



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Projet de Semestre

Processus de Wiener

Analyse de $B(u,T)$ avec racines de l'équation de Lundberg complexes

Meichtry Eliane Paroz Sandrine

Mathématiques 3ème année

Responsable :

Professeur Hans U. Gerber

HEC Lausanne

Été 2000

Table des matières

1	Introduction	2
2	Processus de Wiener	3
2.1	Processus de Wiener	3
2.2	Payements de dividendes	6
3	Résultats	9
3.1	Résultats	9
3.2	Analyse des résultats	27
4	Conclusion	29
	Bibliographie	31
	Annexes	32

Chapitre 1

Introduction

Le but de ce projet consiste à vérifier que le processus de Wiener reste valable pour des nombres complexes. Pour cela, il s'agit de vérifier que la fonction

$$B(u, T) = E\left[\int_0^T e^{-\delta t} dD(t)\right]$$

où $B(u, T)$ peut être interprété comme l'espérance des paiements des dividendes jusqu'au temps T si $\delta > 0$, admet des solutions réelles pour toutes valeurs des paramètres, en particulier si les solutions de l'équation de Lundberg sont complexes. Pour ce faire, nous employons le logiciel Maple pour l'obtention des résultats numériques et des graphiques qui leurs sont associés.

De sa définition ci-dessus, $B(u, T)$ est fonction de la constante δ . Nous en analyserons donc les effets d'une variation de δ . En effet, le paramètre δ joue un rôle important : sa valeur va déterminer si les solutions de l'équation de Lundberg seront réelles ou conjuguées complexes. Ainsi, pour des valeurs de δ dans les différents cas ci-dessus, nous allons :

- vérifier que la fonction $B(u, T)$ admette des valeurs réelles
- analyser les graphiques de $B(u, T)$ en fonction de u pour une valeur de δ fixée
- analyser les graphiques de $B(u, T)$ en fonction de δ pour une valeur de u fixée

Chapitre 2

Processus de Wiener

2.1 Processus de Wiener

Un processus stochastique $\{X(t), t \geq 0\}$ est un processus de Wiener (ou mouvement brownien) si

- (1) $X(0) = 0$;
- (2) $\{X(t), t \geq 0\}$ a des événements stationnaires et indépendants;
- (3) pour tout $t > 0$, $X(t)$ est normalement distribué avec moyenne μt et variance $\sigma^2 t$.

Le premier temps de passage d'un processus de Wiener à un niveau donné est étroitement lié à une distribution gaussienne inverse. Une variable aléatoire Y , de paramètres de forme $\alpha > 0$ et d'échelle $\beta > 0$, a une fonction de densité

$$f(y) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi\beta}} y^{-3/2} \exp\left(-\frac{(\beta y - \alpha)^2}{2\beta y}\right) \quad y > 0 \quad (2.1)$$

et une fonction de répartition

$$F(y) = \Phi\left(\frac{-\alpha + \beta y}{\sqrt{\beta y}}\right) + e^{2\alpha} \Phi\left(\frac{-\alpha - \beta y}{\sqrt{\beta y}}\right) \quad y \geq 0 \quad (2.2)$$

Soit $\{X(t), t \geq 0\}$ un processus de Wiener avec $X(0) = 0$, paramètres de dérive μ et de diffusion σ . Pour $a > 0$, soit T_a le premier temps de passage, c'est-à-dire le premier temps où le processus atteint le niveau a :

$$T_a = \inf\{t > 0 : X(t) = a\} \quad (2.3)$$

La fonction de densité de T_a est

$$g_a(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi\sigma}} y^{-3/2} \exp\left(-\frac{(\mu t - a)^2}{2\sigma^2 t}\right) \quad t > 0 \quad (2.4)$$

et la fonction de répartition de T_a est

$$G_a(t) = \Phi\left(\frac{-a + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) + e^{\frac{2\mu a}{\sigma^2}} \Phi\left(\frac{-a - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \quad t \geq 0 \quad (2.5)$$

Nous pouvons encore définir un processus de Wiener de la façon suivante :

Soit un processus du type $X(t) = kN(t) - ct$
où $\{N(t)\}$ est un processus de Poisson de paramètre λ , k et c des constantes.

Alors $E[X(t)] = (k\lambda - c)t$
et $Var[X(t)] = k^2\lambda t$

Posons encore :

$$\begin{aligned}k\lambda - c &= \mu \\ k^2\lambda &= \sigma^2\end{aligned}$$

A la limite lorsque λ tend vers l'infini nous obtenons :

$$X(t) \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$$

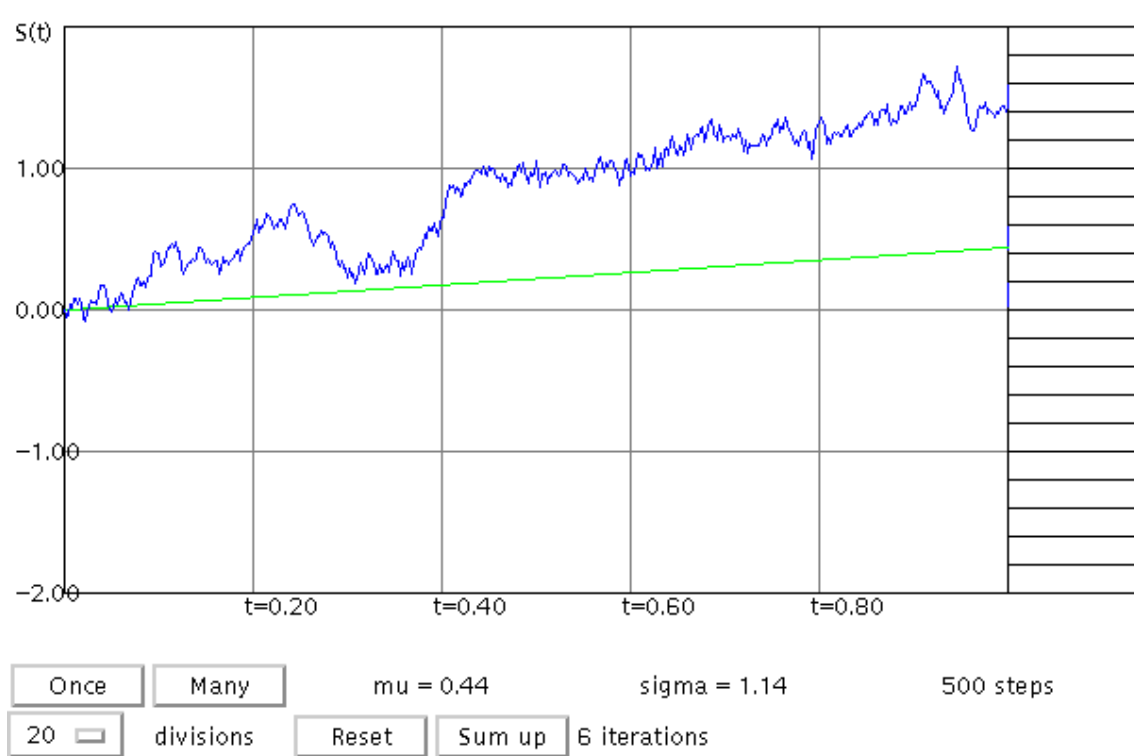
$\{X(t)\}$ est un PAIS (processus à accroissements indépendants stationnaire).

Ainsi $\{X(t)\}$ est un processus de Wiener de paramètres μ et σ^2 .

Citons encore quelques propriétés du processus de Wiener :

- 1) trajectoires continues
- 2) la dérivée de $X(t)$ n'existe pour aucun t
- 3) variation absolue : $\int_0^h |dX(t)| = \infty$
- 4) $\int_0^h |dX(t)|^2 = \sigma^2 h$

Exemple graphique d'un processus de Wiener :



Notons que sur le site web [6] il est possible d'obtenir un tel graphique en y déterminant les valeurs des paramètres μ et σ désirées.

2.2 Paiements de dividendes

Il est possible de modéliser le processus du revenu cumulé d'une compagnie par un processus de Wiener $\{X(t)\}$, avec $X(0) = 0$, de paramètres de dérive μ et de diffusion σ . Les dividendes sont payés dès que $X(t) > u$, $u > 0$, c'est-à-dire que chaque fois que le revenu cumulé atteint le niveau u , le surplus est immédiatement payé sous forme de dividendes. Essayons d'exprimer ceci mathématiquement. Soit

$$M(t) = \max\{X(s), 0 \leq s \leq t\} \quad (2.6)$$

la valeur maximale du revenu cumulé observé au temps t , et soit $D(t)$ la somme des dividendes payés jusqu'au temps t . On peut définir $D(t)$ de la manière suivante :

$$D(t) = (M(t) - u)_+ \quad (2.7)$$

Soit encore

$$B(u, T) = E\left[\int_0^T e^{-\delta t} dD(t)\right] \quad (2.8)$$

où δ est une constante. Pour $\delta > 0$, où δ est le taux d'intérêt, $B(u, T)$ peut être interprété comme l'espérance des paiements des dividendes jusqu'au temps T . Néanmoins, pour de nombreuses applications, δ peut être négatif.

Avec la définition de $D(t)$ ci-dessus, nous pouvons poser

$$E[D(t)] = \int_u^\infty Pr\{M(t) \geq x\} dx \quad (2.9)$$

Il existe une étroite relation entre $M(t)$ et le premier temps de passage d'un processus $\{X(t)\}$: Pour $x > 0$, soit T_x représentant le premier temps auquel le processus $\{X(t)\}$ atteint le niveau x . Observons que pour tous $x > 0$, $t > 0$, $\{M(t) \geq x\} = \{T_x \leq t\}$. Ainsi en substituant ce résultat dans l'équation précédente et en posant $G_x(t) = Pr\{T_x \leq t\}$ nous obtenons

$$E[D(t)] = \int_u^\infty G_x(t) dx \quad (2.10)$$

où

$$G_x = \Phi\left(\frac{-x + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) + e^{\frac{2\mu x}{\sigma^2}} \Phi\left(\frac{-x - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \quad t \geq 0 \quad (2.11)$$

où Φ est la fonction de distribution cumulée d'une variable aléatoire standard normale. Pour $\mu = 0$, nous avons $G_x(t) = 2\Phi\left(\frac{-x}{\sigma\sqrt{t}}\right)$. Alors

$$E[D(t)] = 2\left[-u\Phi\left(\frac{-u}{\sigma\sqrt{t}}\right) + \sigma\sqrt{t}\phi\left(\frac{-u}{\sigma\sqrt{t}}\right)\right] \quad (2.12)$$

où $\phi = \Phi'$ est la fonction de densité d'une variable aléatoire standard normale. Pour $\mu \neq 0$, nous avons

$$E[D(t)] = \left(\mu t + \frac{\sigma^2}{2\mu} - u\right)\Phi\left(\frac{-u + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) - \frac{\sigma^2}{2\mu} e^{\frac{2\mu u}{\sigma^2}} \Phi\left(\frac{-u - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) + \sigma\sqrt{t}\phi\left(\frac{-u + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \quad (2.13)$$

Nous pouvons maintenant évaluer (2.8). Pour $\delta = 0$

$$B(u, T) = E[D(T)] \quad (2.14)$$

Pour $\delta \neq 0$

$$B(u, T) = \int_0^T e^{-\delta t} \frac{d}{dt} E[D(t)] dt \quad (2.15)$$

où

$$\frac{d}{dt} E[D(t)] = \mu\Phi\left(\frac{-u + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) + \frac{\sigma}{\sqrt{t}}\phi\left(\frac{-u + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \quad (2.16)$$

Nous obtenons finalement, pour $\delta \neq 0$,

$$\begin{aligned}
B(u, T) = & -\frac{\mu}{\delta} e^{-\delta T} \Phi\left(\frac{-u + \mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\
& -\frac{\sigma^2 \xi_1}{2\delta} e^{-\xi_2 u} \Phi\left(\frac{-u}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{1}{2}(\xi_2 - \xi_1)\sigma\sqrt{T}\right) \\
& -\frac{\sigma^2 \xi_2}{2\delta} e^{-\xi_1 u} \Phi\left(\frac{-u}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_2)\sigma\sqrt{T}\right)
\end{aligned} \tag{2.17}$$

où ξ_1 et ξ_2 sont les solutions de l'équation quadratique de Lundberg

$$\frac{1}{2}\sigma^2 \xi^2 + \mu \xi - \delta = 0 \tag{2.18}$$

Explicitons encore les racines de cette équation :

$$\xi_1 = \frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\delta\sigma^2}}{\sigma^2} \tag{2.19}$$

$$\xi_2 = \frac{-\mu - \sqrt{\mu^2 + 2\delta\sigma^2}}{\sigma^2} \tag{2.20}$$

Le raisonnement aboutissant à l'obtention de ces résultats est développé dans les annexes [1].

Le but de ce projet est de montrer que même si les deux racines de l'équation de Lundberg sont complexes la formule (2.17) reste valide et fournit une solution réelle.

Chapitre 3

Résultats

3.1 Résultats

Nous avons défini auparavant la fonction $B(u, T)$ de deux manières différentes avec (2.15) et (2.17) :

$$B(u, T) = E\left[\int_0^T e^{-\delta t} dD(t)\right]$$

et

$$\begin{aligned} B(u, T) = & -\frac{\mu}{\delta} e^{-\delta T} \Phi\left(\frac{-u + \mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\ & -\frac{\sigma^2 \xi_1}{2\delta} e^{-\xi_2 u} \Phi\left(\frac{-u}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{1}{2}(\xi_2 - \xi_1)\sigma\sqrt{T}\right) \\ & -\frac{\sigma^2 \xi_2}{2\delta} e^{-\xi_1 u} \Phi\left(\frac{-u}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_2)\sigma\sqrt{T}\right) \end{aligned}$$

Comme $B(u, T)$ est fonction de la constante δ , nous analyserons les effets d'une variation du paramètre δ sur la fonction $B(u, T)$. En effet, nous avons vu auparavant que la valeur de δ joue un rôle important : sa valeur va déterminer si les solutions ξ_1 et ξ_2 de l'équation de Lundberg (2.18) seront réelles ou conjuguées complexes.

Calculons le discriminant de cette équation :

$$\Delta = \mu^2 + 2\delta\sigma^2$$

Δ sera positif ou nul si $\delta \geq \frac{-\mu^2}{2\sigma^2}$ (racines réelles)

Δ sera négatif si $\delta < \frac{-\mu^2}{2\sigma^2}$ (racines conjuguées complexes)

Ainsi tout d'abord pour les paramètres $T = 1$, $\mu = 1$, $\sigma = 1$ fixés, nous analyserons différents cas (1 à 8), où δ prend successivement les valeurs :

- 10, 5, 1 : deux racines ξ_1 et ξ_2 réelles
- 1/2 : une racine double réelle
- 1, -2, -5, -10 : deux racines conjuguées complexes

de la manière suivante :

- vérification que la valeur de $B(u, T)$ en $u = 1$ obtenue soit réelle
- calcul des limites de $B(u, T)$ lorsque u tend vers $\pm\infty$ et valeur en $u = 0$
- graphiques de $B(u, T)$ en fonction de u pour une valeur de δ fixée ci-dessus
- graphiques de $B(u, T)$ en fonction de δ pour une valeur de u fixée ($u = -1, 0, 1, 2, 5, 10$) : cas A à F

Remarque : par définition, $u > 0$ mais nous avons néanmoins voulu observer les effets d'une valeur de u négative ou nulle, ainsi nous avons traité le cas $u \in]-\infty, \infty[$.

Puis nous traiterons encore deux cas (9 et 10), où les solutions de l'équation de Lundberg sont complexes, mais de manière moins détaillée, ceci pour les valeurs des paramètres suivantes :

- $T = 1$, $\mu = 2$, $\sigma = 2$, $\delta = -1$
- $T = 1$, $\mu = 1$, $\sigma = 2$, $\delta = -1/2$

Ces résultats sont obtenus par le logiciel Maple. Notons encore que la fonction Φ y a été définie comme suit :

$$\Phi(a) = \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}a\right) + \frac{1}{2} \quad \text{si } a \text{ est réel}$$

$$\Phi(x + Iy) = \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x + \frac{1}{2}I\sqrt{2}y\right) + \frac{1}{2} \quad \text{si } x + Iy \text{ est complexe}$$

$$\text{où } \operatorname{erf} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

CAS 1

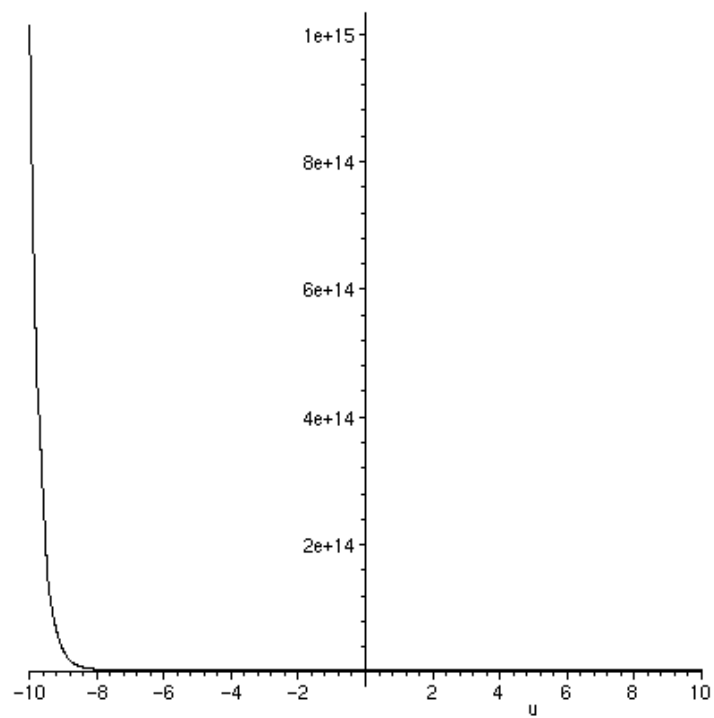
$T = 1$ $\mu = 1$ $\sigma = 1$ $\delta = 10$, les deux racines ξ_1, ξ_2 sont réelles

La valeur de $B(u, T)$ en $u = 1$ est : 0.007756742369

La valeur de $B(u, T)$ en $u = 0$ est : 0.2791239127

$\lim_{u \rightarrow -\infty} B(u, T) = \infty$ $\lim_{u \rightarrow +\infty} B(u, T) = 0$

Graphique de $B(u, T)$ en fonction de u :



CAS 2

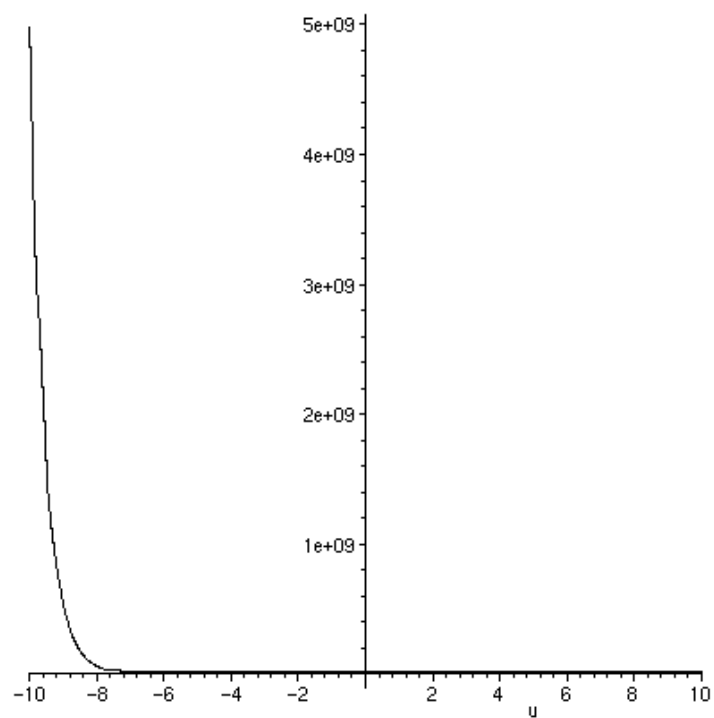
$T = 1$ $\mu = 1$ $\sigma = 1$ $\delta = 5$, les deux racines ξ_1, ξ_2 sont réelles

La valeur de $B(u, T)$ en $u = 1$ est : 0.04131632997

La valeur de $B(u, T)$ en $u = 0$ est : 0.4302265078

$\lim_{u \rightarrow -\infty} B(u, T) = \infty$ $\lim_{u \rightarrow +\infty} B(u, T) = 0$

Graphique de $B(u, T)$ en fonction de u :



CAS 3

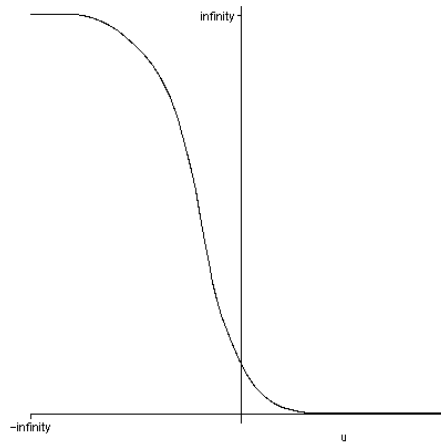
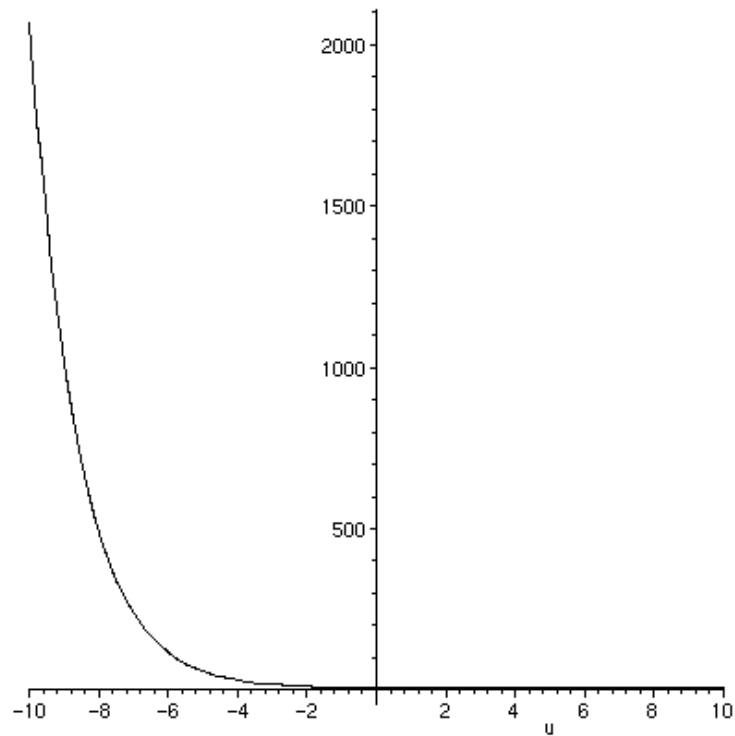
$T = 1$ $\mu = 1$ $\sigma = 1$ $\delta = 1$, les deux racines ξ_1, ξ_2 sont réelles

La valeur de $B(u, T)$ en $u = 1$ est : 0.3028553258

La valeur de $B(u, T)$ en $u = 0$ est : 0.9844027825

$\lim_{u \rightarrow -\infty} B(u, T) = \infty$ $\lim_{u \rightarrow +\infty} B(u, T) = 0$

Graphique de $B(u, T)$ en fonction de u :



CAS 4

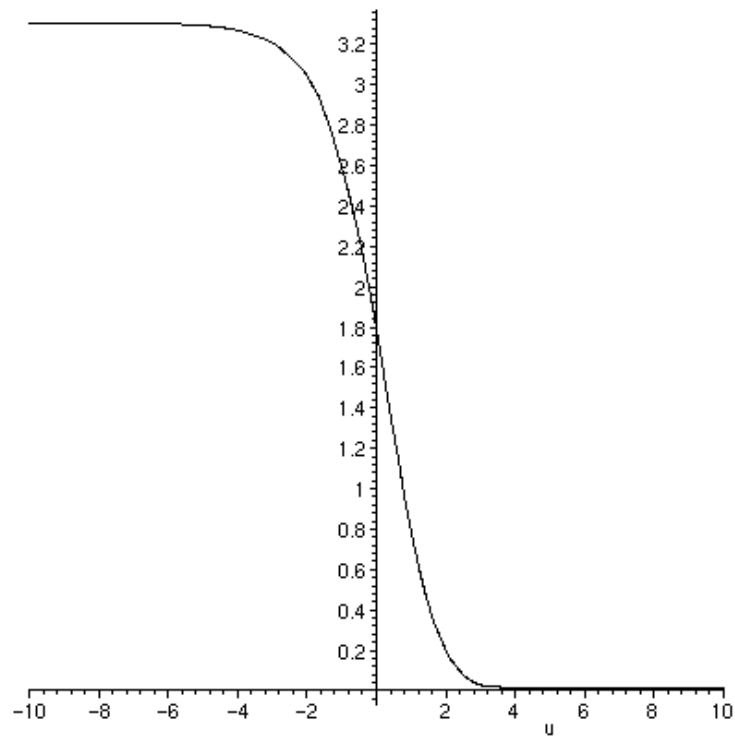
$T = 1$ $\mu = 1$ $\sigma = 1$ $\delta = -\frac{1}{2}$, les deux racines ξ_1, ξ_2 sont réelles et doubles

La valeur de $B(u, T)$ en $u = 1$ est : 0.7861818833

La valeur de $B(u, T)$ en $u = 0$ est : 1.774285958

$\lim_{u \rightarrow -\infty} B(u, T) = 3.297442542$ $\lim_{u \rightarrow +\infty} B(u, T) = 0$

Graphique de $B(u, T)$ en fonction de u :



CAS 5

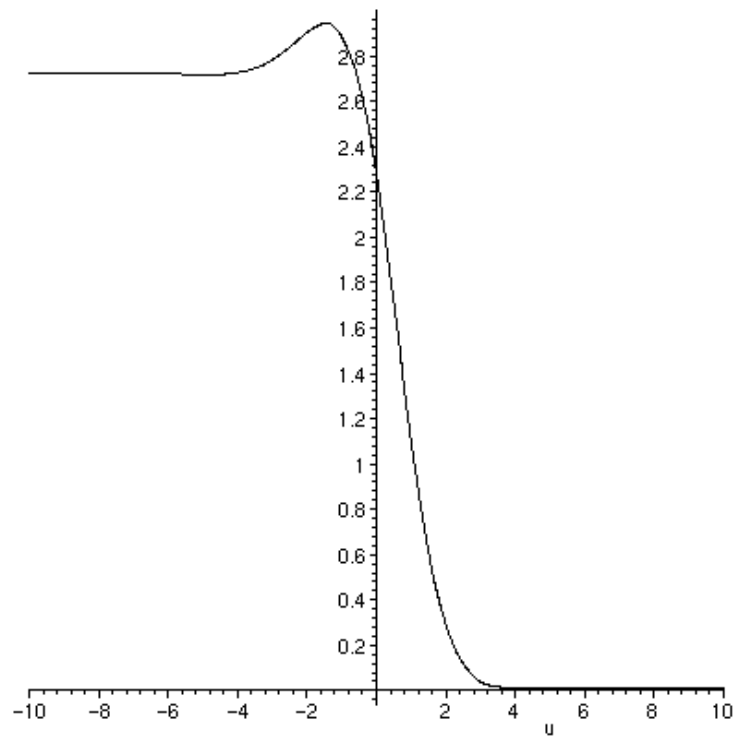
$T = 1$ $\mu = 1$ $\sigma = 1$ $\delta = -1$, les deux racines ξ_1, ξ_2 sont complexes

La valeur de $B(u, T)$ en $u = 1$ est : 1.107335176

La valeur de $B(u, T)$ en $u = 0$ est : 2.263731269

$\lim_{u \rightarrow -\infty} B(u, T) = 2.718281828$ $\lim_{u \rightarrow +\infty} B(u, T) = \text{indéfinie}$

Graphique de $B(u, T)$ en fonction de u :



CAS 6

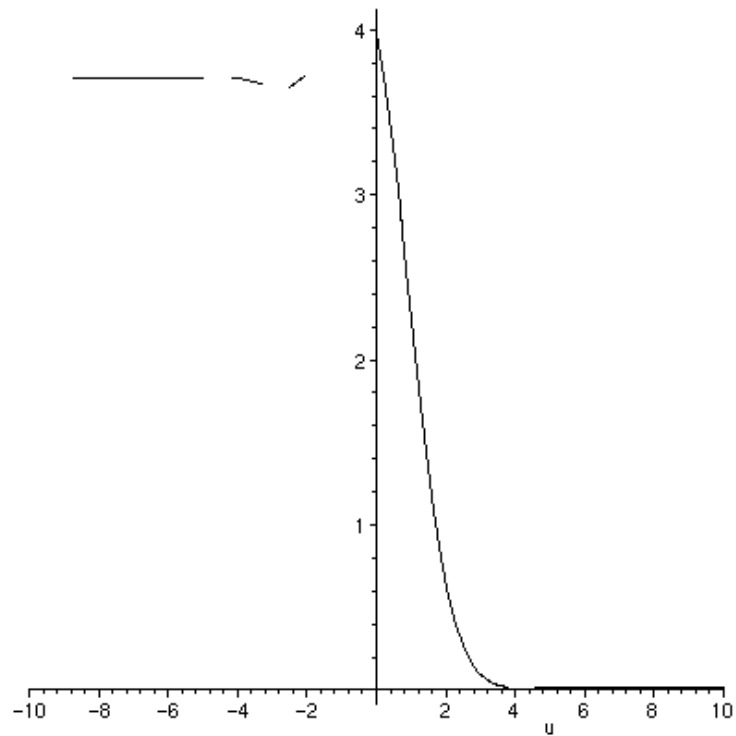
$T = 1$ $\mu = 1$ $\sigma = 1$ $\delta = -2$, les deux racines ξ_1, ξ_2 sont complexes

La valeur de $B(u, T)$ en $u = 1$ est : 2.271416899

La valeur de $B(u, T)$ en $u = 0$ est : 3.957079310

$\lim_{u \rightarrow -\infty} B(u, T) = 3.694528050$ $\lim_{u \rightarrow +\infty} B(u, T) = \text{indéfinie}$

Graphique de $B(u, T)$ en fonction de u :



CAS 7

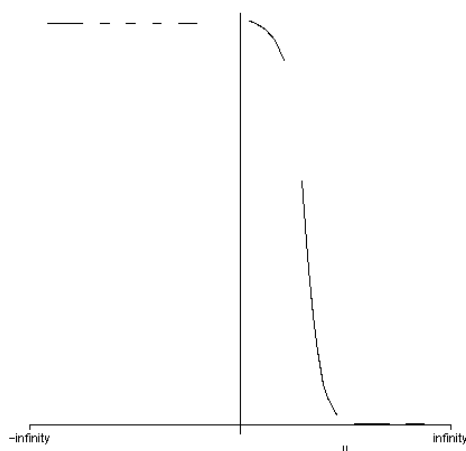
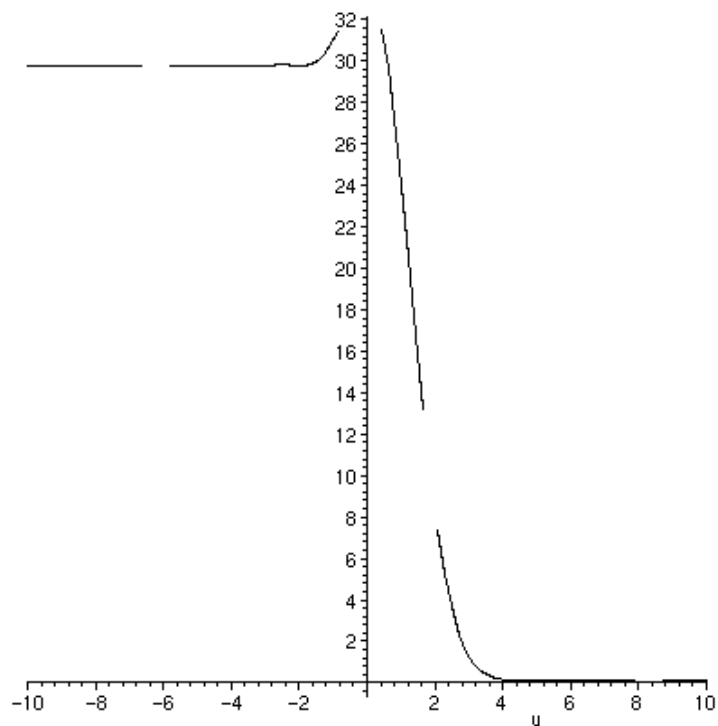
$T = 1$ $\mu = 1$ $\sigma = 1$ $\delta = -5$, les deux racines ξ_1, ξ_2 sont complexes

La valeur de $B(u, T)$ en $u = 1$ est : 24.29210563

La valeur de $B(u, T)$ en $u = 0$ est : 33.34488669

$\lim_{u \rightarrow -\infty} B(u, T) = 29.68263182$ $\lim_{u \rightarrow +\infty} B(u, T) = \text{indéfinie}$

Graphique de $B(u, T)$ en fonction de u :



CAS 8

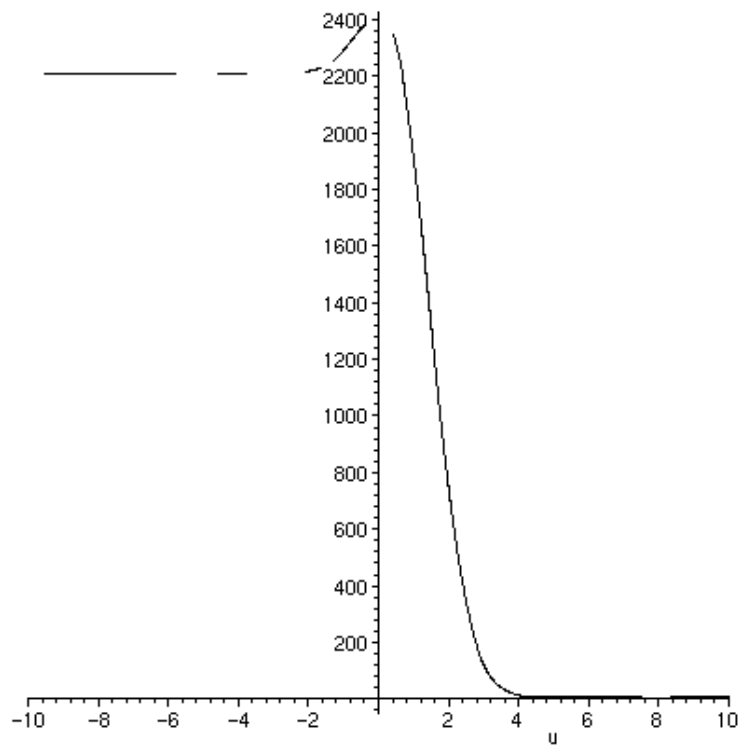
$T = 1$ $\mu = 1$ $\sigma = 1$ $\delta = -10$, les deux racines ξ_1, ξ_2 sont complexes

La valeur de $B(u, T)$ en $u = 1$ est : 1919.679302

La valeur de $B(u, T)$ en $u = 0$ est : 2420.690118

$\lim_{u \rightarrow -\infty} B(u, T) = 2202.646579$ $\lim_{u \rightarrow +\infty} B(u, T) = \text{indéfinie}$

Graphique de $B(u, T)$ en fonction de u :

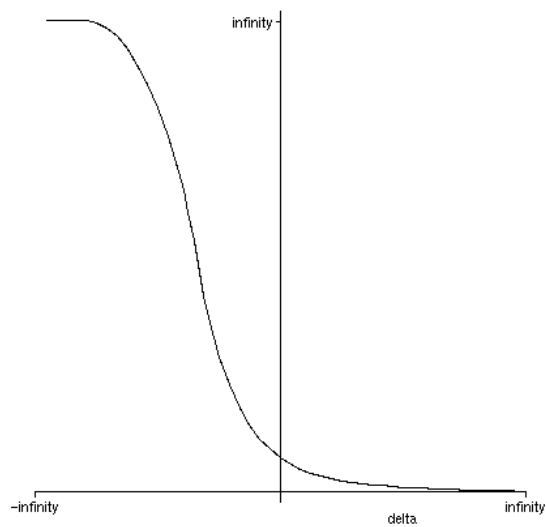
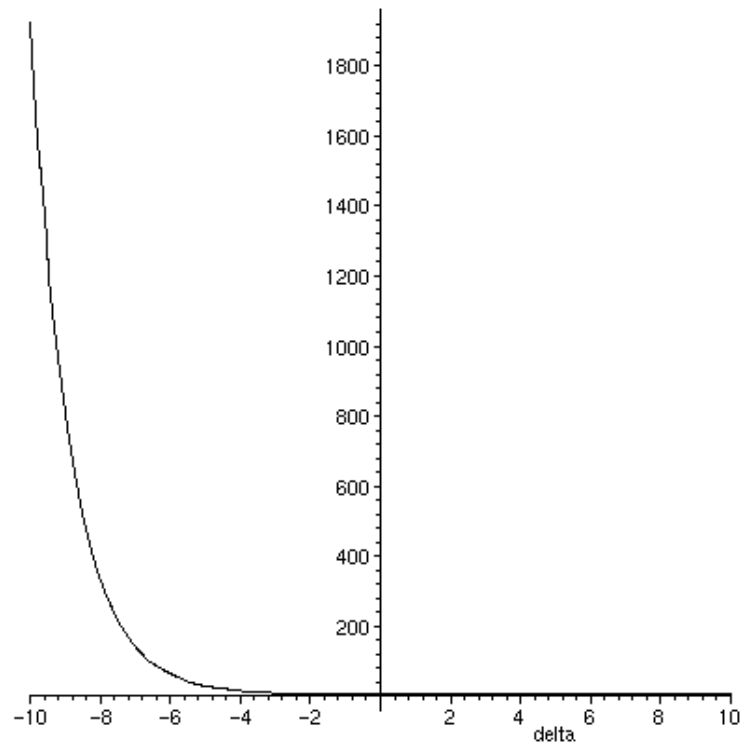


CAS A

$$u = 1 \quad T = 1 \quad \mu = 1 \quad \sigma = 1$$

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} B(u, T) = \infty \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} B(u, T) = 0$$

Graphique de $B(u, T)$ en fonction de δ :

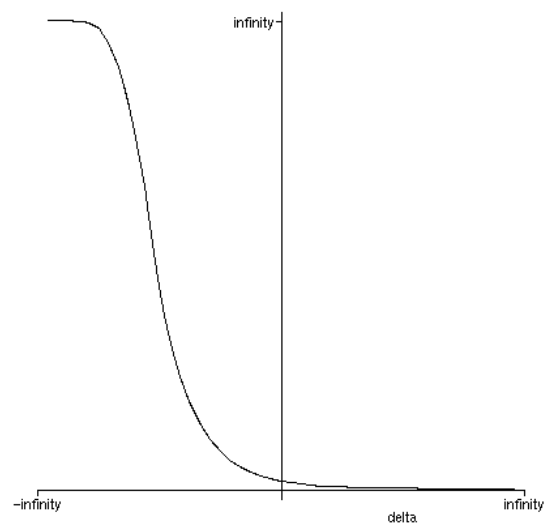
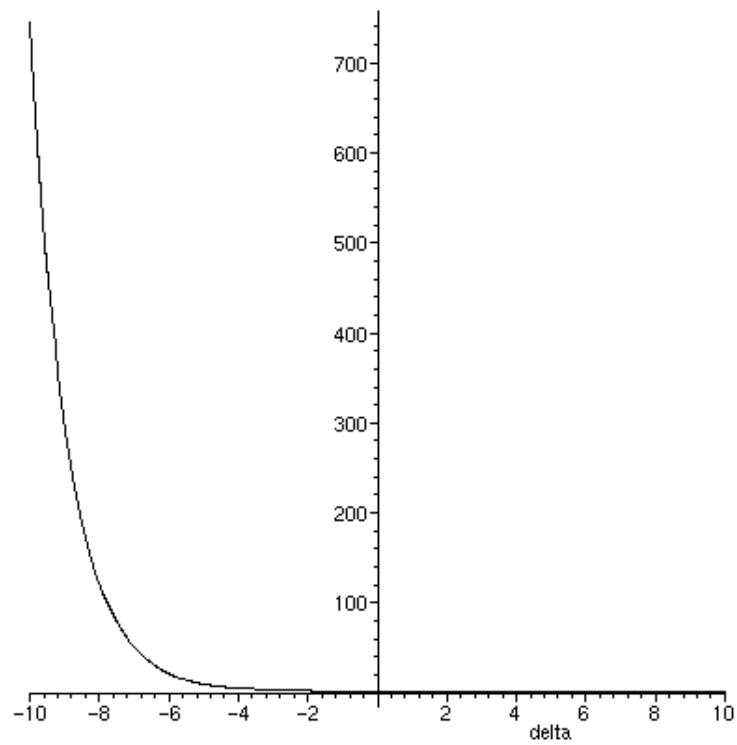


CAS B

$$u = 2 \quad T = 1 \quad \mu = 1 \quad \sigma = 1$$

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} B(u, T) = \infty \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} B(u, T) = 0$$

Graphique de $B(u, T)$ en fonction de δ :

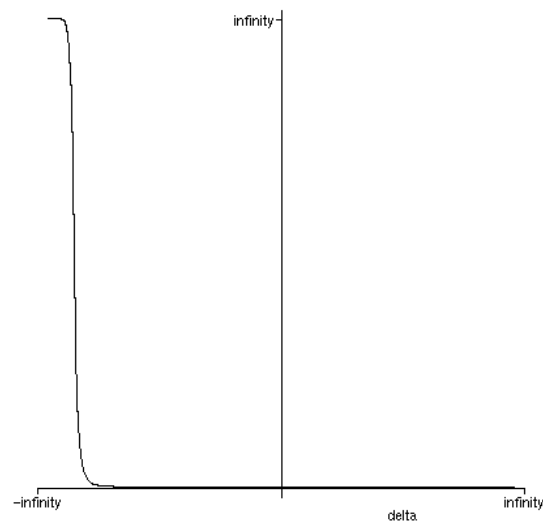
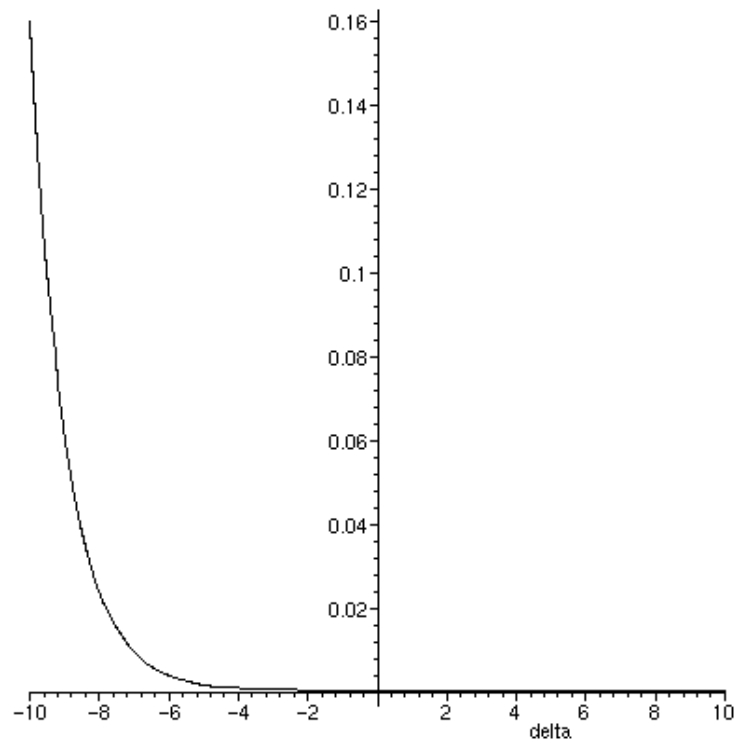


CAS C

$$u = 5 \quad T = 1 \quad \mu = 1 \quad \sigma = 1$$

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} B(u, T) = \infty \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} B(u, T) = 0$$

Graphique de $B(u, T)$ en fonction de δ :

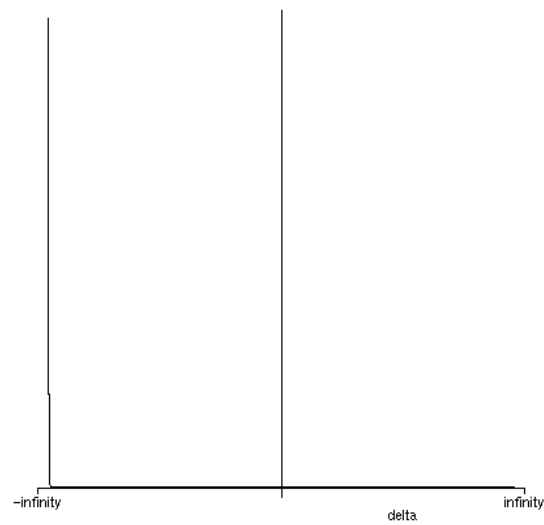
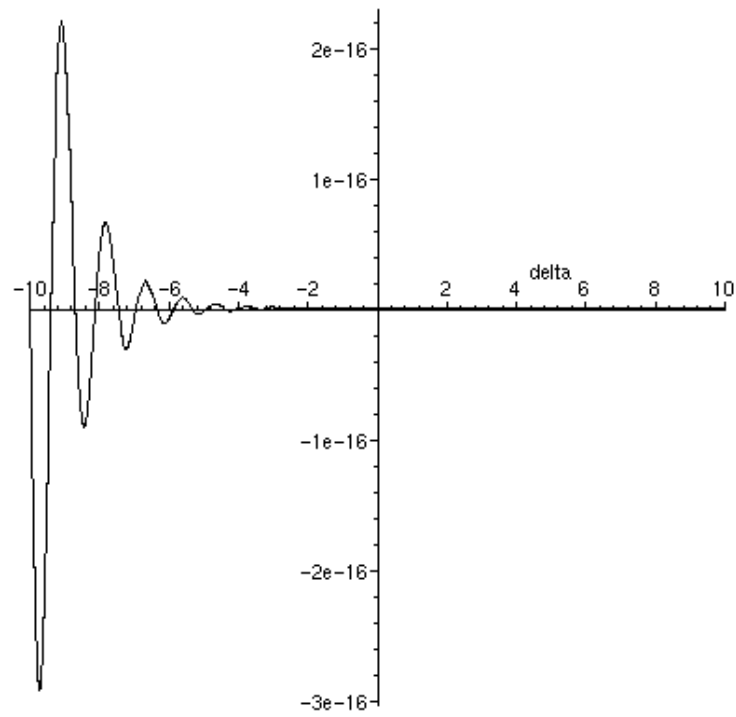


CAS D

$$u = 10 \quad T = 1 \quad \mu = 1 \quad \sigma = 1$$

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} B(u, T) = \infty \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} B(u, T) = 0$$

Graphique de $B(u, T)$ en fonction de δ :

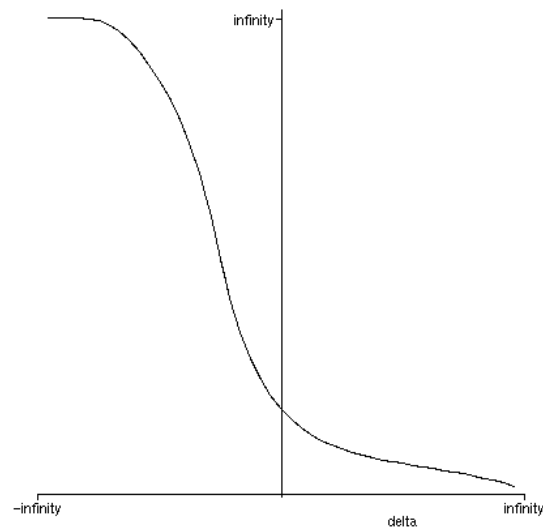
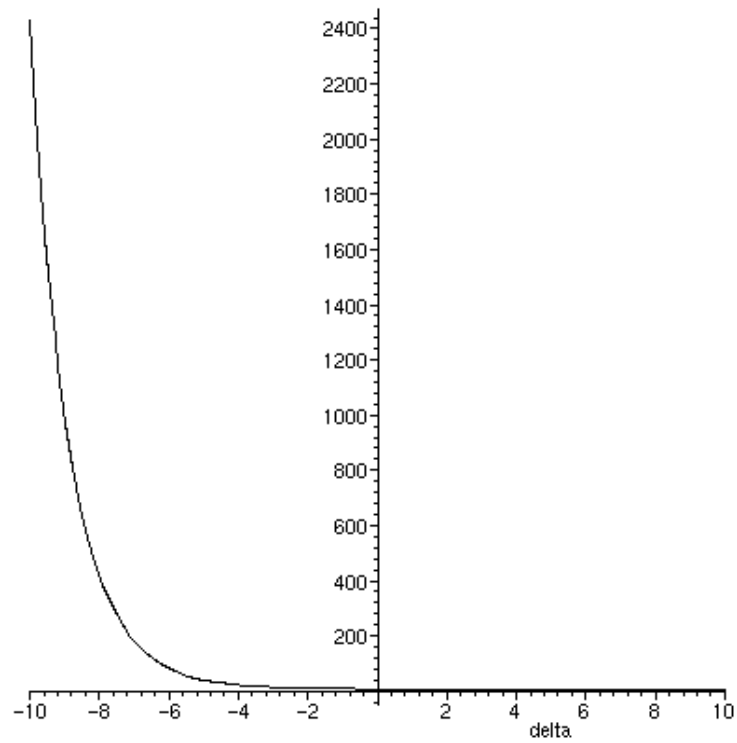


CAS E

$$u = 0 \quad T = 1 \quad \mu = 1 \quad \sigma = 1$$

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} B(u, T) = \infty \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} B(u, T) = 0$$

Graphique de $B(u, T)$ en fonction de δ :

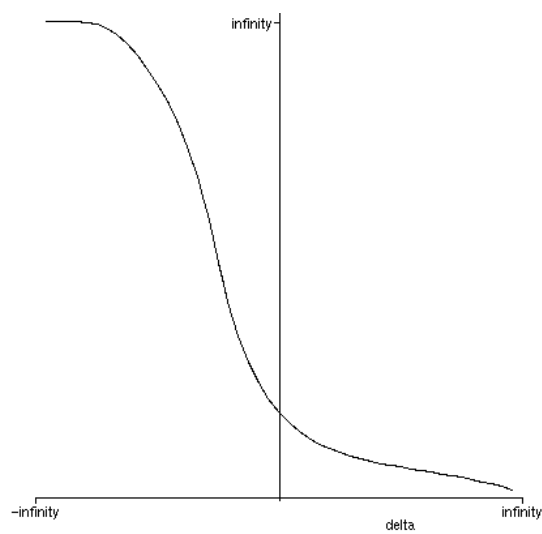
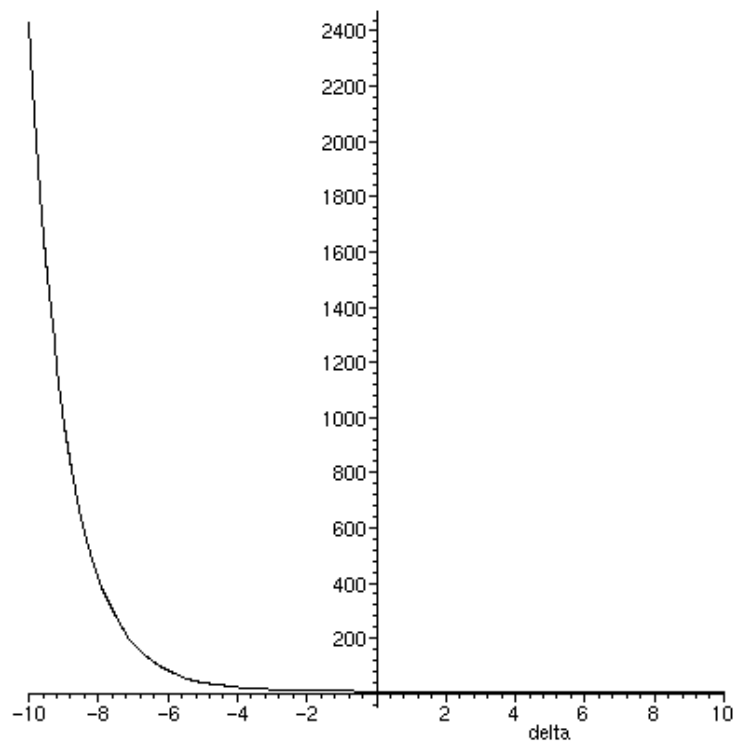


CAS F

$$u = -1 \quad T = 1 \quad \mu = 1 \quad \sigma = 1$$

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} B(u, T) = \infty \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} B(u, T) = 0$$

Graphique de $B(u, T)$ en fonction de δ :



CAS 9

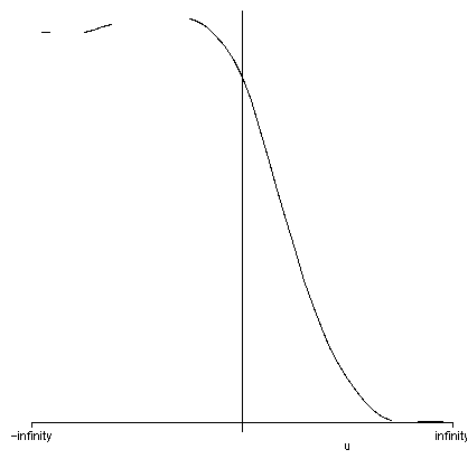
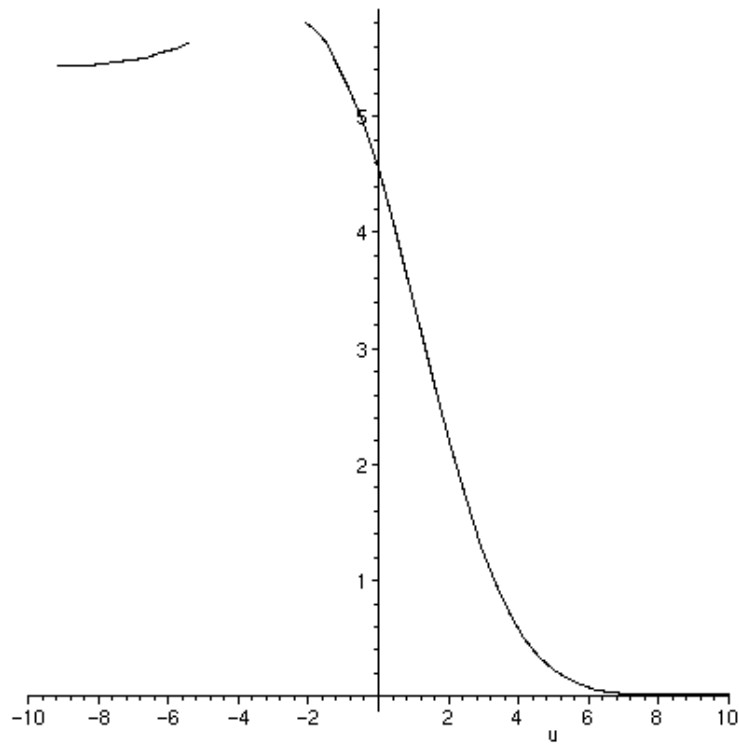
$T = 1$ $\mu = 2$ $\sigma = 2$ $\delta = -1$, les deux racines ξ_1, ξ_2 sont complexes

La valeur de $B(u, T)$ en $u = 1$ est : 3.404606449

La valeur de $B(u, T)$ en $u = 0$ est : 4.527462537

$\lim_{u \rightarrow -\infty} B(u, T) = 5.436563656$ $\lim_{u \rightarrow +\infty} B(u, T) = \text{indéfinie}$

Graphique de $B(u, T)$ en fonction de u :



CAS 10

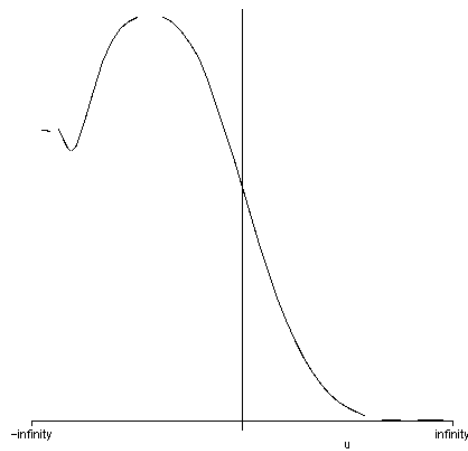
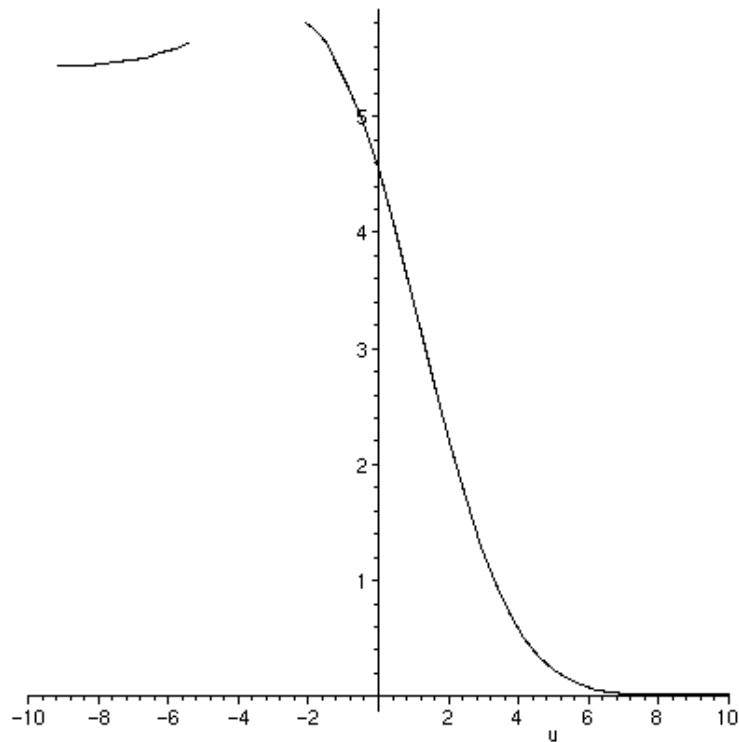
$T = 1$ $\mu = 1$ $\sigma = 2$ $\delta = -\frac{1}{2}$, les deux racines ξ_1, ξ_2 sont complexes

La valeur de $B(u, T)$ en $u = 1$ est : 1.678338379

La valeur de $B(u, T)$ en $u = 0$ est : 2.644937693

$\lim_{u \rightarrow -\infty} B(u, T) = 3.297442542$ $\lim_{u \rightarrow +\infty} B(u, T) = \text{indéfinie}$

Graphique de $B(u, T)$ en fonction de u :



3.2 Analyse des résultats

Observons tout d'abord les résultats obtenus pour une valeur de δ fixée (cas 1 à 10) :

- Racines ξ_1, ξ_2 réelles distinctes (cas 1 à 3) :

La fonction $B(u, T)$ est strictement décroissante pour $u \in] - \infty, \infty[$ et dans tous ces cas $\lim_{u \rightarrow -\infty} B(u, T) = \infty$.

- Racine réelle double (cas 4) :

La fonction $B(u, T)$ est strictement décroissante pour $u \in] - \infty, \infty[$, mais contrairement aux cas précédents la fonction atteint son maximum en une valeur finie (pour $u \rightarrow -\infty$).

- Racines complexes (cas 5 à 10) :

La fonction $B(u, T)$ est strictement décroissante pour $u > 0$, mais elle atteint son maximum (fini) pour une valeur de u négative et finie qui semble se rapprocher de 0 lorsque δ diminue. Soulignons un cas particulier : le cas 5, où $\lim_{u \rightarrow -\infty} B(u, T) = 2.718281828 = e$.

La comparaison de ces 10 cas montre que :

- plus δ diminue et plus la valeur de $B(u, T)$ en $u = 0$ et en $u = 1$ augmente
- les valeurs obtenues pour $B(u, T)$ sont toujours positives et réelles
- la fonction $B(u, T)$ est strictement décroissante pour $u > 0$ (par définition, $u > 0$)

Notons encore que même lorsqu'il y a des 'trous' dans certains graphiques, ces valeurs ne sont néanmoins pas complexes, car nous avons pu nous rendre compte que si cela avait été le cas le logiciel Maple donnerait un message d'erreur et ne dessinerait pas le graphe, en effet il est impossible à Maple de tracer le graphe d'un nombre complexe en 2D (il est seulement possible de le représenter en 3D).

Remarquons que ces 'trous' n'apparaissent que pour certains cas avec racines complexes et que pour les graphes en fonction de u .

Afin de connaître la cause de ces 'trous', nous avons cherché à obtenir la valeur de la fonction en un des points (pour voir si ici $B(u, T)$ est indéterminée, infinie ou égale à 0), et choisi par exemple le cas 6, où pour $u = -1$ la valeur de $B(u, T)$ n'est pas définie sur le graphe. La valeur numérique obtenue alors est : 4.148880817. Cela montre que même si le graphe paraît discontinu dans certains cas, la fonction $B(u, T)$ est bien continue (bug interne de Maple).

Observons ensuite les résultats obtenus pour une valeur de u fixée (cas A à F) :

Les graphiques de $B(u,T)$ en fonction de δ montrent que :

- le maximum est toujours atteint en $+\infty$ pour une valeur de $\delta \rightarrow -\infty$
- $\lim_{u \rightarrow +\infty} B(u, T) = 0$
- plus u décroît, plus la valeur de $B(u,T)$ en $\delta = 0$ augmente
- les racines deviennent complexes dès que $\delta < -\frac{1}{2}$
- cette fonction est strictement décroissante, pour toute valeur de $\delta \in]-\infty, \infty[$ (exception : cas D)
- elle est strictement positive, pour tout δ (exception : cas D)

Le cas D est exceptionnel, car contrairement aux autres cas étudiés :

- 'instabilité' de la fonction pour des valeurs de δ négatives, même si le graphe global de $-\infty$ à $+\infty$ paraît strictement décroissant
- certaines valeurs de $B(u,T)$ sont négatives (c'est le seul exemple où c'est le cas)

Dans tous les cas, pour $\delta > 0$, la fonction $B(u,T)$ est strictement décroissante.

Si $\delta > 0$, $B(u,T)$ peut être interprété comme l'espérance des paiements des dividendes au temps T . Néanmoins, il est possible que δ soit négatif dans certaines applications (par exemple pour calculer le prix d'une option [1]).

Dans les annexes (fichier Maple) se trouvent également les graphiques de $u, \delta \in [-1, 1]$, mais nous ne les avons pas reproduits ici, ces derniers ne présentant que peu d'intérêt par rapport à ceux de $u, \delta \in [-10, 10]$.

Dans certains cas, il n'a pas été possible d'obtenir le graphique de $u \in]-\infty, \infty[$; en effet le message d'erreur de Maple est le suivant : exposant trop grand.

Tous les résultats obtenus amènent à la conclusion que toutes les valeurs de $B(u,T)$ sont réelles.

Chapitre 4

Conclusion

Tous les résultats obtenus, tant numériques que graphiques, montrent clairement que dans le cas où ξ_1 et ξ_2 les racines de l'équation de Lundberg sont complexes, les valeurs obtenues pour la fonction $B(u,T)$ sont réelles.

Ceci nous permet donc d'affirmer - même en l'absence d'une démonstration mathématique rigoureuse - que la formule (2.17) reste valide pour toutes les valeurs de δ .

L'élaboration de ce projet s'est articulé en trois parties :

- Vérification que la fonction $\Phi(\cdot)$ est valable pour des nombres complexes, puis lecture et compréhension de la partie théorique et recherche (Web + bibliothèque) d'informations sur le processus de Wiener.

- A l'aide du logiciel Maple, modélisation des fonctions $\Phi(a)$, $\Phi(x + Iy)$ et $B(u,T)$, ceci nous permettant alors d'obtenir les résultats numériques et graphiques désirés. Nous avons tout d'abord réalisé ceci sur les logiciels Maple et Mathematica simultanément, puis finalement avons opté pour celui nous paraissant le plus performant et le plus adapté à la situation.

- Analyse des résultats (comparaison des valeurs numériques et graphiques) et conclusion. Nous avons également tenté de démontrer que les valeurs de $B(u,T)$ sont réelles même lorsque ξ_1 et ξ_2 sont complexes : pour cela, nous avons remplacé dans l'équation (2.17) ξ_1 et ξ_2 par leurs valeurs (2.19) et (2.20) et essayé de simplifier l'équation obtenue (en calculant ou avec Maple). Ceci s'est révélé difficile et nous y avons renoncé.

Remarquons néanmoins que dans (2.17) :

- la première ligne ne contient aucun terme complexe ;
- les 2èmes et 3èmes lignes sont semblables, seulement ξ_1 et ξ_2 sont échangés. Ainsi comme ξ_1 et ξ_2 sont conjugués complexes (ie $\xi_{1,2} = a \pm ib$, où a, b réels), il est donc possible de penser que les termes complexes se simplifient, l'expression obtenue étant alors réelle.

Nous désirions effectuer ce travail à deux, car nous serons amenées à travailler ultérieurement en groupe, et nous pensons que cette collaboration est bénéfique car elle permet la discussion et l'échange d'idées. Pour cela, nous avons fait l'ensemble de la démarche de manière totalement commune, sans nous répartir le travail. Cela nous a permis d'avoir une vue de l'ensemble du projet.

Dans le cadre du projet hors département prévu dans le plan d'étude, il nous semblait intéressant de le réaliser à l'extérieur de l'EPFL, et ayant suivi le cours de théorie du risque, notre intérêt s'est porté sur un projet en HEC. Ceci nous a permis d'avoir une approche des mathématiques différente, plus axée sur les réalisations pratiques que les cours de probabilité donnés à l'EPFL. De plus, cela nous a permis d'acquérir des notions utiles sur les mathématiques de la finance.

Bibliographie

- [1] Hans U. Gerber, Elias S.W. Shiu, *Technical Report*.
- [2] Newton L. Bowers, JR., Hans U. Gerber, James C. Hickman, Donald A. Jones, Cecil J. Nesbitt, *Actuarial Mathematics*, The society of actuaries, HEC Lausanne, 1997.
- [3] Sheldon M. Ross, *Initiation aux probabilités*, PPUR, Lausanne, 1996.
- [4] Sheldon M. Ross, *Introduction to probability models*, Academic Press cop., New York, 1972.
- [5] P. Poncet, R. Portait, S. Hayet, *Mathématiques financières*, Evaluation des actifs et analyse du risque, Dalloz, Paris, 1996.
- [6] <http://fisher.loyola.edu/490/modules/materials/fin/gbm/gbm1.html>

Annexes

- listing du fichier Maple
- Technical report [1]
- appendix : the first passage time of the Wiener process