$ et $t \in \mathbb{C}$ tels que $f(s) = t$. Alors la* multiplicité de s *sera l'entier n tel que* $\lim_{\substack{z \to s \\ z \neq s}} \frac{f(z)-t}{(z-s)^n} \neq 0 < \infty$.

Théorème 10. *Une fonction elliptique non constante d'ordre h prendra comme valeur, dans tout parallélogramme de base, tout nombre complexe exactement h fois, en tenant compte de la multiplicité des points dont l'image est le nombre complexe voulue.*

Démonstration. Soient f une fonction elliptique d'ordre h et $c \in \mathbb{C}$ arbitraire. Soit $g(z) := f(z) - c$. La fonction g a les mêmes pôles que f et possède en ces derniers la même partie principale que f. Il suit que g est également d'ordre h. Les zéros de g sont exactement les racines de l'équation $f(z) = c$. En appliquant le théormème 9 à g, le résultat cherché suit. $\square$

Lemme 4. *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert étoilé U de $\mathbb{C}$ qui ne s'annule pas sur U. Alors il existe une fonction holomorphe h sur U telle que $f(z) = \exp h(z)$ pour tout $z \in U$.*

Démonstration. Par hypothèse sur f, la fonction f'/f est holomorphe sur U. Ce dernier étant étoilé, le théorème de Cauchy (prop 1) entraîne l'existence d'une primitive F de f'/f sur U. Alors la fonction $G(z) := \frac{\exp(F(z))}{f(z)}$ verifie

$$G'(z) = \frac{f(z)\exp(F(z))\frac{f'(z))}{f(z)} - \exp(F(z)f'(z)}{f(z)^2} = 0$$

pour tout $z \in U$. Comme U est connexe, G est constante sur U et donc $\exp(F(z)) = Cf(z)$ pour tout $z \in U$. La constante C est non nulle et il existe $c \in \mathbb{C}$ avec $C = \exp(c)$ (par exemple $c = \log(|C|) + \mathrm{i}Arg(C)$). La fonction $h = F - c$ satisfait la condition cherchée. $\square$

Proposition 12. *Soit f une fonction elliptique non constante, alors*

$$\sum_{z \in P_{(a,w_1,w_2)} \cap Z(f)} deg(f,z) \cdot z + \sum_{s \in P_{(a,w_1,w_2)} \cap P(f)} deg(f,s) \cdot s \in w_1\mathbb{Z} + w_2\mathbb{Z}.$$

Démonstration. Notons $p_1, \ldots, p_n$ les pôles de f dans $\mathrm{P}_{(a,w_1,w_2)}$ et $\nu_1, \ldots, \nu_n$ leur ordre respectif ($\nu_j = -deg(f, p_j)$; $j = 1, \ldots, n$). Notons $z_1, .., z_m$ les zéros de f dans $P_{(a,w_1,w_2)}$ et $\mu_1, \ldots, \mu_m$ leur ordre respectif ($\mu_j = \deg(f, z_j)$; $j = 1, \ldots, m$). Comme dans les théorèmes 8 et 9, nous pouvons, sans changer les deux sommes, translater $\mathrm{P}_{(a,w_1,w_2)}$ de telle sorte qu'aucun des points $z_1, \ldots, z_m, p_1, \ldots, p_n$ n'appartienne à $\partial P_{(a,w_1,w_2)}$.

Considérons la fonction $g(z) := z\frac{f'(z)}{f(z)}$; ses seules singularités possibles sont aux zéros et aux pôles de f, et ce sont en fait des pôles simples (ou, en 0, une singularité supprimable). Nous avons donc $Res(g, z_j) = \lim_{z \to z_j}(z - z_j)g(z) = z_j \lim_{z \to z_j}(z - z_j)\frac{f'(z)}{f(z)} = z_j \mathrm{Res}(\frac{f'(z)}{f(z)}, z_j)$

$= z_j \cdot \mu_j$. De même, $Res(g, p_j) = p_j Res(\frac{f'(z)}{f(z)}, p_j) = -p_j \cdot \nu_j$. Par le théorème des résidus (thm 3),

$$\sum_{j=1}^{m} \mu_j \cdot z_j - \sum_{k=1}^{n} \nu_k \cdot p_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial P_{(a,w_1,w_2)}} g(\xi) d\xi.$$

Posons $b = a + w_1$, $c = a + w_1 + w_2$ et $d = a + w_2$. Par périodicité de f et f', nous avons

$$\int_{[c,d]} g(\xi)d\xi = \int_{[c,d]} \xi \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi = \int_{[b,a]} (\xi + w_2) \frac{f'(\xi + w_2)}{f(\xi + w_2)} d\xi = \int_{[b,a]} \xi \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi + w_2 \int_{[b,a]} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi$$

Donc

$$\int_{[a,b]} g(\xi)d\xi + \int_{[c,d]} g(\xi)d\xi = w_2 \int_{[b,a]} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi$$

Comme f n'a ni pôle ni zéro sur $[b, a]$, par compacité, il existe un voisinage ouvert convexe (donc étoilé) U de $[b, a]$ sur lequel elle n'a ni pôle ni zéro. Il existe alors par le lemme 2, h holomorphe sur U telle que $f = \exp(h)$. Ainsi h est une primitive de $\frac{f'}{f}$ sur U ($f' = \exp(h)h'$ donc $\frac{f'}{f} = h'$) ; d'où

$$\int_{[b,a]} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi = h(a) - h(b).$$

Mais, $\exp(h(a)) = f(a) = f(a + w_2) = f(b) = \exp(h(b))$ donc, $h(a) - h(b) \in 2\pi i\mathbb{Z}$ et il existe $l_2 \in \mathbb{Z}$ avec

$$\int_{[a,b]} g(\xi)d\xi + \int_{[c,d]} g(\xi)d\xi = 2\pi i l_2 w_2.$$

On montre de même qu'il existe $l_1 \in \mathbb{Z}$ avec

$$\int_{[b,c]} g(\xi)d\xi + \int_{[d,a]} g(\xi)d\xi = 2\pi i l_1 w_1.$$

Finalement

$$\sum_{j=1}^{m} \mu_j z_j - \sum_{k=1}^{n} \nu_k p_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial P_{(a,w_1,w_2)}} g(\xi) d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left[\int\limits_{[a,b]} g(\xi)d\xi + \int\limits_{[b,c]} g(\xi)d\xi + \int\limits_{[c,d]} g(\xi)d\xi + \int\limits_{[d,a]} g(\xi)d\xi\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi i}[2\pi i l_2 w_2 + 2\pi i l_1 w_1] = l_1 w_1 + l_2 w_2.$$

$\square$

Chapitre 2

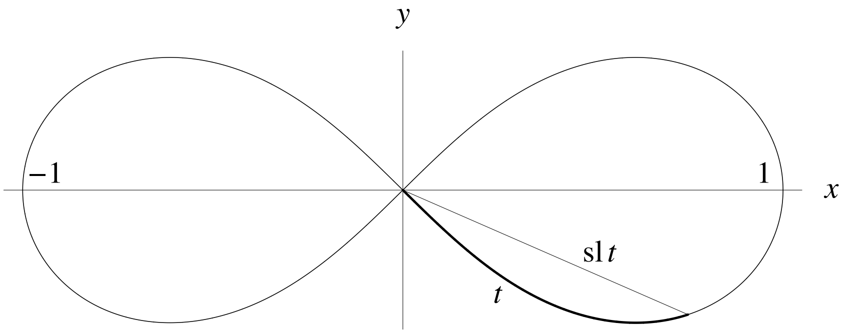
Un exemple de fonction elliptique

2.1 Le sinus lemniscatique sur $\mathbb{R}$

Définition 12. *Considérons la lemniscate d'équation* $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$ *et les vecteurs* $\overrightarrow{e_1} := (1,-1)$ *et* $\overrightarrow{e_2} := (-1,-1)$.
Sur cette lemniscate, nous définissons deux sens de parcours : le sens positif et le sens négatif. Pour le premier, en partant du point $(0,0)$, *on suit la courbe dans la direction* $\overrightarrow{e_1}$ *pour arriver à nouveau au point* $(0,0)$ *duquel on repart en suivant le vecteur* $\overrightarrow{e_2}$ *pour se retrouver en* $(0,0)$ *et ainsi de suite. Pour le sens négatif, on suit consécutivement les vecteurs* $-\overrightarrow{e_1}$ *et* $-\overrightarrow{e_2}$.
Nous définissons une fonction de $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *notée* sl *par* $\mathrm{sl}(t) := \phi(t) \cdot l(t)$ *où* $l(t)$ *est défini comme étant la longueur de la corde tendue par un arc de longueur orientée* t *de la lemniscate. Quant à lui,* $\phi(t)$ *vaudra* 1 *si l'extrémité de l'arc de longueur* t *se trouve dans le plan* $x > 0$, -1 *dans le cas opposé et* 0 *si l'extrémité de l'arc se trouve en* $(0,0)$. *La position de l'extrémité de l'arc sera obtenu au parcourant la lemniscate dans le sens du signe de* t *(positif si* $t > 0$ *et négatif si* $t < 0$*). Notons* $2w$ *la longueur totale de la lemniscate.*
Sur la page suivante se trouve une illustration.

Lemme 5. *Pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *nous avons :*

1. $\mathrm{sl}(0) = 0$
2. $\mathrm{sl}(\frac{w}{2}) = 1$
3. $\mathrm{sl}(t+w) = -\mathrm{sl}(t)$



4. $\mathrm{sl}(-t) = -\mathrm{sl}(t)$

5. $\mathrm{sl}(\mathbb{R}) = [-1, 1]$

6. sl *est* $2w$*-périodique*

7. sl *est continu sur* $\mathbb{R}$.

Démonstration. Toutes ces propriétés découlent immédiatement de la définition et des symétries de la lemniscate. □

Proposition 13. *Pour tout* $t \in [-\frac{w}{2}, \frac{w}{2}]$ *on a*

$$t = \int_0^{\mathrm{sl}(t)} \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}.$$

Démonstration. On remarque que l'équation cartésienne de la lemniscate devient en coordonnées polaires $r^4 = r^2 \cos(2\theta)$ que l'on peut réduire sans ambiguité en $r^2 = \cos(2\theta)$. Remarquons également si $t \in [0, \frac{w}{2}]$ alors $r \in [0, 1]$ et $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, 0]$ (r et θ représentent le rayon et l'angle en $\mathrm{sl}(t)$). Supposons que $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, 0]$, alors $\cos(2\theta)$ est une bijection de $[-\frac{\pi}{4}, 0] \to [0, 1]$ et cette fonction admet une réciproque que nous notons $\frac{arcos}{2} : [0,1] \to [-\frac{\pi}{4}, 0]$. Nous avons donc $\theta = \frac{arcos(r^2)}{2} =: \theta(r)$; alors, $\theta : [0,1] \to [-\frac{\pi}{4}, 0]$ est C^1. Cela nous permet de paramétriser la lemniscate en fonction de r :

$$x = r\cos(\theta) = r\cos(\frac{arcos(r^2)}{2}) = r\cos(\theta(r))$$

$$y = r\sin(\theta) = r\sin(\frac{arcos(r^2)}{2}) = r\sin(\theta(r))$$

Notons $\gamma(r) = (x(r), y(r))$. Il vient donc, pour $t \in [0, \frac{w}{2}]$,

$$t = \int_0^{\mathrm{sl}(t)} \|\gamma'(r)\| dr.$$

Nous avons $\gamma'(r) = (-r\sin(\theta(r))\theta'(r) + \cos(\theta(r)), r\cos(\theta(r))\theta'(r) + \sin(\theta(r)))$. Alors $\|\gamma'(r)\| = \sqrt{r^2(\theta'(r))^2 + 1}$. Or $\theta'(r) = \frac{r}{\sqrt{1-r^4}}$ et donc $\|\gamma'(r)\| = \frac{1}{\sqrt{1-r^4}}$. Il vient alors

$$t = \int_0^{\mathrm{sl}(t)} \frac{1}{\sqrt{1-r^4}} dr,$$

ce qui est le résultat recherché.
Si $t \in [-\frac{w}{2}, 0]$, alors comme $\mathrm{sl}(t) = -\mathrm{sl}(-t)$ et que $\frac{1}{\sqrt{1-r^4}}$ est paire nous avons

$$\int_0^{\mathrm{sl}(t)} \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = \int_0^{-\mathrm{sl}(-t)} \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = -\int_0^{\mathrm{sl}(-t)} \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = -(-t) = t,$$

ce qui est bien le résultat voulu. □

Proposition 14. $\frac{w}{2} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{4})}{4\Gamma(\frac{3}{4})} \cong 1.3110$

Démonstration. En posant $t = \frac{w}{2}$, on aura, par la proposition précédente,

$$\frac{w}{2} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}.$$

Avec le changement de variable $t = u^4$, nous obtenons

$$\frac{w}{2} = \frac{1}{4}\int_0^1 (1-t)^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{3}{4}} dt.$$

On remarque que cette dernière intégrale est égale à $\frac{1}{4}B(\frac{1}{4},\frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{4})}{4\Gamma(\frac{3}{4})}$ où B et Γ sont les fonctions bêta et gamma d'Euler ; donc $\frac{w}{2} \cong 1.3110$. $\square$

Lemme 6. sl *est strictement croissante sur* $[-\frac{w}{2},\frac{w}{2}]$

Démonstration. Par absurde, supposons que sl ne soit pas strictement croissante. Alors, il existe a et $b \in [-\frac{w}{2},\frac{w}{2}]$, $a < b$ tel que $\mathrm{sl}(a) \geq \mathrm{sl}(b)$. Alors, par la proposition 13 et par le fait que $\frac{1}{\sqrt{1-u^4}}$ est positive non nulle, on a

$$b = \int_0^{\mathrm{sl}(b)} \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} \leq \int_0^{\mathrm{sl}(a)} \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = a.$$

Donc $b \leq a$. Contradiction. $\square$

Proposition 15. sl *est* C^1 *sur* $\mathbb{R}$ *et sa dérivée* $\mathrm{sl}'(t)$ *vaut*

$$\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(t)} \textit{ si } t \in [-\frac{w}{2},\frac{w}{2}] + 2w\mathbb{Z}$$

$$-\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(t)} \textit{ si } t \in [\frac{w}{2},\frac{3w}{2}] + 2w\mathbb{Z}.$$

Démonstration. Par le lemme précédent et le fait que $\mathrm{sl}(-\frac{w}{2}) = -1$ et $\mathrm{sl}(\frac{w}{2}) = 1$, la fonction sl est une bijection de $[-\frac{w}{2},\frac{w}{2}] \to [-1,1]$. Il existe donc une fonction réciproque de sl que nous notons arcsl ; arcsl : $[-1,1] \to [-\frac{w}{2},\frac{w}{2}]$. Cette dernière fonction associe donc à un rayon r une longueur t telle que $\mathrm{sl}(t) = r$. Or, par la proposition 13, nous avons que $\mathrm{arcsl}(r) = \int_0^r \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}$. Mais alors arcsl est C^1 sur $(-1,1)$ avec $\mathrm{arcsl}'(r) = \frac{1}{\sqrt{1-r^4}}$. Il vient donc que sl est C^1 sur $(-\frac{w}{2},\frac{w}{2})$. En utilisant la formule de la dérivée d'une fonction réciproque on trouve que

$$\mathrm{sl}' = \frac{1}{\mathrm{arcsl}'(\mathrm{sl})} = \sqrt{1-\mathrm{sl}^4}.$$

Pour montrer que sl est dérivable en $\frac{w}{2}$, on utilise la formule d'addition qui sera présentée plus tard (cor 8). On doit calculer

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{\mathrm{sl}(\frac{w}{2}+t) - \mathrm{sl}(\frac{w}{2})}{t}.$$

Par le corollaire 8, on a

$$\frac{\mathrm{sl}(\frac{w}{2}+t) - \mathrm{sl}(\frac{w}{2})}{t} = \frac{\frac{\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(t)}}{1+\mathrm{sl}^2(t)} - 1}{t}$$

$$= \frac{\sqrt{1+\mathrm{sl}^2(t)}\sqrt{1-\mathrm{sl}^2(t)} - \sqrt{1+\mathrm{sl}^2(t)}\sqrt{1+\mathrm{sl}^2(t)}}{t(1+\mathrm{sl}^2(t))}$$

$$= \frac{\sqrt{1+\mathrm{sl}^2(t)}}{t(1+\mathrm{sl}^2)}\big[\sqrt{1-\mathrm{sl}^2(t)} - \sqrt{1+\mathrm{sl}^2(t)}\big]\frac{\sqrt{1-\mathrm{sl}^2(t)} + \sqrt{1+\mathrm{sl}^2(t)}}{\sqrt{1-\mathrm{sl}^2(t)} + \sqrt{1+\mathrm{sl}^2(t)}}$$

$$\frac{(1-\mathrm{sl}^2(t)) - (1+\mathrm{sl}^2(t))}{t\sqrt{1+\mathrm{sl}^2(t)}(\sqrt{1-\mathrm{sl}^2(t)} + \sqrt{1+\mathrm{sl}^2(t)})}$$

$$= \frac{-2\mathrm{sl}^2(t)}{t\sqrt{1+\mathrm{sl}^2(t)}(\sqrt{1-\mathrm{sl}^2(t)} + \sqrt{1+\mathrm{sl}^2(t)})},$$

ce qui tend vers 0 lorsque $t \to 0$, car en 0, sl se comporte comme $t + o(t)$ (sl'(0)=1). Il suit donc que sl est dérivable en $\frac{w}{2}$ et $\mathrm{sl}'(\frac{w}{2}) = 0$. Un calcul identique montre que $\mathrm{sl}'(-\frac{w}{2}) = \mathrm{sl}'(\frac{3w}{2}) = 0$. Comme $\lim_{t\to\frac{w}{2}} \sqrt{1-\mathrm{sl}^4(t)} = \lim_{t\to-\frac{w}{2}} \sqrt{1-\mathrm{sl}^4(t)} = 0$, sl est C^1 sur $[-\frac{w}{2}, \frac{w}{2}]$ (par continuité de $\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(t)}$).

Voyons maintenant ce qui se passe pour $t \in (\frac{w}{2}, \frac{3w}{2})$. Prenons donc $t \in (\frac{w}{2}, \frac{3w}{2})$ et calculons

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon\neq 0}} \frac{\mathrm{sl}(t+\varepsilon) - \mathrm{sl}(t)}{\varepsilon}.$$

Par symétrie de sl (voir lemme 3), on a que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sl}(t) = -\mathrm{sl}(t-w)$. Avec cela, la limite précédente prendra la forme

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon\neq 0}} -\frac{\mathrm{sl}(t+\varepsilon-w) - \mathrm{sl}(t-w)}{\varepsilon}.$$

Comme $t-w \in (-\frac{w}{2}, \frac{w}{2})$, cette limite existe et vaut $-\mathrm{sl}'(t-w) = -\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(t-w)} = -\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(t)}$. Il suit que $\mathrm{sl}'(t) = -\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(t)}$ sur $(\frac{w}{2}, \frac{3w}{2})$.
Par $2w$-périodicité, on obtient le résultat recherché. □

Théorème 11. *Pour tous α et $\beta \in (-\frac{w}{2}, \frac{w}{2})$ avec $\alpha+\beta \in (-\frac{w}{2}, \frac{w}{2})$ on a*

$$\mathrm{sl}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{sl}(\alpha)\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(\beta)} + \mathrm{sl}(\beta)\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(\alpha)}}{1+\mathrm{sl}^2(\alpha)\mathrm{sl}^2(\beta)}. \tag{2.1}$$

Démonstration. Reprenons la fonction arcsl, définie à la propositon précédente. On a que arcsl est C^1 sur $(-1,1)$ avec $\operatorname{arcsl}'(r) = \frac{1}{\sqrt{1-r^4}}$. Définissons alors $C := \{(u,v) \in (-1,1)^2 \mid \operatorname{arcsl}(u) + \operatorname{arcsl}(v) = \gamma\}$ pour $\gamma \in (-\frac{w}{2}, \frac{w}{2})$ fixé. C est une ligne de niveau de la fonction $(u,v) \mapsto \operatorname{arcsl}(u) + \operatorname{arcsl}(v)$. Par conséquent le gradient de cette fonction en $(u,v) \in C$ est normal à la courbe C en (u,v). Ce gradient est

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-u^4}}, \frac{1}{\sqrt{1-v^4}}\right).$$

Considérons ensuite $F : (-1,1)^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$F(u,v) := \frac{u\sqrt{1-v^4} + v\sqrt{1-u^4}}{1+u^2v^2}.$$

Calculons le gradient de F.

$$\partial_u F(u,v) = \frac{(1+u^2v^2)(\sqrt{1-v^4} - v\frac{2u^3}{\sqrt{1-u^4}}) - (u\sqrt{1-v^4} + v\sqrt{1-u^4})(2uv^2)}{(1+u^2v^2)^2}$$

$$= \frac{(1+u^2v^2)(\sqrt{1-u^4}\sqrt{1-v^4} - 2u^3v) - (u\sqrt{1-v^4}\sqrt{1-u^4} + v(1-u^4))(2uv^2)}{(1+u^2v^2)^2\sqrt{1-u^4}}$$

$$= \frac{\sqrt{1-u^4}\sqrt{1-v^4}(1+u^2v^2 - 2u^2v^2) - 2u^3v - 2u^5v^3 - 2uv^3 + 2u^5v^3}{(1+u^2v^2)^2\sqrt{1-u^4}}$$

$$= \frac{\sqrt{1-u^4}\sqrt{1-v^4}(1-u^2v^2) - 2uv(u^2+v^2)}{(1+u^2v^2)^2\sqrt{1-u^4}}$$

Par symétrie de F par rapport à u et v, on aura

$$\textit{grad}\ F(u,v) = \phi(u,v)\left(\frac{1}{\sqrt{1-u^4}}, \frac{1}{\sqrt{1-v^4}}\right),$$

où

$$\phi(u,v) = \frac{\sqrt{1-u^4}\sqrt{1-v^4}(1-u^2v^2) - 2uv(u^2+v^2)}{(1+u^2v^2)^2}.$$

Par conséquent F est constante sur C. Pour trouver cette constante, prenons $(u_0, v_0) = (\operatorname{sl}(\gamma), 0) \in C$. Alors, comme $F(\operatorname{sl}(\gamma), 0) = \operatorname{sl}(\gamma)$, on aura $F(u,v) = \operatorname{sl}(\gamma)$ pour tous $(u,v) \in C$. Autrement dit, en posant $\alpha := \operatorname{arcsl}(u)$, $\beta := \operatorname{arcsl}(v)$,

$$F(\operatorname{sl}(\alpha), \operatorname{sl}(\beta)) = \operatorname{sl}(\alpha+\beta)$$

pour tous $\alpha, \beta \in (-\frac{w}{2}, \frac{w}{2})$ avec $\alpha + \beta \in (-\frac{w}{2}, \frac{w}{2})$. Cela est bien le résultat recherché. $\square$

Corollaire 8. *Ce corollaire est une généralisation du théorème précédent. Pour tous s et $t \in \mathbb{R}$*

$$\mathrm{sl}(s+t) = \frac{\mathrm{sl}(s)\chi(t)\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(t)} + \mathrm{sl}(t)\chi(s)\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(s)}}{1+\mathrm{sl}^2(s)\mathrm{sl}^2(t)} \tag{2.2}$$

où

$$\chi(t) = 1 \text{ si } t \in [-\frac{w}{2}, \frac{w}{2}) + 2w\mathbb{Z}$$

$$\chi(t) = -1 \text{ si } t \in [\frac{w}{2}, \frac{3w}{2}) + 2w\mathbb{Z}.$$

Démonstration. Par le théorème précédent, on sait que (2.2) est vrai pour s et $t \in (-\frac{w}{2}, \frac{w}{2})$ avec $s+t \in (-\frac{w}{2}, \frac{w}{2})$. Par continuité de $\mathrm{sl}(s+t)$ et de

$$\frac{\mathrm{sl}(s)\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(t)} + \mathrm{sl}(t)\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(s)}}{1+\mathrm{sl}^2(t)\mathrm{sl}^2(s)},$$

il suit (2.1) est vrai pour tous s et $t \in [-\frac{w}{2}, \frac{w}{2}]$ avec $s+t \in [-\frac{w}{2}, \frac{w}{2}]$.
Montrons à présent que (2.2) est vrai pour tous s et $t \in [-\frac{w}{2}, \frac{w}{2}]$ avec $s+t \in (\frac{w}{2}, w]$ ou $s+t \in [-w, -\frac{w}{2})$. Montrons cela pour $s+t \in (\frac{w}{2}, w]$. Alors pour un tel couple (s,t) on aura que, $s - \frac{w}{2}$ et $t - \frac{w}{2} \in [-\frac{w}{2}, \frac{w}{2}]$ (car on doit avoir s et $t > 0$) . Il suit donc que (2.1) peut s'appliquer à $s - \frac{w}{2}$ et à $t - \frac{w}{2}$. Il vient

$$\mathrm{sl}(s - \frac{w}{2}) = \frac{-\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(s)}}{1+\mathrm{sl}^2(s)} = \frac{-\sqrt{1-\mathrm{sl}^2(s)}}{\sqrt{1+\mathrm{sl}^2(s)}}$$

et de même pour $\mathrm{sl}(t - \frac{w}{2})$. On a également

$$\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(s-\frac{w}{2})} = \sqrt{1 - \frac{(1-\mathrm{sl}^2(s))^2}{(1+\mathrm{sl}^2(s))^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\mathrm{sl}^2(s))^2 - (1-\mathrm{sl}^2(s))^2}{(1+\mathrm{sl}^2(s))^2}} = \frac{2\mathrm{sl}(s)}{1+\mathrm{sl}^2(s)}$$

et de même pour t. Comme $s - \frac{w}{2} + t - \frac{w}{2} \in [-\frac{w}{2}, \frac{w}{2}]$ (car $s+t \in (\frac{w}{2}, w]$), (2.1) s'applique à $s - \frac{w}{2} + t - \frac{w}{2}$ et il vient

$$\mathrm{sl}(s - \frac{w}{2} + t - \frac{w}{2})$$

$$= \frac{\mathrm{sl}(s-\frac{w}{2})\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(t-\frac{w}{2})} + \mathrm{sl}(t-\frac{w}{2})\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(s-\frac{w}{2})}}{1+\mathrm{sl}^2(s-\frac{w}{2})\mathrm{sl}^2(t-\frac{w}{2})}.$$

$$= \frac{\frac{-\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(s)}}{1+\mathrm{sl}^2(s)}\frac{2\mathrm{sl}(t)}{1+\mathrm{sl}^2(t)} + \frac{-\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(t)}}{1+\mathrm{sl}^2(t)}\frac{2\mathrm{sl}(s)}{1+\mathrm{sl}^2(s)}}{1+\frac{1-\mathrm{sl}^2(s)}{1+\mathrm{sl}^2(s)}\frac{1-\mathrm{sl}^2(t)}{1+\mathrm{sl}^2(t)}}$$

$$= -\frac{\mathrm{sl}(t)\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(s)} + \mathrm{sl}(s)\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(t)}}{1+\mathrm{sl}^2(s)\mathrm{sl}^2(t)}.$$

Comme $\mathrm{sl}(s-\frac{w}{2}+t-\frac{w}{2}) = \mathrm{sl}(s+t-w) = -\mathrm{sl}(s+t)$, on a bien que

$$\mathrm{sl}(s+t) = \frac{\mathrm{sl}(s)\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(t)} + \mathrm{sl}(t)\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(s)}}{1+\mathrm{sl}^2(s)\mathrm{sl}^2(s)}.$$

Un argument simililaire donne le même résultat pour s et $t \in [-\frac{w}{2}, \frac{w}{2}]$ avec $s+t \in [-w, -\frac{w}{2})$ (on calcule $\mathrm{sl}(s+\frac{w}{2}+t+\frac{w}{2})$). En résumé, nous avons (2.2) pour tous $(s,t) \in [-\frac{w}{2}, \frac{w}{2}]^2$.
Montrons (2.2) pour $s \in [-\frac{w}{2}, \frac{w}{2}]$ et $t \in [\frac{w}{2}, \frac{3w}{2}]$. Soit (s,t) un tel couple. Alors comme $(s, t-w) \in [-\frac{w}{2}, \frac{w}{2}]^2$, nous avons

$$\mathrm{sl}(s+t-w) = \frac{\mathrm{sl}(s)\chi(t-w)\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(t-w)} + \mathrm{sl}(t-w)\chi(s)\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(s)}}{1+\mathrm{sl}^2(s)\mathrm{sl}^2(t-w)}$$

$$= -\frac{\mathrm{sl}(s)\chi(t)\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(t)} - \mathrm{sl}(t)\chi(s)\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(s)}}{1+\mathrm{sl}^2(s)\mathrm{sl}^2(t)};$$

et, puisque $\mathrm{sl}(s+t-w) = -\mathrm{sl}(s+t)$, il vient

$$\mathrm{sl}(s+t) = \frac{\mathrm{sl}(s)\chi(t)\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(t)} + \mathrm{sl}(t)\chi(s)\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(s)}}{1+\mathrm{sl}^2(s)\mathrm{sl}^2(t)},$$

ce qui est bien la formule récherchée.

En utilisant le même procédé, on pavient à montrer (2.2) pour $s \in [\frac{w}{2}, \frac{3w}{2}]$ et $t \in [-\frac{w}{2}, \frac{w}{2}]$ et de même pour $(s,t) \in [\frac{w}{2}, \frac{3w}{2}]^2$. Nous avons alors (2.2) pour tous $(s,t) \in [-\frac{w}{2}, \frac{3w}{2}]^2$. Par $2w$-périodicité de sl, on conclut la démonstration.
$\square$

2.2 Extension de la fonction sl à $\mathbb{C}$

Lemme 7. *Si* $-1 \leq u \leq 1$ *alors*

$$\int_0^{ui} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}} = i \int_0^{u} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}}$$

où la première intégrale est prise le long du segment $[0, ui]$ *dans* $\mathbb{C}$.

Démonstration. Soit le chemin $\alpha : [0,u] \to [0,ui]\,;\ \alpha(t) := it$. Alors

$$\int_0^{ui} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}} = \int_0^{u} \frac{\alpha'(t)dt}{\sqrt{1-\alpha^4(t)}} = i \int_0^{u} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

$\square$

Remarque 5. Nous souhaitons étendre la fonction sl sur $\mathbb{C}$. Pour cela, commençons par l'étendre aux imaginaires pures. On pose

$$\mathrm{sl}(it) = i \cdot \mathrm{sl}(t)$$

pour tous $t \in \mathbb{R}$. En utilisant le lemme précédent, on voit que,

$$\int_0^{\mathrm{sl}(it)=ui} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}} = i \int_0^{\mathrm{sl}(t)=u} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}} = it$$

pour $t \in [-\frac{w}{2}, \frac{w}{2}]$. On a donc

$$\int_0^{\mathrm{sl}(it)} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}} = it$$

pour tout $it \in [-i\frac{w}{2}, i\frac{w}{2}]$, qui étend la proposition 13.

Définition 13. *Pour tous* x *et* $y \in \mathbb{R}$ *avec* $(x,y) \notin \{((2n+1)w/2, (2m+1)w/2) \mid (n,m) \in \mathbb{Z}^2\}$ *on pose*

$$\mathrm{sl}(x+iy) = \frac{\mathrm{sl}(x)\chi(y)\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(y)} + i \cdot \mathrm{sl}(y)\chi(x)\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(x)}}{1-\mathrm{sl}^2(x)\mathrm{sl}^2(y)}. \tag{2.3}$$

Remarque 6. Cette définition est motivée par la formule de la somme (cor 8) où s devient x et t devient iy et par le fait que $\mathrm{sl}(iy) = i \cdot \mathrm{sl}(y)$.

Si x et $y \in \mathbb{R}$, on a que $|\mathrm{sl}(x)|$ et $|\mathrm{sl}(y)| \leq 1$. On a donc que le dénominateur de la partie droite de (2.3) s'annule si et seulement si $(x, y) \in \{((2n + 1)w/2, (2m + 1)w/2) \mid (n, m) \in \mathbb{Z}^2\}$. C'est la raison pour laquelle, sl n'est, à priori, pas définie sur les points décrits ci-dessus.

$\mathrm{sl}(x + iy)$ est bien une extension de sl ; en effet, avec (2.3), $\mathrm{sl}(x + 0y) = \mathrm{sl}(x)$ et $\mathrm{sl}(0 + iy) = i \cdot \mathrm{sl}(y) = \mathrm{sl}(iy)$.

Lemme 8. *$\chi^2 = 1$ et $\chi\sqrt{1 - \mathrm{sl}^4}$ est C^1 sur $\mathbb{R}\backslash(2\mathbb{Z} + 1)w/2$.*

Démonstration. La première assertion est triviale.
On remarque d'abord que, conformément à la proposition 15, si $t \in \mathbb{R}$, alors

$$\mathrm{sl}'(t) = \chi(t)\sqrt{1 - \mathrm{sl}^4(t)}.$$

Comme $\mathbb{R}\backslash(2\mathbb{Z} + 1)w/2$ est ouvert, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash(2\mathbb{Z} + 1)w/2$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que χ soit constante sur $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Il vient alors,

$$\left(\chi(x)\sqrt{1 - \mathrm{sl}^4(x)}\right)' = \chi(x)\left(\sqrt{1 - \mathrm{sl}^4(x)}\right)'$$

$$= \chi(x)\frac{-4\mathrm{sl}^3(x)\chi(x)\sqrt{1 - \mathrm{sl}^4(x)}}{2\sqrt{1 - \mathrm{sl}^4(x)}} = -2\mathrm{sl}^3(x)$$

□

Proposition 16. *$\mathrm{sl}(x+iy)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{(2n+1)w/2+i(2m+1)w/2 \mid (n, m) \in \mathbb{Z}^2\} =: U$.*

Démonstration. Posons

$$u(x, y) := \frac{\mathrm{sl}(x)\chi(y)\sqrt{1 - \mathrm{sl}^4(y)}}{1 - \mathrm{sl}^2(x)\mathrm{sl}^2(y)} \text{ et } v(x, y) := \frac{\mathrm{sl}(y)\chi(x)\sqrt{1 - \mathrm{sl}^4(x)}}{1 - \mathrm{sl}^2(x)\mathrm{sl}^2(y)}$$

Nous allons montrer que u et v sont C^1 et que $\partial_1 u = \partial_2 v$ et $\partial_2 u = -\partial_1 v$ sur U. Nous en déduirons que $\mathrm{sl}(x + iy)$ est holomorphe sur U grâce au théorème

de Cauchy-Riemann (prop 8).
Soit $(x,y) \in U$, alors

$$\partial_1 u(x,y) =$$

$$\frac{\chi(y)\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(y)}\left[(1-\mathrm{sl}^2(x)\mathrm{sl}^2(y))\chi(x)\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(x)}+2\mathrm{sl}^2(x)\mathrm{sl}^2(y)\chi(x)\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(x)}\right]}{(1-\mathrm{sl}^2(x)\mathrm{sl}^2(y))^2}$$

$$= \frac{\chi(y)\chi(x)\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(y)}\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(x)}(1+\mathrm{sl}^2(x)\mathrm{sl}^2(y))}{(1-\mathrm{sl}^2(x)\mathrm{sl}^2(y))^2}$$

$$= \partial_2 v(x,y),$$

par symétrie. On a que $\partial_1 u$ et $\partial_2 v$ sont continus sur U.
Ensuite,

$$\partial_2 u(x,y) =$$

$$\frac{\mathrm{sl}(x)\left[(1-\mathrm{sl}^2(x)\mathrm{sl}^2(y))(-2\mathrm{sl}^3(y))+\chi(y)\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(y)}2\mathrm{sl}^2(x)\mathrm{sl}(y)\chi(y)\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(y)}\right]}{(1-\mathrm{sl}^2(x)\mathrm{sl}^2(y))^2}$$

$$= \frac{\mathrm{sl}(x)\left[(1-\mathrm{sl}^2(x)\mathrm{sl}^2(y))(-2\mathrm{sl}^3(y))+(1-\mathrm{sl}^4(y))2\mathrm{sl}^2(x)\mathrm{sl}(y)\right]}{(1-\mathrm{sl}^2(x)\mathrm{sl}^2(y))^2}$$

$$= \frac{2\mathrm{sl}(x)\mathrm{sl}(y)\left[\mathrm{sl}^2(x)-\mathrm{sl}^2(x)\mathrm{sl}^4(y)-\mathrm{sl}^2(y)+\mathrm{sl}^2(x)\mathrm{sl}^4(y)\right]}{(1-\mathrm{sl}^2(x)\mathrm{sl}^2(y))^2}$$

$$= \frac{2\mathrm{sl}(x)\mathrm{sl}(y)\left[\mathrm{sl}^2(x)-\mathrm{sl}^2(y)\right]}{(1-\mathrm{sl}^2(x)\mathrm{sl}^2(y))^2} = -\partial_1 v(x,y),$$

par antisymétrie. On a que $\partial_2 u$ et $\partial_1 v$ sont C^1 sur U, ce qui termine la démonstration. $\square$

Proposition 17. *L'ensemble* $\{(2n+1)w/2 + i(2m+1)w/2 \mid (n,m) \in \mathbb{Z}^2\}$ *est exactement l'ensemble des pôles de* sl*, que l'on notera* $P(\mathrm{sl})$.

Démonstration. On remarque que si $z \in \{(2n+1)w/2 + i(2m+1)w/2 \mid (n,m) \in \mathbb{Z}^2\} =: A$, alors la partie droite de (2.3) est du type $\frac{0}{0}$.
Pour tous $x+iy \notin A$, on a que

$$\frac{\mathrm{sl}(x)\chi(y)\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(y)}+i\cdot\mathrm{sl}(y)\chi(x)\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(x)}}{1-\mathrm{sl}^2(x)\mathrm{sl}^2(y)}$$

$$= \frac{\mathrm{sl}^2(x)+\mathrm{sl}^2(y)}{\mathrm{sl}(x)\chi(y)\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(y)} - i\cdot \mathrm{sl}(y)\chi(x)\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(x)}},$$

car

$$\mathrm{sl}^2(x)(1-\mathrm{sl}^4(x)) + \mathrm{sl}^2(y)(1-\mathrm{sl}^4(y)) = (1-\mathrm{sl}^2(x)\mathrm{sl}^2(y))(\mathrm{sl}^2(x)+\mathrm{sl}^2(y))$$

(le produit des extrêmes est égal au produit des moyens). Soit $a \in A$. Alors par continuité et par le fait que A n'a pas de point d'accumulation, on a que

$$\lim_{z\to a}|\mathrm{sl}(z)| = \lim_{z\to a}\left|\frac{\mathrm{sl}^2(x)+\mathrm{sl}^2(y)}{\mathrm{sl}(x)\chi(y)\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(y)} - i\cdot \mathrm{sl}(y)\chi(x)\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(x)}}\right| = \frac{2}{0} = \infty.$$

Par la proposition 6, on a que a est un pôle de sl. Par la proposition 16, on a que les points de A sont les seuls points sur lesquels sl n'est pas holomorphe. Il suit alors que $A = P(\mathrm{sl})$. □

Remarque 7. On peut maintenant étendre la définition 13 à tout $\mathbb{C}$; si $z \in P(\mathrm{sl})$, on pose $\mathrm{sl}(z) = \infty$.

Proposition 18. *L'ensemble* $\{nw + imw \,|(n,m) \in \mathbb{Z}^2\}$ *est exactement l'ensemble des zéros de* sl*, noté* $Z(\mathrm{sl})$*. De plus, tous les zéros de* sl *sont d'ordre 1.*

Démonstration. On remarque que le numérateur de la partie droite de (2.3) vaut 0 si et seulement si $x + iy \in \{nw + imw \,|(n,m) \in \mathbb{Z}^2\} =: B$ ou $x+iy \in \{\frac{(2n+1)w}{2} + i\frac{(2m+1)w}{2} \,|(n,m) \in \mathbb{Z}^2\} = A$. Mais si $x+iy \in A$, alors par la proposition précédente $x + iy$ est un pôle de sl. Il suit que $B = Z(\mathrm{sl})$.

Pour montrer que les zéros sont d'ordre 1, il suffira de montrer que, pout tout $\in Z(\mathrm{sl})$, $\mathrm{sl}'(z) \neq 0$. Soit $z \in Z(\mathrm{sl})$, alors il existe $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $z = nw + miw$. D'après le théorème de Cauchy-Riemann (prop 8), on a que $\mathrm{sl}'(nw + imw) = \partial_x u(nw, mw) - i\partial_y u(nw, mw)$. Nous avons déjà calculé ces dérivées partielles à la proposition 16. On trouve

$$\partial_x u(nw, mw) = \pm 1 \text{ et } i\partial_y u(nw, mw) = 0.$$

Donc, pour tout $z \in Z(\mathrm{sl})$, $\mathrm{sl}'(nw+imw) \neq 0$, ce qui conclut la démonstration. □

Proposition 19. *Tous les pôles de* sl *sont d'ordre 1 avec résidu* $\pm\, i$.

Démonstration. Grâce à la proposition 15, on remarque que sl vérifie l'équation $\mathrm{sl}'(x)^2 = 1 - \mathrm{sl}^4(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Définissons alors la fonction $H : \mathbb{C}\backslash P(\mathrm{sl}) \to \mathbb{C}\,;\ H(z) := \mathrm{sl}'(z)^2 - 1 + \mathrm{sl}^4(z)$. H est clairement holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash P(\mathrm{sl})$. Alors, comme les zéros de H ont un point d'accumulation, la proposition 3 nous assure que $\mathrm{sl}'(z)^2 = 1 - \mathrm{sl}^4(z)$ sur $\mathbb{C}\backslash P(\mathrm{sl})$. Soit $a \in P(\mathrm{sl})$ quelconque d'ordre k. On sait alors que le développement de Laurent de sl en a sera

$$\frac{a_{-k}}{(z-a)^k} + \sum_{i=-k+1}^{\infty} a_i (z-a)^i \text{ avec } a_{-k} \neq 0.$$

Utilisons à présent l'équation différentielle. On remarque que le terme de plus bas degré du développement de sl'^2 en a est

$$\frac{(ka_{-k})^2}{(z-a)^{2k+2}}.$$

De même, celui de $1 - \mathrm{sl}^4$ en a sera

$$\frac{-(a_{-k})^4}{(z-a)^{4k}}.$$

Par absurde, supposons que l'ordre de a soit > 1 (ie $k > 1$). Alors comme $4k > 2k{+}2$, on a, par unicité de déveleppement et par l'équation différentielle,

$$0 = -(a_{-k})^4.$$

Donc $a_{-k} = 0$, ce qui est impossible par hypothèse. Il suit alors que $k = 1$ et, par comparaison des termes de plus petit degré,

$$-(a_{-k})^4 = (a_{-k})^2 \text{ d'où } a_{-k} = \pm i,$$

ce qui termine la démonstration. □

Proposition 20. *La paire* $(w + iw, 2w)$ *est une paire basique de périodes de la fonction* sl.

Démonstration. Soit $x + iy \in \mathbb{C}$ quelconque, alors

$$\mathrm{sl}(x + iy + w + iw) = \mathrm{sl}(x + w + i(y + w))$$

$$= \frac{\mathrm{sl}(x+w)\chi(y+w)\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(y+w)} + i\cdot \mathrm{sl}(y+w)\chi(x+w)\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(x+w)}}{1-\mathrm{sl}^2(x+w)\mathrm{sl}^2(y+w)}$$

$$= \frac{\mathrm{sl}(x)\chi(y)\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(y)} + i\cdot \mathrm{sl}(y)\chi(x)\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(x)}}{1-\mathrm{sl}^2(x)\mathrm{sl}^2(y)}$$
$$= \mathrm{sl}(x+iy).$$

La vérification que $2w$ est une période de sl est triviale.
Montrons à présent que toute période de sl appartient à $(w+iw)\mathbb{Z}+2w\mathbb{Z} =: \Lambda$. Par l'absurde, supposons que r soit une période avec $r \notin \Lambda$. Alors, il existe n_1 et $n_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $0 \neq r - n_1(w+iw) - n_2 2w \in P_{(0,w+iw,2w)}$. Appelons cette période r'. Comme r' est une période, on a en particulier $0 = \mathrm{sl}(r'-r') = \mathrm{sl}(-r') = -\mathrm{sl}(r')$. Donc, r' est un zéro de sl. Par la proposition 18, on a $r' = w$ (c'est le seul zéro de sl dans $P_{(0,w+iw,2w)}\backslash\{0\}$). Ceci est impossible car, en particulier, w n'est pas une période de $\mathrm{sl}\,|_{\mathbb{R}}$. La proposition suit. □

Corollaire 9. *La fonction* sl *est elliptique. Ses zéros sont* $\{nw+imw \,|(n,m) \in \mathbb{Z}^2\}$*, ses pôles sont* $\{(2n+1)w/2+i(2m+1)w/2 \,|(n,m) \in \mathbb{Z}^2\}$ *et ses périodes sont* $\{n(w+iw)+m2w \,|(n,m) \in \mathbb{Z}^2\}$.

Proposition 21. $Res(\mathrm{sl}, \frac{w}{2}+i\frac{w}{2}) = -i$ *et* $Res(\mathrm{sl}, \frac{3w}{2}+i\frac{w}{2}) = i$.

Démonstration. Calculons $Res(\mathrm{sl}, \frac{w}{2}+i\frac{w}{2})$. Appliquons le théorème des résidus (thm 3) à la fonction sl et au chemin $\alpha : [0,1] \to \mathbb{C}$ définit comme étant la paramétrisation standard du bord du carré $P_{(0,w,iw)}$ dans le sens positif. Il vient

$$2\pi i \cdot Res(\mathrm{sl}, \frac{w}{2}+i\frac{w}{2}) = \int_\alpha \mathrm{sl}(\tau)d\tau$$

$$= \int_{[0,w]} \mathrm{sl}(\tau)d\tau + \int_{[w,w+iw]} \mathrm{sl}(\tau)d\tau + \int_{[w+iw,iw]} \mathrm{sl}(\tau)d\tau + \int_{[iw,0]} \mathrm{sl}(\tau)d\tau$$

$$= \int_0^w \mathrm{sl}(x)dx + \int_0^w -i\cdot \mathrm{sl}(y)\cdot i\cdot dy + \int_w^0 -\mathrm{sl}(x)dx + \int_w^0 i\cdot \mathrm{sl}(y)\cdot i \cdot dy$$

$=4A$ où $A := \int_0^w \mathrm{sl}(x)dx$ (c'est un nombre strictement positif). Donc $Res(\mathrm{sl}, \frac{w}{2}+i\frac{w}{2})) = \frac{4A}{2\pi i} = -\frac{2Ai}{\pi}$. Par la proposition 19, on a $Res(\mathrm{sl}, \frac{w}{2}+i\frac{w}{2})) = -i$. Comme $\mathrm{sl}(t+w) = -\mathrm{sl}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{C}\backslash P(sl)$, on a $Res(\mathrm{sl}, \frac{3w}{2}+i\frac{w}{2})) = -Res(\mathrm{sl}, \frac{w}{2}+i\frac{w}{2})) = i$, ce qui achève la démonstration. □

Corollaire 10. *On a*

$$\int_0^w \mathrm{sl}(x)dx = \frac{\pi}{2}.$$

Remarque 8. On peut maintenant remarquer que sl vérifie les résultats sur les fonctions elliptiques (section 1.3). La proposition précédente nous assure que les somme des résidus de sl dans $P_{(0,2w,w+iw)}$ vaut 0. Le théorème 8 est par ce fait vérifié. Dans $P_{(0,2w,w+iw)}$, sl a comme pôles $w/2+iw/2$ et $3w/2+iw/2$ les deux d'ordre 1 et comme zéros 0 et w les deux d'ordre 1. Le théorème 9 est donc vérifié. La somme de ces deux zéros moins la somme de ces deux pôles vaut $w-(2w+iw) = -(w+iw) \in \mathbb{Z}2w + \mathbb{Z}(w+iw)$. Il suit que le théorème 12 est vérifié. Finalement, on remarque que sl est d'ordre 2.

Définition 14. *On définit la fonction* cl *par* $\mathrm{cl}(z) := \mathrm{sl}(\frac{w}{2} - z)$ *pour tout* $z \in \mathbb{C}$.

Lemme 9. *Pour tous s et $t \in \mathbb{R}$ on a*

$$\begin{aligned} \mathrm{sl}(s+t) &= \frac{\mathrm{sl}(s)\chi(t)\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(t)} + \mathrm{sl}(t)\chi(s)\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(s)}}{1+\mathrm{sl}^2(s)\mathrm{sl}^2(t)} \\ &= \frac{\mathrm{sl}(s)\mathrm{cl}(t)(1+\mathrm{sl}^2(t)) + \mathrm{sl}(t)\mathrm{cl}(s)(1+\mathrm{sl}^2(s))}{1+\mathrm{sl}^2(s)\mathrm{sl}^2(t)} \end{aligned}$$

Démonstration. La formule découle du fait que pour tout $x \in \mathbb{R}$ le corollaire 8 nous donne

$$\mathrm{cl}(x) = \mathrm{sl}(\frac{w}{2} - x) = \frac{\chi(x)\sqrt{1-\mathrm{sl}^4(x)}}{1+\mathrm{sl}^2(x)}.$$

□

Remarque 9. Bien que la racine carrée ne soit pas bien définie sur $\mathbb{C}$, le lemme précédent va permettre d'étendre le corollaire 8 à $\mathbb{C}$.

Lemme 10. *Soit $a \in \mathbb{C}\backslash(P(\mathrm{sl}) \cup P(\mathrm{cl}))$ fixé, alors la fonction $H_a : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ définie par par*

$$H_a(z) := \frac{\mathrm{sl}(a)\mathrm{cl}(z)(1+\mathrm{sl}^2(z)) + \mathrm{sl}(z)\mathrm{cl}(a)(1+\mathrm{sl}^2(a))}{1+\mathrm{sl}^2(a)\mathrm{sl}^2(z)}$$

est méromorphe.

Démonstration. Par hypothèse, on a $\mathrm{sl}(a)$ et $\mathrm{cl}(a) \in \mathbb{C}$. Nous avons alors que la fonction

$$z \mapsto \mathrm{sl}(a)\mathrm{cl}(z)(1+\mathrm{sl}^2(z)) + \mathrm{sl}(z)\mathrm{cl}(a)(1+\mathrm{sl}^2(a))$$

est méromorphe sur $\mathbb{C}$. En effet, l'ensemble sur lequel cette fonction n'est pas holomorphe est au plus $P(\mathrm{sl}) \cup P(\mathrm{cl})$. De même, la fonction

$$z \mapsto 1 + \mathrm{sl}^2(a)\mathrm{sl}^2(z)$$

est méromorphe sur $\mathbb{C}$ car l'ensemble sur lequel cette fonction n'est pas holomorphe est au plus $P(\mathrm{sl})$. Comme les zéros de cette dernière, qui sont contenus dans l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{sl}^2(z) = -\frac{1}{\mathrm{sl}^2(a)}\}$, n'ont pas de points d'accumulation (cela découle du théorème 10), la fonction H_a sera méromorphe sur $\mathbb{C}$. Explicitement, l'ensemble sur lequel H_a ne sera pas holomorphe sera au plus

$$P(\mathrm{sl}) \cup P(\mathrm{cl}) \cup \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{sl}^2(z) = -\frac{1}{\mathrm{sl}^2(a)}\}$$

. □

Définition 15. *Pour tout $a \in \mathbb{C}$, on définit la fonction méromorphe $S_a(z) : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ par $S_a(z) := \mathrm{sl}(a+z)$.*

Théorème 12. *Pour tout $a \in \mathbb{C}\backslash(P(\mathrm{sl}) \cup P(\mathrm{cl}))$, on a*

$$S_a = H_a \text{ sur } \mathbb{C},$$

ie, pour tous $a \in \mathbb{C}\backslash(P(\mathrm{sl}) \cup P(\mathrm{cl}))$ et $z \in \mathbb{C}$ on a

$$\mathrm{sl}(a+z) = \frac{\mathrm{sl}(a)\mathrm{cl}(z)(1+\mathrm{sl}^2(z)) + \mathrm{sl}(z)\mathrm{cl}(a)(1+\mathrm{sl}^2(a))}{1+\mathrm{sl}^2(a)\mathrm{sl}^2(z)},$$

ce qui étend le corollaire 8.

Démonstration. Soient $a \in \mathbb{C}\backslash(P(\mathrm{sl}) \cup P(\mathrm{cl}))$, T_a l'ensemble sur lequel H_a est holomorphe et V_a l'ensemble sur lequel S_a est holomorphe (on sait que $V_a = \mathbb{C}\backslash(P(\mathrm{sl}) - a))$. On a clairement que $H_a(z) - S_a(z)$ est holomorphe sur $T_a \cap V_a$.
Montrons que le théorème est vérifié pour $a \in \mathbb{R}$. Par le corollaire 8 et le lemme 9, on sait que $H_a = S_a$ sur $\mathbb{R}$. La proposition 2 nous assure que $H_a(z) - S_a(z) = 0$ sur $T_a \cap V_a$. On a que $\mathbb{C}\backslash T_a \cap V_a$ ne contient pas de point d'accumulation. Alors, la proposition 7 implique que $H_a = S_a$ sur $\mathbb{C}$. Il suit donc que $H_a(z) = S_a(z)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Fixons $a \in \mathbb{C}\backslash(P(\mathrm{sl}) \cup P(\mathrm{cl})$. Par avant, on sait que $S_a = H_a$ sur $\mathbb{R}$, car $S_a(z) = S_z(a)$ et $H_a(z) = H_z(a)$ pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash(P(\mathrm{sl}) \cup P(\mathrm{cl})$. Comme avant, on a $S_a = H_a$ sur $T_a \cap H_a$ et $\mathbb{C}\backslash T_a \cap V_a$ ne contient pas de point d'accumulation. Alors, par la proposition 7, le théorème suit. $\square$

Bibliographie

[1] A.I Markushevich. *The remarkable sine functions,* Elsevier, New York, 1966.

[2] A.I Markushevich. *Introduction to the classical theory of abelian functions,* American Mathematical Society, Providence, 1992, chapitre 1.

[3] K. Chandrasekharan. *Elliptic Functions,* Springer, Berlin, 1985, chapitres 1 et 2.