ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Projet de semestre

PROCESSUS DE MARKOV

Christophe Osinski
Département de Mathématiques EPFL

Sous la direction du Professeur
Robert Dalang

Assistant
Kyung-Ha Cho

22 juin 1998

Table des matières

Introduction

De nos jours, la question de savoir si l'univers dans lequel nous vivons est déterministe ou non se pose souvent. Malheureusement, dans l'état actuel de nos connaissances, nous ne sommes pas en mesure de répondre à cette question.

En revanche, beaucoup de phénomènes que l'on observe, sont des réalisations de variables aléatoires qui parfois sont indépendantes et d'autre fois ne le sont pas. Le processus de Markov est utilisé pour modéliser certains de ces phénomènes. Une chaîne de Markov est caractérisée par sa probabilité de transition, qui ne dépend que de l'état dans lequel la chaîne se trouve.

Bien que ses hypothèses semblent restrictives, le processus de Markov est couramment utilisé et donne de très bons résultats. On le retrouve notamment en météorologie, dans l'étude des files d'attente, en finances, ou encore, comme on va le voir, dans les problèmes de choix optimal.

Ce rapport est entièrement basé sur le livre de Messieurs *Evgenii B. Dynkin* et *Aleksandr A. Yushkevich*. Il comporte deux chapitres. Le premier traite de la marche aléatoire sur un espace discret. Quant au deuxième, il s'occupe des problèmes d'arrêt optimal et de choix optimal. Chacun est scindé en deux sections. Tout d'abord sont exposés les définitions et principaux résultats relatifs au sujet traité, puis une série de problèmes aidant à mieux comprendre la théorie.

Le but de ce travail est de bien comprendre le problème de l'arrêt optimal d'une chaîne de Markov. Tout d'abord, il faut se familiariser avec le concept de processus de Markov. Pour cela, l'exemple de la marche aléatoire s'avère un très bon outil pédagogique.

Chapitre 1

Un critère de récurrence

1.1 Définitions et résultats

1.1.1 La marche aléatoire

Considérons l'ensemble des entiers $\mathbb{Z}$. On parle de marche aléatoire symétrique lorsqu'une particule se déplace en faisant des sauts à gauche ou à droite avec la même probabilité.

Définition 1 *Les* **états** *sont les points que peut atteindre la particule (par exemple: 0,+1,-1,...).*

Définition 2 $\pi(x)$ *est la probabilité d'atteindre 0 depuis le point* x.

On généralise facilement la notion de marche aléatoire à un espace de dimension l:

Définition 3 $H^l = \{x : x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_le_l\}$, *avec* $x_i \in \mathbb{Z}$.

Résultat 1 *Si* $l = 1$ *ou* 2 *alors* $\pi(x) = 1$ $\forall x$. *Si* $l > 2$ *alors* $\pi(x) \leq 1$ *avec (*$\pi(x) < 1$ *possible).*

Définition 4 $\pi_B(x)$ *est la probabilité d'atteindre un des états de* $B \subset H^l$ *en partant de l'état* x.

Définition 5 *On dit d'un ensemble* $B \subset H^l$ *qu'il est* **récurrent** *si* $\pi_B(x) = 1$ $\forall x \in H^l$ *et* **non-récurrent** *si* $\exists \bar{x} \in H^l$ *tel que* $\pi_B(\bar{x}) < 1$.

1.1.2 La fonction de transition

Définition 6 $x(0)$ *est la position initiale de la particule.* $x(n)$ *est la position de la particule après* n *sauts.*

Définition 7 *Soit A un événement.*
$P_x\{A\}$ est la probabilité de l'événement A si la position initiale de la particule est x.
$M_x\xi$ est l'espérance mathématique de la variable aléatoire ξ correspondant à la distribution P_x.

Définition 8 (La fonction de transition) *$p(n,x,y)$ est la probabilité que la particule se rende en y, partant de x en n sauts. On a que $p(n,x,y) = P_x\{x(n) = y\}$. $p(n,x,y)$ est appelée* **la fonction de transition**.

Une des propriétés essentielles de la marche aléatoire symétrique est la multi-indépendance des sauts $\xi_k = x(k) - x(k-1)$ $(k = 1,2,3,\ldots)$. Les ξ_k sont donc indépendants de la position initiale et ont tous la même distribution; ils prennent une des valeurs $\pm e_1, \pm e_2, \ldots, \pm e_l$ avec la même probabilité.
De ceci, on tire une représentation intégrale de la fonction de transition:

Résultat 2 (Représentation intégrale de la fonction de transition)

$$p(n,x,y) = \frac{1}{(2\pi)^l}\int_Q e^{i\theta(x-y)}\Phi^n(\theta)d\theta$$

où $Q = \{$formes linéaires dont la valeur absolue des coefficients $\theta_1, \ldots, \theta_l \leq \pi\}$ [1]
et $\Phi(\theta) = \frac{1}{l}\sum_{m=1}^{l} cos\theta_m$.

1.1.3 Comportement lorsque $n \longrightarrow \infty$

Définition 9

$$g(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n,x,y).$$

Résultat 3 *$g(x,y)$ est l'espérance mathématique du nombre de passages par le point y si la position initiale de la particule est x.*

Résultat 4

$$g(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^l}\int_Q \frac{e^{i\theta(x-y)}d\theta}{1-\Phi(\theta)}$$

Résultat 5 *Si $l \geq 3$ alors $\forall x, y \in H^l$ $g(x,y) < \infty$.*

Les principales conséquences de ce résultat sont:

Résultat 6

1. *le nombre de passages d'une particule par un point est fini avec probabilité 1;*
2. *si B est un sous-ensemble borné de H^l, alors il existe un temps τ après lequel la particule ne passe plus jamais par B;*

1. Si $\theta \in Q$ alors $\theta(x) = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \ldots + \theta_l x_l = <\theta \mid x>$

3. tout sous-ensemble borné B est non-récurrent.

Résultat 7 (Estimation asymptotique de $g(x,y)$)

$$g(x,y) \sim \frac{c_l}{\| x-y \|^{l-2}}$$

pour $\| x-y \| \longrightarrow \infty$ où c_l est une constante positive.

1.1.4 Fonctions harmoniques

Soit $f : H^l \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Définition 10

$$Pf(x) = M_x f(x(1)) = \sum_y p(1,x,y)f(y).$$

P est appelé **le shift**.

Définition 11 *$A = P - E$ où E est l'opérateur identité. On dit que f est* **harmonique** *si $Af(x) = 0$ et respectivement que f est* **super-harmonique** *si $Pf(x) \leq 0$ $\forall x \in H^l$ (ie. harmonique si $Pf = f$, respectivement super-harmonique si $Pf \leq f$).*

Résultat 8 *Soit f une fonction harmonique. Si f est telle que son maximum est atteint en un point y_0 de H^l ou si f est bornée, alors f est constante.*

Définition 12 *$\bar{\pi}_B(x)$ est la probabilité que la particule, partant de x, visite B une infinité de fois.*

Résultat 9 *$\bar{\pi}_B(x)$ est une fonction constante (car harmonique et bornée).*

Définition 13 *$q(n,y)$ est la probabilité de visiter le sous-ensemble B pour la première fois au temps n et de se trouver dans l'état y à ce moment là.*

Résultat 10 *$\bar{\pi}_B = 1$ si et seulement si le sous-ensemble B est récurrent, et $\bar{\pi}_B = 0$ si et seulement si le sous-ensemble B est non-récurrent.*

On peut ainsi utiliser le résultat ci-dessus comme définition de la récurrence.

1.1.5 Le potentiel

Définition 14 (Le potentiel d'une fonction)

$$f = G\varphi = \varphi + P\varphi + P^2\varphi + \dots.$$

$G\varphi$ est le **potentiel** *de la fonction φ ($\varphi \geq 0$).*

Résultat 11

$$G\varphi(x) = \sum_y g(x,y)\varphi(y).$$

D'où on tire l'estimation suivante pour $G\varphi$:

Résultat 12

$$G\varphi(x) \sim c_l \sum_y \frac{\varphi(y)}{\| x-y \|^{l-2}},$$

lorsque $\| x \| \longrightarrow \infty$ *et* $\varphi(y)$ *différente de* 0 *pour seulement un nombre fini de points.*

Résultat 13

$$f(x) - M_x f(x(\tau)) = M_x \sum_{k=0}^{\tau-1} \varphi(x(k))$$

1.1.6 Fonctions excessives

Définition 15 *Une* **fonction excessive** *est un fonction super-harmonique et non-négative.*

Résultat 14 *Toute fonction excessive f est la somme d'une fonction harmonique non-négative et du potentiel d'une fonction non-négative. Ie.* $f = G\varphi + h$ *avec* $\varphi = f - Pf \geq 0$ *et* $h = \lim_{n\to\infty} P^n f$.
Par exemple: $\pi_B(x)$ *est une fonction excessive, avec* $\pi_B(x) = G\varphi_B(x) + \bar{\pi}_B(x)$ *où* $\bar{\pi}_B(x) = \lim_{n\to\infty} P^n \pi_B(x)$ *et* $\varphi_B(x) = \pi_B(x) - P\pi_B(x)$.

Définition 16 $A_n = \{$*la particule visite le sous-ensemble* B *après le* $n^{\text{ème}}$ *pas*$\}$

Résultat 15 $\varphi_B(x) = P_x\{A_0/A_1\}$ *est la probabilité que la particule se trouve dans* B *en* $t = 0$ *et la quitte tout de suite après, sans jamais y revenir.*
En outre, on a que $\varphi_B(x) = 0 \ \forall x \notin B$.
De ceci, on tire que $P^n\varphi_B(x) = P_x\{A_n/A_{n+1}\}$ *est la probabilité de visiter* B *pour la dernière fois au* $n^{\text{ème}}$ *pas.*
Ainsi, $G\varphi_B(x)$ *est la probabilité de visiter* B *un nombre fini de fois.*

1.1.7 La capacité

Définition 17 K_B *est la classe de toutes les fonctions* $\varphi \geq 0$ *égales à zéro en dehors de* B *et telles que* $G\varphi \leq 1$.

Résultat 16 *Si* $f = G\varphi$ *avec* $\varphi \in K_B$ *alors* $f(x) = M_x f(x(\tau))$ *où* τ *est le temps de la première visite de la particule en* B.
On a que $f \leq 1$, *ce qui implique que* $M_x f(x(\tau)) \leq P_x\{\tau < \infty\} = \pi_B(x)$, *d'où* $f(x) \leq \pi_B(x)$.

Définition 18 *Si le sous-ensemble B est non-récurrent, alors $\pi_B(x)$ est appelé* **le potentiel d'équilibre** *et $\varphi_B(x)$ est appelée* **la distribution d'équilibre**.

Définition 19 (Capacité) *Pour un sous-ensemble B non-récurrent,*

$$C(B) = \sum_y \varphi_B(y)$$

est la **capacité** *de B.*
Dans la cas où B serait récurrent, on ne peut pas définir le concept de capacité.

Résultat 17 *Si B est non-récurrent, alors $\forall \varphi \in K_B$*

$$\sum_y \varphi(y) \leq \sum_y \varphi_B(y) = C(B)$$

où $\sum_y \varphi(y)$ est la charge totale relative à la distribution $\varphi(y)$.

Ce dernier résultat, justifie l'appellation de capacité.

1.1.8 Un critère de récurrence

La récurrence d'un sous-ensemble B dépend de la vitesse à laquelle croît le nombre de points se trouvant dans une sphère de rayon r lorsque $r \longrightarrow \infty$.
On considère les sphères de centre 0 et de rayon $r = 1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^k, \ldots$.

Définition 20 *On appelle B_k l'ensemble des points de B situés entre les $k^{ème}$ et $(k+1)^{ème}$ sphères (ie. $\{x \in B : 2^{k-1} < \| x \| \leq 2^k\}$).*

Résultat 18 (Principal) *Une condition nécessaire et suffisante pour que B soit récurrent est que la série $\displaystyle\sum_k \frac{C(B_k)}{2^k}$ diverge.*

Pour avoir une idée de l'allure des sous-ensembles récurrents, il convient de mentionner 3 propriétés élémentaires:

1. tout sous-ensemble d'un ensemble non-récurrent est non-récurrent;

2. si un ensemble contient un sous-ensemble récurrent, alors il est lui même récurrent;

3. tout ensemble borné est non-récurrent.

De plus, on a le résultat suivant:

Résultat 19 (lorsque $l = 3$**)** *Le plan $(x(n) = 0)$ ainsi que les axes sont des ensembles récurrents.*
Considérons l'ensemble $B = \{(b_n, 0, 0)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Alors on a:

$$B \text{ est récurrent si } \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{b_n} \text{ diverge et } b_{n+1} - b_n \geq c \log_2 b_n \ (c > 0);$$

$$B \text{ est non-récurrent si } \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{b_n} \text{ diverge.}$$

1.2 Résolution de problèmes

1.2.1 Trame bi-dimensionnelle

Problème 1 *Pour une marche aléatoire symétrique dans un espace à deux dimensions, $g(x, x) = \infty$.*

Solution du problème 1

$$g(x, x) = \sum_{k=0}^{\infty} p(k, x, x) = \sum_{k=0}^{\infty} p(2k, x, x)$$

car $p(2k + 1, x, x) = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$. En effet, il faut effectuer un nombre pair de sauts si partant d'un point, on souhaite y revenir.

Ainsi, en utilisant la représentation intégrale de $p(k, x, x)$, on obtient

$$\begin{aligned} g(x, x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_Q e^{i\theta(x-x)} \Phi^{2k}(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_Q \sum_{k=0}^{\infty} \Phi^{2k}(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_Q \frac{d\theta}{1 - \Phi^2(\theta)} \end{aligned}$$

avec Q définit comme au §1.1.2.

Comme on se trouve dans un espace de dimension 2, $\Phi(\theta) = \left(\frac{1}{2}(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)\right)$ et ainsi

$$\begin{aligned} g(x, x) &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta_1 d\theta_2}{4 - (\cos\theta_1 + \cos\theta_2)^2} \\ &\geq \frac{1}{\pi^2} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{d\theta_1 d\theta_2}{4 - (\cos\theta_1 + \cos\theta_2)^2} \end{aligned}$$

car $4-(\cos\theta_1+\cos\theta_2)^2 \geq 0$ *et on intègre sur un domaine plus petit.*
$\cos$ *est une fonction analytique, on a donc*

$$\cos\alpha = 1-\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^4}{4!}-\frac{\alpha^6}{6!}+\ldots = 1-\frac{\alpha^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{(4K)!}\left(\alpha^{4k}-\frac{\alpha^{4k+2}}{(4k+1)(4k+2)}\right)\right\}.$$

Comme $\alpha^{4k}-\frac{\alpha^{4k+2}}{(4k+1)(4k+2)} = \alpha^{4k}\left(1-\frac{\alpha^2}{(4k+1)(4k+2)}\right) \geq 0$ *si* $|\alpha| \leq \sqrt{30}$
(car $k=1,2,3,\ldots$*), on a que*

$$\cos\alpha \geq 1-\frac{\alpha^2}{2} \geq 0 \text{ dès que } |\alpha| \leq \sqrt{2}.$$

($\pm\sqrt{2}$ *sont les zéros de* $1-\frac{\alpha^2}{2}$*). Ainsi*

$$\begin{aligned} g(x,x) &\geq \frac{1}{\pi^2}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\frac{d\theta_1 d\theta_2}{4-\left(1-\frac{\theta_1^2}{2}+1-\frac{\theta_2^2}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\frac{d\theta_1 d\theta_2}{2(\theta_1^2+\theta_2^2)-\frac{1}{4}\theta_1^4-\frac{1}{4}\theta_2^4-\frac{1}{2}\theta_1^2\theta_2^2} \\ &\geq \frac{1}{2\pi^2}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\frac{d\theta_1 d\theta_2}{\theta_1^2+\theta_2^2} \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variables suivant:
$\theta_1 = \rho\cos\alpha$
$\theta_2 = \rho\sin\alpha,$
et en intégrant sur le cercle inscrit dans le carré $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]\times[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ *on obtient*

$$g(x,x) \geq \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\frac{d\rho d\alpha}{\rho^2}\rho = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\frac{d\rho d\alpha}{\rho} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\frac{d\rho}{\rho}$$

(comme précédemment, il s'agit de l'intégrale d'une fonction positive sur un domaine contenu dans le carré $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]\times[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$*).*
Ainsi on obtient l'inégalité

$$g(x,x) \geq \left|\frac{1}{\pi}\ln\rho\right|_{\rho=0}^{\sqrt{2}} = \infty.$$

Ce qui nous donne finalement

$$g(x,x) = \infty.$$

Problème 2 *Si* $r(x)$ *est la probabilité que la particule, partant de l'état* x *y retourne à un moment ou à un autre, alors*

$$g(x,x) = \sum_{n=0}^{\infty} r(x)^n$$

.

Solution du problème 2 *Soit ξ_k la variable aléatoire définie comme suit:*

$$\xi_k = \begin{cases} 1 & \text{si la particule retourne en } x \ k \text{ fois} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$M_x(\xi_k) = P_x\{\text{la particule retourne en } x \ k \text{ fois}\} = r(x)^k$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} r(n)^n = 1 + M_x(\xi_1 + \xi_2 + \ldots\}.$$

Or le résultat 3 nous dit que $g(x,x) = 1 + M_x(\xi_1 + \xi_2 + \ldots\}$.
Ainsi

$$g(x,x) = \sum_{n=0}^{\infty} r(x)^n.$$

Problème 3 *Pour une marche aléatoire symétrique dans un espace à deux dimensions, l'ensemble constitué de l'unique point $\{x\}$ est récurrent.*

Solution du problème 3 *Par les deux exercices précédents, on a que $r(x) = 1$. En effet, sinon $g(x,x) < \infty$.*

En outre,

$$\{\text{ne pas revenir en } x\} \supset \{\text{atteindre } y \text{ avant } x \text{ et ne pas revenir en } x\}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} P_x\{\text{ne pas revenir en } x\} &= 1 - r(x) \\ &\geq s(x,y)[1 - \pi_x(y)] \\ &= P_x\{\text{atteindre } y \text{ avant } x \text{ et ne pas revenir en } x\} \end{aligned}$$

où $s(x,y)$ est la probabilité d'atteindre y depuis x sans passer par x. Comme $s(x,y) > 0$, $\pi_x(y) = 1$ donc le singleton x est récurrent.

1.2.2 Fonctions harmoniques et positives

Problème 4 *Si une fonction harmonique et non-négative possède un zéro, alors elle est équivalente à la fonction nulle.*

Solution du problème 4 *f est une fonction positive et harmonique. On a donc $f \geq 0$ et $Pf = f$. Or on peut écrire*

$$f(x) = Pf(x) = \frac{1}{2l} \sum_k f(x \pm e_k)$$

(on somme sur tous les voisins de x).
Ainsi, s'il existe $\bar{x}$ tel que $f(\bar{x}) = 0$ on a que $f(\bar{x} \pm e_k) = 0$ $\forall k$ voisins de $\bar{x}$, car $f(x) \geq 0$ $\forall x$.

Supposons $y \in H_l$ quelconque. Soit $\{x_i\}_{i=1}^n$ une suite de points de H^l avec $x_1 = \bar{x}$, $x_n = y$ et x_i voisin de x_{i+1} $\forall i = 1, \ldots, n-1$. (Il est clair qu'une telle suite existe). Ainsi, en utilisant le raisonnement précédent de manière répétée, on remarque que $f(x_i) = 0$ $\forall i = 1, \ldots, n$, d'où $f(y) = 0$, ce qui conclut la preuve.

Problème 5 *La limite d'une suite de fonctions harmoniques est une fonction harmonique.*

Solution du problème 5 *Soit* $\{f_n\}_{n\geq 0}$ *une suite de fonctions harmoniques (ie.* $Pf_n = f_n\ \forall n$*). Supposons que* $\lim_{n\to\infty} f_n$ *existe et est égale à* f*. Alors*

$$Pf(x) = P(\lim_{n\to\infty} f_n(x)) = \sum_{y\in H^l} p(1,x,y) \lim_{n\to\infty} f_n(y).$$

Mais $p(1,x,y) \neq 0$ *seulement si* y *est un voisin de* x*, c'est-à-dire uniquement pour un nombre fini de* $y \in H^l$*. Ainsi, la somme ci-dessus est finie, donc*

$$Pf = \lim_{n\to\infty} \sum_{y\in H^l} p(1,x,y) f_n(y) = \lim_{n\to\infty} Pf_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Donc f *est harmonique.*

Problème 6 *Si* f *est une fonction harmonique et positive, alors*

$$f(x \pm e_k) \leq 2l f(x)$$

où l *est la dimention de la trame.*

Solution du problème 6 *On a* $f \geq 0$ *et* $Pf = f$*. De ceci, on tire que*

$$f(x) = Pf(x) = \frac{1}{2l} \sum_{k=1}^{l} \{f(x+e_k) + f(x-e_k)\}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2l f(x) &= \sum_{k=1}^{l} \{f(x+e_k) + f(x-e_k)\} \\ &\geq f(x+e_k) + f(x-e_k) = f(x \pm e_k)\ \forall k = 1, \ldots, l \end{aligned}$$

car $f(x) \geq 0\ \forall x$*.*

Problème 7 *Si une fonction harmonique est bornée inférieurement (supérieurement), alors elle est équivalente à une constante.*

Solution du problème 7 *Les problèmes 1 à 16 de [1] permettent de montrer que toute fonction harmonique positive est constante. De ce résultat, on tire que toute fonction harmonique bornée supérieurement ou inférieurement est constante.*

En effet, si f *est une fonction harmonique bornée supérieurement, de borne* M*, alors* $M - f$ *est une fonction harmonique positive, donc constante, donc* f *est constante.*

Si maintenant f *est une fonction harmonique bornée inférieurement,* $-f$ *sera une fonction harmonique bornée supérieurement, donc constante.*

1.2.3 Propriétés des potentiels

Le terme potentiel (Symbole $G\varphi$) signifie ici, sauf indication contraire, un potentiel fini, d'une fonction non-négative.

Problème 8 *Il existe des points pour lesquels le potentiel prend des valeurs arbitrairement petites (aussi proches de zéro qu'on le désire).*

Solution du problème 8 *Soit c une constante, $c > 0$. Supposons que $G\varphi \geq c$. Alors on a que $P^n G\varphi \geq P^n c = c$.*
Or

$$P^n G\varphi = P^n(\varphi + \varphi + P^2\varphi + \ldots) = P^n\varphi + P^{n+1}\varphi + \ldots = G\varphi - \varphi - P\varphi - \ldots - P^{n-1}\varphi$$

Ainsi

$$\lim_{n\to\infty} P_n G\varphi = 0$$

ce qui contredit l'existence de c.

1.2.4 Fonctions excessives

Problème 9 *La représentation d'une fonction excessive sous la forme $f = G\varphi + h$, où $\varphi, h \geq 0$, et h est une fonction harmonique, est unique.*

Solution du problème 9 *Supposons qu'il existe φ_1, φ_2, h_1, h_2 telles que $f = G\varphi_1 + h_1 = G\varphi_2 + h_2$. Alors on a*

$$G\varphi_1 - G\varphi_2 = h_2 - h_1.$$

En appliquant P^n à cette expression, on obtient, comme au problème 8, que $0 = h_2 - h_1$, ce qui nous donne finalement

$$G\varphi_1 = G\varphi_2 \text{ et } h_1 = h_2,$$

donc l'unicité de la représentation.

1.2.5 Propriétés de la capacité

Les ensembles considérés ici sont supposés être non récurrents.

Problème 10 *Si $A \subset B$, alors $C(A) \leq C(B)$.*

Solution du problème 10 $A \subset B \Rightarrow \varphi_A \in K_B$

$$\Rightarrow C(A) \leq C(B).$$

Problème 11

$$C(A \cup B) \leq C(A) + C(B).$$

Solution du problème 11 *Supposons que* $A \cap B = \emptyset$.

$$\varphi_{A \cup B} \leq \varphi_A + \varphi_B$$

En effet,
si $x \notin A \cup B$ *alors* $\varphi_A(x) = \varphi_B(x) = \varphi_{A \cup B}(x) = 0$.
si $x \in A$ *alors* $\varphi_B(x) = 0$,

$$\varphi_A(x) = \pi_A(x) - P\pi_A(x) = 1 - \sum_{y \in E} p(1, x, y)\pi_A(y)$$

$$\varphi_{A \cup B}(x) = \pi_{A \cup B}(x) - P\pi_{A \cup B}(x) = 1 - \sum_{y \in E} p(1, x, y)\pi_{A \cup B}(y)$$

Or $\pi_A(y) \leq \pi_{A \cup B}(y)$, *ainsi*

$$\varphi_A(x) \geq \varphi_{A \cup B}(x).$$

Il en va de même pour $x \in B$. *De ceci, on tire que*

$$C(A \cup B) \leq C(A) + C(B).$$

Maintenant, si $A \cap B \neq \emptyset$, *alors*

$$C(A \cup B) = C(A \cup B/A) \leq C(A) + C(B/A) \leq C(A) + C(B)$$

la dernière inégalité étant prouvée au problème 10.

Chapitre 2

Le problème de l'arrêt optimal

2.1 Définitions et résultats

2.1.1 Le problème du choix optimal

Problème: On examine n objets dans un ordre aléatoire. On peut accepter ou rejeter un objet. Un objet rejeté l'est définitivement (ie. lorsque l'on décide de continuer, on décide également de rejeter l'objet. Accepter un objet signifie arrêter la chaîne). Le but est de trouver le meilleur des n objets.

Données: Soient n objets distincts, ordonnés selon leur qualité.
Ces objets peuvent être représentés sur une droite, de sorte à ce que les objets les plus à droite sont ceux de meilleur qualité. a_1 est le premier objet que l'on examine.
Chacun des n objets a la même probabilité d'être a_1.
De même a_2 est le deuxième objet que l'on examine et chacun des $n-1$ objets restants a la même probabilité d'être a_2.
Et ainsi de suite.

Résultat 20 *Chacune des $n!$ permutations de $a_1, \ldots, a_n$ a la même probabilité de survenir, soit $\frac{1}{n!}$.*

Définition 21 *On définit $R(i,k)$ le rang relatif de l'objet i parmi les k premiers objets examinés, ordonnés selon leur qualité. Par exemple si $R(1,5) = 1$ alors le 1^{er} objet est le meilleur des 5 premiers objets examinés.*
En particulier, $R(k,k)$ est simplement noté $R(k)$. On dira que $R(k)$ est le rang relatif de l'objet k.

Le problème consiste donc à reconnaître (ou "trouver") le point le plus à droite de notre ligne de qualité (ie. a_k tel que $R(k,n) = 1$) au moment où il apparaît, ainsi que d'indiquer la méthode permettant d'y arriver avec la plus grande probabilité.

Résultat 21 *Si la position de k objets, relativement à la droite, est déjà déterminée, alors la probabilité pour que le $k+1^{ème}$ soit dans un des $k+1$ intervalles est*

$\frac{1}{k+1}$. *En effet, la position des $k+1$ points correspond à une des $(k+1)!$ permutations équiprobable et on connaît déjà la position de k points, c'est à dire que l'on conditionne par rapport à un événement de probabilité $\frac{1}{k!}$.*

Définition 22 *Un point a_k est dit maximal si $R(k) = 1$. (a_1 est toujours maximal et le point cherché, celui se trouvant le plus à droite de $a_1, \ldots, a_n$, est toujours maximal).*

Lorsqu'un point maximal a_k a été trouvé, la décision de continuer ou de s'arrêter ne dépend que de l'indice k du point (et du nombre total n de points). Continuer signifie refuser le point maximal sur lequel on est tombé et arrête la chaîne signifie choisir ce point.

Définition 23 *Si $a_1, \ldots, a_k$ ont déjà été examinés, on définit $A_1, \ldots, A_k$ une renumérotation ordonnée de $a_1, \ldots, a_k$.*
a_k maximal coïncide avec A_k.

Résultat 22 *Toute permutation de $A_k, a_{k+1}, \ldots, a_n$ est indépendante de la position de $a_1, \ldots, a_{k-1}$, car chaque point apparaît avec la même probabilité dans chacun des $k+1$ intervalles donnés par $A_1, \ldots, A_k$.*

Définition 24 *$x(i)$ est l'indice du $i+1^{ème}$ point maximal, avec $x(0) = 1$.*

Résultat 23 *$x(i)$ est une variable aléatoire provenant d'une chaîne de Markov.*
$P\{x(i+1) = l \mid x(0), \ldots, x(i)\} = P\{x(i+1) = l \mid x(i) = k\}$ ne dépend que de k (et de n).

Définition 25 *$p(k,l) = P\{x(i+1) = l \mid x(i) = k\}$ est appelée la* **probabilité de transition de la chaîne de Markov**.

Définition 26

$$1 - \sum_l p(k,l)$$

est la probabilité d'extinction de la particule.

L'extinction de la particule en k signifie qu'une fois dans un état k, la variable aléatoire $x(i)$ ne peut plus transiter vers un autre état. C'est-à-dire que k est le dernier état maximal que l'on rencontre. Il y a donc extinction de la chaîne de Markov lorsque l'on a atteint le point cherché; il s'agit de l'objet a_k tel que $R(k,n) = 1$.

Résultat 24 *Si $k \geq l$ alors $p(k,l) = 0$;*
Si $k < l$ alors

$$p(k,l) = \frac{k}{l(l-1)} \qquad (1 \leq k < l \leq n).$$

En effet,

$$p(k,l) = \frac{P\{x(i) = k,\ x(i+1) = l\}}{P\{x(i) = k\}} \qquad (k,l = 1, \ldots, n).$$

Stratégies: $\{1, 2, \ldots, n\}$ a 2^n sous-espaces. Une stratégie possible consiste à s'arrêter lorsque $x(i)$ est dans l'un de ces 2^n sous-espaces.

Par exemple, si $x(i)$ est la première valeur de $x(0), x(1), \ldots$ qui soit plus grande que k, alors on pose $\xi = x(i)$. La stratégie consiste à s'arrêter et à accepter a_ξ.

Définition 27 *$q(k)$ est la probabilité que, sachant $x(i) = k$, $R(k,n) = 1$. C'est-à-dire que le $k^{ème}$ objet soit l'objet que l'on cherche. On a que $q(k)$ est la probabilité d'extinction en k.*

Résultat 25

$$\begin{aligned} q(k) &= 1 - \sum_{l=k+1}^{n} p(k,l) = 1 - \sum_{l=k+1}^{n} \frac{k}{l(l-1)} = 1 - k \sum_{l=k+1}^{n} \left(\frac{1}{l-1} - \frac{1}{l} \right) \\ &= 1 - k\frac{n-k}{kn} = \frac{k}{n} \qquad\qquad (1 \le k \le n). \end{aligned}$$

Définition 28 *$q'(k)$ est la probabilité que, sachant $x(i) = k$, on ait $R(x(i+1), n) = 1$. $q'(k)$ est la probabilité d'extinction après la prochaine transition.*

Résultat 26 *Par ce qui précède,*

$$q'(k) = \sum_{l=k+1}^{n} p(k,l) q(l)$$

et ainsi, en développant, on obtient

$$\begin{aligned} q'(k) &= \sum_{l=k+1}^{n} \frac{k}{l(l-1)} \frac{l}{n} = \frac{k}{n} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{n-1} \right) \\ &= q(k) \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{n-1} \right) \end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{n-1}$ est une suite décroissante en k, avec $\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{n-1} > 1$ si $n > 1$ et $k = 1$, et $\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{n-1} = 0$ si $k = n$, il existe $k_n \in 1, 2, \ldots, n$ tel que $\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{n-1} < 1$ si $k \ge k_n$ et $n \ge 2$.

Résultat 27 (Théorème) *Soit k_n tel que $q'(k) \le q(k)$ $\forall k = k_n, \ldots, n$. Alors $\Gamma_n = \{k_n, \ldots, n\}$ correspond à la stratégie optimale. ie. tant que $x(i) < k_n$, on continue et dès que $x(i) \ge k_n$ on arrête la chaîne.*

Si $n = 1$: cas trivial;
si $n = 2$: on a une chance sur deux de s'arrêter sur le bon objet;
si $n \ge 3$ alors $q'(1) = q(1) \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right) > q(1)$. Et ainsi $k_n > 1$.

2.1.2 Arrêt optimal d'une chaîne de Markov

Dans le paragraphe précédent, on a développé une stratégie permettant de trouver, parmi n objets, le meilleur avec la probabilité la plus grande. Ceci a été effectué à l'aide d'une chaîne de Markov particulière. Dans la suite de ce chapitre, on va mettre en place une stratégie d'arrêt optimal pour une chaîne de Markov quelconque.

Définition 29 *Considérons E un espace de phase, fini ou dénombrable.*
$p(x,y)$ est la probabilité de transition de x à y.
La définition d'une telle probabilité entraîne la définition d'une chaîne de Markov.

Définition 30 *Si $\sum_{y\in E} p(x,y) < 1$, $x \in E$ alors*

$$q(x) = 1 - \sum_{y\in E} p(x,y)$$

est la probabilité d'extinction.
S'il y a extinction, la chaîne de Markov est interrompue.

Définition 31 *$x(n)$ est la position de la particule au temps n. Si au moment où l'on arrête la chaîne la particule se trouve en x, on reçoit $f(x)$. La fonction f s'appelle la prime. Si la chaîne ne s'arrête pas, la prime est de 0. On demande en général que f soit bornée.*

Définition 32 *Un temps de Markov est une variable aléatoire τ à valeurs entières pour laquelle la probabilité de l'événement $\{\tau = t\}$ est uniquement déterminée par $x(0), x(1), \ldots, x(t)$.*

Choisir un temps τ est équivalent à choisir une stratégie d'arrêt.
Si τ est choisi, le gain est la variable aléatoire $f(x(\tau))$. Il faut donc choisir τ tel que $f(x(\tau))$ soit maximal.
La marche à suivre consiste donc à:

1. calculer $v(x) = \sup_\tau M_x f(x(\tau))$
   ($v(x)$ est appelée la valeur du jeu);

2. trouver τ_0 tel que $v(x) = M_x f(x(\tau_0))$
   (τ_0 est la stratégie optimale).

2.1.3 Fonctions excessives

Considérons une prime f telle que la stratégie optimale consiste à s'arrêter tout de suite. f doit satisfaire l'inégalité $f(x) \geq M_x f(x(\tau))$ $\forall\tau$ temps markovien, $x \in E$. Si l'on désire satisfaire cette condition pour $\tau = \infty$, on obtient $f(x) \geq 0$, alors que pour $\tau = 1$, on obtient $f(x) \geq Pf(x)$.

Définition 33 *On dira que f est excessive si $f(x) \geq 0$ et $f(x) \geq Pf(x)$, $x \in E$.*
On remarquera l'analogie avec la notion définie au chapitre 1.

Résultat 28 *Si f est une fonction excessive, alors*

$$f(x) \geq M_x f(x(\tau)) \quad \forall \tau \text{ temps markovien}$$

Résultat 29 *Si τ, τ' sont deux temps markoviens, $\tau' \geq \tau$ et f une fonction excessive, alors*

$$M_x f(x(\tau)) \geq M_x f(x(\tau'))$$

Résultat 30 *Si v est une fonction excessive et τ le premier temps de visite d'un ensemble Γ, alors la fonction $h(x) = M_x v(x(\tau))$ est aussi excessive.*

2.1.4 La valeur d'un jeu

Définition 34 *Si f est une prime, $v(x) = \sup_\tau M_x f(x(\tau))$ est appelée la valeur du jeu.*

Résultat 31 *Soit f une prime et g une fonction excessive avec $f \leq g$.*
Alors $\forall$ stratégie τ

$$M_x f(x(\tau)) \leq M_x g(x(\tau)) \leq g(x)$$

ainsi

$$v(x) = \sup_\tau M_x f(x(\tau)) \leq g(x).$$

Résultat 32 *v est une fonction excessive.*

Ainsi, v est une fonction excessive et majore f (il suffit de prendre $\tau = 0$). Par le résultat 31, on a que v est la plus petite fonction excessive qui majore f.

2.1.5 La stratégie optimale

Définition 35 $\Gamma = \{x \in E \mid f(x) = v(x)\}$ *est appelé l'ensemble support.*

Résultat 33 *Dans le cas où E est fini, la stratégie optimale τ_0 est le temps de la première visite de la particule en Γ.*

Résultat 34 *Dans le cas où E est dénombrable, on considère l'ε-support*
$\Gamma_\varepsilon = \{x \in E \mid v(x) - f(x) \leq \varepsilon\}$. On définit alors τ_ε, le temps de la première visite en Γ_ε. Ainsi,

$$M_x f(x(\tau_\varepsilon)) \geq v(x) - \varepsilon$$

c'est-à-dire que l'ε-support permet d'obtenir un gain arbitrairement proche de la valeur du jeu.

2.1.6 Application à une marche aléatoire avec absorption et problème de choix optimal

Soit a un entier strictement positif. On considère tous les entiers compris entre 0 et a. La probabilité de sauter à gauche ou droite est de $\frac{1}{2}$, excepté pour les points 0 et a pour lesquels il y a absorption (ie. $q(0) = q(a) = 1$). Soient encore une prime f et v la plus petite fonction concave telle que $v \geq f$.

La stratégie optimale consiste à s'arrêter dès que $f(x) = v(x)$. Pour justifier cela, il suffit de connaître le résultat suivant:

Résultat 35 *Dans le cas d'une marche aléatoire, les fonctions excessives sont concaves. En effet,*

$$Pf(x) \leq f(x) \Leftrightarrow \frac{f(x-1)+f(x+1)}{2} \leq f(x)$$

et $f(0) \leq f(0)$, $f(a) \leq f(a)$.

Résultat 36 *Il a été montré que pour le problème du choix optimal, on a*

$$p(k,l) = \begin{cases} \frac{k}{l(l-1)} & si \quad l > k \\ 0 & si \quad l \leq k \end{cases} \qquad et \qquad f(k) = \frac{k}{n}.$$

De ceci, on tire que la valeur du jeu est

$$v(k) = \max\left\{\frac{k}{n}; k\sum_{l=k+1}^{n} \frac{v(l)}{l(l-1)}\right\}.$$

$\displaystyle\sum_{l=k+1}^{n} \frac{v(l)}{l(l-1)}$ *se calcule de manière récursive, en partant de* $v(n)$.

2.2 Résolution de problèmes

2.2.1 Choix d'un des deux meilleurs objets

Dans ce paragraphe, on va étendre la notion de choix optimal au choix d'un des 2 meilleurs objets parmi n. Pour cela, il faut une nouvelle définition des points maximaux. On dira qu'un point a_k est maximal si, le rang relatif du $k^{\text{ème}}$ objet est soit 1, soit 2. Comme avant, il va falloir prendre une décision chaque fois que l'on tombe sur un point maximal, les autres points ne nous intéressant pas[1].

On définit une chaîne de Markov $x(i)$ comme étant l'indice des $i+1^{\text{ème}}$ points maximaux[2]. $x(i)$ doit aussi tenir compte du rang relatif des objets. On note ce rang

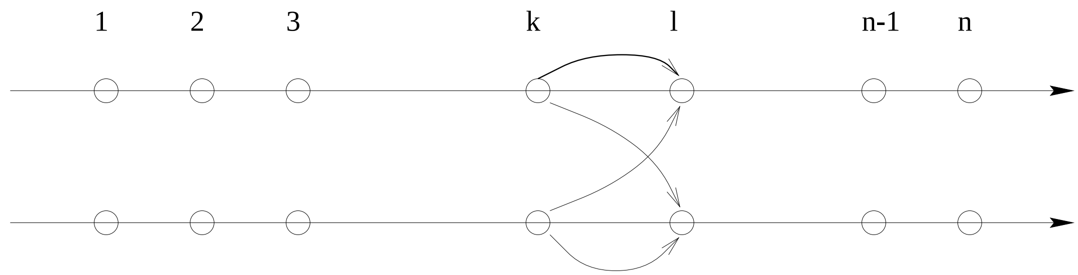

FIG. 2.1 – *Transition dans la chaîne*

en indice. Par exemple, si $R(k) = 2$, alors $x(i) = k_2$, l'indice représentant le rang relatif de l'objet a_k.

Problème 12 *Calculer la probabilité de transition $p(k_i, l_j)$ de la chaîne $x(i)$, indépendamment des rangs relatifs i et j des objets a_k et a_l.*

Solution du problème 12 *Montrons tout d'abord le théorème suivant:*
la suite $\{R(k), k = 1 \dots, n\}$ est indépendante et uniformément distribuée sur $\{1, \dots, k\}$. En effet,

$$P\{R(i) = j\} = \frac{1}{i} \qquad \forall j = 1, \dots, i$$

car $R(i) = j$ correspond à une des $(i-1)!$ permutations de $a_1, \dots, a_i$ où a_i est fixé en $j^{ème}$ position et le nombre total de permutations possibles est de $i!$. Comme toutes les permutations de $a_1, \dots, a_i$ sont équiprobables (résultat 20), on obtient la relation. On vient donc de démontrer que la suite $\{R(k), k = 1 \dots, \}$ est uniformément distribuée sur $\{1, \dots, k\}$.
De plus,

$$\prod_{i=1}^{n} P\{R(i) = j_i\} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \frac{1}{n!} \quad j_i = 1, \dots, i.$$

Or

$$P\{R(1) = i_1, \dots, R(n) = i_n\} = \frac{1}{n!}$$

car $\{R(1) = i_1, \dots, R(n) = i_n\}$ correspond a une permutation de $a_1, \dots, a_n$, ce qui démontre le théorème.

$$p(k_i, l_j) = P\{R(k) = i, R(k+1) \geq 3, \dots, R(l-1) \geq 3, R(l) = j \mid R(k) = i\}$$

où $i_k, i_l = 1, 2$. Par le théorème, on a que

$$p(k_i, l_j) = \frac{\frac{1}{k}\frac{k-1}{k+1}\frac{k}{k+2} \cdot \dots \cdot \frac{l-3}{l-1}\frac{1}{l}}{\frac{1}{k}} = \frac{k(k-1)}{l(l-1)(l-2)} \qquad \forall i, j = 1, 2.$$

On remarque que $p(k_i, l_j)$ est indépendante de i et j.

1. Il y a déjà deux objets de meilleur qualité.
2. Par convention $x(0) = 1$.

Au passage, on remarque que $p(k_i, l_j)$ correspond à la probabilité de transition de k à l dans le cas où k est de rang relatif i et j de rang relatif j. Ces transitions sont illustrées dans la figure 2.1 où la première ligne représente les objets de rang relatif 1 et la 2$^{\text{ème}}$ ceux de rang relatif 2. La transition de k à l en général (ie. sans tenir compte du rang relatif des objets) est $2p(k_1, l_1)$. En effet, dans le cas où le rang relatif de l'objet a_k est connu, c'est clair et dans le cas où il ne l'est pas, on a

$$\begin{aligned} p(k,l) &= P\{x(i+1)=l \mid x(i)=k\} = \frac{P\{x(i)=k, x(i+1)=l\}}{P\{x(i)=k\}} \\ &= \frac{4P\{x(i)=k_{i_1}, x(i+1)=l_{i_2}\}}{P\{x(i)=k_{i_1}\}} = 2p(k_1,l_1). \end{aligned}$$

Problème 13 *Trouver la probabilité de succès (prime) f lorsque l'on arrête la chaîne à un point donné.*

Solution du problème 13 *Deux cas se présentent:*
si $R(k)=1$:

$$\begin{aligned} f_1(k) &= P\{R(k,n)=1 \mid R(k)=1\} + P\{R(k,n)=2 \mid R(k)=1\} \\ &= \frac{P\{R(k)=1, R(k+1)\geq 2, \ldots, R(n)\geq 2\}}{P\{R(k)=1\}} \\ &\quad + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{P\{R(k)=1, R(k+1)\geq 2, \ldots, R(j-1)\geq 2, R(j)=1, R(j+1)\geq 3, \ldots, R(n)\geq 3\}}{P\{R(k)=1\}} \\ &= \frac{\frac{1}{k}\frac{k}{k+1}\frac{k+1}{k+2}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n}}{\frac{1}{k}} + \sum_{j=k+1}^{n}\left\{\frac{\frac{1}{k}\frac{k}{k+1}\frac{k+1}{k+2}\cdot\ldots\cdot\frac{j-2}{j-1}\cdot\frac{1}{j}\cdot\frac{j-1}{j+1}\frac{j}{j+2}\cdot\ldots\cdot\frac{n-3}{n-1}\frac{n-2}{n}}{\frac{1}{k}}\right\} \\ &= \frac{k}{n} + \frac{k(n-k)}{n(n-1)} \\ &= \frac{k(2n-k-1)}{n(n-1)}. \end{aligned}$$

si $R(k)=2$:

$$\begin{aligned} f_2(k) &= 1 - 2\sum_{j=k+1}^{n} p(k_1, j_1) = 1 - 2\sum_{j=k+1}^{n}\frac{k(k-1)}{j(j-1)(j-1)} \\ &= 1 - 2k(k-1)\sum_{j=k+1}^{n}\left\{\frac{1}{2j} - \frac{1}{j-1} + \frac{1}{2(j-2)}\right\} \\ &= 1 - k(k-1)\left\{\sum_{j=k+1}^{n}\frac{1}{j} - \sum_{j=k}^{n-1}\frac{2}{j} + \sum_{j=k-1}^{n-2}\frac{1}{j}\right\} \\ &= 1 - k(k-1)\left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{n-1}\right\} \\ &= 1 - \frac{n^2-n+k-k^2}{n(n-1)} \\ &= \frac{k(k-1)}{n(n-1)}. \end{aligned}$$

A ce stade, on peut encore développer la valeur du jeu. En effet,

$$v \geq 0, \quad v \geq f, \quad et \quad v \geq Pv$$

$$\Rightarrow \quad v_i(k) = \max\left\{ f_i(k);\ \sum_{j=k+1}^{n} p(k,l)[v_1(k) + v_2(k)] \right\}$$

où i est le rang relatif de l'objet a_k.

Problème 14 *On appelle Γ_j l'ensemble des points de rang relatif j pour lesquels les fonctions v et f coïncident.*

Γ_2 est de la forme $\{m_2, m_2+1, \ldots, n\}$ avec m_2 le plus petit entier plus grand ou égal à $\frac{2n+1}{3}$. Γ_1 contient tous les nombres $m_2, m_2+1, \ldots, n$.

Solution du problème 14

$$\begin{aligned}
\sum_{j=k+1}^{n} p(k_{i_1}, j_{i_2})[f_1(j) + f_2(j)] &= \sum_{j=k+1}^{n} \frac{k(k-1)}{l(l-1)(l-2)} \left[\frac{l(l-1)}{n(n-1)} + \frac{(2n-l-1)}{n(n-1)}\right] \\
&= \frac{2k(k-1)}{n} \sum_{j=k+1}^{n} \left\{\frac{1}{l-2} - \frac{1}{l-1}\right\} \\
&= \frac{2k(k-1)}{n} \left[\frac{1}{k-1} - \frac{1}{n-1}\right] \\
&= \frac{2k(n-k)}{n(n-1)} \\
&= \frac{k(k-1)}{n(n-1)} \cdot \frac{2(n-k)}{k-1} \;=\; f_2(k)\frac{2(n-k)}{k-1}
\end{aligned}$$

De plus, on remarque que $v_2(n) = f_2(n)$. Ainsi, tant que $\frac{2(n-k)}{k-1} \leq 1$ $v_2(k) = f_2(k)$ (on calcule les $v_2(k)$ de manière récursive en commancçant par $v_2(n)$, puis $v_2(n-1)$, etc). On constate donc que pour les k tels que $\frac{2(n-k)}{k-1} > 1$ $f_2(k) < v_2(k)$. Finalement $\Gamma_2 = \{m_2, m_2+1, \ldots, n\}$ avec m_2 le plus petit entier plus grand ou égal à $\frac{2n+1}{3}$.

On a clairement $\Gamma_1 = \{m_1, \ldots, n\}$. Comme $f_1(n) = v_1(n)$ et $f_1 \geq f_2$, $m_1 \leq m_2$ et ainsi $\Gamma_1 \supset \Gamma_2$.

2.2.2 Généralisation du problème du choix optimal

Le but dans ce paragraphe est de trouver avec la probabilité maximale un des s meilleurs objets parmi n. On appelle Γ_j le support (l'ensembles des points où $f = v$) lorsque l'on a trouvé un objet dont le rang relatif est j. On désigne par $f_j(k)$ la probabilité de succès si l'on choisit l'objet a_k alors que son rang relatif est j.

Problème 15 *La probabilité de transition $p(k_{i_1}, l_{i_2})$ de la chaîne $x(i)$ (désignant les points maximaux) ne dépend pas du rang relatif des objets a_k ou a_j.*

Solution du problème 15 *Ceci découle du théorème démontré au problème 12. En effet,*

$$p(k_{i_1}, l_{i_2}) = P\{R(k) = i_1, R(k+1) \geq s+1, \ldots, R(l-1) \geq s+1, R(l) = i_2 \mid R(k) = i_1\},$$

avec $i_k, i_l = 1, \ldots, s$.

Problème 16 *La fonction* $f_j(k)$ *est croissante en* k *et décroissante en* j.

Solution du problème 16

$$f_j(k) = P\{R(k,n) = j, \ldots, s \mid R(k) = j\} \quad avec \quad j = 1, \ldots, s$$

Pour j *fixé, on a*

$$P\{R(k+1,n) = j, \ldots, s \mid R(k+1) = j\} \geq P\{R(k,n) = j, \ldots, s \mid R(k) = j\}$$

car on a dans les deux cas trouvé un objet de rang relatif j*, mais dans le premier cas, il n'y a plus que* $n-k-2$ *objets à examiner, alors que dans le deuxième, il y en a* $n-k-1$ *et tous les objets ont la même probabilité de venir s'intercaler devant l'objet* k.
Pour k *fixé, on a*

$$P\{R(k,n) = j+1, \ldots, s \mid R(k) = j+1\} \leq P\{R(k,n) = j, \ldots, s \mid R(k) = j\}$$

car si on arrête la chaîne après avoir examiné k *objets, plus le rang relatif de l'objet est bas, plus on a de chances d'atteindre l'objectif.*

2.2.3 Arrêt optimal d'une suite de variables aléatoires

Dans ce paragraphe, on va s'occuper d'une suite de n variables aléatoires $\xi_1, \ldots, \xi_n$, indépendantes et prenant des valeurs dans un ensemble X. Soit $f(k,x)$ ($k = 1, \ldots, n$ et $x \in X$) une fonction non-négative. On peut arrêter les observations en un temps k quelconque. Dans ce cas, on a un gain de $f(k, \xi_k)$. Le but est de trouver une règle d'arrêt optimale telle que l'espérance de gain soit maximale.

Problème 17 *Si un objet* a_k *occupe la* $j^{ème}$ *place en qualité parmi les objets* $a_1, \ldots, a_k$, *on pose*

$$\xi_k = \begin{cases} j & si \quad 1 \leq j \leq s \\ s+1 & si \quad j \geq s+1. \end{cases}$$

Alors les variables aléatoires $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *sont indépendantes et la probabilité de succès* $f(k,j)$ *si on choisit l'objet* a_k *sachant que* $\xi_k = j$ *(la probabilité de succès si le* $k^{ème}$ *objet examiné est a un rang relatif de* j*) est*

$$f(k,j) = \begin{cases} f_j(k) & si \quad 1 \leq j \leq s \\ 0 & si \quad j \geq s+1. \end{cases}$$

Solution du problème 17 *Il faut montrer que*

$$P\{\xi_1 = r_1, \ldots, \xi_n = r_n\} = \prod_{i=1}^{n} p\{\xi_i = r_i\}.$$

Pour cela, on pose les événements suivants:

$$A_i = \begin{cases} R(i) = r_i & si \quad r_i \leq s \\ R(i) \geq s+1 & si \quad r_i = s+1. \end{cases}$$

On a que $P\{\xi_1 = r_1, \ldots, \xi_n = r_n\} = P\{A_1, \ldots, A_n\}$*. Grâce au théorème du problème 12, on a que*

$$P\{A_1, \ldots, A_n\} = \prod_{i=1}^{n} P\{A_i\}$$

et comme $P\{A_i\} = P\{\xi_i = r_i\}$*, on a le résultat.*

2.2.4 Arrêt optimal d'une chaîne de Markov

Problème 18 *Si pour une chaîne ayant un nombre dénombrable d'états possibles, l'ensemble support* Γ *est accessible avec probabilité* 1 *depuis n'importe quel état* x*, alors arrêter la chaîne lors de la première visite en* Γ *est la stratégie optimale.*

Solution du problème 18 *Comme on atteint l'ensemble* Γ *avec probabilité* 1, $\tau_0 < \infty$ *p.s. et* τ_ε *est croissante en* ε*, avec* $\tau_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \tau_0$.

Comme $v(x) \geq M_x f(x(\tau_\varepsilon))$ *on peut appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue et on obtient*

$$M_x f(x(\tau_\varepsilon)) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} M_x f(x(\tau_0)).$$

Comme $M_x f(x(\tau_\varepsilon)) \geq v(x) - \varepsilon$*, on obtient finalement*

$$M_x f(x(\tau_0)) = v(x)$$

qui montre que τ_0 *est la stratégie optimale.*

Conclusion

Dans ce travail, nous avons donné une résolution possible du problème de l'arrêt optimal en trouvant un critère qui permet de maximiser l'espérance de gain. Ainsi, nous pouvons dire que l'objectif fixé a été atteint.

Une application possible de cette théorie est l'évaluation d'une option américaine. En effet, le prix que l'on est en droit d'attendre d'un tel titre devrait correspondre au gain que l'on réalise en exécutant l'option. Bien entendu, ce gain dépend du moment où l'on décide d'effectuer l'opération et devient par conséquent une variable aléatoire. Ainsi, sous peine d'arbitrage, le prix de l'option devrait correspondre au maximum sur toutes les stratégies de l'espérance de gain. Il s'agit donc de résoudre un problème d'arrêt optimal.

Bibliographie

[1] Evgenii B. Dynkin and Aleksandr A. Yushkevich, translated from Russian by James S. Wood, *Markov Processes*, Plenum Press, New York, 1969.

Index