Projet de Semestre

été 2005

Espaces de Sobolev et problèmes variationnels

Olivier Isely

Professeur Responsable:

prof. Bernard Dacorogna

Table des matières

Résumé 2
Table des notations 2

Chapitre 1. Préliminaires 3
1. Les espaces de fonctions continues et de classe C^k 4
2. Les espaces de Hölder 5
3. Les espaces L^p 7
4. Notions de convergence 9

Chapitre 2. Les espaces de Sobolev 11
1. Définitions et propriétés 12
2. Le théorème de Sobolev-Rellich 17

Chapitre 3. Le problème de Dirichlet 19
1. Existence et unicité des solutions 20
2. Un théorème général d'existence et d'unicité 22
3. Régularité des solutions 23

Bibliographie 27

Résumé

Le but de ce travail est de résoudre l'équation elliptique $\Delta u = -f$. Pour y parvenir, nous commencerons par faire quelques rappels sur les espaces de fonctions continues et les espaces de Hölder. Puis nous parlerons des espaces L^p et nous expliciterons leurs propriétés importantes. Enfin, introduirons une définition importante en mathématiques : la notion d'espace de Sobolev.

Ces préliminaires achevés, nous prouverons alors l'existence d'une solution au problème de Dirichlet

$$\inf\left\{I(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2 - f(x)u(x)dx \mid u \in W_0^{1,2}(\Omega)\right\}$$

Nous verrons que la solution est même $W^{2,2}(\Omega)$ et nous montrerons sa régularité.

Dans ce travail, nous nous intéresserons également à étendre le problème de Dirichlet et nous énoncerons un théorème général d'existence et d'unicité de solutions.

Il est important de noter que plusieurs autres problèmes sont liés à ceux-ci ; notamment la question des surfaces minimales, que nous ne traiterons toutefois pas ici.

Table des notations

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long du travail:

$\mathbb{N}$	$\{0, 1, 2, 3, ...\}$
$\mathbb{R}_+^*$	$]0, +\infty[$
$\mathbb{R}_+$	$[0, +\infty[$
$\lim_{y\to 0_+}$	$\lim_{y\to 0}$ lorsque $y > 0$
$\lim_{y\to 0_-}$	$\lim_{y\to 0}$ lorsque $y < 0$
∇u	$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$
Δu	$\displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$

CHAPITRE 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous poserons les définitions et les résultats de base qui nous serons utiles par la suite. De manière générale, nous considérons le lecteur initié à ces notions et ainsi nous ne démontrerons rien.

THÉORÈME 1.1. *(Hahn-Banach) Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application vérifiant*

$$p(\lambda x) = \lambda p(x), \quad \forall x \in E, \quad \forall \lambda > 0$$

et

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in E$$

Soient d'autre part $G \subseteq E$ un sous-espace vectoriel et $g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire telle que

$$g(x) \leq p(x), \quad \forall x \in G$$

Alors il existe une forme linéaire f définie sur E qui prolonge g et telle que

$$f(x) \leq p(x), \quad \forall x \in E$$

La preuve de ce théorème est basée sur l'axiome du choix, et plus précisément le lemme de Zorn. Pour plus de détails, on pourra consulter [**1**].

1. Les espaces de fonctions continues et de classe C^k

DÉFINITION 1.2. Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Une fonction $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite continue si $\forall x_0 \in \Omega$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que

$$x \in E, \|x - x_0\| < \delta \Longrightarrow |u(x) - u(x_0)| < \varepsilon$$

où la norme de $\mathbb{R}^n$ est la norme euclidienne.

DÉFINITION 1.3. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$. On définit :

$C^0(\Omega) := \quad \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ est continue } \}$

$C^0(\overline{\Omega}) := \quad \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ est continue et se prolonge continûment à } \overline{\Omega}\}$

EXEMPLE 1.4. La fonction $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc $f \in C^0(\Omega)$, où $\Omega = \mathbb{R}_+^*$.

De plus, f se prolonge continûment à $\overline{\Omega} = \mathbb{R}_+$ en posant $f(0) = 0$. Ainsi $f \in C^0(\overline{\Omega})$.

DÉFINITION 1.5. Sur $C^0(\overline{\Omega})$, on pose l'application

$$\begin{aligned} \|.\|_{C^0} : C^0(\overline{\Omega}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \sup_{x \in \Omega} |u(x)| \end{aligned}$$

On peut alors vérifier que $\|.\|_{C^0}$ ainsi définie est une norme sur $C^0(\overline{\Omega})$. De plus, $(C^0(\overline{\Omega}), \|.\|_{C^0})$ est un espace de Banach.

DÉFINITION 1.6. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une fonction $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite de classe C^k sur Ω si toute ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre k existent et sont continues.

Plus formellement, $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^k sur Ω si $\nabla^m u \in C^0(\Omega)$, $\forall m \in \{0, 1, ..., k\}$, où on a introduit la notation

$$\nabla^m u = \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} ... \partial x_n^{m_n}} \qquad \text{avec} \qquad \sum_{i=1}^{n} m_i = m$$

On pose alors

$C^k(\Omega) :=$ $\{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \mid u$ est de classe C^k sur $\Omega\}$

$C^k(\overline{\Omega}) :=$ $\{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \mid u \in C^k(\Omega)$ et toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre k se prolonge continûment à $\overline{\Omega}\}$

ainsi que

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geq 0} C^k(\Omega), \qquad C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{k \geq 0} C^k(\overline{\Omega})$$

Définition 1.7. Sur $C^k(\overline{\Omega})$, on pose l'application

$$\begin{aligned} \|.\|_{C^k} : C^k(\overline{\Omega}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \max_{0 \leq m \leq k} \left(\sup_{x \in \Omega} |\nabla^m u(x)| \right) \end{aligned}$$

On peut alors vérifier que $\|.\|_{C^k}$ ainsi définie est une norme sur $C^k(\overline{\Omega})$. De plus, $C^k(\overline{\Omega})$ muni de cette norme est un espace de Banach.

Définition 1.8. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On définit le support d'une fonction $u \in C^k(\Omega)$, respectivement d'une fonction $u \in C^k(\overline{\Omega})$, comme étant l'ensemble

$$\operatorname{supp} u = \operatorname{adh}(\{x \in \Omega \mid u(x) \neq 0\})$$

Pour $k \geq 0$, on pose alors $C_0^k(\Omega)$, respectivement $C_0^k(\overline{\Omega})$, l'ensemble des fonctions $u \in C_0^k(\Omega)$, respectivement des fonctions $u \in C_0^k(\overline{\Omega})$, pour lesquelles $\operatorname{supp} u$ est compact dans $\mathbb{R}^n$.

2. Les espaces de Hölder

Définition 1.9. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\alpha \in]0, 1]$. Pour tout $u \in C^0(\Omega)$ et pour tout sous-ensemble compact D de Ω, on pose

$$[u]_{C^{0,\alpha}(D)} := \sup \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{\|x - y\|^\alpha} \mid x, y \in D, x \neq y \right\}$$

On définit alors

$C^{0,\alpha}(\Omega) :=$ $\{u \in C^0(\Omega) \mid [u]_{C^{0,\alpha}(D)}$ est finie, pour tout sous-ensemble compact $D \subset \Omega\}$

et

$$[u]_{C^{0,\alpha}} := \sup\{[u]_{C^{0,\alpha}(D)} \mid D \text{ est un sous-ensemble compact de } \Omega\}.$$

Remarque 1.10. Ainsi, $\forall u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, il existe une constante $C > 0$ telle que $|u(x) - u(y)| \leq C\|x - y\|^\alpha$, $\forall x, y \in \Omega$.

Définition 1.11. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\alpha \in]0, 1]$. On définit

$$C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) := \{u \in C^0(\overline{\Omega}) \mid [u]_{C^{0,\alpha}} < \infty\}$$

On peut alors munir $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ de la norme $\|.\|_{C^{0,\alpha}}$ définie par

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}} := \|u\|_{C^0} + [u]_{C^{0,\alpha}}, \quad \forall u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$$

L'espace $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ muni de la norme $\|.\|_{C^{0,\alpha}}$ est alors un espace de Banach.

Définition 1.12. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\alpha \in]0,1]$. On définit alors :

$$\begin{aligned} C^{k,\alpha}(\Omega) &:= \quad \{u \in C^k(\Omega) \mid \nabla^k u \in C^{0,\alpha}(\Omega)\} \\ C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) &:= \quad \{u \in C^k(\Omega) \mid [\nabla^k u]_{C^{0,\alpha}} < \infty\} \end{aligned}$$

Définition 1.13. Pour tout $u \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$, on pose

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}} := \|u\|_{C^k} + [\nabla^k u]_{C^{0,\alpha}}$$

On peut alors vérifier que $\|.\|_{C^{k,\alpha}}$ ainsi définie est une norme et que $(C^k(\overline{\Omega}), \|.\|_{C^{k,\alpha}})$ est un espace de Banach.

Remarque 1.14. Par abus de notation, on note $C^k(\Omega) = C^{k,0}(\Omega)$ et $C^k(\overline{\Omega}) = C^{k,0}(\overline{\Omega})$, pour $k \geq 0$.

Au vu de ces définitions, il serait naturel de se demander s'il existe des relations entre ces différents espaces ; en particulier des relations d'inclusion. C'est le but de la prochaine proposition, que nous donnerons sans démonstration.

Proposition 1.15. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\alpha \in [0,1]$.*

(1) *Si $u, v \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, alors $uv \in C^{0,\alpha}(\Omega)$.*
(2) *Pour $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$ et k entier, on a*

$$C^k(\overline{\Omega}) \supseteq C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) \supseteq C^{k,\beta}(\overline{\Omega}) \supseteq C^{k,1}(\overline{\Omega})$$

(3) *Si Ω est convexe et borné, alors $C^{k,1}(\overline{\Omega}) \supseteq C^{k+1}(\overline{\Omega})$.*

Exemple 1.16. Dans le point (3) de la proposition précédente, il faut que Ω soit convexe. Pour s'en rendre compte, on peut considérer la fonction $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < \sqrt{|x|} \text{ et } x^2 + y^2 < 1\}$ par

$$u(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ \frac{x}{|x|} y^{2\beta} & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

où $\frac{1}{2} < \beta < 1$. On a $u \in C^1(\overline{\Omega})$, mais $u \notin C^{0,1}(\overline{\Omega})$.

En effet, on a les dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 0$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ \frac{2x\beta}{|x|} y^{2\beta-1} & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

On s'aperçoit que

$$\lim_{y \to 0_+} \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \lim_{y \to 0} \frac{2x\beta}{|x|} y^{2\beta-1} = 0 = \frac{\partial u}{\partial y}(x,0)$$

Ainsi $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \in C^0(\Omega)$.

D'autre part, $\frac{\partial u}{\partial x}$ se prolonge évidemment de manière continue à $\overline{\Omega}$. De même pour $\frac{\partial u}{\partial y}$:

$$\lim_{y \to \sqrt{|x|}} \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \lim_{y \to \sqrt{|x|}} \frac{2x\beta}{|x|} y^{2\beta-1} = \frac{2x\beta|x|^\beta}{|x|\sqrt{|x|}} < \infty$$

vu que $\beta > \frac{1}{2}$.

On en déduit que $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \in C^0(\overline{\Omega})$ et donc que $u \in C^1(\overline{\Omega})$.

Or, pour $\alpha \in]\beta, 1]$,

$$\frac{|u(x,y) - u(-x,y)|}{\|(x,y) - (-x,y)\|^\alpha} = \frac{2y^{2\beta}}{(2x)^\alpha}$$

En prenant $y = \frac{\sqrt{|x|}}{2}$, on obtient

$$\lim_{x \to 0} \frac{2y^{2\beta}}{(2x)^\alpha} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|^\beta}{2^{\alpha+2\beta-1}x^\alpha} = \infty$$

vu que $\alpha > \beta$.

Ainsi $u \notin C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ pour $\beta < \alpha \leq 1$.

3. Les espaces L^p

Pour cette section, certaines connaissances préalables sont requises, comme les notions de fonction mesurable, de fonction intégrable et d'ensemble négligeable. On supposera le lecteur familiarisé avec ces notions.

Définition 1.17. On pose $L^1(\Omega)$, l'ensemble des fonctions intégrables sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, dans lequel on identifie deux fonctions qui coïncident presque partout (c'est-à-dire sur le complémentaire d'un ensemble de mesure nulle). Dans $L^1(\Omega)$, on définit $\|f\|_{L^1} := \int_\Omega |f(x)|dx$. On peut alors vérifier qu'il s'agit d'une norme sur $L^1(\Omega)$.

Théorème 1.18. *(Fubini) Soient Ω_1, Ω_2 des ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Alors $y \longmapsto F(x,y) \in L^1(\Omega_2)$ et, pour presque tout $x \in \Omega_1$,*

$$x \longmapsto \int_{\Omega_2} F(x,y)dy \in L^1(\Omega_1)$$

De même, $x \longmapsto F(x,y) \in L^1(\Omega_1)$ et, pour presque tout $y \in \Omega_2$,

$$y \longmapsto \int_{\Omega_1} F(x,y)dx \in L^1(\Omega_2)$$

De plus on a

$$\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} F(x,y)dy \right) dx = \int \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x,y)dxdy = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} F(x,y)dx \right) dy$$

Définition 1.19. Soient $p \geq 1$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On définit l'espace $L^p(\Omega)$ par :

$$L^p(\Omega) := \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

On définit alors la norme

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

Définition 1.20. On pose

$$L^\infty(\Omega) := \begin{array}{l} \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est mesurable et } \exists C > 0 \text{ tel que } |f(x)| \leq C \\ \text{presque partout sur } \Omega\} \end{array}$$

On définit alors la norme

$$\|f\|_{L^\infty} := \inf\{C \mid |f(x)| \leq C \text{ presque partout sur } \Omega\}$$

Remarque 1.21. Pour alléger la notation, on notera désormais L^p pour $L^p(\Omega)$ lorsque cela ne portera pas à confusion.

Notation 1.22. Soit $p > 1$. On note p' le nombre réel qui vérifie $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. De même, on pose $p' = 1$ si $p = \infty$ et $p' = \infty$ si $p = 1$.

Les résultats suivants sont donnés sans preuve. Pour plus de détails, on pourra consulter [**1**].

Théorème 1.23. *L^p muni de sa norme $\|.\|_{L^p}$ est un espace de Banach, pour tout $1 \leq p \leq \infty$.*

Proposition 1.24. *(Inégalité de Hölder) Soit p tel que $1 \leq p \leq \infty$ et soient $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^{p'}(\Omega)$.*
Alors $fg \in L^1(\Omega)$ et $\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}$.

Théorème 1.25. *(Représentation de Riesz) Soit p tel que $1 \leq p < \infty$ et soit $\phi \in (L^p)'$, où $(L^p)'$ désigne l'espace dual de L^p (soit l'ensemble des formes linéaires sur L^p).*
Alors il existe $u \in L^{p'}$ unique tel que

$$\phi(f) = \int uf \quad \forall f \in L^p$$

De plus, on a $\|u\|_{L^{p'}} = \|\phi\|_{(L^p)'}$.

Remarque 1.26.
(1) Le théorème précédent exprime que toute forme linéaire sur L^p se représente à l'aide d'une unique fonction de $L^{p'}$, où $1 \leq p < \infty$. Par l'application

$$\begin{array}{ccc} (L^p)' & \longrightarrow & L^{p'} \\ \phi & \longmapsto & u \end{array}$$

qui est en fait un opérateur linéaire isométrique et surjectif, on peut identifier le dual de L^p avec $L^{p'}$. Par conséquent, dans la suite de ce document, on fera toujours l'identification $(L^p)' = L^{p'}$ si $1 \leq p < \infty$.
(2) En revanche, le théorème est faux dans le cas $p = \infty$. En effet, le dual de L^∞ contient L^1, mais il est strictement plus grand que L^1.

On en déduit le théorème suivant :

Théorème 1.27. *L^p est réflexif si et seulement si $1 < p < \infty$.*

Théorème 1.28. *L'espace $C^0(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$.*

Remarque 1.29. En revanche, le théorème est faux dans le cas $p = \infty$: l'espace $C^0(\Omega)$ n'est pas dense dans $L^\infty(\Omega)$. En effet, les deux normes respectives de ces espaces sont essentiellement les mêmes sur $C^0(\Omega)$. Or ce dernier est un espace de Banach, et est donc fermé dans $L^\infty(\Omega)$.

Ainsi, si $C^0(\Omega)$ était dense dans L^∞, alors toutes les fonctions de L^∞ seraient continues presque partout. Or ce n'est pas le cas (considérer $f = 1_{\mathbb{Q}}$ sur $\mathbb{R}$).

Théorème 1.30. *L'espace $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$.*

Théorème 1.31. *L^p est séparable pour $1 \leq p < \infty$.*

4. Notions de convergence

DÉFINITION 1.32. Soit $1 \leq p \leq \infty$. On dit que f_ν converge (fortement) vers f dans L^p, et on note $f_\nu \to f$ L^p, si $f_\nu, f \in L^p$ et si

$$\lim_{\nu \to \infty} \|f_\nu - f\|_{L^p} = 0$$

DÉFINITION 1.33. Soit $1 \leq p < \infty$. On dit que f_ν converge faiblement vers f dans L^p, et on note $f_\nu \rightharpoonup f$ L^p, si $f_\nu, f \in L^p$ et si

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_\Omega (f_\nu(x) - f(x))\phi(x)dx = 0, \quad \forall \phi \in L^{p'}(\Omega)$$

DÉFINITION 1.34. On dit que f_ν converge faible * vers f dans L^∞, et on note $f_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} f$ L^∞, si $f_\nu, f \in L^\infty$ et si

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_\Omega (f_\nu(x) - f(x))\phi(x)dx = 0, \quad \forall \phi \in L^1(\Omega)$$

REMARQUE 1.35.
(1) La limite (forte ou faible) d'une suite de fonction est toujours unique.
(2) Dans le cas $p = \infty$, la symbole * est posé pour montrer que la définition de convergence faible dans L^∞ n'est pas entièrement la même que dans les espaces L^p, $1 \leq p < \infty$. En effet, le dual de L^∞ est strictement plus grand que L^1.
(3) La convergence forte dans L^p implique la convergence faible dans L^p, pour $1 \leq p \leq \infty$.

THÉORÈME 1.36. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.*

(1) *Si $f_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} f$ L^∞, alors $f_\nu \rightharpoonup f$ L^p, $\forall p \geq 1$.*
(2) *Si $f_\nu \to f$ L^p, alors $\|f_\nu\|_{L^p} \to \|f\|_{L^p}$ dans $\mathbb{R}$, $\forall 1 \leq p \leq \infty$.*
(3) *Si $1 \leq p < \infty$ et si $f_\nu \rightharpoonup f$ L^p, alors $\exists K > 0$ tel que $\|f_\nu\|_{L^p} \leq K$ et $\|f\|_{L^p} \leq \liminf_{\nu \to \infty} \|f_\nu\|_{L^p}$.*
Le résultat est aussi vrai si $p = \infty$ et $f_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} f$ L^∞.
(4) *Si $1 < p < \infty$ et si $\exists K > 0$ tel que $\|f_\nu\|_{L^p} \leq K$, alors il existe une sous-suite f_{ν_i} et $f \in L^p$ tels que $f_{\nu_i} \rightharpoonup f$ L^p.*
Le résultat est aussi vrai si $p = \infty$ et on a alors $f_{\nu_i} \overset{*}{\rightharpoonup} f$ L^∞.
(5) *si $1 \leq p \leq \infty$ et $f_\nu \to f$ L^p, alors il existe une sous-suite f_{ν_i} telle que $f_{\nu_i} \to f$ presque partout et $|f_{\nu_i}| \leq h$ presque partout avec $h \in L^p$.*

REMARQUE 1.37. Le résultat (4) du théorème est faux dans le cas $p = 1$. Ceci provient du fait que L^1 n'est pas réflexif.

THÉORÈME 1.38. *(Riemann-Lebesgue) Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $f \in L^p(\Omega)$, où Ω est un cube ouvert dans $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire $\Omega = \prod_{i=1}^{n}]a_i, b_i[$. On étend f par périodicité à $\mathbb{R}^n$.*

On pose $f_\nu(x) := f(\nu x)$ et $\overline{f} := \frac{1}{m(\Omega)} \int_\Omega f(x)dx$, où $m(\Omega)$ est la mesure de Lebesgue de l'ensemble Ω.

Alors $f_\nu \rightharpoonup \overline{f}$ L^p si $1 \leq p < \infty$ et $f_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{f}$ L^∞ si $p = \infty$.

EXEMPLE 1.39. Considérons la fonction f définie sur $]0, 2\pi[$ par $f(x) = \sin(x)$. On a $f \in L^p(\Omega)$, $\forall 1 \leq p \leq \infty$. D'autre part $f_\nu(x) = \sin(\nu x)$ et $\overline{f} = 0$. Par Riemann-Lebesgue, on en déduit que

$$\sin(\nu x) \rightharpoonup 0 \ L^p \text{ pour } 1 \leq p \leq \infty$$

Or on sait que $\sin(\nu x) \not\to 0 \ L^p$. Ceci nous donne un exemple concret d'une suite qui converge faiblement, mais pas fortement.

CHAPITRE 2

Les espaces de Sobolev

1. Définitions et propriétés

DÉFINITION 2.1. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $1 \leq p \leq \infty$. On définit l'espace $L^p_{loc}(\Omega)$ par l'ensemble des $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que $f \in L^p(\Omega')$, pour tout Ω' tel que $\overline{\Omega'} \subseteq \Omega$ et dont la fermeture est compacte dans $\mathbb{R}^n$.

REMARQUE 2.2. (1) En particulier, on a évidemment $L^p(\Omega) \subseteq L^p_{loc}(\Omega)$.

(2) En revanche, on a pas toujours l'égalité. En effet, la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est $L^1_{loc}(]0, 1[)$, mais f n'est pas $L^1(]0, 1[)$.

LEMME 2.3. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tel que*

$$\int_\Omega u(x)\phi(x)dx = 0, \text{ pour tout } \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Alors $u = 0$ presque partout dans Ω.

DÉFINITION 2.4. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. On dit que la fonction $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ est la dérivée partielle faible de u par rapport à x_i si

$$\int_\Omega v(x)\phi(x)dx = -\int_\Omega u(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x)dx, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Par abus de notation, on écrit $v = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ ou $v = u_{x_i}$.

REMARQUE 2.5. (1) Si la dérivée faible existe, alors elle est unique. En effet, soient $v, v' \in L^1_{loc}(\Omega)$ tels que $\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega v(x)\phi(x)dx = -\int_\Omega u(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x)dx = \int_\Omega v'(x)\phi(x)dx$$

Alors

$$\int_\Omega (v(x) - v'(x))\phi(x)dx = 0, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

et ainsi, par le lemme 2.3, $v = v'$ presque partout.

(2) Si u est différentiable, alors sa dérivée faible est toujours égale à sa dérivée partielle au sens usuel. En effet, on a de la formule d'intégration par partie

$$\begin{aligned}\int_\Omega u(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x)dx &= [u(x)\phi(x)]_{\partial\Omega} - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\phi(x)dx \\ &= -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\phi(x)dx\end{aligned}$$

vu que $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$.

EXEMPLE 2.6. La fonction $u(x) = |x|$ définie sur $\mathbb{R}$ n'admet pas de dérivée faible. Ainsi, toute fonction n'est pas forcément dérivable au sens faible.

LEMME 2.7. *Soient $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert borné ou non et $f \in L^1_{loc}(I)$ telle que*

$$\int_I f(x)\phi'(x)dx = 0, \quad \forall \phi \in C_0^1(I)$$

Alors $\exists C \in \mathbb{R}$ tel que $f = C$ presque partout.

DÉMONSTRATION. On fixe une fonction $\psi \in C_0(I)$ telle que $\int_I \psi dx = 1$. Pour tout $w \in C_0(I)$, la fonction $h := w - \left(\int_I w\right)\psi$ est continue et à support compact dans I. Comme $\int_I h dx = 0$, on a que h admet une primitive à support compact. Ainsi $\exists \phi \in C_0^1(I)$ tel que

$$\phi'(x) = w(x) - \left(\int_I w(y)dy\right)\psi(x)$$

On déduit de l'hypothèse que

$$\begin{aligned}\int_I \left(f(x) - \int_I f(y)\psi(y)dy\right) & w(x)dx \\ &= \int_I f(x)w(x)dx - \left(\int_I w(x)dx\right)\left(\int_I f(x)\psi(x)dx\right) \\ &= \int_I f(x)\left[w(x) - \left(\int_I w(y)dy\right)\psi(x)\right]dx = 0\end{aligned}$$

pour toute fonction $w \in C_0(I)$.

Par le lemme 2.3, on conclut que $f - \int_I f(y)\psi(y)dy = 0$ presque partout, c'est-à-dire $f = C$ presque partout avec $C = \int_I f(y)\psi(y)dy$. □

DÉFINITION 2.8. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $1 \leq p \leq \infty$. On définit l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ par :

$$W^{1,p}(\Omega) := \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ dérivable au sens faible } \mid u \in L^p(\Omega) \text{ et } u_{x_i} \in L^p(\Omega), \forall 1 \leq i \leq n\}$$

Si $1 \leq p < \infty$, alors on définit une norme :

$$\|u\|_{W^{1,p}} := \left(\|u\|_{L^p}^p + \|\nabla u\|_{L^p}^p\right)^{1/p}$$

Si $p = \infty$, alors on définit une norme :

$$\|u\|_{W^{1,\infty}} := \max\{\|u\|_{L^\infty}, \|\nabla u\|_{L^\infty}\}$$

REMARQUE 2.9. Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, alors on a, pour tout $1 \leq p < \infty$:

$$C^1(\overline{\Omega}) \subset W^{1,\infty}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$$

où à chaque fois l'inclusion est stricte.

THÉORÈME 2.10. (1) *$W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach. De plus, $W^{1,p}(\Omega)$ est séparable si $1 \leq p < \infty$ et réflexif si $1 < p < \infty$.*

(2) *Les fonctions $C_0^\infty(\Omega)$ de norme finie dans $W^{1,p}$ sont denses dans $W^{1,p}(\Omega)$ si $1 \leq p < \infty$.*

LEMME 2.11. *Soient $I =]a, b[\subseteq \mathbb{R}$ un intervalle borné ou non et $g \in L^1_{loc}(I)$. Pour $y_0 \in I$ fixé, on pose pour $x \in I$*

$$v(x) = \int_{y_0}^x g(t)dt$$

Alors $v \in C(I)$ et

$$\int_I v(x)\phi'(x)dx = -\int_I g(x)\phi(x)dx, \quad \forall \phi \in C_0^1(I)$$

DÉMONSTRATION. Clairement, on a

$$\begin{aligned}\int_I v(x)\phi'(x)dx &= \int_I \left(\int_{y_0}^x g(t)dt\right)\phi'(x)dx \\ &= -\int_a^{y_0}\left(\int_x^{y_0} g(t)\phi'(x)dt\right)dx + \int_{y_0}^b \left(\int_{y_0}^x g(t)\phi'(x)dt\right)dx\end{aligned}$$

Par le théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned}\int_I v(x)\phi'(x)dx &= -\int_a^{y_0} g(t)\left(\int_a^t \phi'(x)dx\right)dt + \int_{y_0}^b g(t)\left(\int_t^b \phi'(x)dx\right)dt \\ &= -\int_I g(t)\phi(t)dt\end{aligned}$$

□

REMARQUE 2.12. Le lemme précédent montre que la primitive v d'une fonction $g \in L^p(I)$ est dans $W^{1,p}(I)$ dès que $v \in L^p(I)$, ce qui est automatiquement le cas lorsque I est borné.

THÉORÈME 2.13. *Soit $u \in W^{1,p}(]a,b[)$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors $\exists \widetilde{u} \in C([a,b])$ tel que $u = \widetilde{u}$ presque partout sur $]a,b[$ et*

$$\widetilde{u}(x) - \widetilde{u}(y) = \int_y^x u'(t)dt, \quad \forall x, y \in [a,b]$$

où $u'(t)$ désigne la dérivée faible de u en t.

DÉMONSTRATION. On fixe $y_0 \in I$ et on pose $\overline{u}(x) = \int_{y_0}^x u'(t)dt$. D'après le lemme 2.11, on a

$$\int_I \overline{u}(x)\phi'(x)dx = -\int_I u'(x)\phi, \quad \forall \phi \in C_0^1(I)$$

Donc $\forall \phi \in C_0^1(I)$,

$$\int_I (u(x) - \overline{u}(x))\phi'(x) = 0$$

Par le lemme 2.7, on déduit que $u - \overline{u} = C$ presque partout, où C est une constante. Ainsi la fonction $\widetilde{u}(x) := \overline{u}(x) + C$ rempli les conditions désirées. □

REMARQUE 2.14.
(1) Le théorème 2.13 nous montre que toute fonction $u \in W^{1,p}(]a,b[)$ admet un représentant continu, c'est-à-dire qu'il existe un fonction continue qui est dans la même classe que u pour la relation $u \sim v \Leftrightarrow u = v$ presque partout. Ainsi, lorsque l'on souhaite donner un sens à $u(x)$, on emploie généralement son représentant continu.
(2) Par conséquent, on a les inclusions

$$C^1([a,b]) \subseteq W^{1,p}(]a,b[) \subseteq C([a,b])$$

pour $1 \leq p \leq \infty$.

PROPOSITION 2.15. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $u \in L^p(\Omega)$ avec $1 < p \leq \infty$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) $u \in W^{1,p}(\Omega)$

(2) $\exists C > 0$ *tel que*

$$\left|\int_\Omega u(x)\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x)dx\right| \leq C\|\phi\|_{L^{p'}}$$

$\forall\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$

(3) $\exists C > 0$ *tel que pour tout ouvert* $\omega \subseteq \Omega$ *avec* $\overline{\omega} \subseteq \Omega$ *et tout* $h \in \mathbb{R}^n$ *avec* $|h| < dist(\omega, \Omega^c)$, *on a*

$$\|u_h - u\|_{L^p} \leq C|h|$$

où $u_h(x) = u(x + h)$

De plus, dans (2) *et* (3), *on peut prendre* $C = \|\nabla u\|_{L^p}$.

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (2) : De la définition de $W^{1,p}(\Omega)$, on a

$$\left|\int_\Omega u(x)\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x)dx\right| = \left|\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\phi(x)dx\right|$$
$$\leq \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p}\|\phi\|_{L^{p'}} \leq \|\nabla u\|_{L^p}\|\phi\|_{L^{p'}}$$

(2) $\Rightarrow$ (1) : La forme linéaire

$$\phi \in C_0^\infty(\Omega) \longmapsto \int_\Omega u(x)\phi'(x)dx$$

est continue pour la norme $L^{p'}$ et est définie sur un sous-espace dense dans $L^{p'}(\Omega)$. Par le théorème de Hahn-Banach, elle se prolonge en une forme linéaire et continue F sur $L^{p'}$. Par le théorème de représentation de Riesz, $\exists g \in L^p$ tel que $F(\phi) = \int_\Omega g(x)\phi(x)dx$, $\forall\phi \in L^{p'}$. En particulier

$$\int_\Omega u(x)\phi'(x)dx = \int_\Omega g(x)\phi(x)dx, \quad \forall\phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

et donc $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

(1) $\Rightarrow$ (3) : Commençons par supposer que $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Pour $h \in \mathbb{R}^n$ on pose

$$v(t) = u(x + th), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Ainsi $v'(t) = h\nabla u(x + th)$ et donc

$$u(x + h) - u(x) = v(1) - v(0) = \int_0^1 v'(t)dt = \int_0^1 h\nabla u(x + th)dt$$

Il s'ensuit que

$$|u_h(x) - u(x)|^p \leq |h|^p\int_0^1 |\nabla u(x + th)|^p\,dt$$

et donc, $\forall\omega$ tel que $\overline{\omega} \subseteq \Omega$,

$$\int_\omega |u_h(x) - u(x)|^p\,dx \leq |h|^p\int_\omega\left(\int_0^1 |\nabla u(x + th)|^p\,dt\right)dx$$
$$= |h|^p\int_0^1\left(\int_\omega |\nabla u(x + th)|^p\,dx\right)dt$$
$$= |h|^p\int_0^1\left(\int_{\omega+th} |\nabla u(y)|^p\,dy\right)dt$$

par le théorème de Fubini.

Pour un $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $|h| < \operatorname{dist}(\omega, \Omega^c)$ fixé, il existe un ouvert $\omega' \subseteq \Omega$ tel que $\overline{\omega'} \subseteq \Omega$ et $\omega + th \subseteq \omega'$, $\forall t \in [0,1]$.

Par conséquent,

$$\|u_h - u\|_{L^p}^p \leq |h|^p \int_{\omega'} |\nabla u(x)|^p \, dx$$

c'est-à-dire

$$\|u_h - u\|_{L^p} \leq |h| \, \|\nabla u\|_{L^p}$$

Considèrons maintenant $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $p \neq \infty$. Vu la densité de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$, il existe une suite $(u_n)_{n=0}^\infty \subset C_0^\infty$ telle que $u_n \to u$ dans $L^p(\Omega)$ et $\nabla u_n \to \nabla u$ dans $L^p(\omega)$, $\forall \omega \subseteq \Omega$ tel que $\overline{\omega} \subseteq \Omega$.

On applique alors l'inégalité précédente à u_n et on obtient l'assertion voulue lorsque $n \to \infty$.

Dans le cas où $p = \infty$, on applique le même raisonnement, puis on fait tendre p vers l'infini.

(3) $\Rightarrow$ (2) : Soit $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Puisque $\operatorname{supp} \phi$ est compact, il existe un ouvert $\omega \subseteq \Omega$ tel que $\overline{\omega} \subseteq \Omega$ et $\operatorname{supp} \phi \subseteq \omega$.

Soit $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $|h| < \operatorname{dist}(\omega, \Omega^c)$. Par hypothèse on a

$$\left| \int_\Omega (u_h(x) - u(x))\phi(x) dx \right| \leq C \, |h| \, \|\phi\|_{L^{p'}}$$

D'autre part, vu la définition de h et que $\operatorname{supp} \phi \subseteq \omega \subseteq \Omega$, on a

$$\int_\Omega (u(x+h) - u(x))\phi(x) dx = \int_\Omega u(y)(\phi(y-h) - \phi(y)) dy$$

Par conséquent

$$\left| \int_\Omega u(y) \frac{\phi(y-h) - \phi(y)}{|h|} dy \right| \leq C \, \|\phi\|_{L^{p'}}$$

Choisissant $h = te_i$ pour $t \in \mathbb{R}$, on obtient (2) en passant à la limite $h \to 0$.

$\square$

Remarque 2.16. (1) Dans le cas $p = 1$, le théorème devient : $1 \Rightarrow 2 \Leftrightarrow 3$.

(2) Si Ω est un ouvert convexe de $\mathbb{R}$, alors une fonction $u \in L^\infty(\Omega)$ est dans $W^{1,\infty}(\Omega)$ si et seulement si $\exists C > 0$ tel que $|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|$ presque pour tout $x, y \in \Omega$.

Définition 2.17. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Alors on définit $W_0^{1,p}(\Omega)$ comme étant la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, c'est-à-dire $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{1,p}}$.

Remarque 2.18. Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $1 \leq p < \infty$, alors on peut identifier $W_0^{1,p}(\Omega)$ à l'ensemble des fonctions $u \in W^{1,p}(\Omega)$ qui sont nulles presque partout sur le bord de Ω :

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega) \mid u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$

Si $p = \infty$, alors l'assertion précédente est fausse. En revanche, la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,\infty}(\Omega)$ est équivalente à $C^1(\overline{\Omega})$.

DÉFINITION 2.19. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $m \geq 2$ un entier. On pose par récurrence :

$$W^{m,p}(\Omega) := \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \mid u \in W^{m-1,p}(\Omega),\ u_{x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega),\ 1 \leq i \leq n\}$$

Sur $W^{m,p}(\Omega)$, on pose la norme $\|u\|_{W^{m,p}} := \left(\sum_{k=0}^{m} \|\nabla^k u\|_{L^p}^p\right)^{1/p}$ si $1 \leq p < \infty$ et $\|u\|_{W^{m,\infty}} := \max_{1 \leq k \leq m} \|\nabla^k u\|_{L^\infty}$ si $p = \infty$.

THÉORÈME 2.20. (1) *$W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach. De plus, $W^{m,p}(\Omega)$ est séparable si $1 \leq p < \infty$ et réflexif si $1 < p < \infty$.*

(2) *Les fonctions $C_0^\infty(\Omega)$ de norme finie dans $W^{m,p}$ sont denses dans $W^{m,p}(\Omega)$ si $1 \leq p < \infty$.*

2. Le théorème de Sobolev-Rellich

DÉFINITION 2.21. (1) Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $m \geq 1$. On dit que Ω est de classe C^m si, $\forall x \in \partial\Omega$, il existe un voisinage $U \subseteq \mathbb{R}^n$ de x et une bijection $H : Q \longrightarrow U$, où $Q := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_j| < 1, j = 1, ..., n\}$, tels que

$$H \in C^m(\overline{Q}),\ H^{-1} \in C^m(\overline{U}),\ H(Q_+) = U \cap Q \text{ et } H(Q_0) = U \cap \partial\Omega$$

où $Q_+ := \{x \in Q \mid x_n > 0\}$ et $Q_0 := \{x \in Q \mid x_n = 0\}$.)

(2) Si H est simplement lipschtzienne, alors on dit que Ω est un ouvert lipschitzien.

THÉORÈME 2.22. *(Sobolev-Rellich) Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de bord lipschitzien.*

(1) *Si $1 \leq p < n$, alors*

$$W^{1,p}(\Omega) \subseteq L^q(\Omega),\ \forall q \in [1, \tfrac{np}{n-p}]$$

c'est-à-dire $\exists C > 0$ (qui dépend de Ω, p et q) tel que $\|u\|_{L^q} \leq C\|u\|_{W^{1,p}}$, $\forall q \in [1, \frac{np}{n-p}]$.

De plus, l'immersion est compacte (tout ensemble borné de $W^{1,p}(\Omega)$ est précompact dans $L^q(\Omega)$), $\forall 1 \leq q < \frac{np}{n-p}$.

(2) *Si $p = n$, alors*

$$W^{1,n}(\Omega) = W^{1,p}(\Omega) \subseteq L^q(\Omega),\ \forall q \geq 1$$

c'est-à-dire $\exists C > 0$ (qui dépend de Ω, p et q) tel que $\|u\|_{L^q} \leq C\|u\|_{W^{1,n}}$, $\forall q \geq 1$.

De plus, l'immersion est compacte $\forall q \geq 1$.

(3) *Si $p > n$, alors*

$$W^{1,p}(\Omega) \subseteq C(\overline{\Omega})$$

c'est-à-dire $\exists C > 0$ *(qui dépend de* Ω *et de* p*) tel que* $\|u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{W^{1,p}}$. *De plus, l'immersion est compacte.*

En particulier, on a toujours $W^{1,p}(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$ *et l'immersion est compacte,* $\forall 1 \leq p \leq \infty$.

On pourra trouver une preuve de ce théorème dans [**1**].

Remarque 2.23. (1) En remplaçant $W^{1,p}$ par $W_0^{1,p}$, alors le théorème 2.22 est vrai sans hypothèses sur le bord de Ω.

(2) Le théorème 2.22 reste vrai pour $W^{m,p}$.

Remarque 2.24. Dans le cas où $\Omega =]a,b[$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}$, on a donc : $C_0^\infty(]a,b[) \subseteq ... \subseteq W^{2,p}(]a,b[) \subseteq C^1([a,b]) \subseteq W^{1,p}(]a,b[\subseteq C^0([a,b]) \subseteq L^\infty(]a,b[) \subseteq ... \subseteq L^2(]a,b[) \subseteq L^1(]a,b[)$.

Définition 2.25. (1) Soit $1 \leq p < \infty$. On dit que u_ν converge faiblement vers u dans $W^{1,p}(\Omega)$ si $u_\nu, u \in W^{1,p}(\Omega)$, $u_\nu \rightharpoonup u$ L^p et $\nabla u_\nu \rightharpoonup \nabla u$ L^p. On note alors $u_\nu \rightharpoonup u$ $W^{1,p}$.

(2) On dit que u_ν converge faible * vers u dans $W^{1,\infty}(\Omega)$ si $u_\nu, u \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u$ L^∞ et $\nabla u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \nabla u$ L^∞. On note alors $u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u$ $W^{1,\infty}$,

Corollaire 2.26. *Soient* Ω *un ouvert borné lipschitzien de* $\mathbb{R}^n$ *et* $1 \leq p < \infty$. *Si* $u_\nu \rightharpoonup u$ $W^{1,p}$, *alors* $u_\nu \to u$ L^p.

Si $p = \infty$ *et si* $u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u$ $W^{1,\infty}$, *alors* $u_\nu \to u$ L^∞.

Théorème 2.27. *(Inégalité de Poincaré) Soient* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$ *et* $1 \leq p < \infty$. *Alors il existe* $c > 0$ *tel que*

$$\|u\|_{L^p} \leq c\|\nabla u\|_{L^p}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

ou de façon équivalente

$$\|u\|_{W^{1,p}} \leq c\|\nabla u\|_{L^p}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

CHAPITRE 3

Le problème de Dirichlet

1. Existence et unicité des solutions

THÉORÈME 3.1. *Soient Ω un ouvert borné lipschtzien de $\mathbb{R}^n$ et $u_0 \in W^{1,2}(\Omega)$. Alors le problème (P)*

$$\inf\left\{I(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2 dx \mid u - u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)\right\}$$

admet une unique solution $\overline{u} \in W^{1,2}(\Omega)$.

De plus, $\overline{u}$ satisfait l'équation de Laplace faible (Lf)

$$\int_\Omega \langle \nabla\overline{u}(x); \nabla\phi(x)\rangle dx = 0 \qquad \forall \phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

Réciproquement, si $\overline{u}$ satisfait (Lf), alors $\overline{u}$ réalise le minimum de (P).

Le théorème ci-dessus ne sera pas démontré ici. La preuve est en effet pratiquement identique à celle du théorème suivant. Au besoin on pourra consulter [**2**].

REMARQUE 3.2. On observe que si $\overline{u} \in W^{2,2}(\Omega)$, alors (Lf) est équivalent à

$$\int_\Omega \Delta\overline{u}(x)\phi(x)dx = 0$$

En effet, il suffit d'intégrer par partie et de se rappeler que $\phi = 0$ presque partout sur $\partial\Omega$.

Ceci implique alors que $\Delta\overline{u} = 0$ presque partout.

THÉORÈME 3.3. *Soient Ω un ouvert borné lipschitzien de $\mathbb{R}^n$ et $f \in L^2(\Omega)$. Alors le problème (P')*

$$\inf\left\{I(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2 - f(x)u(x)dx \mid u \in W_0^{1,2}(\Omega)\right\}$$

admet une unique solution $\overline{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

De plus, $\overline{u}$ satisfait l'équation (Lf')

$$\int_\Omega \langle \nabla\overline{u}(x); \nabla\phi(x)\rangle dx = \int_\Omega f(x)\phi(x)dx \qquad \forall \phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

Réciproquement, si $\overline{u}$ satisfait (Lf'), alors $\overline{u}$ réalise le minimum de (P').

DÉMONSTRATION. *1ère étape* Montrons que si $u_i \rightharpoonup \overline{u}\ W^{1,2}$, alors

$$\liminf_{i\to\infty} I(u_i) \geq I(\overline{u})$$

En effet, vu que $g(\xi) = \frac{1}{2}|\xi|^2$ est convexe et que $g'(\xi) = \xi$, on a que $g(\nabla u_i) \geq g(\nabla\overline{u}) + \langle \nabla\overline{u}; \nabla u_i - \nabla\overline{u}\rangle$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{2}|\nabla u_i|^2 \geq \frac{1}{2}|\nabla\overline{u}|^2 + \langle \nabla\overline{u}; \nabla u_i - \nabla\overline{u}\rangle$$

Par conséquent, $\frac{1}{2}|\nabla u_i|^2 - fu_i \geq \frac{1}{2}|\nabla\overline{u}|^2 - fu_i + \langle \nabla\overline{u}; \nabla u_i; \nabla\overline{u}\rangle$. En intégrant, on obtient

$$I(u_i) \geq \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla\overline{u}|^2 dx - \int_\Omega fu_i dx + \int_\Omega \langle \nabla\overline{u}; \nabla u_i - \nabla\overline{u}\rangle dx$$

D'autre part, puisque $u_i \rightharpoonup u\ W^{1,2}$, on obtient par définition de la convergence faible que

$$\lim_{i\to\infty} \int_\Omega \langle \nabla\overline{u}(x); \nabla u_i(x) - \nabla\overline{u}(x)\rangle dx = 0$$

et que

$$\lim_{i\to\infty} \int_\Omega f(x)u_i(x)dx = \int_\Omega f(x)u(x)dx$$

De ces deux choses, on en déduit immédiatement que $I(u_i) \geq I(\overline{u})$.

2ème étape Soit $(u_i)_{i=0}^\infty$ une suite minimisante, c'est-à-dire que $u_i \in W_0^{1,2}(\Omega)$ et $\lim\limits_{i\to\infty} I(u_i) = m := \inf\{I(u) \mid u \in W_0^{1,2}(\Omega)\}$.

Comme $0 \leq m < \infty$, il existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $i \geq i_0$ on a

$$\begin{aligned} m + 1 \geq I(u_i) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_i(x)|^2 dx - \int_\Omega f(x)u_i(x)dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|\nabla u_i\|_{L^2}^2 - \|f\|_{L^2}\|u_i\|_{L^2} \\ &\geq c\|u_i\|_{W^{1,2}}^2 - \|f\|_{L^2}\|u_i\|_{L^2} \end{aligned}$$

pour une constante $c > 0$, par l'inégalité de Poincaré.

Ainsi il existe $c' > 0$ tel que $\|u_i\|_{W^{1,2}} \leq c'$. Par la partie (4) du théorème 1.36, il existe alors une sous-suite de $(u_i)_{i=0}^\infty$, que l'on notera toujours $(u_i)_{i=0}^\infty$, et $\overline{u} \in W_0^{1,2}$ tels que $u_i \rightharpoonup \overline{u}\ W^{1,2}$.

Avec la première étape on trouve

$$m = \liminf_{i\to\infty} I(u_i) \geq I(\overline{u}) \geq m$$

et ainsi l'existence d'un minimum de (P) est démontrée.

3ème étape Montrons maintenant l'unicité de $\overline{u}$. Pour cela, supposons qu'il existe $\overline{v} \in W_0^{1,2}$ tel que $I(\overline{v}) = I(\overline{u}) = m$.

Posons $\overline{w} := \frac{1}{2}\overline{u} + \frac{1}{2}\overline{v}$. On remarque que $\overline{w} \in W_0^{1,2}$. Par conséquent, vu la convexité de g, on a $\frac{1}{2}|\nabla\overline{w}|^2 \leq \frac{1}{4}|\nabla\overline{u}|^2 + \frac{1}{4}|\nabla\overline{v}|^2 = m$.

De là on tire que

$$\begin{aligned} m \leq I(\overline{w}) &= \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla\overline{w}(x)|^2 dx - \int_\Omega f(x)\overline{w}(x)dx \\ &\leq \frac{1}{4}\int_\Omega |\nabla\overline{u}(x)|^2 dx + \frac{1}{4}\int_\Omega |\nabla\overline{v}(x)|^2 dx - \int_\Omega \frac{1}{2} f(x)(\overline{u}(x) + \overline{v}(x))dx \\ &= \frac{1}{2}I(\overline{u}) + \frac{1}{2}I(\overline{v}) = m \end{aligned}$$

et donc $\overline{w}$ est aussi un minimum pour (P').

Ainsi on obtient $\frac{1}{2}|\nabla\overline{u}|^2 + \frac{1}{2}|\nabla\overline{v}|^2 = |\nabla\overline{w}|^2 = |\frac{1}{2}\nabla\overline{u} + \frac{1}{2}\nabla\overline{v}|^2$ presque partout.

Or la fonction $g(\xi) = \frac{1}{2}|\xi|^2$ est strictement convexe. Par conséquent $\nabla\overline{u} = \nabla\overline{v}$ presque partout. Avec le fait que $\overline{v} - \overline{u} \in W_0^{1,2}$, ceci implique que $\overline{u} = \overline{v}$ presque partout.

4ème étape Vérifions maintenant que la solution $\overline{u}$ de (P') satisfait l'équation de Laplace faible. On note tout d'abord que le fait que $W_0^{1,2}(\Omega)$ soit un espace vectoriel implique que, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}$ et tout $\phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, on a $\overline{u} + \varepsilon\phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Par conséquent, par la minimalité de $\overline{u}$, on trouve

$$\begin{aligned} I(\overline{u}) &\leq I(\overline{u}+\varepsilon\phi) \\ &= I(\overline{u}) + \varepsilon \int_\Omega \langle \nabla\overline{u}(x); \nabla\phi(x)\rangle - f(x)\phi(x)dx + \varepsilon^2 \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla\phi(x)|^2 dx \end{aligned}$$

En dérivant par rapport à ε et en évaluant en $\varepsilon = 0$, on obtient que $\overline{u}$ satisfait (Lf').

5ème étape Finalement, montrons que si $\overline{u} \in W^{1,2}$ avec $\overline{u} - u_0 \in W_0^{1,2}$ satisfait (Lf'), alors $\overline{u}$ réalise le minimum de (P').

Soit $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Par la convexité de g, on a que

$$g(\nabla v) \geq g(\nabla\overline{u}) + \langle \nabla\overline{u}; \nabla v - \nabla\overline{u}\rangle$$

En intégrant, on trouve

$$\begin{aligned} I(v) &= \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla v(x)|^2 dx - \int_\Omega f(x)v(x)dx \\ &\geq \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla\overline{u}(x)|^2 + \int_\Omega f(x)(v(x) - \overline{u}(x))dx - \int_\Omega f(x)v(x)dx \\ &\geq I(\overline{u}) \end{aligned}$$

vu l'hypothèse. Ainsi $\overline{u}$ est bien un minimum de (P').

$\square$

Remarque 3.4. Si $\overline{u} \in W^{2,2}(\Omega)$, alors on obtient de (Lf')

$$\begin{aligned} \int_\Omega f(x)\phi(x)dx &= \int_\Omega \langle \nabla\overline{u}; \nabla\phi(x)\rangle dx \\ &= \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial\overline{u}}{\partial x_i}(x)\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x)dx \\ &= \sum_{i=1}^n - \int_\Omega \frac{\partial^2\overline{u}}{\partial x_i^2}\phi(x)dx \\ &= -\int_\Omega \Delta\overline{u}(x)\phi(x)dx \end{aligned}$$

et ainsi $\Delta\overline{u} = -f$ presque partout.

2. Un théorème général d'existence et d'unicité

Théorème 3.5. *Soient $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de frontière lipschitzienne, $u_0 \in W^{1,p}$ et $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons que :*

- *$f(x, u, .) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe pour tout $(x, u) \in \Omega \times \mathbb{R}$,*
- *il existe $1 \leq q < p$ et $\alpha > 0$ tel que $f(x, u, \xi) \geq \alpha(|\xi|^p - |u|^q - 1)$, pour tout $(x, u, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$,*
- *$\int_\Omega f(x, u_0, \nabla u_0)dx < \infty$.*

Alors le problème

$$\inf\left\{I(u)=\int_\Omega f(x,u(x),\nabla u(x))dx|u-u_0\in W_0^{1,p}(\Omega)\right\}$$

admet une solution $\overline{u}\in W^{1,p}(\Omega)$.

De plus, si $f(x,.,.):\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ *est stictement convexe pour tout* $x\in\Omega$, *alors le minimum est unique.*

La démonstration de ce théorème étant compliquée, nous ne l'exposerons pas dans ce travail. Sous certaines hypothèses en plus, on pourra trouver une preuve dans [**2**].

Remarque 3.6. Les hypothèses du théorème 3.5 sont presque optimales, c'est-à-dire que l'affaiblissement de l'une d'entre elles aboutit à un contre-exemple. La seule hypothèse qui peut être affaiblie un peu est celle de la continuité de f. En effet, le théorème 3.5 reste vérifié si $f(.,u,\xi)$ est mesurable pour tout $(u,\xi)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ et $f(x,.,.)$ est continue pour presque tout $x\in\Omega$.

Théorème 3.7. *Soient* $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ *un ouvert borné lipschitzien,* f *une fonction* $C^1(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, $p\in\mathbb{N}^*$ *et* $\beta>0$ *tels que*

$$|f_u(x,u,\xi)|,|f_\xi(x,u,\xi)|\leq\beta(1+|u|^{p-1}+|\xi|^{p-1}),\quad\forall(x,u,\xi)\in\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$$

Si $\overline{u}\in W^{1,p}(\Omega)$ *réalise le minimum de (P")*

$$\inf\left\{I(u)=\int_\Omega f(x,u(x),\nabla u(x))dx\mid u-u_0\in W_0^{1,p}(\Omega)\right\}$$

pour une fonction $u_0\in W^{1,p}(\Omega)$ *donnée, alors* $\overline{u}$ *satisfait l'équation d'Euler-Lagrange faible*

$$\int_\Omega f_u(x,u(x),\nabla u(x))\phi(x)+\langle f_\xi(x,u(x),\nabla u(x));\nabla\phi(x)\rangle dx=0$$

pour tout $\phi\in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Si de plus $f\in C^2(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ *et* $\overline{u}\in C^2(\overline{\Omega})$, *alors* $\overline{u}$ *satisfait l'équation d'Euler-Lagrange (forte)*

$$\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}f_\xi(x,u,\nabla u)=f_u(x,u,\nabla u),\ \forall x\in\Omega,\ et\ u=u_0\ sur\ \partial\Omega$$

Réciproquement, si de plus $f(x,.,.)$ *est convexe pour tout* $x\in\Omega$, *alors toute solution de l'équation d'Euler-Lagrange (faible ou forte) est un minimum de (P").*

3. Régularité des solutions

Théorème 3.8. *Soient* $m\in\mathbb{N}$, $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ *un ouvert borné de bord* C^{m+2} *ou* $\Omega=\mathbb{R}^n_+$, *et* $f\in W^{m,2}(\Omega)$.

Alors le problème (P')

$$\inf\left\{I(u)=\int_\Omega\frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2-f(x)u(x)dx\mid u\in W_0^{1,2}(\Omega)\right\}$$

admet une solution $\overline{u}\in W^{m+2,2}$.

Plus précisément, il existe $c > 0$ *dépendant de* Ω *tel que*

$$\|\overline{u}\|_{W^{m+2,2}} \leq c\|f\|_{W^{m,2}}$$

En particulier, si $m = \infty$*, on a donc que* $\overline{u} \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$.

Démonstration. Nous n'allons démontrer le résultat que dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^n_+$. Pour plus de détail, on pourra consulter [**1**].

Le fait que (P') admette une solution $\overline{u} \in W^{1,2}_0(\mathbb{R}^n_+)$ résulte du théorème 3.3. De plus, elle satisfait l'équation (Lf')

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \langle \nabla\overline{u}(x); \nabla v(x)\rangle dx = \int_{\mathbb{R}^n_+} f(x)v(x)dx \qquad \forall v \in W^{1,2}_0(\mathbb{R}^n_+)$$

1ère étape Considérons tout d'abord le cas $m = 0$. Pour démontrer la régularité de $\overline{u}$, on va utiliser la méthode des quotients différentiels. On choisit un vecteur $h \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. Ainsi h est parallèle au bord de $\mathbb{R}^n_+$. Clairement,

$$\overline{u} \in W^{1,2}_0(\mathbb{R}^n_+) \Longrightarrow \overline{u}_h \in W^{1,2}_0(\mathbb{R}^n_+)$$

où $\overline{u}_h$ est la fonction définie par $\overline{u}_h(x) = u(x + h)$.

Posons $D_h\overline{u} = \frac{1}{|h|}(\overline{u}_h - \overline{u})$ et $v = D_{-h}(D_h\overline{u})$. Ainsi

$$v(x) = \frac{2\overline{u}(x) - \overline{u}(x + h) - u(x - h)}{|h|^2}$$

On remarque que l'on a bien $v \in W^{1,2}_0(\mathbb{R}^n_+)$. Par l'équation de Laplace faible (Lf'), on a

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \langle \nabla\overline{u}(x); v(x)\rangle dx = \int_{\mathbb{R}^n_+} f(x)v(x)dx$$

Or on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n_+} \langle \nabla\overline{u}(x);v(x)\rangle dx &= \int_{\mathbb{R}^n_+} \langle \overline{u}(x); \nabla D_{-h}(D_h\overline{u})(x)\rangle dx \\ &= \frac{1}{|h|^2}\int_{\mathbb{R}^n_+} \langle \nabla\overline{u}(x); 2\nabla\overline{u}(x) - \nabla\overline{u}(x + h) - \nabla\overline{u}(x - h)\rangle dx\end{aligned}$$

De plus, on a les égalités

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \langle \nabla\overline{u}(x); \nabla\overline{u}(x + h)\rangle dx = \int_{\mathbb{R}^n_+} \langle \nabla\overline{u}(x); \nabla\overline{u}(x - h)\rangle dx$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla\overline{u}(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla\overline{u}(x + h)|^2 dx$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n_+} \langle \nabla\overline{u}(x); v(x)\rangle dx &= \frac{2}{|h|^2}\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla\overline{u}(x)|^2 - \langle \nabla\overline{u}(x); \nabla\overline{u}(x + h)\rangle dx \\ &= \frac{1}{|h|^2}\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla\overline{u}(x + h) - \nabla\overline{u}(x)|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n_+} |(D_h\nabla\overline{u})(x)|^2 dx\end{aligned}$$

D'autre part, puisque $\int_{\mathbb{R}^n_+} f(x)v(x)dx \leq \|f\|_{L^2}\|D_{-h}D_h\overline{u}\|_{L^2}$, on obtient via (Lf') que

$$\|D_h\nabla\overline{u}\|^2_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}\|D_h\nabla\overline{u}\|_{L^2}$$

où on a observé que $\|D_{-h}D_h\overline{u}\|_{L^2} = \|D_h\nabla\overline{u}\|_{L^2}$ par la proposition 2.15.

Finalement, on a que

$$\|D_h\nabla\overline{u}\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \tag{1}$$

Soient $j, k \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leq j \leq n$, $1 \leq k \leq n-1$ et soient $h = |h|e_k$, $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n_+)$. Par définition de l'espace $W^{1,2}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \left(D_h\frac{\partial\overline{u}}{\partial x_j}\phi\right) = -\int_{\mathbb{R}^n_+} \overline{u}\left(D_{-h}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right) \tag{2}$$

De (1) et (2) et du fait que $\|D_h\frac{\partial\overline{u}}{\partial x_j}\|_{L^2} \leq \|D_h\nabla\overline{u}\|_{L^2}$ on tire que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n_+} \overline{u}\left(D_{-h}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right)\right| \leq \|f\|_{L^2}\|\phi\|_{L^2}$$

En passant à la limite $|h| \longrightarrow$, on trouve

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n_+} \overline{u}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_j\partial x_k}\right| \leq \|f\|_{L^2}\|\phi\|_{L^2} \tag{3}$$

D'autre part, de (Lf') on obtient

$$\sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\partial\overline{u}}{\partial x_i}\frac{\partial\phi}{\partial x_i} = \int_{\mathbb{R}^n_+} f\phi$$

Or par définition

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\partial\overline{u}}{\partial x_i}\frac{\partial\phi}{\partial x_i} = -\int_{\mathbb{R}^n_+} \overline{u}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i^2}$$

pour tout $i \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq i \leq n$.

Ainsi

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^n_+} \overline{u}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_n^2}\right| &\leq \sum_{i=1}^{n-1}\left|\int_{\mathbb{R}^n_+} \overline{u}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i^2}\right| + \left|\int_{\mathbb{R}^n_+} f\phi\right| \\ &\leq C\|f\|_{L^2}\|\phi\|_{L^2}\end{aligned}$$

en prenant par exemple $C = n$.

Par ceci et (3) on aboutit à

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n_+} \overline{u}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_j\partial x_k}\right| \leq C\|f\|_{L^2}\|\phi\|_{L^2} \quad \forall 1 \leq j, k \leq n$$

Fixons maintenant $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leq j, k \leq n$. On a les applications

$$\begin{aligned} p : L^2(\mathbb{R}^n_+) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \phi &\longmapsto C\|f\|_{L^2}\|\phi\|_{L^2}\end{aligned}$$

et

$$g_{jk} : C_0^\infty(\mathbb{R}^n_+) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\phi \longmapsto \left| \int_{\mathbb{R}^n_+} \overline{u} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_k} \right|$$

qui satisfont aux hypothèses du théorème de Hahn-Banach.

Ainsi il existe $f_{jk} \in (L^2(\mathbb{R}^n_+))'$ telle que $f_{jk}(\phi) = g_{jk}(\phi)$, $\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ et $f_{jk}(\phi) \leq C\|f\|_{L^2}\|\phi\|_{L^2}$, $\forall \phi \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$.

Par le théorème de représentation de Riesz, il existe $\psi_{jk} \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$ tel que

$$f_{jk}(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n_+} \psi_{jk}\phi \quad \forall \phi \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$$

ce qui implique

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n_+} \overline{u} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_k} \right| = \int_{\mathbb{R}^n_+} \psi_{jk}\phi \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n_+)$$

Ceci montre que $\overline{u} \in W^{2,2}(\mathbb{R}^n_+)$.

2ème étape Supposons $f \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n_+)$ et montrons que $\overline{u} \in W^{3,2}(\mathbb{R}^n_+)$.

Pour cela, on prouve que

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \langle \nabla \overline{u}_{x_i}(x); \nabla v(x) \rangle dx = \int_{IR^n_+} f_{x_i}(x) v(x) dx, \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\mathbb{R}^n_+) \tag{4}$$

Pour démontrer cette assertion, il suffit de la vérifier pour toute fonction $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n_+)$, vu que C_0^∞ est dense dans $W^{1,2}$. En utilisant (Lf'), on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n_+} \langle \nabla \overline{u}_{x_i}; \nabla v \rangle dx &= \int_{\mathbb{R}^n_+} \langle (\nabla \overline{u})_{x_i}; \nabla v \rangle dx = -\int_{\mathbb{R}^n_+} \langle \nabla \overline{u}; (\nabla v)_{x_i} \rangle dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n_+} \langle \nabla \overline{u}; \nabla v_{x_i} \rangle dx = -\int_{\mathbb{R}^n_+} f v_{x_i} dx = \int_{\mathbb{R}^n_+} f_{x_i} v dx\end{aligned}$$

Comme $f \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n_+)$, on a $f_{x_i} \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$ et donc, en appliquant la 1ère étape à (4), on a $\overline{u}_{x_i} \in W^{2,2}(\mathbb{R}^n_+)$. Par conséquent, $\overline{u} \in W^{3,2}(\mathbb{R}^n_+)$.

On montre alors le cas général par récurrence sur m.

$\square$

Bibliographie

[1] Brézis, Haim. *Analyse fonctionnelle : Théorie et applications.* Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise, Masson, 1983.

[2] Dacorogna, Bernard. *Introduction au calcul des variations.* Cahiers mathématiques de l'école polytechnique fédérale de Lausanne, Presses polytechniques et universitaires romandes, 1992.