VOUS CROYEZ SAVOIR COMPTER ?

Résumé. Le but de cet exposé est de présenter deux méthodes originales utilisées en combinatoire énumérative. Le fil rouge de cette discussion consistera à trouver une formule générale pour la somme de carrés d'entiers consécutifs, i.e.

$$\sum_{k=0}^{n} k^2$$

Fonctions génératrices

Considérons une suite d'entiers $\{a_n\}_{n\geq 0}$ dont on ne connait pas le terme général, mais dont on connait une formule de récurrence. Prenons par exemple la relation de récurrence suivante :

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 \qquad n \geq 1 \qquad a_0 = 0.$$

Les premiers termes de cette suite sont : 0, 1, 3, 7, 15, 31, ... ce qui nous mène naturellement à conjecturer que $a_n = 2^n - 1$. Partant d'un tel constat, il suffirait alors de démontrer notre assertion par une simple induction. Supposons que notre intuition ne nous guide pas vers une telle conjecture. Comment obtenir le terme général de cette suite en se basant sur la seule relation de récurrence ? L'idée fondatrice des fonctions génératrices consiste à considérer une série formelle de puissance dont les coefficients sont les termes de notre suite. Considérons donc la série formelle :

$$A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

Nous ne nous intéressons pas (pour l'instant du moins) à la nature analytique de cet objet. Nous nous contentons de considérer la série formelle $A(x)$ comme élément de l'anneau $\mathbb{R}[[x]]$ des séries formelles en une variable à coefficients réels. Reprenons alors notre relation de récurrence, multiplions, pour chaque entier n pour laquelle la relation est définie, les deux parties de notre égalité par x^n et sommons le tout. Nous obtenons alors :

$$\sum_{n\geq 1} a_n x^n = \sum_{n\geq 1} (2a_{n-1} + 1)x^n$$

L'expression de gauche n'est rien d'autre que $A(x) - a_0$ qui elle même est égale à $A(x)$ puisque le coefficient a_0 est nul. Il nous reste alors à simplifier l'expression de droite.

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1}(2a_{n-1}+1)x^n &= 2\sum_{n\geq 1}a_{n-1}x^n+\sum_{n\geq 1}x^n\\ &= 2x\sum_{n\geq 1}a_{n-1}x^{n-1}+\left(\sum_{n\geq 0}x^n\right)-1\\ &= 2xA(x)+\frac{1}{1-x}-1\end{aligned}$$

Nous obtenons donc l'équation suivante :

$$A(x)=2xA(x)+\frac{1}{1-x}-1$$

Ceci nous permet d'obtenir une expression algébrique de la série $A(x)$:

$$A(x)=\frac{x}{(1-x)(1-2x)}$$

Les coefficients a_n que nous cherchons sont alors simplement les coefficients du développement de MacLaurin de cette fonction. Mais nous pouvons également les retrouver en séparant la fraction et en utilisant les identités que nous connaissons déjà :

$$\begin{aligned}\frac{x}{(1-x)(1-2x)} &= x\left(\frac{2}{1-2x}-\frac{1}{1-x}\right)\\ &= x\left(2\sum_{n\geq 0}(2x)^n-\sum_{n\geq 0}x^n\right)\\ &= \sum_{n\geq 0}(2^{n+1}-1)x^{n+1}\\ &= \sum_{n\geq 0}(2^n-1)x^n=\sum_{n\geq 0}a_nx^n\end{aligned}$$

Par unicité des coefficients, on obtient bien le résultat voulu, à savoir $a_n=2^n-1$.

Appliquons donc cette méthode afin de déterminer une formule pour la somme des n premiers entiers au carré. Pour ce faire, considérons la suite de nombre suivante :

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}k^2$$

pour laquelle nous connaissons la relation de récurrence évidente :

$$a_n=a_{n-1}+n^2 \qquad n\geq 1 \qquad a_0=0$$

Considérons alors comme dans l'exemple précédent la série formelle $A(x)$ dont les coefficients sont les termes de notre suite et utilisons la relation de récurrence pour obtenir l'équation :

$$\sum_{n\geq 1}a_nx^n=\sum_{n\geq 1}(a_{n-1}+n^2)x^n$$

A nouveau, le terme de gauche n'est autre que $A(x)$ puisque a_0 est nul. Il ne reste plus qu'à reformuler le terme de droite.

$$\sum_{n\geq 1}(a_{n-1}+n^2)x^n = \underbrace{x\sum_{n\geq 1} a_{n-1}x^{n-1}}_{xA(x)} + \sum_{n\geq 1} n^2$$

La deuxième somme se simplifie en utilisant les règles de différentiations, tout à fait valables dans notre contexte.

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1} n^2 = x\sum_{n\geq 1} n(\underbrace{nx^{n-1}}_{\frac{d}{dx}x^n}) = x\frac{d}{dx}\sum_{n\geq 1} nx^n = x\frac{d}{dx}\left(x\sum_{n\geq 1} nx^{n-1}\right)\\ = x\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}\sum_{n\geq 1} x^n\right) = x\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x}\right) = x\frac{d}{dx}\frac{x}{(1-x)^2}\\ = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}\end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi l'équation :

$$A(x) = xA(x) + \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

Que nous pouvons finalement résoudre pour obtenir une expression de la fonction $A(x)$.

$$A(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^4}$$

Les coefficients de la série de MaLaurin de cette fonction sont les termes de notre suite. La décomposition de la fonction obtenue nous permettra de trouver une formule close. Pour ce faire, notons l'identité suivante :

$$\begin{aligned}\frac{6}{(1-x)^4} &= \frac{d^3}{dx^3}\frac{1}{1-x}\\ &= \frac{d^3}{dx^3}\sum_{n\geq 0} x^n\\ &= \sum_{n\geq 3} n(n-1)(n-2)x^{n-3}\\ &= \sum_{n\geq 0}(n+3)(n+2)(n+1)x^n\end{aligned}$$

Ainsi, nous pouvons décomposer $A(x)$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
A(x) &= \frac{x(1+x)}{(1-x)^4} \\
&= \frac{x(1+x)}{6}\frac{6}{(1-x)^4} \\
&= \frac{x+x^2}{6}\sum_{n\geq 0}(n+3)(n+2)(n+1)x^n \\
&= \frac{1}{6}\left(\sum_{n\geq 0}(n+3)(n+2)(n+1)x^{n+1} + \sum_{n\geq 0}(n+3)(n+2)(n+1)x^{n+2}\right) \\
&= \frac{1}{6}\left(\sum_{n\geq 1}(n+2)(n+1)nx^n + \sum_{n\geq 2}(n+1)n(n-1)x^n\right) \\
&= \frac{1}{6}\left(\sum_{n\geq 0}(n+2)(n+1)nx^n + \sum_{n\geq 0}(n+1)n(n-1)x^n\right) \\
&= \sum_{n\geq 0}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}x^n
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne finalement la formule close suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Les fonctions génératrices s'avèrent extrêmement puissantes pour obtenir des informations sur une suite donnée. Outre une formule close pour le terme général de la suite, elles permettent également d'obtenir le comportement asymptotique de la suite en faisant appel à l'analyse complexe. Il est également possible d'obtenir d'autres formules de récurrences, invisibles jusqu'alors.

Calcul différentiel et intégral fini

Passons maintenant à une autre méthode pour attaquer le même problème, celui de trouver une formule close pour la somme des carrés des n premiers entiers. Le calcul différentiel et intégral classique s'intéresse aux relations liants l'opérateur de différentiation D, définit par :

$$Df(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

à l'intégrale définie, forme linéaire définie (grosso modo) par :

$$\int_a^b g(x)dx = \lim_{\substack{\text{partitions de}\\ \text{plus en plus fines}\\ \text{de l'intervalle } [a,b]\\ \text{de la forme}\\ a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b}} \sum_{k=0}^{n-1} g(x_k)(x_{k+1}-x_k)$$

Que se passe-t-il si l'on s'intéresse au cas où l'ensemble de départ de la fonction est restreint aux nombres naturels positifs ? La plus petite valeur que peut prendre alors la variable h est 1 et la plus fine partition d'un intervalle à extrémités entières est constitué de segments unitaires. On obtient alors les nouvelles définitions suivantes de *différence* et de *sommation* :

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$$

et

$$\sum_a^b g(x)\delta x = \sum_{k=a}^{b-1} g(k)$$

Un élément important de la théorie classique du calcul différentiel et intégral consiste en la recherche de primitives. Rappellons que f est une primitive de g si :

$$\int g(x)dx = f(x) + c \qquad \Leftrightarrow \qquad Df(x) = g(x)$$

où c est une constante. Définissons de manière analogue la *somme* de la manière suivante. La fonction f est une somme de la fonction g si :

$$\sum g(x)\delta x = f(x) + C(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad \Delta f(x) = g(x)$$

où $C(x)$ est une fonction périodique de période 1. En effet, il suffit de constater que pour qu'une fonction ait une différence nulle, elle doit satisfaire l'équation :

$$\Delta C(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad C(x+1) = C(x)$$

La pièce angulaire du calcul différentiel et intégral est son théorème fondamental, stipulant (à quelques détails près) que si f est une primitive de g, alors :

$$\int_a^b g(x)dx = f(b) - f(a)$$

C'est grâce à ce théorème qu'il est possible de calculer aisément une grande quantité d'intégrales définies. Tout l'intérêt du calcul différentiel et intégral fini réside dans l'existence d'un analogue de ce théorème que nous énonçons sous la forme suivante :

Théorème. *Si f est une somme de g, i.e. si $\Delta f(x) = g(x)$, alors :*

$$\sum_a^b g(x)\delta x = f(b) - f(a)$$

Démonstration. Aussi excitant que peut paraître ce théorème, sa preuve est en réalité plutôt banale et directe. En effet, il suffit de calculer directement la sommation de notre fonction pour en obtenir la conclusion :

$$\begin{aligned}
\sum_a^b g(x)\delta x &= \sum_{k=a}^{b-1} g(k) \\
&= \sum_{k=a}^{b-1} f(k+1) - f(k) \\
&= \sum_{k=a+1}^{b} f(k) - \sum_{k=a}^{b-1} f(k) \\
&= f(b) - f(a)
\end{aligned}$$

On dit dans ce cas-là que la somme se téléscope, en référence aux longues-vues rétractables dont les dimensions ne dépendent que du diamètre des pièces aux extrémités. □

Il est ainsi extrêmement aisé de calculer des sommes du type

$$\sum_a^b g(k)$$

si l'on peut trouver une somme de la fonction g.

Nous définissons maintenant un nouveau type de fonction qui possèdent, dans le cas fini, des propriétés analogues aux monômes x^n. La fonction

$$x^{\underline{m}} = x(x-1)(x-2)\dots(x-m+1)$$

est appelée la *m-ème puissance factorielle descendante de x*. Sa différence satisfait la relation :

$$\begin{aligned}\Delta x^{\underline{m}} &= (x+1)x(x-1)\dots(x-m+2) - x(x-1)\dots(x-m+1)\\ &= x(x-1)\dots(x-m+2)((x+1)-(x_m+1))\\ &= mx^{\underline{m-1}}\end{aligned}$$

Qui est analgue à la relation bien connue : $Dx^n = nx^{n-1}$. Notons à titre d'exemple que $x = x^{\underline{1}}$ et ainsi, nous pouvons calculer la sommation suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \sum_0^{k+1} x\delta x = \sum_0^{k+1} x^{\underline{1}}\delta x = \left[\frac{1}{2}x^{\underline{2}}\right]_0^{n+1} = \frac{(n+1)n}{2}$$

Formule bien connue depuis la tendre enfance de Gauss. Ainsi, constatant que :

$$x^2 = x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}$$

nous pouvons calculer la somme proposée en début d'exposé :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^2 &= \sum_0^{n+1} x^2\delta x = \sum_0^{n+1} x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}\delta x\\ &= \left[\frac{1}{3}x^{\underline{3}} + \frac{1}{2}x^{\underline{2}}\right] = \frac{1}{3}(n+1)n(n-1) + \frac{1}{2}(n+1)n\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\end{aligned}$$

L'utilisation de puissances factorielle descendantes permet de calculer cette même somme pour n'importe quelle puissance. De manière générale, de nombreuses sommes peuvent se calculer en utilisant le calcul diférentiel et intégral fini. Il existe même divers théorèmes analogues à l'intégration par partie et au changement de variables, permettant un champ d'application encore plus large.

Conclusion

Voir la somme des carrés des n premiers entiers consécutifs comme une suite de termes dont on souhaite connaître le terme général ou comme la sommation d'une fonction à arguments entiers permet d'utiliser l'une ou l'autre des deux techniques présentées ici. Les fonctions génératrices constituent un outils très puissant pour toute sortes de suites données par une relation de récurrence, alors que le calcul différentiel et intégral fini développe toute sa force lorsque le terme général d'une somme peut être intégré au sens fini.

Si vous souhaitez aller un peu plus loin dans l'un ou l'autre de ces deux sujets, je ne peux que vivement recommander [1] comme bible de l'usage des fonctions génératrices et [2] pour le calcul différentiel et intégral fini expliqué par Knuth et Graham.

D. Kohler
University of British Columbia
Vancouver, Décembre 2007

Références

[1] Wilf, Herbert S. *Generatingfunctionology.* A K Peters Ltd, Third Edition, 1996.

[2] Graham, R.L., Knuth, D.E., Patashnik, O. *Concrete Mathematics - A Foundation For Computer Science.* Addison-Wesley Publishing Company, 1989.