Projet de Semestre

Ete 2004-2005

Le théorème de l'indice de Atiyah–Singer

Jossen Peter

Professeur Responsable:

prof. Antoine Derighetti

Table des matières

Table de Notations

On admet les notations suivantes (les chiffres indiquant le numero de la définition en question, où bien le numero de la première page > 4 sur laquelle la notation en question apparait):

$\oplus$	Somme directe	
$\otimes$	Produit tensoriel	
$\coprod$	Réunion disjointe	
$\wedge$	Produit exterieur	
$\bigwedge^*(V)$	Algèbre exterieure de V	
∇	Connexion	
Ampl^m	Amplitudes d'ordre m	3.47
A_n	Le groupe alterné avec $\frac{n!}{2}$ éléments	
$\mathbb{C}$	Les nombres complexes	
C_n	Le groupe cyclique avec n éléments	
$\mathrm{ch}_j(E)$	j–ème caractère de Chern	2.32
$\mathrm{c}_j(E)$	j–ème classe de Chern	2.32
$\chi_x(\xi)$	Caractère de $\mathbb{R}^n$	
colim	Colimite	
$\mathbf{C}(X)$	La catégorie des $\mathbf{C}$–fibrés sur X	
$C^\infty(X)$	Fonctions indéfiniment dérivables sur X	
$C_0^\infty(X)$	Fonctions indéfiniment dérivables sur X qui tendent vers 0	
$C_{00}^\infty(X)$	Fonctions indéfiniment dérivables sur X à support compact	
$\mathcal{D}'(X)$	Distributions sur X (dual de $C_{00}^\infty(X)$)	
D^α	Opérateur différentiel élémentaire	
det	Déterminant	
Diff	Catégorie des variétés différentiables	
D_n	Le groupe dihédral avec $2n$ éléments	
$đ\xi$	Mesure normalisée sur $\mathbb{R}^n$	
$\mathcal{E}'(X)$	Distributions à support compact sur X (dual de $C^\infty(X)$)	
$\mathrm{Ell}(X)$	Opérateurs elliptiques sur X	
Ens	La catégorie des ensembles	
$\mathbb{F}_q$	Le corps fini à q éléments	
$\Gamma(E)$	Séctions du fibré E	
$\mathrm{GL}(V)$	Groupe linéaire de l'espace vectoriel V	
$H^*(X, A)$	Cohomologie à coefficients dans A de X	
$H^*_{dR}(X)$	Cohomologie de deRham de X	
$H^*_c(X)$	Cohomologie à support compact de X	

$\check{H}^*_c(X, \mathcal{F})$	Cohomologie de Čech à coefficients dans $\mathcal{F}$ de X
$\mathrm{Hell}(X)$	Opérateurs hypo–elliptiques sur X
$\mathbb{K}$	Le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni de la topologie usuelle
$K(X)$	K–groupe de X
$\mathbb{N}$	$\{1, 2, 3, ...\}$
$\mathbb{N}_0$	$\{0, 1, 2, 3, ...\}$
$\Omega^*(X)$	Le complexe de deRham associé à X
$\Omega^*(E)$	Le complexe de deRham associé au fibré E
Ψ^m	Opérateurs pseudo–différentiels d'ordre m
$\mathbb{P}^k V$	Espace projectif de dimension k associé à l'espace vectoriel V
$\mathbb{Q}$	Les nombres rationnels
$\mathbb{R}$	Les nombres réels
$\mathbb{R}_+$	Les nombres réels ≥ 0
$\mathcal{S}$	L'espace de Schwarz
$\mathrm{SL}(V)$	Groupe linéaire spécial de V
$\mathrm{SO}(V)$	Groupe orthogonal spécial de V
σ_k	Le k–ème polynôme invariant symétrique
s_k	Le k–ème polynôme invariant de Newton
S^n	La sphère de dimension n
S_n	Le groupe symétrique d'ordre $n!$
S_n	Le groupe symétrique d'ordre $n!$
Symb^m	Symboles d'ordre m
supp	Support
sing supp	Support singulier
Top	Catégorie des espaces topologiques
tr	Trace
$\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(X)$	Classes d'isomorphis de $\mathbb{K}$–fibrés vectoriels sur X
$\mathbb{Z}$	Les nombres entiers

Conventions

multi–indices.

Définition 0.1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle *multi–indice de dimension* n tout n–tuplet ordonné $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Pour un multi–indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, on note

I $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_j$.

et on apellera $|\alpha|$ aussi *degré total* de α. On note

II $\alpha! = \prod_{i=1}^n \alpha_j$.

Pour deux multi–indices $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ de dimension n, on definit

III leur somme $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)$.

et

IV leur produit $\alpha\beta = (\alpha_1\beta_1, \dots, \alpha_n\beta_n)$.

On introduit une relation d'ordre en demandant

V $\alpha \geq \beta$ si et seulement si $\alpha_i \geq \beta_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Dans le cas où $\alpha \geq \beta$, et uniquement dans ce cas, on définit

VI leur différence $\alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1, \dots, \alpha_n - \beta_n)$.

Si G est un groupe, et $x = (x_1, \dots, x_n)$ un n–tuplet d'éléments de G, alors on notera souvent

VII $\alpha x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$ respectivement $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, selon la notation de la loi de groupe.

Transformation de Fourier. Pour $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, nous notons

$$\chi_\xi(x) = e^{i\langle x,\xi\rangle}$$

Pour $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ nous définissons la *transformée de Fourier de* f comme étant la fonction $\widehat{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle} f(x) dx$$

ce qui s'écrit aussi comme

$$\widehat{f}(\xi) = \overline{\chi}_\xi * f$$

L'application $\widehat{\cdot} : f \longmapsto \widehat{f}$ s'appelle *transformation de Fourier*. La transformation de Fourier définit une bijection de l'espace de Schwarz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sur lui même, et pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ la formule d'inversion de Fourier qui affirme que

$$\widehat{\widehat{f}} = (2\pi)^n \check{f}$$

ce qui revient à dire que

$$f(x) = \frac{1}{2\pi^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle \xi,x\rangle} \widehat{f}(\xi) d\xi$$

On notera

$$đ\xi := (2\pi)^{-n} d\xi$$

ce qui fait que

$$f = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle \xi,x\rangle} \widehat{f}(x) đ\xi$$

Pour une fonction $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ on désigne par $\partial_j f$ la dérivée par rapport à x_j de f. On voit ∂_j comme un opérateur linéaire. Pour un multi indice α de dimension n, on note ∂^α l'opérateur défini par

$$\partial^\alpha := \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}$$

et on note

$$D^\alpha := (-i)^{|\alpha|} \partial^\alpha$$

On pour une fonction appropriée f la formule élémentaire

$$\widehat{\partial_k f} = i x_k \widehat{f}$$

Par récurrence on trouve

$$\widehat{D^\alpha f} = x^\alpha \widehat{f}$$

Resultats admises

THEORÈME 0.2. *Soient $s > s'$ réels et K une partie compacte de la variété différentiable X. Alors l'inclusion d'espaces de Sobolev*

$$\iota : H^s(K) \longrightarrow H^{s'}(K)$$

est un opérateur compact.

THEORÈME 0.3. *Soient B_1, B_2 des espaces de Banach et $T : B_1 \longrightarrow B_2$ un opérateur linéaire continu. Supposons qu'il existent des opérateurs linéaires continus $S_1 : B_1 \longrightarrow B_1$ et $S_2 : B_2 \longrightarrow B_2$ tels que*

$$TS_1 - I \qquad et \qquad S_2T - I$$

sont des opérateurs compacts. Alors T a la propriété de Fredholm.

PROPOSITION 0.4. *Soient B_1, B_2 des espaces de Banach et $F : B_1 \longrightarrow B_2$ un opérateur de Fredholm et $C : B_1 \longrightarrow B_2$ un opérateur compact. Alors $F + C$ est un opérateur de Fredholm et* $\operatorname{ind}(F + C) = \operatorname{ind} F$.

THEORÈME 0.5 (MultiTaylor). *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f \in C^\infty(U)$ et $N \in \mathbb{N}$. Soient $\xi \in U$ et $\eta \in \mathbb{R}^n$ tels que le ségment métrique $[\xi, \xi + \eta]$ soit contenu dans U. Alors*

$$f(\xi + \eta) = \sum_{|\alpha| < N} \frac{\partial^\alpha f(\xi)}{\alpha!} \eta^\alpha + N \sum_{|\alpha| = N} \frac{\eta^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1 - \theta)^{N-1} D^\alpha f(\xi + \theta\eta) d\theta$$

CHAPITRE 1

Préparatifs algébriques

1. Limites et colimites

1.1. Définition et unicité. Fixons une catégorie $\mathcal{C}$. Par "objet" et "morphisme" on entendra les objets respectivement morphismes de $\mathcal{C}$. Fixons aussi un ensemble partiellement ordonné $(I, \leq)$. Partiellement ordonné signifie que $\leq$ est transitif, reflexif et que $a \leq b$ et $b \leq a$ entraine $a = b$. Par abus de langage on dira aussi que I est partiellement ordonné. Si $(I, \leq)$ satisfait de plus la condition

$$\forall\, a, b \in I \quad \exists\, c \in I \text{ tel que } a \leq c \text{ et } b \leq c \tag{1}$$

on dira que $(I, \leq)$ *est filtrant.*

Définition 1.1. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'objets et supposons donné des morphismes $\varphi_{ij} : A_i \longrightarrow A_j$ pour tout $i > j$. On appelle *limite du système* (A_i, φ_{ij}) tout couple formé d'un objet L et d'un ensemble de morphismes $\psi_i : L \longrightarrow A_i$ satisfaisant la propriété universelle

$$\begin{tikzcd}
 & & A_i \arrow[dd, "\varphi_{ij}"] \\
L' \arrow[rru, "\psi'_i"] \arrow[rrd, "\psi'_j"'] \arrow[r, dashed, "\exists!\lambda"] & L \arrow[ru, "\psi_i"'] \arrow[rd, "\psi_j"] & \\
 & & A_j
\end{tikzcd} \qquad i > j \tag{2}$$

Pour tout objet L' et toute famille de morphismes $(\psi'_i)_{i \in I}$ telle que $\psi'_j = \varphi_{ij}\psi'_i$ pour tout $i > j$ il existe un unique morphisme $\lambda : L' \longrightarrow L$ faisant commuter tout le diagramme (2).

Pour la raison usuelle, une limite (L, ψ_i) est unique si elle existe. On dira que la catégorie $\mathcal{C}$ admet des limites s'il existe une limite pour tout système (A_i, φ_{ij}). De la façon évidente on définit la colimite d'un système (A_i, φ_{ij}), où cette fois–ci $\varphi_{ij} : A_j \longrightarrow A_i$ pour $i > j$ comme étant solution du problème universelle

$$\begin{tikzcd} & & A_i \arrow[dll, "\psi'_i"'] \arrow[dl, "\psi_i"] & & \\ L' \arrow[r, dashed, "\exists!\lambda"] & L & & & i > j \\ & & A_j \arrow[ull, "\psi'_j"] \arrow[ul, "\psi_j"'] \arrow[uu, "\varphi_{ij}"'] & & \end{tikzcd}$$

Pour tout $L', (\psi'_i)_{i \in I}$ faisant commuter ce diagramme il existe un unique morphisme $\lambda : L' \longrightarrow L$ faisant commuter le tout.
Si (A_i, φ_{ij}, I) est un système de limite ou de colimite, on pose par convention $\varphi_{ii} = \mathrm{id}_{A_i}$ pour tout $i \in I$. On ne change rien à la définition de limite et colimite si on pose $i \geq j$ au lieu de $i > j$ dans les diagrammes de propriété universelle.

Exemple 1.2. Le pull–back est un cas particulier de limite, où I contient seulement trois éléments $\{i, j, k\}$ et seulement les relations $i > k$ et $j > k$. De même le push–out est un cas particulier d'une colimite.
Si I n'est non–ordonné, c'est–à–dire aucun élément est comparable avec un élément différent de lui même, alors la limite est un produit, et la colimite un coproduit.

Theorème 1.3. *Soit I un ensemble partiellement ordonné filtrant, (A_i, φ_{ij}, I) un système de limite et soit $S \subseteq I$ cofinal dans I : Pour tout $i \in I$ il existe $s \in S$ avec $s \geq i$. Si l'un des deux systèmes de limite (A_s, φ_{st}, S) et (A_i, φ_{ij}, I) admet une limite, alors l'autre aussi et les limites sont isomorphes dans ce cas.*

Démonstration. En quatre étapes.
(**I**) D'abord remarquons que S est filtrant, l'ordre partiel étant celui induit par I : En effet si $s, s' \in S$ alors il existe $i \in I$ abec $s \leq i$ et $s' \leq i$ vu que I est filtrant, et il existe $t \in S$ avec $i \leq t$ vu que S est cofinal dans I. Ainsi on a trouvé $t \in S$ avec $s \leq t$ et $s' \leq t$ ce qui montre que S est filtrant.
(**II**) Supposons donné un objet M de $\mathcal{C}$ et des morphismes $(\psi_s)_{s \in S}$ tels que

$$\begin{tikzcd} & A_s \arrow[dd, "\varphi_{st}"] \\ M \arrow[ur, "\psi_s"] \arrow[dr, "\psi_t"'] & \\ & A_t \end{tikzcd}$$

commute pour tout $s \geq t$. Pour tout $i \in I$ choisissons $s \in S$ avec $s \geq i$ et posons $\psi_i := \varphi_{si}\psi_s$. Montrons que les ψ_i ainsi définis ne dépendent pas du choix de s. En effet, soient $s \geq i$ et $s' \geq i$. Comme S est filtré par la première étape, il existe encore $t \in S$ avec $t \geq s$ et $t \geq s'$. Ainsi

$$\varphi_{si}\psi_s = \varphi_{si}\varphi_{ts}\psi_t = \varphi_{ti}\psi_t = \varphi_{s'i}\varphi_{ts'}\psi_t = \varphi_{s'i}\psi'_s$$

d'où indépendence de s. Par construction de ψ_i on a $\psi_i := \varphi_{si}\psi_s$ pour tout $s \in S$ avec $s \geq i$. Montrons que même $\psi_i := \varphi_{hi}\psi_h$ pour tout $h \in I$ avec $h \geq i$. En effet, fixons $h \in I$ et soit $s \in S$ avec $s \geq h$. Alors

$$\varphi_{hi}\psi_h = \varphi_{hi}\varphi_{sh}\psi_s = \varphi_{si}\psi_s = \psi_i$$

comme affirmé.
(**III**) Supposons qu'il existe une limite L du système (A_i, φ_{ij}, I). Pour $i \in I$ notons $\psi_i : L \longrightarrow A_i$ les morphismes qui accompagnent L. Soit L' un objet de $\mathcal{C}$ et soient $(\psi'_s)_{s \in S}$ des morphismes $\psi'_s = L' \longrightarrow A_s$ tels que $\psi'_t = \varphi_{st}\psi'_s$ pour tout $s \geq t$. Par la deuxième étape on peut étendre la famille $(\psi'_s)_{s \in S}$ de manière unique en une famille $(\psi'_i)_{i \in I}$ telle que $\psi'_i = \varphi_{hi}\psi'_h$ pour tout $h \in I$ avec $h \geq i$. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & & A_i \arrow[dd, "\varphi_{ij}"] & \\
L' \arrow[r, dashed, "\exists!\lambda"] \arrow[urr, "\psi'_i"] \arrow[drr, "\psi'_j"'] & L \arrow[ur, "\psi_i"] \arrow[dr, "\psi_j"] & & i \geq j \\
 & & A_j &
\end{tikzcd}$$

avec un unique $\lambda : L' \longrightarrow L$ tel que $\psi'_i = \psi_i\lambda$ pour tout $i \in I$ par la propriété universelle de la limite. En particulier $\psi'_s = \psi_s\lambda$ pour tout $s \in S$. Montrons que si $\lambda : L' \longrightarrow L$ est tel que $\psi'_s = \psi_s\lambda'$ pour tout $s \in S$, alors $\lambda' = \lambda$. En effet, on a dans ce cas pour tout $i \in I$ et tout $s \in S$ avec $s \geq i$

$$\psi_i\lambda' = \varphi_{si}\psi_s\lambda' = \varphi_{si}\psi'_s = \psi'_i$$

et donc $\lambda = \lambda'$ car λ est le seul morphisme avec la propriété $\psi'_i = \psi_i\lambda$ pour tout $i \in I$.
On a alors montré que pour tout objet L' de $\mathcal{C}$ et toute famille de morphismes

$(\psi'_s)_{s\in S}$ avec $\psi'_t = \varphi_{st}\psi'_s$ pour tout $s \geq t$ il existe un unique $\lambda : L' \longrightarrow L$ tel que

$$\begin{tikzcd}
& & A_s \arrow[dd, "\varphi_{st}"] & \\
L' \arrow[urr, "\psi'_s"] \arrow[drr, "\psi'_t"'] \arrow[r, dashed, "\exists!\lambda"] & L \arrow[ur, "\psi_s"] \arrow[dr, "\psi_t"'] & & s \geq t \\
& & A_t &
\end{tikzcd}$$

commute. Avec d'autre mots, l'objet L qui est limite su système (A_i, φ_{ij}, I) est aussi limite du système (A_s, φ_{st}, S).
(**IV**) Finalement supposons qu'il existe une limite L du système (A_s, φ_{st}, S). Pour $s \in S$ notons $\psi_s : L \longrightarrow A_s$ les morphismes qui accompagnent L. Par la deuxième étape on peut étendre la famille $(\psi_s)_{s\in S}$ en une famille de morphismes $(\psi_i)_{i\in I}$ telle que $\psi_i = \varphi_{hi}\psi_h$ pour tout $h \in I$ avec $h \geq i$. Montrons que L avec les morphismes $(\psi_i)_{i\in I}$ est une limite su système $(A_i, \varphi_i j, I)$. Soit donc L' un objet de $\mathcal{C}$ et soient $(\psi'_i)_{i\in I}$ des morphismes $\psi'_i : L' \longrightarrow A_i$ tels que $\psi'_j = \varphi_{ij}\psi'_i$ pour tout $i \geq j$. Soit $\lambda : L' \longrightarrow L$ l'unique morphisme qui fait commuter

$$\begin{tikzcd}
& & A_s \arrow[dd, "\varphi_{st}"] & \\
L' \arrow[urr, "\psi'_s"] \arrow[drr, "\psi'_t"'] \arrow[r, dashed, "\exists!\lambda"] & L \arrow[ur, "\psi_s"] \arrow[dr, "\psi_t"'] & & s \geq t \\
& & A_t &
\end{tikzcd}$$

Montrons que λ satisfait même $\psi'_i = \psi_i\lambda$ pour tout $i \in I$. En effet, si $i \in I$ et $s \in S$ avec $s \geq i$, alors

$$\psi_i\lambda = \varphi_{si}\psi_s\lambda = \varphi_{si}\psi'_s = \psi'_i$$

comme affirmé. De plus λ est unique avec la propriété $\psi'_i = \psi_i\lambda$ pour tout $i \in I$, puisque λ est déjà unique avec la propriété $\psi'_s = \psi_s\lambda$ pour tout $s \in S$. On a alors montré existence et unicité de $\lambda : L' \longrightarrow L$ tel que $\psi'_i = \psi_i\lambda$ pour tout $i \in I$, en d'autre mots, L est limite du système (A_i, φ_{ij}, I). □

THEORÈME 1.4. *Soit I un ensemble partiellement ordonné filtrant, (A_i, φ_{ij}, I) un système de colimite et soit $S \subseteq I$ cofinal dans I. Si l'un des deux systèmes (A_s, φ_{st}, S) et (A_i, φ_{ij}, I) admet une colimite, alors l'autre aussi et les colimites sont isomorphes dans ce cas.*

Démonstration. C'est le théorème 1.3 dans la catégorie $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$. $\square$

Corollaire 1.5. *Soit I un ensemble partiellement ordonné, et supposons que I admet un maximum s. Soit (A_i, φ_{ij}, I) un système de limite ou colimite. Alors A_s est une limite respectivement une colimite de ce système.*

Démonstration. En effet, I est aussi filtré, et $S := \{s\}$ est cofinal dans I. Comme A_s est limite respectivement colimite du système $(A_s, \varnothing, S)$, les théorèmes 1.3 et 1.4 permettent de conclure. $\square$

1.2. Constructions explicites.

Proposition 1.6. *Soit R un anneau et $\mathcal{C}$ la catégorie des R–modules. Soit (A_i, φ_{ij}, I) un système de limite de $\mathcal{C}$. Posons*

$$L := \left\{ (a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i \;\middle|\; \varphi_{ij}(a_i) = a_j \text{ pour tout } i > j \right\}$$

et pour tout $i \in I$ et tout $a = (a_j)_{j\in I}$ posons $\psi_i(a) = a_i$. Alors $(L, (\psi_i)_{i\in I})$ est une limite du système (A_i, φ_{ij}, I).

Démonstration. Pour tout $a \in L$ on a $\psi_j(a) = a_j = \varphi_{ij}(a_i) = \varphi_{ij}\psi_i(a)$ par définition, et donc $\psi_j = \varphi_{ij}\psi_i$.
Soit L' un R–module et soient $(\psi'_i)_{i\in I}$ des morphismes $\psi'_i : L' \longrightarrow A_i$ tels que $\psi' j = \varphi_{ij}\psi'_i$ pour tout $i \geq j$. Si $\lambda : L' \longrightarrow L$ fait commuter le diagramme de propriété universelle, c'est–à–dire $\psi'_i(l) = \psi_i\lambda(l) = \lambda(l)_i$ pour tout $i \in I$, alors forcement $\lambda(l) = (\psi'_i(l))_{i\in I}$, on a donc unicité. Si λ est défini ainsi, alors λ est un morphisme de R–modules, puisque toutes les ψ'_i le sont. Reste à voir que $\lambda(l) \in L$. En effet si $i \geq j$, alors

$$\varphi_{ij}(\lambda(l)_i) = \varphi_{ij}(\psi'_i(l)) = \psi'_j(l) = \lambda(l)_j$$

donc $\lambda(l) \in L$ comme affirmé. Il existe donc un unique morphisme $\lambda : L' \longrightarrow L$ qui fait commuter le diagramme de propriété universelle, et par conséquent L est une limite du système (A_i, φ_{ij}, I). $\square$

Proposition 1.7. *Soit R un anneau et $\mathcal{C}$ la catégorie des R–modules. Soit (A_i, φ_{ij}, I) un système de colimite de $\mathcal{C}$. Pour tout $i \in I$ notons ψ_i l'application canonique*

$$\psi_i : A_i \longrightarrow A := \bigoplus_{i\in I} A_i$$

Posons

$$B := \left\langle \psi_j(x) - \psi_i\varphi_{ij}(x) \;\middle|\; i < j,\ x \in A_j \right\rangle$$

et posons $C := A/B$. Pour tout $i \in I$ et tout $x \in A_i$ soit $\overline{\psi}_i(x) = \overline{\psi_i(x)}$ la classe de $\psi_i(x)$ dans C. Alors $(C, (\overline{\psi}_i)_{i\in I})$ est une colimite du système (A_i, φ_{ij}, I).

Démonstration. Pour tout $i > j \in I$ et pour tout $x \in A_j$ on a par définition $\overline{\psi}_j(x) = \overline{\psi_i\varphi_{ij}(x)} = \overline{\psi}_i\varphi_{ij}(x)$, et donc $\overline{\psi}_j = \overline{\psi}_i\varphi_{ij}$.
Soit C' un R–module et soient $(\psi'_i)_{i\in I}$ des morphismes $\psi'_i : A_i \longrightarrow C'$ tels que $\psi'_j = \psi' i\varphi_{ij}$ pour tout $i \geq j$. S'il existe $\overline{\lambda} : C \longrightarrow C'$ qui fait commuter le diagramme de propriété universelle

$$\begin{tikzcd}
 & & A_i \arrow[dll, "\psi'_i"'] \arrow[dl, "\overline{\psi}_i"] & \\
C' & C \arrow[l, dashed, "\exists!\overline{\lambda}"'] & & i > j \\
 & & A_j \arrow[ull, "\psi'_j"] \arrow[ul, "\overline{\psi}_j"'] \arrow[uu, "\varphi_{ij}"']
\end{tikzcd}$$

c'est–à–dire $\overline{\lambda}\,\overline{\psi}_i(x) = \psi'(x)$ pour tout $i \in I$ et tout $x \in A_i$. On a donc nécessairement

$$\overline{\lambda}(\overline{a}) = \sum_{i\in I} \psi'_i(a_i)$$

pour tout $\overline{a} \in C$, donc unicité. Reste à voir que $\overline{\lambda}$ est bien défini par l'équation ci–dessus. Pour cela, définissons $\lambda : A \longrightarrow C'$ par

$$\lambda(a) = \sum_{i\in I} \psi'_i(a_i)$$

Il suffit de montrer que $B \subseteq \ker\lambda$, car ainsi $\overline{\lambda}$ sera l'application induit sur le quotient $A/B = C$. En effet, pour tout générateur $\psi_j(x) - \psi_i\varphi_{ij}(x)$ de B on a

$$\sum_{h\in I} \psi'_h(a_h) = \psi'_i(x) - \psi'_j\varphi_{ij}(x) = 0$$

donc $B \subseteq \ker\lambda$. On a donc existence et unicité de $\overline{\lambda}$ dans le diagramme de propriété universelle, et C est par conséquent une colimite du système (A_i, φ_{ij}, I). $\square$

Corollaire 1.8. *Soit R un anneau. Alors la catégorie des R–modules admet des limites et colimites.*

Proposition 1.9. *Soit (A_i, φ_{ij}, I) un système de limite de la catégorie des ensembles* **Ens**. *Posons*

$$L := \left\{ (a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i \quad \middle| \quad \varphi_{ij}(a_i) = a_j \textit{ pour tout } i > j \right\}$$

et pour tout $i \in I$ et tout $a = (a_j)_{j\in I}$ posons $\psi_i(a) = a_i$. Alors $(L, (\psi_i)_{i\in I})$ est une limite du système (A_i, φ_{ij}, I).

PROPOSITION 1.10. *Soit (A_i, φ_{ij}, I) un système de colimite de la catégorie des ensembles* **Ens**. *Pour tout $i \in I$ notons ψ_i l'injection canonique*

$$\psi_i : A_i \longrightarrow A := \coprod_{i \in I} A_i$$

Notons $\sim$ la relation d'équivalence engendrée par $\psi_j(x) \sim \psi_i \varphi_{ij}(x)$ pour $i < j$ et $x \in A_j$, et posons $C := A/\sim$. Pour tout $i \in I$ et tout $x \in A_i$ soit $\overline{\psi}_i(x) = \overline{\psi_i(x)}$ la classe de $\psi_i(x)$ dans C. Alors $(C, (\overline{\psi}_i)_{i \in I})$ est une colimite du système (A_i, φ_{ij}, I).

COROLLAIRE 1.11. *La catégorie des ensembles admet des limites et colimites.*

PROPOSITION 1.12. *Soit (A_i, φ_{ij}, I) un système de limite de la catégorie des espaces topologiques* **Top**. *Posons*

$$L := \left\{ (a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i \;\middle|\; \varphi_{ij}(a_i) = a_j \text{ pour tout } i > j \right\}$$

et pour tout $i \in I$ et tout $a = (a_j)_{j \in I}$ posons $\psi_i(a) = a_i$. Munissons L de la topologie initiale du système

$$\psi_i : L \longrightarrow A_i \qquad i \in I$$

Alors $(L, (\psi_i)_{i \in I})$ est une limite du système (A_i, φ_{ij}, I).

PROPOSITION 1.13. *Soit (A_i, φ_{ij}, I) un système de colimite de la catégorie des espaces topologiques* **Top**. *Pour tout $i \in I$ notons ψ_i l'injection canonique*

$$\psi_i : A_i \longrightarrow A := \coprod_{i \in I} A_i$$

Munissons A de la topologie finale su système Notons $\sim$ la relation d'équivalence engendrée par $\psi_j(x) \sim \psi_i \varphi_{ij}(x)$ pour $i < j$ et $x \in A_j$, et posons $C := A/\sim$. Pour tout $i \in I$ et tout $x \in A_i$ soit $\overline{\psi}_i(x) = \overline{\psi_i(x)}$ la classe de $\psi_i(x)$ dans C. Munissons L de la topologie finale du système

$$\overline{\psi}_i : A_i \longrightarrow C \qquad i \in I$$

Alors $(C, (\overline{\psi}_i)_{i \in I})$ est une colimite du système (A_i, φ_{ij}, I).

COROLLAIRE 1.14. *La catégorie des espaces topologiques admet des limites et colimites.*

Remarque 1.15. Soit E un ensemble et $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(E)$ une partie de toutes les parties de E stable pour des reunions finies. Alors $\mathcal{A}$ est partiellement ordonné par l'ordre d'inclusion. Posons

$$L := \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$$

On a $\lim_{A \in \mathcal{A}} A \cong L$ dans la catégorie des ensembles, ce qu'on vérifie directement à partir des propriétés universelles. Dans le cas où chaque $A \in \mathcal{A}$ porte une structure d'espace topologique faisant que toutes les inclusions $A \longrightarrow A'$ pour $A \subseteq A'$ sont continues, alors il suffit de munir l'intersection L de la topologie initiale du système

$$L \xrightarrow{\subseteq} A \qquad A \in \mathcal{A}$$

pour que $\lim_{A \in \mathcal{A}} A \cong L$ dans la catégorie des espaces topologiques. Quant à la co–notion, soit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(E)$ une partie de toutes les parties de E stable pour des intersections finies. Alors $\mathcal{A}$ est ordonné partiellement par l'ordre d'inclusion. Posons

$$C := \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

On a $\operatorname{colim}_{A \in \mathcal{A}} A \cong C$ dans la catégorie des ensembles, ce qu'on vérifie de nouveau directement à partir des propriétés universelles. Dans le cas où chaque $A \in \mathcal{A}$ porte une structure d'espace topologique faisant que toutes les inclusions $A \longrightarrow A'$ pour $A \subseteq A'$ sont continues, il suffit de munir la réunion C de la topologie finale du système

$$A \xrightarrow{\subseteq} C \qquad A \in \mathcal{A}$$

pour que $\operatorname{colim}_{A \in \mathcal{A}} A \cong C$ dans la catégorie des espaces topologiques.

1.3. Propriétés fonctorielles.

Définition 1.16. Soit I un ensemble partiellement ordonné et $\mathcal{C}$ la catégorie des modules sur un anneau R. La "catégorie des systèmes de limite indicés par I sur $\mathcal{C}$" que l'on note $\mathcal{C}^I$ a comme objets tout les systèmes de limite à objets dans $\mathcal{C}$ indicés par I, et comme morphismes

$$\operatorname{Hom}\big((A_i, \varphi_{ij}), (B_i, \psi_{ij})\big)$$

les familles $(\mu_i)_{i \in I}$ de morphismes dans $\mathcal{C}$ faisant commuter tout les diagrammes

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "\mu_i"] \arrow[d, "\varphi_{ij}"'] & B_i \arrow[d, "\psi_{ij}"] \\ A_j \arrow[r, "\mu_j"] & B_j \end{tikzcd} \qquad i > j$$

On dira que une suite courte dans $\mathcal{C}^I$

$$0 \longrightarrow (A_i, \alpha_{ij}) \longrightarrow (B_i, \beta_{ij}) \longrightarrow (C_i, \gamma_{ij}) \longrightarrow 0$$

est exacte, si les suites

$$0 \longrightarrow A_i \longrightarrow B_i \longrightarrow C_i \longrightarrow 0$$

sont exactes pour tout $i \in I$. De la même façon on définit la "catégorie des colimites indicés par I sur $\mathcal{C}$".

PROPOSITION 1.17. *Soit I un ensemble partiellement ordonné et $\mathcal{C}$ la catégorie des modules sur un anneau R. Soient (A_i, α_{ij}) et (B_i, β_{ij}) des objets de $\mathcal{C}^I$ et $(\mu_i)_{i\in I} : (A_i, \alpha_{ij}) \longrightarrow (B_i, \beta_{ij})$ un morphisme. Soit $A := \lim_{i\in I} A_i$ et $B := \lim_{i\in I} B_i$ et soient $\alpha_i : A \longrightarrow A_i$ et $\beta_i : B \longrightarrow B_i$ les morphismes correspondants. Alors il existe de manière canonique et naturelle un morphisme $\mu : A \longrightarrow B$ de la catégorie $\mathcal{C}$ faisant commuter*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\alpha_i"'] & B \arrow[d, "\beta_i"] \\ A_i \arrow[r, "\mu_i"] & B_i \end{tikzcd}$$

L'attribution $\lim_{i\in I} : (A_i, \alpha_{ij}) \longrightarrow A$ et $\lim_{i\in I} : (\mu_i)_{i\in I} \longrightarrow \mu$ définit un foncteur

$$\lim_{i\in I} : \mathcal{C}^I \longrightarrow \mathcal{C}$$

PROPOSITION 1.18. *Soit I un ensemble partiellement ordonné et $\mathcal{C}$ la catégorie des modules sur un anneau R. Le foncteur limite $\lim_{i\in I} : \mathcal{C}^I \longrightarrow \mathcal{C}$ est additif et exact à gauche, c'est à dire si*

$$0 \longrightarrow (A_i, \alpha_{ij}) \longrightarrow (B_i, \beta_{ij}) \longrightarrow (C_i, \gamma_{ij}) \longrightarrow 0$$

est exacte dans $\mathcal{C}^I$, alors la suite

$$0 \longrightarrow A_i \longrightarrow B_i \longrightarrow C_i$$

est exacte.

2. Espaces projectifs

LEMME 1.19. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{P}^n K$, où $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$. Alors $\mathbb{P}^n K \setminus \{x\}$ est homotope à $\mathbb{P}^{n-1} K$.*

DÉMONSTRATION. Supposons sans perte de généralité que $x = [0, \ldots, 0, 1]$. On a une immersion (une application continue qui est un homéomorphisme sur son image)

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{P}^{n-1}K & \longrightarrow & \mathbb{P}^n K \\ & [z_0, \ldots, z_{n-1}] & \longmapsto & [z_0, \ldots, z_{n-1}, 0] \end{array}$$

Il suffit de voir que l'image de φ est même un retract de déformation de $\mathbb{P}^n K \setminus \{x\}$. En effet, on a une homotopie

$$\begin{array}{rcl} H : I \times (\mathbb{P}^n K \setminus \{x\}) & \longrightarrow & \mathbb{P}^n K \setminus \{x\} \\ (t, [z_0, \ldots, z_n]) & \longmapsto & [z_0, \ldots, z_{n-1}, t z_n] \end{array}$$

où I est l'intervalle $[0,1]$. $\square$

3. Polynômes invariants

Soit A un anneau commutatif à unité $n \in \mathbb{N}$ et G un sous–groupe de $\mathrm{GL}_n(A)$. Soient $X = (X_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ des indéterminées sur A. On voit X comme matrice $n \times n$. Les éléments de G agissent de façon naturelle sur l'anneau des polynômes à n^2 variables $A[X] = A[X_{11}, \ldots, X_{nn}]$ par conjugaison de l'argument

$$gP(X) = P(gXg^{-1})$$

Un polynôme $P \in A[X]$ est dit *polynôme G–invariant* si $gP = P$ pour tout $g \in G$. On parle de *polynôme invariant* dans le cas où $G = \mathrm{GL}_n(A)$. Dans la suite on s'interessra uniquement au cas $A = \mathbb{C}$ et $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
Il est clair que si P et Q sont des polynômes invariants alors $P + Q$ et PQ sont aussi invariants. Les polynômes invariants forment donc un sous–anneau de $\mathbb{C}[X]$, ou même une sous–$\mathbb{C}$–algèbre de $\mathbb{C}[X]$. Si P_j est la partie homogène en degré j du polynôme invariant P, alors P_j est aussi un polynôme invariant.

Proposition 1.20. *Soit P un polynôme invariant en n^2 variables, et notons $P'(X)$ la matrice des dérivés partielles tranposée*

$$P'(X) = \left(\frac{\partial P(X)}{X_{ij}}\right)^t$$

Alors X et $P'(X)$ commutent.

Démonstration. Notons E_{ij} la matrice élémentaire dont le i,j–éme coefficient vaut 1, et dont tout les autre coefficients valent 0. Comme P est invariant, on a, pour une indéterminée t

$$P((I + tE_{ij})X) = P(X(I + tE_{ij}))$$

On dérive cette équation par t : La formule pour la dérivée d'une fonction composée donne $\frac{\partial}{\partial t}P(f(t)) = DP(f(t))(f'(t))$ où DP est la dérivée totale de P, et où on a posé $f(t) = (I + tE_{ij})X$. On a

$$f'(t) = E_{ij}X$$

et

$$DP(Y)(A) = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial P}{\partial X_{kl}}(Y)a_{kl}$$

Remarquons que $(E_{ij}X)_{kl} = \delta_{ik}X_{jl}$, où δ_{ik} est le symbôle de Kronecker. Mis ensemble, ceci donne

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}P(f(t)) &= \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial P}{\partial X_{kl}}((I+tE_{ij})X)(E_{ij}X)_{kl} \\ &= \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial P}{\partial X_{kl}}((I+tE_{ij})X)\delta_{ik}X_{jl} \\ &= \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial P}{\partial X_{il}}((I+tE_{ij})X)X_{jl}\end{aligned}$$

en particulier

$$\frac{\partial}{\partial t}P(f(t))\Big|_{t=0} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial P}{\partial X_{il}}(X)X_{jl} = (XP'(X))_{ji}$$

le même calcul pour $g(t) = X(I+tE_{ij})$ au lieu de f donne

$$\frac{\partial}{\partial t}P(g(t))\Big|_{t=0} = (P'(X)X)_{ji}$$

et donc, puisque $P(f(t)) = P(g(t))$, on a en résumé $XP'(X) = P'(X)X$. $\square$

Pour un nombre de variables n^2 fixé, introduisons deux classes importantes de polynômes invariants. On considère d'abord (presque) le polynôme caractéristique de X

$$\sigma(t)(X) := \det(I+tX) = \sum_{j=0}^{n} \sigma_j(X)t^j$$

Le polynôme $\sigma \in \mathbb{C}[t][X]$, et par conséquent aussi les polynômes $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n$ sont invariants, puisque

$$\sigma(t)(X) = \det(I+tX) = \det(g(I+tX)g^{-1}) = \det(I+gtXg^{-1}) = \sigma(t)(gXg^{-1})$$

pour tout $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Remarquons que σ_j est homogène de degré j pour $0 \leq j \leq n$ et en particulier $\sigma_0 = 1$. Ces polynômes $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n$ sont appelés *polynômes invariants symétriques*. Par convention on pose $\sigma_j(X) = 0$ si $j > n$.
Après, on s'interesse aussi à série formelle[1] $s(t) \in \mathbb{C}[X][[t]]$ suivante :

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \det(I-tX)^j t^j = \sum_{k=0}^{\infty} s_k(X)t^k$$

Remarquons que $s_0(X) = n$ est le terme constant de cette série formelle. Si on dérive et intègre (tout formellement) cette série, on trouve

$$s(X)(t) - s_0(X) = \sum_{k=1}^{\infty} s_k(X)t^k = -t\frac{\partial}{\partial t}\log(\det(I-tX))$$

où $\log(1+t)$ désigne la série formelle

$$\log(1+t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}t^k$$

[1]Voir [**7**], chap. IV, §4 pour la théorie générale des anneaux de séries formelles.

Les polynômes $s_1, \dots s_k, \dots$ sont invariants, de nouveau par le fait que deux matrices conjugés ont même déterminant. On les appelle *polynômes invariants de Newton*. Dans l'anneau des séries formelles $\mathbb{C}[X][[t, t^{-1}]]$ on a les identités

$$\begin{aligned} \sigma(t)(X) &= \det(I + tX) \\ &= \det(I - (-t)X) \\ &= \exp\left(\int \frac{s(-t)}{t} dt\right) \end{aligned}$$

donc

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j(X) t^j = \exp\left(\int \frac{1}{t} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j s_j(X) t^j dt\right)$$

Cette équation montre que tout $s_j(X)$ peut être écrit comme polynôme à coefficients entiers en $\sigma_1(X), \dots, \sigma_n(X)$, et que tout $\sigma_j(X)$ peut être écrit comme polynôme à coefficients rationnels en $s_1(X), \dots, s_n(X)$, en d'autre mots : Pour tout $j \in \mathbb{N}$ il existe $P_j \in \mathbb{Z}[Y_1, \dots, Y_n]$ et $Q_j \in \mathbb{Q}[Y_1, \dots, Y_n]$ tel que

$$s_j = P_j(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \tag{3}$$

$$\sigma_j = Q_j(s_1, \dots, s_n) \tag{4}$$

Exemple 1.21. Pour $n^2 = 9$, les polynômes invariants symétriques non nuls, et les 4 premiers polynômes invariants de Newton sont

$$\begin{aligned} \sigma_0(X) &= 1 \\ \sigma_1(X) &= X_{11} + X_{22} + X_{33} \\ \sigma_2(X) &= X_{11}X_{22} + X_{11}X_{33} + X_{22}X_{33} - X_{12}X_{21} - X_{13}X_{31} - X_{23}X_{32} \\ \sigma_3(X) &= X_{12}X_{23}X_{31} + X_{31}X_{21}X_{32} + X_{11}X_{22}X_{33} \\ &\quad -X_{11}X_{23}X_{32} - X_{13}X_{22}X_{31} - X_{12}X_{21}X_{33} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_0(X) &= 3 \\ s_1(X) &= X_{11} + X_{22} + X_{33} \\ s_2(X) &= X_{11}^2 + X_{22}^2 + X_{33}^2 + 2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + 2X_{23}X_{32} \\ s_3(X) &= X_{11}^3 + X_{22}^3 + X_{33}^3 + 3X_{11}X_{12}X_{21} + 3X_{11}X_{13}X_{31} \\ &\quad +3X_{22}X_{12}X_{21} + 3X_{22}X_{23}X_{32} + 3X_{33}X_{13}X_{31} \\ &\quad +3X_{33}X_{23}X_{32} + 3X_{12}X_{23}X_{31} + 3X_{13}X_{32}X_{21} \\ &\dots \end{aligned}$$

Proposition 1.22. *Pour tout $j \in \mathbb{N}_0$ on a $s_j(X) = \mathrm{tr}(X^j)$, où X^j est la j–ème puissance de la matrice $(X_{lk})_{1 \le l,k \le n}$.*

Démonstration. La proposition est vraie pour $j = 0$, supposons donc $j > 0$. Il suffit de montrer que $s_j(A) = \mathrm{tr}(A^j)$ pour toute matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Vu que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ et que $s_j(A)$ et $\mathrm{tr}(A^j)$

sont des fonctions continues en A qui restent inchangées sous conjugaison, il suffit de montrer que $s_j(A) = \mathrm{tr}(A^j)$ pour toute matrice diagonale. Considérons donc

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

On a

$$\det(I - tA) = \prod_{i=1}^{n}(1 - t\lambda_i)$$

et donc

$$\begin{aligned} s(A)(t) - n &= -t\frac{\partial}{\partial t}\log(\det(I - tA)) = -t\frac{\partial}{\partial t}\sum_{i=1}^{n}\log(1 - t\lambda_i) \\ &= -t\frac{\partial}{\partial t}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{-1}{j}(t\lambda_i)^j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_i^j t^j = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^j\right)t^j = \sum_{j=1}^{\infty}s_j(A)t^j \end{aligned}$$

ce qui montre, en comparant les coefficients que $s_j(A) = \lambda_1^j + \cdots + \lambda_n^j = \mathrm{tr}(A^j)$. $\square$

Lemme 1.23. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a*

$$\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\sigma_j(X)s_{k-j}(X) = (-1)^{k-1}k\sigma_k(X)$$

Démonstration. Comme dans la démonstration de 1.22 il suffit de montrer que cette égalité est vraie pour toute matrice diagonale $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Soit donc $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale, et notons de nouveau $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les entrés sur la diagonale de A. On a

$$\sigma(A)(-t) = \prod_{i=1}^{n}(1 - t\lambda_i) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sigma_i(A)t^i$$

et

$$s(A)(t) - n = -t\frac{\partial}{\partial t}\log(\det(I - tA)) = \sum_{i=1}^{n}\frac{t\lambda_i}{1 - t\lambda_i} = \sum_{i=1}^{n}s_i(A)t^i$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \sigma(A)(-t)s(A)(t) = \prod_{i=1}^{n}(1 - t\lambda_i)\sum_{j=1}^{n}\frac{t\lambda_j}{1 - t\lambda_j} &= \\ = \sum_{j=1}^{n}t\lambda_j\prod_{i\neq j}(1 - t\lambda_i) &= -t\frac{\partial\sigma(A)(-t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}i\sigma_i t^i \end{aligned}$$

c'est–a–dire

$$\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sigma_i(A)t^i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}s_i(A)t^i\right) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}i\sigma_i t^i$$

en comparant le coefficient de t^k dans cette égalité, on trouve

$$\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\sigma_j(A)s_{k-j}(A) = (-1)^{k-1}k\sigma_k(A)$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Remarque 1.24. Ce dernier lemme permet de calculer recursivement les polynômes P_j et Q_j définies par (3) et (4). On trouve

$$\begin{aligned} s_1(X) &= \sigma_1(X) \\ s_2(X) &= \sigma_1(X)^2 - 2\sigma_2(X) \end{aligned}$$

Proposition 1.25. *Soient $m, n \in \mathbb{N}$, et soient A et B des matrices en n^2 et m^2 indéterminées respectivement. Alors on a pour des polynômes invariants en un nombre approprié de variables*

$$\sigma_k(A \oplus B) = \sum_{i=0}^{k}\sigma_i(A)\sigma_{k-i}(B) \tag{5}$$

$$s_k(A \oplus B) = s_k(A) + s_k(B) \tag{6}$$

$$s_k(A \otimes B) = s_k(A)s_k(B) \tag{7}$$

Démonstration. Par définition de σ_j on a

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n+m}\sigma_j(A\oplus B)t^j &= \sigma(A\oplus B)(t) = \\ &= \det(I + t(A\oplus B)) = \det(I+tA)\det(I+tB) = \\ &= \sigma(A)(t)\sigma(B)(t) = \sum_{i=0}^{n}\sigma_i(A)t^i\sum_{j=0}^{m}\sigma_j(B)t^j \end{aligned}$$

ce qui montre, en comparaisant le coefficient de t^j l'équation (5). L'équation 6 découle immédiatement de la proposition 1.22. Finalement on a

$$s_k(A\otimes B) = \mathrm{tr}((A\otimes B)^k) = \mathrm{tr}(A^k\otimes B^k) = \mathrm{tr}(A^k)\,\mathrm{tr}(B^k) = s_k(A)s_k(B)$$

d'où l'équation (7). □

CHAPITRE 2

Classes caractéristiques

Soit X une variété différentiable et $p : E \longrightarrow X$ un fibré vectoriel réel ou complexe de dimension n sur X. Pour un anneau A, notons

$$H^*(X, A)$$

la cohomologie totale de X à coefficients dans A. Nous voyons $H^*(X, A)$ comme A–algèbre graduée

$$H^*(X, A) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} H^i(X, A)$$

On écrira $H^*(X)$ au lieu de $H^*(X, \mathbb{Z})$. On connait quatre types de classes caractéristiques :

I : Dans le cas où E est réel et orientable on a la classe d'Euler $e \in H^n(X)$.

II : Dans le cas où E est un fibré complexe on a les classes ce Chern $c_1, \ldots, c_n$ où $c_i \in H^{2i}(X)$.

III : Dans le cas où E est réel on a les classes de Pontryagin $p_1, \ldots, p_{[n/2]}$ où $p_i \in H^{4i}(X)$.

IV : Dans le cas réel on a encore les classes de Stiefel–Whitney $w_1, \ldots, w_n$ où $w_i \in H^i(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Tout ces classes se comportent naturellement face aux fibrés induits. Plus précisement, une application différentiable $f : Y \longrightarrow X$ induit des des applications $f^* : \mathrm{Vect}(X) \longrightarrow \mathrm{Vect}(Y)$, et $H^*(f) : H^*(X) \longrightarrow H^*(Y)$. Pour ces applications on a

$$H^*(f)(c_i(E)) = c_i(f^*(E))$$

et la formule analogue est vraie pour les autres classes caractéristiques. Dans la suite on définira ces classes, et démontrera quelques resultats principaux, tels que la formule de Whitney et le principe du scindage ("splitting principle").

1. La cohomologie des variétés $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ et $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$

THEORÈME 2.1. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe un isomorphisme de $\mathbb{R}$–algèbres*

$$\mathbb{R}[y]/y^{n+1} \xrightarrow{\cong} H^*(\mathbb{P}^n\mathbb{C})$$

qui envoit la classe de y dans $\mathbb{R}[y]/y^{n+1}$ sur une classe de cohomologie de degré 2. En particulier

$$H^p(\mathbb{P}^n\mathbb{C}) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \textit{si } p \textit{ est pair et } p \leq 2n \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. On commence par établir un isomorphisme d'espaces vectoriels. Pour cela, procédons par récurrence sur n. Pour $n = 1$, on a $\mathbb{P}^n\mathbb{C} \cong S^2$, et on sait que $H^*(S^2) \cong \mathbb{R}[y]/y^2$. Considérons les ouverts

$$\begin{aligned} U &:= \{\langle(z_0, \ldots, z_{n-1}, 1)\rangle \mid (z_0, \cdots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^n)\} \\ V &:= \mathbb{P}^n\mathbb{C} \setminus \{\langle(0, \ldots, 0, 1)\rangle\} \end{aligned}$$

L'ouvert U est homéomorphe à $\mathbb{C}^n$ et donc homotope à un point, et l'ouvert V est homotope à $\mathbb{P}^{n-1}\mathbb{C}$ par le lemme 1.19. On a $U \cup V = \mathbb{P}^n\mathbb{C}$ et

$$U \cap V \cong \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \simeq S^{2n-1}$$

La suite de Mayer–Vietoris pour les ouverts U et V permet de conclure que

$$H^p(\mathbb{P}^n\mathbb{C}) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } p \text{ pair et } p \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour la structure multiplicative, il suffit de trouver une classe de cohomologie $[\omega] \in H^2(\mathbb{P}^n\mathbb{C})$ qui engendre $H^*(\mathbb{P}^n\mathbb{C})$ comme $\mathbb{R}$–algèbre, ce qui revient trouver une forme fermée $\omega \in \Omega^2(\mathbb{P}^n\mathbb{C})$ telle que ω^n n'est pas exacte. La 2–forme

$$\widetilde{\omega} := \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\|z\|^4} \sum_{\substack{j,k=0 \\ j \neq k}}^{n} z_j \overline{z}_k dz_k \wedge d\overline{z}_j$$

sur $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ est invariante sous l'action de $\mathbb{C}^*$. Elle passe donc au quotient, et définit une 2–forme ω sur $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$. J'affirme qu'elle est fermée et qu'elle engendre $H^*(\mathbb{P}^n\mathbb{C})$.

Que la forme $\widetilde{\omega}$, et donc aussi la forme ω est fermée se montre par un calcul direct. On a pour $z = (z_0, \ldots, z_n)$ et $z_j = x_j + iy_j$

$$d\frac{1}{\|z\|^2} = d\frac{1}{x_0^2 + y_0^2 + \cdots + y_n^2} = \frac{-2}{\|z\|^4} \sum_{j=0}^{n} x_j dx_j + iy_j dy_j$$

Observant que $z_j dz_j + \overline{z}_j d\overline{z}_j = 2(x_j dx_j + y_j dy_j)$, ceci devient

$$d\frac{1}{\|z\|^2} = \frac{-1}{\|z\|^4} \sum_{j=0}^{n} z_j dz_j + \overline{z}_j d\overline{z}_j$$

et donc

$$d\frac{1}{\|z\|^4} = \frac{-2}{\|z\|^6}\sum_{j=0}^{n} z_j dz_j + \overline{z}_j d\overline{z}_j$$

Ayant ceci, on calcule "directement" que

$$d\widetilde{\omega} = 0$$

Ainsi, $\omega \in \Omega^2(\mathbb{P}^n\mathbb{C})$ est une forme fermée et represente donc un élément de $H^2(\mathbb{P}^n\mathbb{C})$. Montrons que $[\omega]$ est une classe de cohomologie non–triviale. A ce fin, considérons l'immersion

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{P}^n\mathbb{C} \\ z & \longmapsto & [1, z, 0, \ldots, 0] \end{array}$$

et considérons la forme induite $H^*(\varphi)(\omega) \in \Omega^*(\mathbb{C})$. Pour $z = x + iy$, on trouve

$$H^*(\varphi)(\omega) = \frac{1}{\pi}\frac{dx \wedge dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

et on a tout arrangé pour que

$$\begin{aligned} \int H^*(\varphi)(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2} dxdy \\ &= \frac{-1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{-2r}{(1 + r^2)^2} dr d\vartheta \\ &= \left.\frac{-1}{1 + r^2}\right|_0^{\infty} \\ &= 1 \end{aligned}$$

ce qui montre que ω n'est pas exacte. La dernière chose à vérifier est que la forme $\omega^n \in H^{2n}(\mathbb{P}^n\mathbb{C})$ n'est pas exacte, ce que l'on fait par recurrence sur n. $\square$

2. Le principe du scindage complexe

Soit E un fibré vectoriel complexe de dimension k sur X. Le foncteur $\mathbb{P}(-)$ induit un fibré $\mathbb{P}E$ sur X de fibre $\mathbb{P}E_x = \mathbb{P}(E_x)$. L'espace total de $\mathbb{P}E$ est alors une variété de dimension $n + k - 1$.

Proposition 2.2. *Soit $p : E \longrightarrow X$ un fibré vectoriel complexe de dimension k sur X. Alors $H^*(\mathbb{P}E)$ est un $H^*(X)$–module libre de dimension k. En particulier $H^*(\mathbb{P}p) : H^*(X) \longrightarrow H^*(\mathbb{P}E)$ est injectif.*

DÉMONSTRATION. L'espace total de $\mathbb{P}E$ est l'ensemble de tout les couples $(x, \langle v\rangle)$ tels que $x \in X$ et $\langle v\rangle \in \mathbb{P}E_x$. On a un fibré complexe de dimension 1 sur $\mathbb{P}E$, dont l'espace total est donné par

$$L := \big\{(x, \langle v\rangle, w) \,\big|\, x \in X, \langle v\rangle \in \mathbb{P}E_x, w \in \langle v\rangle\big\}$$

Notons $c = c_1(L) \in H^2(\mathbb{P}E)$ la première classe de Chern du fibré vectoriel L sur $\mathbb{P}E$. On aimerait appliquer le théorème de Leray–Hirsch **??** aux classes

$$1, c, c^2, \ldots, c^{k-1}$$

Soit $\iota : \mathbb{P}^k\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}E$ un isomorphisme de $\mathbb{P}^k\mathbb{C}$ sur une fibre de $\mathbb{P}E$. Les classes $H^*(\iota)(1), H^*(\iota)(c), H^*(\iota)(c^2), \ldots, H^*(\iota)(c^{k-1})$ forment en effet une $\mathbb{C}$–base de $\mathbb{P}^k\mathbb{C}$, vu que $H^*(\iota)(c) = c_1(\iota^*L)$ n'est pas nul et le théorème 2.1. Par le théorème de Leray–Hirsch, $H^*(\mathbb{P}E)$ est un $H^*(X)$–module libre de base $1, c, c^2, \ldots, c^{k-1}$. L'injectivité de $H^*(\mathbb{P}p) : \omega \longmapsto \omega \cdot 1$ est évidente. □

THEORÈME 2.3 (Principe du scindage). *Soit E un fibré vectoriel de dimension k sur X. Alors il existe une variété Y et une application différentiable $f : Y \longrightarrow X$ telle que*

- I : *L'application $H^*(f) : H^*(X) \longrightarrow H^*(Y)$ est injective.*
- II : *Il existent des fibrés vectoriels $F_1, F_2, \ldots, F_k$ sur Y, tous de dimension 1 telles que $f^*(E) \cong F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_k$.*

DÉMONSTRATION. On procède par recurrence sur $\dim_{\mathbb{C}} E$. Clairement le théorème est vrai dans le cas où E est de dimension 1. Soit donc $2 \leq \dim_{\mathbb{C}} E = k$ et supposons le théorème vrai pour $\dim_{\mathbb{C}} E < k$. Il suffit de montrer l'existence d'une variété Y et d'une application différentiable $f : Y \longrightarrow X$ tel que

- I : L'application $H^*(f) : H^*(X) \longrightarrow H^*(Y)$ est injective.
- II : Il existent des fibrés vectoriels F, G sur Y, avec F de dimension 1 et tel que $f^*(E) \cong F \oplus G$.

En effet, par hypothèse de recurrence il existent une variété Z et $g : Z \longrightarrow Y$ différentiable et des fibrés $F_2, \ldots, F_k$ de dimension 1 sur Z tels que $H^*(g)$ est injectif et tel que $g^*G \cong F_2 \oplus \ldots \oplus F_k$. Ainsi

$$H^*(f \circ g) = H^*(f) \circ H^*(g) : H^*(X) \longrightarrow H^*(Z)$$

est injectif, et si on pose $F_1 := g^*F$, alors

$$(f \circ g)^*(E) \cong F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots F_k$$

vu que $g^*(F \oplus G) \cong g^*F \oplus g^*G$ et $(f \circ g)^*(E) \cong g^*f^*E$. Afin de montrer l'existence de Y et f, munissons E d'un produit scalaire. On a donc aussi un produit scalaire induit sur le fibré

$$p^*(E) = \big\{(x, v, w) \,\big|\, p(v) = p(w) = x\big\}$$

Considérons de nouveau le fibré $L(E)$ sur $\mathbb{P}E$ qui était

$$L(E) := \big\{(x, \langle v\rangle, w) \,\big|\, x \in X, \langle v\rangle \in \mathbb{P}(E_x), w \in \langle v\rangle\big\}$$

Le fibré $p^*(E)$ contient $L(E)$ comme sous–fibré, et on peut considérer

$$L(E)^\perp = \big\{(x, \langle v\rangle, w) \,\big|\, x \in X, \langle v\rangle \in \mathbb{P}(E_x), w \in \langle v\rangle^\perp\big\}$$

où $\langle v \rangle^{\perp}$ est le complément orthogonal de $\langle v \rangle$ dans $p^*(E)_x$. On a ainsi une décomposition orthogonale $p^*(E) = L(E) \oplus L(E)^{\perp}$. Comme variété Y on peut alors prendre $Y = \mathbb{P}E$, et comme application différentiable on prend $f = \mathbb{P}p : \mathbb{P}E \longrightarrow X$. Les fibrés sont $F = L(E)$ et $G = L(E)^{\perp}$. On a $f^*E = F \oplus G$ par construction. □

3. Connexions dans un fibré vectoriel

Introduisons la notation suivante : Pour une variété X, un fibré vectoriel E sur X et $j \in \mathbb{N}_0$ notons

$$\Omega^j(E) := \Omega^j(X) \otimes_X \Gamma(E)$$

où $\Omega^j(X)$ est le $C^\infty(X)$–module des j–formes différentielles sur X et où $\Gamma(E)$ est le $C^\infty(X)$–module des sections différentiables de E. Le produit tensoriel $\otimes_X$ est bien entendu le produit tensoriel sur l'anneau $C^\infty(X)$ de toutes les fonctions différentiables sur X à valeurs dans le corps $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$.
Remarquons que $\Omega^0(E) := \Omega^0(X) \otimes_X \Gamma(E) \cong \Gamma(E)$. Dans la suite, on identifiera $\Omega^0(E) = \Gamma(E)$. Remarquons aussi que si E est un fibré trivial de dimension 1, alors $\Gamma(E) \cong C^\infty(X)$, et donc $\Omega^j(E) \cong \Omega^j(X)$.
On a un prolonguement naturel du produit exterieur de formes différentielles à un produit

$$\wedge : \Omega^i(E) \times \Omega^j(F) \longrightarrow \Omega^{i+j}(E \otimes F)$$

défini par

$$(\omega \otimes s) \wedge (\tau \otimes t) = (\omega \wedge \tau) \otimes (s \otimes t)$$

En particulier on a, tenant compte des identifications faites un produit

$$\wedge : \Omega^i(X) \times \Omega^j(E) \longrightarrow \Omega^{i+j}(E)$$

défini par

$$\omega \wedge (\tau \otimes s) = (\omega \wedge \tau) \otimes s$$

Définition 2.4. Soit E un fibré vectoriel sur X. Une application K–linéaire

$$\nabla : \Omega^0(E) \longrightarrow \Omega^1(E)$$

s'appelle *connexion sur E* si elle satisfait l'identité dite *règle de Leibnitz* :

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla(s)$$

pour tout $s \in C^\infty(E)$ et tout $f \in C^\infty(X)$.

Exemple 2.5. Si E est un fibré trivial de dimension 1, alors la différentielle d, vue comme application

$$d : \Omega^0(E) \cong \Omega^0(X) \longrightarrow \Omega^1(E) \cong \Omega^1(X)$$

est une connexion.

REMARQUE 2.6. Etant donné une connexion ∇ sur E, on aimerait bien construire de façon naturelle une longue suite

$$\Omega^0(E) \xrightarrow{d^0_\nabla} \Omega^1(E) \xrightarrow{d^1_\nabla} \Omega^2(E) \xrightarrow{d^2_\nabla} \Omega^3(E) \xrightarrow{d^3_\nabla} \cdots \tag{8}$$

où $d^0_\nabla = \nabla$, tel que dans le cas de l'exemple 2.5 on retrouve le complexe de deRham

$$\Omega^0(X) \xrightarrow{d^0} \Omega^1(X) \xrightarrow{d^1} \Omega^2(X) \xrightarrow{d^2} \Omega^3(X) \xrightarrow{d^3} \cdots$$

Dans cette section on motrera entr'autre l'existence d'une telle prolongation de ∇ (proposition 2.10 et remarque 2.11). On aura donc une généralisation du complexe de deRham. Mais une telle généralisation n'est possible que dans la mesure où (8) est juste une longue suite, et pas un complexe de cochaîne, c'est–à–dire $d^{j+1}_\nabla d^j_\nabla$ n'est pas nul en général.

REMARQUE 2.7. Un champs de vecteurs tangent à X est, par définition même, une section du fibré tangent TX. Un tel champs de vecteurs Ξ induit, vu l'isomorphisme canonique $\Omega^1(X) \cong \Gamma(TX^*)$ une application

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ev}_\Xi : \Omega^1(X) & \longrightarrow & \Omega^0(X) \\ \omega & \longmapsto & \omega \circ \Xi \end{array}$$

que l'on appelle *evaluation en* Ξ. Il est clair que Ev_Ξ, pour Ξ fixé, est un homomorphisme $C^\infty(X)$–linéaire, et que l'application $\Xi \longmapsto \mathrm{Ev}_\Xi$ est aussi $C^\infty(X)$–linéaire. On a donc

$$\mathrm{Ev} \in \mathrm{Hom}_X\left(\Gamma(TX), \mathrm{Hom}_X(\Omega^1(X), \Omega^0(X))\right)$$

L'évaluation a de plus la propriété de localité suivante : Si Ξ_1 et Ξ_2 sont deux champs de vecteurs et $x \in X$, alors on a

$$\Xi_1(x) = \Xi_2(x) \implies \mathrm{Ev}_{\Xi_1}(\omega)(x) = \mathrm{Ev}_{\Xi_2}(\omega)(x) \quad \forall \omega \in \Omega^1(X)$$

A partir de l'evaluation Ev_Ξ on construit le morphisme $C^\infty(X)$–linéaire

$$\mathrm{Ev}_\Xi \otimes \mathrm{id} : \Omega^1(E) \longrightarrow \Omega^0(E)$$

On note

$$\nabla_\Xi := (\mathrm{Ev}_\Xi \otimes \mathrm{id}) \circ \nabla : \Omega^0(E) \longrightarrow \Omega^0(E)$$

L'application $\Xi \longmapsto \nabla_\Xi$ est $C^\infty(X)$–linéaire, et a la propriété de localité analogue à celle de l'evaluation, c'est–à–dire pour tout champs de vecteurs Ξ_1, Ξ_2 tangents à X on a

$$\Xi_1(x) = \Xi_2(x) \implies \nabla_{\Xi_1}(\omega)(x) = \nabla_{\Xi_2}(\omega)(x) \quad \forall \omega \in \Omega^0(E)$$

Pour un vecteur ξ tangent à X basé en $x \in X$, on note $\nabla_\xi(s) = \nabla_\Xi(s)$, où Ξ est n'importe quel champs de vecteurs tangent à X avec $\Xi(x) = \xi$.
Soient Ξ et Σ deux champs de vecteurs tangents à X. L'application d'évaluation

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ev}_{\Xi,\Sigma} : \Omega^2(X) & \longrightarrow & \Omega^0(X) \\ \omega & \longmapsto & \omega \circ (\Xi, \Sigma) \end{array}$$

induit

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ev}_{\Xi,\Sigma} : \Omega^2(\mathrm{Hom}(E,E)) & \longrightarrow & \Omega^0(\mathrm{Hom}(E,E)) \\ \omega \otimes s & \longmapsto & \mathrm{Ev}_{\Xi,\Sigma}(\omega) \otimes s \end{array}$$

Comme c'était déjà le cas pour les connexions, la valeur de $\mathrm{Ev}_{\Xi,\Sigma}(\omega\otimes s)$ en x ne dépend que de $\Xi(x)$ et $\Sigma(x)$. Il fait donc un sens de poser

$$\mathrm{Ev}_{\xi,\sigma}(\omega\otimes s) := \mathrm{Ev}_{\Xi,\Sigma}(\omega\otimes s)(x)$$

pour $\xi,\sigma\in T_xX$, où Ξ et Σ sont des champs de vecteurs avec $\Xi(x)=\xi$ et $\Sigma(x)=\sigma$.

Proposition 2.8. *Soit Ξ un champs de vecteurs tangent à X, E un fibré sur X et ∇ une connexion dans E. Soit $f\in C^\infty(X)$ et $s\in\Gamma(E)$. Alors*

$$\nabla_\Xi(f\cdot s) = (df\circ\Xi)\otimes s + f\cdot\nabla_\Xi(s)$$

Démonstration. En effet

$$\begin{aligned}\nabla_\Xi(f\cdot s) &= (\mathrm{Ev}_\Xi\otimes\mathrm{id})(\nabla(fs))\\ &= (\mathrm{Ev}_\Xi\otimes\mathrm{id})(df\otimes s + f\cdot\nabla(s))\\ &= (df\circ\Xi)\otimes s + f\cdot(\mathrm{Ev}_\Xi\otimes\mathrm{id})\nabla(s)\\ &= (df\circ\Xi)\otimes s + f\cdot\nabla_\Xi(s)\end{aligned}$$

pour tout $\Xi\in\Gamma(TX)$, tout $f\in C^\infty(X)$ et tout $s\in\Gamma(E)$. $\square$

Remarque 2.9. L'isomorphisme $\Omega^1(X)\cong\Gamma(TX^*)$ induit, tenant compte de **??** un isomorphisme

$$\Omega^1(E)\cong\Gamma(\mathrm{Hom}(TX,E))$$

Une connexion $\nabla:\Omega^0(E)\longrightarrow\Omega^1(E)$ induit alors $\widetilde{\nabla}:\Gamma(E)\longrightarrow\Gamma\,\mathrm{Hom}(TX,E)$ défini à l'aide du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}\Gamma(E) & \xrightarrow{\widetilde{\nabla}} & \Gamma\,\mathrm{Hom}(TX,E)\\ \cong\updownarrow & & \updownarrow\cong\\ \Omega^0(E) & \xrightarrow{\nabla} & \Omega^1(E)\end{array}$$

qui satisfait aux conditions

$$\widetilde{\nabla}_{a\xi+b\eta}(s) = a\widetilde{\nabla}_\xi(s) + b\widetilde{\nabla}_\eta(s) \tag{9}$$

$$\widetilde{\nabla}_\xi(fs) = df(\xi)\cdot s(x) + f(x)\cdot\widetilde{\nabla}_\xi(s) \tag{10}$$

pour tout $\xi,\eta\in T_xX$, tout $a,b\in K$ tout $f\in C^\infty(X)$ et tout $s\in\Gamma(E)$. D'autre part, on vérifie facilement que si $\widetilde{\nabla}:\Gamma(E)\longrightarrow\Gamma\,\mathrm{Hom}(TX,E)$ satisfait (9) et (10), alors $\widetilde{\nabla}$ induit, via le même diagramme une connexion $\nabla:\Omega^0(E)\longrightarrow\Omega^1(E)$.

Proposition 2.10. *Soit E un fibré sur X et ∇ une connexion dans E. Il existe un uniqe opérateur K–linéaire*

$$d^j_\nabla:\Omega^j(E)\longrightarrow\Omega^{j+1}(E)$$

qui satisfait aux deux conditions

I : $d^0_\nabla = \nabla$

II : $d^{i+j}_\nabla(\omega \wedge t) = d\omega \wedge t + (-1)^i \omega \wedge \nabla(t)$ *pour tout* $\omega \in \Omega^i(X)$ *et tout* $t \in \Omega^j(E)$

DÉMONSTRATION. Pour $\tau \in \Omega^j$ et $s \in \Gamma(E)$ la condition (II) demande que

$$d^j_\nabla(\tau \otimes s) = d\tau \wedge s + (-1)^j \tau \wedge \nabla(s)$$

Cette équation définit d^j_∇ entièrement, vu qu'on exige la K–linéarité. On a donc unicité de d^j_∇. La condition (I) est satisfaite, vu que pour $s \in \Gamma(E)$ et $f \in \Omega^0(X)$ on a

$$d^0_\nabla(f \otimes s) = df \wedge s + f \wedge \nabla(s) = \nabla(f \otimes s)$$

La condition (II) est aussi satisfaite : En effet on a pour tout $\omega \in \Omega^i(X)$ tout $\tau \in \Omega^j(X)$ et tout $s \in \Gamma(E)$

$$\begin{aligned} d^{i+j}_\nabla(\omega \wedge (\tau \oplus s)) &= d^{i+j}_\nabla((\omega \wedge \tau) \otimes s) \\ &= d(\omega \wedge \tau) \otimes s + (-1)^{i+j}(\omega \wedge \tau) \wedge \nabla(s) \\ &= d\omega \wedge \tau \otimes s + (-1)^i \omega \wedge d\tau \otimes s + (-1)^{i+j}(\omega \wedge \tau) \wedge \nabla(s) \\ &= d\omega \wedge (\tau \otimes s) + (-1)^i \omega \wedge \Big(d\tau \otimes s + (-1)^j \tau \wedge \nabla(s)\Big) \\ &= d\omega \wedge (\tau \otimes s) + (-1)^i \omega \wedge \big(d^j_\nabla(\tau \otimes s)\big) \end{aligned}$$

ce qui montre que la condition (II) est satisfaite. □

REMARQUE 2.11. Dans le cas où $\nabla = d^0$ est la différentielle de deRham en degré 0, comme dans l'exemple 2.5, la condition (II) de la proposition 2.10 est simplement la formule pour la différentielle d'un produit

$$d(\omega \wedge \tau) = d\omega \wedge \tau + (-1)^i \omega \wedge d\tau$$

pour $\omega \in \Omega^j(X)$ et $\tau \in \Omega^i(X)$. Ainsi d^j_∇ est, dans ce cas, la différentielle de deRham usuelle : $d^j_\nabla = d^j$.

PROPOSITION 2.12. *Soit E un fibré vectoriel sur X et ∇ une connexion dans E. L'application*

$$d^1_\nabla \circ \nabla : \Omega^0(E) \longrightarrow \Omega^2(E)$$

est $C^\infty(X)$–linéaire.

DÉMONSTRATION. En effet

$$\begin{aligned} d^1_\nabla \circ \nabla(ft) &= d^1_\nabla(df \wedge t + f \wedge \nabla(t)) \\ &= ddf \wedge t - df \wedge \nabla(t) + df \wedge \nabla(t) + f \wedge d^1_\nabla \circ \nabla(s) \\ &= f \wedge d^1_\nabla \circ \nabla(s) \end{aligned}$$

pour tout $f \in C^\infty(X)$ et tout $t \in \Omega^0(E)$. □

DÉFINITION 2.13. Soit E un fibré vectoriel sur X et ∇ une connexion dans E. On appelle *forme de courbure associée à* ∇ et on note F_∇ l'image de $d^1_\nabla \circ \nabla$ dans $\Omega^2(\mathrm{Hom}(E,E))$ par l'isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_X(\Omega^0(E), \Omega^2(E)) \cong \Omega^2(\mathrm{Hom}(E,E))$$

REMARQUE 2.14. Cet isomorphisme canonique est la composition des isomorphismes canoniques suivantes :

$$\begin{aligned} & \mathrm{Hom}_X(\Omega^0(E), \Omega^2(E)) \\ \cong\ & \mathrm{Hom}_X(\Gamma(E), \Omega^2(X) \otimes_X \Gamma(E)) \\ \cong\ & \Omega^2(X) \otimes_X \mathrm{Hom}_X(\Gamma(E), \Gamma(E)) \\ \cong\ & \Omega^2(X) \otimes_X \Gamma(\mathrm{Hom}(E,E)) \\ =\ & \Omega^2(\mathrm{Hom}(E,E)) \end{aligned}$$

Dans la suite, on exprimera ces objets dans des bases locaux, afin de rendre plus explicites toutes ces définitions.

Soit $U \subseteq X$ un ouvert trivialisant de E et soit $e_1, \dots, e_k$ une base locale de E sur U. Tout élément du produit tensoriel $\Omega^1(U) \otimes_U \Gamma(E|_U) = \Omega^1(E|_U)$ peut être écrit de manière unique comme

$$\sum_{i=1}^{k} \tau_i \otimes e_i$$

avec $\tau_1, \dots, \tau_k \in \Omega^1(U)$. Soit ∇ une connexion dans E. Par ce qui précède, il existe une matrice $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le k} \in \mathbb{M}_k(\Omega^1(U))$ telle que

$$\nabla(e_i) = \sum_{j=1}^{k} a_{ij} \otimes e_j \tag{11}$$

On appelle A la *matrice de* ∇ *en la base* $e_1, \dots, e_k$. Vice versa, étant donnée une matrice $A \in \mathbb{M}_k(\Omega^1(U))$, la formule (11) définit une connexion dans $E|_U$.

PROPOSITION 2.15. *Soit E un fibré vectoriel sur X et ∇ une connexion dans E. Soit $U \subseteq X$ un ouvert trivialisant de E et soient $e_1, \dots, e_k$ et $f_1, \dots, f_k$ des bases localaux de E sur U. Soit A la matrice de ∇ exprimée dans la base $e_1, \dots, e_k$ et soit B la matrice de ∇ exprimée dans la base $f_1, \dots, f_k$. Alors*

$$B = (dG)G^{-1} + GAG^{-1}$$

où $G \in \mathrm{GL}_k(\Omega^0(U))$ est la matrice de changement de base définie par

$$f_i = \sum_{j=1}^{k} g_{ij} \otimes e_j$$

DÉMONSTRATION. On a

$$\begin{aligned}\nabla(f_i) &= \sum_{h=1}^{k} b_{ih} \otimes f_h \\ &= \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{h=1}^{k} b_{ih} g_{hj} \right) \otimes e_j\end{aligned}$$

par définition, et d'autre part

$$\begin{aligned}\nabla(f_i) &= \sum_{j=1}^{k} \nabla(g_{ij} e_j) \\ &= \sum_{j=1}^{k} dg_{ij} \otimes e_j + g_{ij} \nabla(e_j) \\ &= \sum_{j=1}^{k} dg_{ij} \otimes e_j + \sum_{j=1}^{k} \sum_{h=1}^{k} g_{ij} a_{jh} \otimes e_h \\ &= \sum_{j=1}^{k} \left(dg_{ij} + \sum_{h=1}^{k} g_{ih} a_{hj} \right) \otimes e_j\end{aligned}$$

ce qui montre que $BG = dG + GA$, et donc que $B = (dG)G^{-1} + GAG^{-1}$. $\square$

PROPOSITION 2.16. *Soit ∇ une connexion dans E, U un ouvert trivialisant de E et $e_1, \ldots, e_k$ une base locale de E sur U. Soit A la matrice de ∇ sur U dans la base $e_1, \ldots, e_k$. Alors la matrice de $d^1_\nabla \circ \nabla$ dans la base $e_1, \ldots, e_k$ vaut $dA - A \wedge A$.*

DÉMONSTRATION.

$$\begin{aligned}d^1_\nabla \circ \nabla(e_i) &= \sum_{j=1}^{k} d^1_\nabla(a_{ij} \otimes e_j) \\ &= \sum_{j=1}^{k} da_{ij} \otimes e_j - a_{ij} \wedge \nabla(e_j) \\ &= \sum_{j=1}^{k} da_{ij} \otimes e_j - \sum_{j=1}^{k} \sum_{h=1}^{k} a_{ij} \wedge a_{jh} \otimes e_h \\ &= \sum_{j=1}^{k} \left(da_{ij} - \sum_{h=1}^{k} a_{ih} \wedge a_{hj} \right) \otimes e_j\end{aligned}$$

ce qui montre que la matrice de $d^1_\nabla \circ \nabla$ dans la base $e_1, \ldots, e_k$ vaut $dA - A \wedge A$. $\square$

REMARQUE 2.17. La matrice $M := dA - A \wedge A$ est une matrice de 2–formes différentielles. La forme courbure $F_\nabla \in \Omega^2(\mathrm{Hom}(E, E))$ associée à la connexion ∇, est par conséquent donnée par

$$F_\nabla = \sum_{i,j=1}^{k} m_{ij} \otimes e_{ij}$$

où $e_{ij} \in \Gamma(\mathrm{Hom}(E, E))$ est donné par $e_{ij}(e_k) = \delta_{jk} e_i$. Ici δ_{jk} désigne le symbole de Kronecker. En d'autre mots, la matrice de e_{ij} dans la base $e_1, \ldots, e_k$ est la matrice dont tout les coefficients valent 0 sauf le i–j–ème, qui vaut 1.
On appelle M *matrice de de la forme courbure* F_∇.

PROPOSITION 2.18. *Soit E un fibré vectoriel sur X et ∇ une connexion dans E. Soit $U \subseteq X$ un ouvert trivialisant de E et soient $e_1, \ldots, e_k$ et $f_1, \ldots, f_k$ des bases localaux de E sur U. Soit M la matrice de F_∇ exprimée dans la base $e_1, \ldots, e_k$ et soit N la matrice de F_∇ exprimée dans la base $f_1, \ldots, f_k$. Alors*

$$N = GMG^{-1}$$

où $G \in \mathrm{GL}_k(\Omega^0(U))$ est la matrice de changement de base définie par

$$f_i = \sum_{j=1}^{k} g_{ij} \otimes e_j$$

DÉMONSTRATION. Soit A la matrice de ∇ dans la base $e_1, \ldots, e_k$ et B la matrice de ∇ dans la base $f_1, \ldots, f_k$. Par la proposition 2.15 on a

$$B = (dG)G^{-1} + GAG^{-1}$$

et par la proposition 2.16 on a

$$N = dB - B \wedge B$$

Observons que

$$dG^{-1} = d(G^{-1}GG^{-1}) = dG^{-1} + G^{-1}(dG)G^{-1} + dG^{-1}$$

et donc $(dG)G^{-1} = -G(dG^{-1})$. On combine ces résultats et trouve

$$\begin{aligned}
N &= d((dG)G^{-1} + GAG^{-1}) - ((dG)G^{-1} + GAG^{-1}) \wedge ((dG)G^{-1} + GAG^{-1}) \\
&= -dG \wedge dG^{-1} + dG \wedge AG^{-1} + G(dA)G^{-1} - GA \wedge dG^{-1} \\
&\quad -(dG)G^{-1} \wedge (dG)G^{-1} - (dG)G^{-1} \wedge GAG^{-1} \\
&\quad -GAG^{-1} \wedge (dG)G^{-1} - GAG^{-1} \wedge GAG^{-1} \\
&= -dG \wedge dG^{-1} + dG \wedge AG^{-1} + G(dA)G^{-1} - GA \wedge dG^{-1} \\
&\quad +(dG)G^{-1} \wedge G(dG^{-1}) - (dG)G^{-1} \wedge GAG^{-1} \\
&\quad +GAG^{-1} \wedge G(dG^{-1}) - GAG^{-1} \wedge GAG^{-1} \\
&= -dG \wedge dG^{-1} + dG \wedge AG^{-1} + G(dA)G^{-1} - GA \wedge dG^{-1} \\
&\quad +dG \wedge dG^{-1} - dG \wedge AG^{-1} + GA \wedge dG^{-1} - GA \wedge AG^{-1} \\
&= G(dA)G^{-1} - GA \wedge AG^{-1} \\
&= G(dA - A \wedge A)G^{-1} \\
&= GMG^{-1}
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

4. Connexions induites

Soit E un K–fibré vectoriel sur X et ∇ une connexion dans E. Soit Y une variété et $f : Y \longrightarrow X$ une application différentiable. On veut transporter la connexion ∇ sur le fibré induit f^*E.

Proposition 2.19. *Soit $f : Y \longrightarrow X$ différentiable et E un K–fibré sur X. Il existe une connexion unique $f^*\nabla$ sur f^*E faisant commuter le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \Omega^0(E) \arrow[r, "\nabla"] \arrow[d, "\Omega^0(f)"'] & \Omega^1(E) \arrow[d, "\Omega^1(f)"] \\ \Omega^0(f^*E) \arrow[r, "f^*\nabla"] & \Omega^1(f^*E) \end{tikzcd} \tag{12}$$

où $\Omega^j(f) : \Omega^j(E) \longrightarrow \Omega^j(f^*E)$ est donné par $f^j(\omega \otimes s) = \omega \circ f \otimes s \circ f$ pour tout $\omega \in \Omega^j(X)$ et tout $s \in \Gamma(E)$.

Démonstration. La proposition **??** montre qu'on a un isomorphisme de $C^\infty(Y)$–modules

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \Omega^0(Y) \otimes_X \Omega^0(E) & \longrightarrow & \Omega^0(f^*E) \\ & g \otimes s & \longmapsto & g \cdot (s \circ f) \end{array}$$

On a encore un homomorphisme

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \Omega^0(Y) \otimes_X \Omega^1(X) & \longrightarrow & \Omega^1(Y) \otimes_Y \Omega^0(Y) \\ & g \otimes \omega & \longmapsto & (\omega \circ f) \otimes g \end{array}$$

qui, en général, n'est pas un isomorphisme. Voici le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\Omega^0(E) \arrow[r, "\nabla"] \arrow[d, "\cong"'] & \Omega^1(E) \arrow[d, "\cong"] \\
\Omega^0(X) \otimes_X \Omega^0(E) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \nabla"] \arrow[d, "\Omega^0(f) \otimes \mathrm{id}"'] & \Omega^0(X) \otimes_X \Omega^1(X) \otimes_X \Gamma(E) \arrow[d, "\Omega^0(f) \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}"] \\
\Omega^0(Y) \otimes_X \Omega^0(E) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \nabla"] \arrow[dd, "\cong"'] & \Omega^0(Y) \otimes_X \Omega^1(X) \otimes_X \Gamma(E) \arrow[d, "\psi \otimes \mathrm{id}"] \\
 & \Omega^1(Y) \otimes_Y \Omega^0(Y) \otimes_X \Gamma(E) \arrow[d, "\cong"] \\
\Omega^0(f^*E) \arrow[r, "f^*\nabla"] & \Omega^1(f^*E)
\end{tikzcd}$$

□

Remarque 2.20. Si $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}$ est la matrice de ∇ exprimée dans une base locale $e_1, \ldots, e_k$, alors la matrice $\Omega^1(f)A = (a_{ij} \circ f)_{1 \leq i,j \leq k}$ est la matrice de $f^*\nabla$ exprimée dans la base $e_1 \circ f, \ldots, e_k \circ f$.

Remarque 2.21. Le diagramme (12) se prolonge, vu la proposition 2.10 en un diagramme

$$\begin{tikzcd}
\Omega^0(E) \arrow[r, "\nabla"] \arrow[d, "\Omega^0(f)"'] & \Omega^1(E) \arrow[r, "d^1_\nabla"] \arrow[d, "\Omega^1(f)"] & \Omega^2(E) \arrow[r, "d^2_\nabla"] \arrow[d, "\Omega^2(f)"] & \cdots \\
\Omega^0(f^*E) \arrow[r, "f^*\nabla"] & \Omega^1(f^*E) \arrow[r, "d^1_{f^*\nabla}"] & \Omega^2(f^*E) \arrow[r, "d^2_{f^*\nabla}"] & \cdots
\end{tikzcd} \tag{13}$$

qui, par définition de la connexion induite $f^*\nabla$ et des opérateurs d^*_∇ et $d^*_{f^*\nabla}$ commute. En particulier on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\Omega^0(E) \arrow[r, "\nabla \circ d^1_\nabla"] \arrow[d, "\Omega^0(f)"'] & \Omega^2(E) \arrow[d, "\Omega^2(f)"] \\
\Omega^0(f^*E) \arrow[r, "f^*\nabla \circ d^1_{f^*\nabla}"] & \Omega^2(f^*E)
\end{tikzcd} \tag{14}$$

On appelle *forme de courbure courbure induite* la forme de courbure associée à la connexion $f^*\nabla$, qui est par définition l'image de $f^*\nabla \circ d^1_{f^*\nabla}$ dans $\Omega^2(Y)$ via l'isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_X\big(\Omega^0(f^*E), \Omega^2(f^*E)\big) \cong \Omega^2\big(\mathrm{Hom}(f^*E, f^*E)\big)$$

Notons $F_\nabla \in \Omega^2(\mathrm{Hom}(E,E))$ et $F_{f^*\nabla} \in \Omega^2(\mathrm{Hom}(f^*E, f^*E))$ les formes de courbure associées à ∇ et $f^*\nabla$ respectivement. On a

$$\Omega^*(f)(F_\nabla) = F_{f^*\nabla} \tag{15}$$

par définition de ces quantités.

On appelle *evaluation* l'application

$$\mathrm{Ev} : \Gamma(E) \otimes_X \Gamma(E^*) \longrightarrow C^\infty(X)$$

donnée par $\mathrm{Ev}(s, s^*)(x) = s^*(s(x))$ pour tout $s \in \Gamma(E)$, tout $s^* \in \Gamma(E^*)$ et tout $x \in X$. Définissons un couplage

$$\langle -, - \rangle : \Omega^i(E) \otimes \Omega^j(E^*) \longrightarrow \Omega^{i+j}(X) \tag{16}$$

par

$$\langle \omega \otimes s, \tau \otimes s^* \rangle = \mathrm{Ev}(s, s^*) \cdot \omega \wedge \tau$$

Ce couplage est non–dégénéré.
Le couplage (16) permet de définir les connexions induites sur les fibrés E^*, $E \otimes F$ et $\mathrm{Hom}(E, F)$, étant donnés des connexions sur E et F.

Définition 2.22. Soit E un K–fibré vectoriel sur X et ∇_E une connexion dans E. On appelle *connexion induite dans* E^* la connexion ∇_{E^*} dans E^* déterminée par la relation

$$d\,\langle \omega \otimes s, \tau \otimes s^* \rangle = \langle \nabla_E(\omega \otimes s), \tau \otimes s^* \rangle + \langle \omega \otimes s, \nabla_{E^*}(\tau \otimes s^*) \rangle$$

pour tout $\omega, \tau \in \Omega^0(X)$, $s \in \Gamma(E)$ et tout $s^* \in \Gamma(E^*)$.

Définition 2.23. Soient E et F des K–fibrés vectoriels sur X et ∇_E, ∇_F des connexions dans E et F respectivement. On appelle *connexion induite dans* $E \otimes F$ la connexion $\nabla_{E\otimes F}$ dans $E \otimes F$ définie par

$$\nabla_{E\otimes F}(\omega \otimes s \otimes t) = \nabla_E(\omega \otimes s) \wedge t + s \wedge \nabla_F(\omega \otimes t)$$

pour tout $\omega \in \Omega^0(X)$, tout $s \in \Gamma(E)$ et tout $t \in \Gamma(F)$.

Définition 2.24. Soient E et F des K–fibrés vectoriels sur X et ∇_E, ∇_F des connexions dans E et F respectivement. On appelle *connexion induite dans* $\mathrm{Hom}(E, F)$ la connexion $\nabla_{\mathrm{Hom}(E,F)}$ dans $\mathrm{Hom}(E, F)$ déterminée par la relation

$$\nabla_F(\langle s, \varphi \rangle) = \langle \nabla_E(s), \varphi \rangle + \langle s, \nabla_{\mathrm{Hom}\,E,F}(\varphi) \rangle$$

pour tout $s \in \Omega^i(E)$, et tout $\varphi \in \Omega^j(\mathrm{Hom}(E, F))$.

Remarque 2.25. Malgré tout l'élégance de ces définitions, il reste une vérification à faire : Les fibrés $E^* \otimes F$ et $\mathrm{Hom}(E,F)$ sont canoniquement isomorphes. Il faudra s'inquiéter si la connexion induite sur $\nabla_{E^*\otimes F}$ via les définitions 2.22 et 2.23 ne correspond pas à la connexion induite sur $\nabla_{\mathrm{Hom}(E,F)}$ via la définition 2.24.

Proposition 2.26. *Pour cette fois ci, tout va bien.*

Démonstration. Notons $\alpha : E^* \otimes F \longrightarrow \mathrm{Hom}(E,F)$ l'isomorphisme canonique qui, je rappelle, est défini par $\alpha(\varphi \otimes t)(x) = \varphi(x)t$. On a un diagramme commutatif de fibrés vectoriels sur X

$$\begin{tikzcd} E \otimes E^* \otimes F \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\alpha"] \arrow[d, "\langle -,-\rangle\otimes\mathrm{id}"'] & E \otimes \mathrm{Hom}(E,F) \arrow[d, "\mathrm{Ev}"] \\ L \otimes F \arrow[r, "\cong"] & F \end{tikzcd}$$

où L est le fibré produit $X \times K$. L'isomorphisme $L \otimes F \longrightarrow F$ est la multiplication scalaire, c'est–à–dire $l \otimes v \longmapsto lv$. En appliquant le foncteur covariant $\Gamma(-)$ on trouve un diagramme commutatif de $C^\infty(X)$–modules :

$$\begin{tikzcd} \Gamma(E) \otimes \Gamma(E^*) \otimes \Gamma(F) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(E) \otimes \Gamma\,\mathrm{Hom}(E,F) \arrow[d] \\ C^\infty(X) \otimes \Gamma(F) \arrow[r, "\cong"] & \Gamma(F) \end{tikzcd}$$

Soit $s \in \Gamma(E)$, $t \in \Gamma(F)$ et $\varphi \in \Gamma(E^*)$. On a

$$\nabla_F(\langle s, \alpha\circ(\varphi\otimes s)\rangle) = \langle \nabla_E(s), \alpha\circ(\varphi\otimes s)\rangle + \left\langle s, \nabla_{\mathrm{Hom}(E,F)}(\alpha\circ(\varphi\otimes t))\right\rangle \tag{17}$$

par la définition 2.24,

$$d(\langle s,\varphi\rangle) = \langle \nabla_E(s),\varphi\rangle + \langle s, \nabla_{E^*}(\varphi)\rangle \tag{18}$$

par la définition 2.22, et la définition 2.23 donne

$$\nabla_{E^*\otimes F}(\varphi\otimes t) = \nabla_{E^*}(\varphi)\wedge t + \varphi \wedge \nabla_F(t) \tag{19}$$

Le diagramme montre que $\langle s, \alpha\circ(\varphi\otimes t)\rangle = \langle s,\varphi\rangle t$. Ainsi on trouve

$$\langle \nabla_E(s), \alpha\circ(\varphi\otimes t)\rangle = \langle \nabla_E(s),\varphi\rangle \wedge t \tag{20}$$

On sait aussi

$$\langle s, \nabla_{E^*\otimes F}(\varphi\otimes t)\rangle = \left\langle s, \nabla_{E^*(\varphi)}\right\rangle \wedge t + \langle s,\varphi\rangle\, \nabla_F(t) \tag{21}$$

Ayant tout ceci, on calcule

$$\begin{aligned} & \big\langle s, \nabla_{\mathrm{Hom}(E,F)}(\alpha\circ(\varphi\otimes t))\big\rangle \\ \overset{(17)}{=} \quad & \nabla_F\big(\langle s, \alpha\circ(\varphi\otimes t)\rangle\big) - \langle \nabla_E(s), \alpha\circ(\varphi\otimes t)\rangle \\ \overset{(20)}{=} \quad & \nabla_F(\langle s,\varphi\rangle\, t) - \langle \nabla_E(s),\varphi\rangle \wedge t \\ = \quad & d\,\langle s,\varphi\rangle \wedge t + \langle s,\varphi\rangle\, \nabla_F(t) - \langle \nabla_E(s),\varphi\rangle \wedge t \\ = \quad & \langle s, \nabla_{E^*}(\varphi)\rangle \wedge t + \langle s,\varphi\rangle\, \nabla_F(t) \\ \overset{(21)}{=} \quad & \langle s, \nabla_{E^*\otimes F}(\varphi\otimes t)\rangle \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure que

$$\nabla_{E^*\otimes F}(\varphi\otimes t) = \nabla_{\mathrm{Hom}(E,F)}(\alpha\circ(\varphi\otimes t))$$

Les connexions $\nabla_{E^*\otimes F}$ et $\nabla_{\mathrm{Hom}(E,F)}$ se correspondent donc à travers de l'isomorphisme α. □

Soit ∇ une connexion dans le $\mathbb{K}$–fibré vectoriel $E \longrightarrow X$, et soit $U \subseteq X$ un ouvert trivialisant de E. Coisissons une base locale $e_1,\ldots,e_k$ de $E|_U$. On a $E|_U \cong U\times\mathbb{K}^k$ et donc un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}(E,E)|_U \cong U\times\mathbb{M}_k(\mathbb{K})$$

et comme $\Omega^j(E|_U)\cong\Omega^j(U)^{\oplus k}$ on a

$$\Omega^j(\mathrm{Hom}(E,E)|_U)\cong\mathbb{M}_k(\Omega^j(U))$$

L'application $d^j_\nabla : \Omega^j(E|_U)\longrightarrow\Omega^{j+1}(E|_U)$ devient sous ces isomorphismes

$$\begin{aligned} d^j_\nabla : \Omega^j(U)^{\oplus k} &\longrightarrow \Omega^{j+1}(U)^{\oplus k} \\ (s_1,\ldots,s_k) &\longmapsto (ds_1,\ldots,ds_k) - (s_1,\ldots,s_k)\wedge A \end{aligned}$$

où A est la matrice de ∇ dans la base $e_1,\ldots,e_k$. L'opérateur $d^j_{\nabla_{\mathrm{Hom}(E,E)}}$ défini par connexion induite $\nabla_{\mathrm{Hom}(E,E)}$ est alors en termes de matrices donné par

$$\begin{aligned} d^j_{\nabla_{\mathrm{Hom}(E,E)}} : \mathbb{M}_k(\Omega^j(U)) &\longrightarrow \mathbb{M}_k(\Omega^{j+1}(U)) \\ M &\longmapsto dM - (A\wedge M - (-1)^j M\wedge A) \end{aligned} \tag{22}$$

Theorème 2.27 (Identité de Bianchi). *Soit E un fibré vectoriel sur X et ∇ une connexion dans E. Soit $\nabla_{\mathrm{Hom}(E,E)}$ la connexion induite dans le fibré $\mathrm{Hom}(E,E)$. Alors*

$$d^2_{\mathrm{Hom}(E,E)}F_\nabla = 0$$

où $d^*_{\mathrm{Hom}(E,E)} : \Omega^*(\mathrm{Hom}(E,E))\longrightarrow\Omega^*(\mathrm{Hom}(E,E))$ est l'opérateur induit par la connexion $\nabla_{\mathrm{Hom}(E,E)}$ et où $F_\nabla\in\Omega^2(Hom(E,E))$ est la forme de courbure induite par ∇.

Démonstration. Il suffit de montrer cette égalité localement. Soit A la matrice de ∇ dans une base locale sur un certain ouvert trivialisant de E. La matrice M de F_∇ vaut par la proposition 2.16

$$M = dA - A\wedge A$$

La matrice de $d^2_{\mathrm{Hom}(E,E)} F_\nabla$ vaut, par (22)

$$L = dM - (A \wedge M - M \wedge A) \tag{23}$$

On calcule :

$$\begin{aligned} L &= d(dA - A\wedge A) - (A \wedge (dA - A \wedge A) - (dA - A\wedge A)\wedge A) \\ &= -dA \wedge A + A \wedge dA - A \wedge dA + A \wedge A \wedge A + dA \wedge A - A \wedge A \wedge A \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'où $d^2_{\mathrm{Hom}(E,E)} F_\nabla = 0$. □

5. Classes caractéristiques

On fixe un fibré vectoriel complexe $p : E \longrightarrow X$ sur la variété compacte X. Toutes les connexions sont complexes.

Dans la section 3 on a vu qu'un polynôme invariant P induit une application

$$P : \mathbb{M}_n(A) \longrightarrow \mathbb{C}$$

où A es une $\mathbb{C}$–algèbre commutative. L'algèbre des formes différentielles de degré pair est une $\mathbb{C}$–algèbre commutative.

Proposition 2.28. *Soit P un polynôme invariant en k^2 variables, homogène de degré d. Alors P induit une application*

$$P : \Omega^2(\mathrm{Hom}(E,E)) \longrightarrow \Omega^{2d}(X)$$

Démonstration. Soit $U \subseteq X$ un ouvert trivialisant de E et soit $e_1, \dots, e_k$ une base locale de E sur U. Ayant choisi cette base, on a un isomorphisme canonique $\mathrm{Hom}(E,E)|_U \cong U \times \mathbb{M}_k(\mathbb{C})$, et ainsi

$$\Omega^2(\mathrm{Hom}(E,E)|_U) \cong \Omega^2(U \times \mathbb{M}_k(\mathbb{C})) \cong \mathbb{M}_k(\Omega^2(U \times \mathbb{C}))$$

Cet isomorphisme est donné par

$$\begin{aligned} \varphi : \Omega^2(\mathrm{Hom}(E,E)|_U) &\longrightarrow \mathbb{M}_k(\Omega^2(U)) \\ s &\longmapsto \varphi(s) = (m_{ij})_{1 \le i,j, \le k} \end{aligned}$$

où

$$m_{ij}(x) = e_j^*(s(x)(e_i))$$

pour tout $x \in U$, en désignant par $e_1^*, \dots, e_n^*$ la base duale. Comme on l'a déjà vu, on peut évaluer P en une matrice $M \in \mathbb{M}_k(\Omega^2(U))$, et on a $P(M) \in \mathbb{M}_k(\Omega^{2d}(U))$. Via l'isomorphisme ci–dessus, P induit

$$P : \Omega^2(\mathrm{Hom}(E,E)|_U) \longrightarrow \Omega^{2d}(\mathrm{Hom}(E,E)|_U)$$

Il faut montrer que cette définition ne dépend pas du choix de la base $e_1, \ldots, e_k$. Mais ceci est clair, vu la proposition 2.18 et l'hypothèse que P est invariant, c'est à dire $P(gXg^{-1}) = P(X)$ pour tout $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. □

Theorème 2.29. *Soit E un fibré vectoriel de dimension k sur X. Soit ∇ une connexion dans E et $F_\nabla \in \Omega^2(\mathrm{Hom}(E,E))$ la forme de courbure associée. Soit P un polynôme invariant homogène en k^2 variables de degré j. Alors $P(F_\nabla) \in \Omega^{2j}(X)$ est une forme fermée, et sa classe de cohomologie ne dépend pas de ∇.*

Démonstration. Montrons d'abord que la forme $P(F_\nabla)$ est fermée, c'est–à–dire $dP(F_\nabla) = 0$. Soit U un ouvert trivialisant de E et $e_1, \ldots, e_k$ une base locale de E sur U. Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j,\leq n}$ la matrice de ∇ sur U dans cette base. La matrice M de F_∇ vaut par 2.16

$$M = (m_{ij})_{1\leq i,j,\leq k} = dA - A \wedge A$$

L'identité de Bianchi 2.27 (voir l'équation (23) de la démonstration pour la formulation matricielle) donne

$$dM = A \wedge M - M \wedge A$$

Notons $P'(X)$ la matrice des dérivés partielles tranposée

$$P'(X) = \left(\frac{\partial P(X)}{X_{ij}}\right)^t$$

On a

$$dP(F_\nabla) = \sum_{i,j=1}^{k} \frac{\partial P}{\partial X_{ij}}(M) \wedge dm_{ij} = \mathrm{tr}(P'(M) \wedge dM)$$

Les matrices X et $P'(X)$ commutent par 1.20, donc

$$P'(M) \wedge M = M \wedge P'(M)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} dP(F_\nabla) &= \mathrm{tr}(P'(M) \wedge dM) \\ &= \mathrm{tr}\left(P'(M) \wedge A \wedge M - P'(M) \wedge M \wedge A\right) \\ &= \mathrm{tr}\Big(\big(P'(M) \wedge A\big) \wedge M - M \wedge \big(P'(M) \wedge A\big)\Big) \\ &= \mathrm{tr}(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ce qui montre que $P(F_\nabla)$ est une forme fermée. Montrons que ca classe de cohomologie est indépendente de ∇. A ce fin, soient ∇_1 et ∇_0 des connexions dans E et montrons que $[P(F_{\nabla_1})] = [P(F_{\nabla_0})]$. On considère le pull–back

$$\begin{tikzcd} p^*E \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times \mathbb{R} \arrow[r, "\pi"] & X \end{tikzcd}$$

où par définition

$$p^*E = \{(v, x, t) \in E \times X \times \mathbb{R} \mid p(u) = x\}$$

Soient $\widehat{\nabla}_1$ et $\widehat{\nabla}_0$ les connexions induites sur p^*E, et définissons une troisième connexion $\widehat{\nabla}$ sur p^*E par

$$\widehat{\nabla}(s)(x,t) = (1-t)\widehat{\nabla}_0(s)(x,t) + t\widehat{\nabla}_1(s)(x,t)$$

Pour $\nu = 0, 1$ on a un pull–back

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[d] & p^*E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "\iota_\nu"] & X \times \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

où $\iota_\nu(x) = (x, \nu)$. La proposition 2.19 permet de conclure que les connexions qui induit $\widehat{\nabla}$ via ι_ν sur E sont les connexions ∇_0 et ∇_1. On a alors

$$H^*(\iota_\nu)\big([P(F_{\widehat{\nabla}})]\big) = [P(F_{\nabla_\nu})]$$

Comme les applications ι_0 et ι_1 sont homotopes, on a $H^*(\iota_0) = H^*(\iota_1)$. Ainsi

$$[P(F_{\nabla_0})] = H^*(\iota_0)\big([P(F_{\widehat{\nabla}})]\big) = H^*(\iota_1)\big([P(F_{\widehat{\nabla}})]\big) = [P(F_{\nabla_1})]$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Définition 2.30. Soit E un fibré vectoriel de dimension k sur X et soit P un polynôme invariant et homogène de degré j. On appelle *classe caractéristique de E définie par P* la classe de cohomologie

$$[P(F_\nabla)] \in H^{2j}(X)$$

où ∇ est n'importe quelle connexion dans E. On note $P(E)$ cette classe.

Theorème 2.31. *Soit E un fibré vectoriel de dimension k sur X. Soit P un polynôme invariant en k^2 variables. Soit $f : Y \longrightarrow X$ une application différentiable. Alors*

$$H^*(f)\big(P(E)\big) = P(f^*E)$$

Démonstration. Soit ∇ une connexion dans E, et soit $f^*\nabla$ la connexion induite dans f^*E. Notons F_∇ et $F_{f^*\nabla}$ les formes courbures associées respectivement. Par (14) on a $\Omega^*(f)F_\nabla = F_{f^*\nabla}$. Comme $\Omega^*(f)$ est un homomorphisme d'algèbres on a

$$\Omega^*(f)P(F_\nabla) = P\big(\Omega^*(f)F_\nabla\big) = P(F_{f^*\nabla})$$

et donc $H^*(f)(P(E)) = P(f^*E)$. □

6. Les classes de Chern

DÉFINITION 2.32. Soit E un fibré vectoriel complexe de dimension k sur X. On appelle *j–ème classe de Chern* la classe de cohomologie

$$\mathrm{c}_j(E) := \left(\frac{-1}{2\pi i}\right)^j [\sigma_k(E)] \qquad \in H^{2j}(X, \mathbb{C})$$

On appelle *j–ème caractère de Chern* la classe de de cohomologie

$$\mathrm{ch}_j(E) := \frac{1}{j!}\left(\frac{-1}{2\pi i}\right)^j [s_k(E)] \qquad \in H^{2j}(X, \mathbb{C})$$

pour $0 \leq j \leq n$. On appelle *classe de Chern totale* respectivement *caractère de Chern total* les classes de cohomologie

$$\mathrm{c}(E) := \sum_{j=1}^{k} \mathrm{c}_j(E) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{ch}(E) := \sum_{j=1}^{k} \mathrm{ch}_j(E)$$

REMARQUE 2.33. On a

$$\mathrm{c}_0(E) = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{ch}_0(E) = \dim E$$

vu que $\sigma_0(X) = 1$ et $s_0(X) = k$.

THEORÈME 2.34. *Soient E et F des fibrés vectoriels complexes sur X. Les égalités suivantes sont vraies :*

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}: &\ \mathrm{c}_j(E \oplus F) = \sum_{l=1}^{j} \mathrm{c}_l(E)\,\mathrm{c}_{j-l}(F) \\
\mathrm{II}: &\ \mathrm{ch}_j(E \oplus F) = \mathrm{ch}_j(E) + \mathrm{ch}(F) \\
\mathrm{III}: &\ \mathrm{ch}(E \oplus F) = \mathrm{ch}(E) + \mathrm{ch}(F) \\
\mathrm{IV}: &\ \mathrm{ch}_j(E \otimes F) = \sum_{l=1}^{j} \mathrm{ch}_l(E)\,\mathrm{ch}_{j-l}(F) \\
\mathrm{V}: &\ \mathrm{ch}(E \otimes F) = \mathrm{ch}(E)\,\mathrm{ch}(F)
\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Choisissons des connexions ∇_E et ∇_F dans E et F, et soient $e_1, \ldots, e_k$ et $f_1, \ldots, f_l$ des bases locaux de E et F respectivement, (définies sur le même ouvert $U \subseteq X$). On se permet d'identifier

$$\Omega^*(E) \oplus \Omega^*(F) = \Omega^*(E \oplus F)$$

La matrice dans la base $e_a, \ldots, e_k, f_1, \ldots, f_l$ de la forme courbure $F_{\nabla_E \oplus \nabla_F}$ associée à la connexion

$$\nabla_E \oplus \nabla_F : \Omega^0(E \oplus F) \longrightarrow \Omega^1(E \oplus F)$$

vaut

$$M \oplus L = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}$$

où M est la matrice dans la base $e_1, \ldots, e_k$ de la forme courbure F_{∇_E} associée à ∇_E et L la matrice dans la base $f_1, \ldots, f_l$ de la forme courbure F_{∇_F} associée à ∇_F. Par 1.25 on a

$$\sigma_j(M \oplus L) = \sum_{i=0}^{j} \sigma_i(M)\sigma_{j-i}(L)$$

ce qui montre (I) et

$$s_j(M \oplus L) = s_j(M) + s_j(L)$$

ce qui montre (II). La formule (III) est une conséquence immédiate de (II) et la définition du charactère total de Chern.
(IV) et (V) restent à démontrer. □

Théorème 2.35. *Supposons que pour toute variété X et tout fibré complexe E sur X et tout $j \geq 0$ on ait donné une classe de cohomologie $\widetilde{\mathrm{c}}_j(E) \in H^{2j}(X)$ de telle manière que les assertions suivantes sont vraies*

I : *Si E et F sont des fibrés complexes isomorphes sur la même variété X, alors $\widetilde{\mathrm{c}}_j(E) = \widetilde{\mathrm{c}}_j(F)$.*

II : *Soit E_n le fibré en droites canonique sur $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$. Alors*

$$\widetilde{\mathrm{c}}_0(E_n) = 1 \qquad et \qquad \widetilde{\mathrm{c}}_j(E_n) = 0$$

pour tout $j > 0$

III : *Soit $\int : H^*(\mathbb{P}^n\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{R}$ l'homomorphisme d'intégration. Alors*

$$\int \widetilde{\mathrm{c}}_1(E_1) = -1$$

IV : *Soit $f : Y \longrightarrow X$ différentiable. Alors $\widetilde{\mathrm{c}}_j(f^*E) = H^*(f)(\widetilde{\mathrm{c}}_j(E))$.*

V : *Pour tout fibrés complexes E et F sur la même variété X on a*

$$\widetilde{\mathrm{c}}_j(E \oplus F) = \sum_{l=0}^{j} \widetilde{\mathrm{c}}_l(E)\widetilde{\mathrm{c}}_{j-l}(F)$$

Alors pour toute variété X, pour tout fibré complexe E sur X et pour tout $j \geq 0$ on a $\widetilde{\mathrm{c}}_j(E) = \mathrm{c}_j(E)$. Les classes de Chern d'autre part satisfont les propriétés (I) à (V) ci–dessus.

Sans démonstration. Remarquons que les classes de Chern satisfont (I) par (II) par (III) par (IV) par le théorème 2.31 et (V) par le théorème 2.34. □

7. La classe d'Euler et l'isomorphisme de Thom

Soit $E \longrightarrow X$ un fibré vectoriel réel de dimension k sur la variété X, et fixons une métrique sur E. On a deux fibrés en sphères canoniques associés à E :

- Le fibré en sphères S^{k-1} obtenu en prenant dans chaque fibre la sphère unité. On note ce fibré $S(E)$. L'espace total de $S(E)$ est un retract par déformation de $E \setminus s_0(E)$.
- Le fibré en sphères S^k obtenu en compactifiant chaque fibre E_x par un point ∞_x. On note $\widetilde{S}(E)$ ce fibré.

Proposition 2.36. *La projection stéréographique fibre par fibre*

$$\sigma : \widetilde{S}(E) \longrightarrow S(E \oplus \mathbb{R})$$

est un homéomorphisme.

Définition 2.37. Soit X une variété et $p : E \longrightarrow X$ un fibré vectoriel réel orienté sur X. Une classe de cohomologie $\omega \in H^k(\widetilde{S}(E))$ s'appelle *classe d'orientation* de E si

I : $H^*(s_\infty)(\omega) = 0$

II : Pour tout $x \in X$

$$\int_{\widetilde{S}_x} \iota_x^*(\omega) = 1$$

où $\widetilde{S}_x$ est la fibre de $\widetilde{S}(E)$ en x et où $\iota_x : \widetilde{S}_x \longrightarrow \widetilde{S}(E)$ est l'inclusion.

Remarque 2.38. Dire que $H^*(s_\infty)(\omega) = 0$ est la même chose que de dire que le support de ω est compact dans E_x pour tout $x \in X$.

Proposition 2.39. *Soit X une variété et E un fibré vectoriel réel orienté sur X. Alors il existe une unique classe d'orientation ω de E, et $H^*(\widetilde{S}(E))$ est un $H^*(E)$–module libre de base $\{1, \omega\}$.*

Theorème 2.40 (Isomorphisme de Thom). *Soit X une variété compacte et $p : E \longrightarrow X$ un fibré vectoriel réel orienté de dimension k sur X. Alors il existe une unique classe de cohomologie $[\tau] \in H_c^k(E)$ telle que*

I : $\displaystyle\int_{E_x} \tau = 1$ *pour tout $x \in X$*

II : *L'homomorphisme*

$$\begin{array}{ccc} H^q(X) & \longrightarrow & H_c^{q+k}(E) \\ [\omega] & \longmapsto & H(p)([\omega])[\tau] \end{array}$$

est un isomorphisme pour tout $q \in \mathbb{N}_0$.

On appelle $[\tau]$ *classe de Thom* ou *classe d'orientation* du fibré E, et l'isomorphisme enoncé s'appelle *isomorphisme de Thom*.

Définition 2.41. Soit X une variété différentiable réelle compacte et E un fibré vectoriel réel orienté sur X. Soit $s_0 : X \longrightarrow E$ la zéro–section et $\tau(E)$ la classe de Thom de E. On appelle

$$H^*(s_0)\big(\tau(E)\big)$$

classe d'Euler de E.

8. Calcul de quelques classes caractéristiques

Soit X une variété et E un fibré complexe sur X. Par le principe du scindage complexe (théorème 2.3) il existe une variété Y et une application différentiable $f : Y \longrightarrow X$ tel que le pull–back f^*E est une somme de fibrés complexes de dimension 1, et tel que $H^*(f)$ est injectif. On voit $H^*(X)$ comme sous–anneau de $H^*(Y)$ via l'inclusion $H^*(f)$. Posons

$$f^*(E) = \bigoplus_{j=1}^{k} L_j \qquad \text{et} \qquad x_j := \mathrm{ch}_1(L_j) = \mathrm{c}_1(L_j)$$

Ainsi on a $\mathrm{c}(L_j) = 1 + x_j$, et donc par le théorème 2.34

$$\mathrm{c}(E) = \prod_{j=1}^{k}(1 + x_i)$$

Les classes de Chern $\mathrm{c}_0(E), \mathrm{c}_1(E), \ldots, \mathrm{c}_k(E)$ sont alors les polynômes symétriques élémentaires en k variables évalués $x_1, x_2, \ldots, x_n$, c'est–à–dire

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{c}_0(E) & = & 1 \\ \mathrm{c}_1(E) & = & x_1 + x_2 + \cdots + x_k \\ \mathrm{c}_2(E) & = & x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{k-1}x_k \\ \cdots & & \cdots \\ \mathrm{c}_k(E) & = & x_1x_2\cdots x_k \end{array}$$

Le théorème des polynômes symétriques (voir **[23]**, page 99) permet de conclure que tout polynôme symétrique, ou même toute série formelle symétrique en $x_1, \ldots, x_k$

peut être écrit comme polynôme respectivement série formelle en $\mathrm{c}_1(E), \ldots, \mathrm{c}_k(E)$. En particulier, si P est un polynôme symétrique en k variables, alors $P(x_1, \ldots, x_k)$ définit une classe de cohomologie dans $H^*(X)$.

Exemple 2.42. Considérons la série formelle en $x_1, \ldots, x_k$

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k} \exp(x_j) &= k + x_1 + \cdots + x_k + \frac{1}{2}(x_1^2 + \cdots + x_k^2) + \cdots \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{m!} \sum_{j=1}^{k} x_j^m \right)\end{aligned}$$

Cette somme est en effet une somme finie, puisque $x_j^m = 0$ pour m suffisamment grand. Comme $x_1^m + \cdots + x_k^m$ est un polynôme symétrique quelque soit $m \in \mathbb{N}$, il existe des polynômes $Q_0, \ldots, Q_m, \ldots$ tels que

$$Q_m(c_1, \ldots, c_k) = \frac{1}{m!}(x_1^m + \cdots + x_k^m)$$

où $c_j = c_j(E)$. On a donc

$$\sum_{j=1}^{k} \exp(x_j) = \sum_{m=0}^{\infty} Q_m(c_1, \ldots, c_k)$$

Or $Q_m(c_1, \ldots, c_k) = \mathrm{ch}_m(E)$, on a en effet

$$\sum_{j=1}^{k} \exp(x_j) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathrm{ch}_m(E) = \mathrm{ch}(E)$$

Exemple 2.43. Soit $0 \leq p \leq k$ et considérons le fibré $\bigwedge^p E$. On s'interesse à la classe de Chern de ce fibré. On a

$$f^* \textstyle\bigwedge^p E \cong \bigwedge^p f^* E \cong \bigwedge^p \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{k} L_i \cong \bigoplus_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_p \leq k} L_{i_1} \otimes \cdots \otimes L_{i_p} \tag{24}$$

donc, tenu compte de l'identification faite

$$\mathrm{c}\,(\textstyle\bigwedge^p E) = \displaystyle\prod \mathrm{c}(L_{i_1} \otimes \cdots \otimes L_{i_p}) = \prod (1 + x_{i_1} + \cdots + x_{i_p})$$

le produit allant sur $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_p \leq k$. Ce dernioer produit est un polynôme symétrique en $x_1, \ldots, x_k$, et on peut donc exprimer $\mathrm{c}(\bigwedge^p E)$ en un polynôme de $\mathrm{c}_1(E), \ldots, \mathrm{c}_k(E)$ qui bien entendu ne dépend que de k et p, mais pas de E. Par exemple pour $k = 3$ on a, en notant $c_j(E) = c_j$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{c}\left(\bigwedge^0 E\right) &= 1 \\
\mathrm{c}\left(\bigwedge^1 E\right) &= \mathrm{c}(E) \\
&= 1 + \mathrm{c}_1 + \mathrm{c}_2 + \mathrm{c}_3 \\
\mathrm{c}\left(\bigwedge^2 E\right) &= (1 + x_1 + x_2)(1 + x_1 + x_3)(1 + x_2 + x_3) \\
&= (1 + c_1)^3 - c_1(1 + c_1)^2 + c_2(1 + c_1) - c_3 \\
\mathrm{c}\left(\bigwedge^3 E\right) &= 1 + x_1 + x_2 + x_3 \\
&= 1 + c_1 \\
\mathrm{c}\left(\bigwedge^p E\right) &= 0 \qquad \text{si } p > 3
\end{aligned}
$$

Calculons encore le caractère de Cern de $\bigwedge^p(E)$. Comme $\mathrm{ch}(L_j) = 1 + x_j$ on trouve à partir de l'isomorphisme (24) que

$$\mathrm{ch}\left(\bigwedge^p(E)\right) = \sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_p \leq k} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_p} = \sigma_p(x_1, \ldots, x_k)$$

où σ_p est le p–ème polynôme symétrique élémentaire.

CHAPITRE 3

Opérateurs pseudo–différentiels

1. Motivation

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert. Un opérateur différentiel sur U est, de manière informelle, un opérateur linéaire $P : C^\infty(U) \longrightarrow C^\infty(U)$ de la forme

$$u \longmapsto Pu = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha D^\alpha u \tag{25}$$

avec $a_\alpha \in C^\infty(U)$ et $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ un multi–indice. Dans le cas où la fonction u est à décroissance rapide, on peut exprimer les opérateurs D^α à l'aide d'une transformée de Fourier :

$$Pu(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) \int \chi_x(\xi) \xi^\alpha \widehat{u}(\xi) đ\xi$$

et lorsque on pose

$$\sigma(x, \xi) := \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) \xi^\alpha \tag{26}$$

on obtient

$$Pu(x) = \int \chi_x(\xi) \sigma(x, \xi) \widehat{u}(\xi) đ\xi$$

Un opérateur pseudo–différentiel sera un opérateur de ce type, mais où la fonction $\sigma(x, \xi)$ n'est plus nécessairement de la forme (26), mais prise dans une certaine classe de fonctions plus vaste.

Des tels opérateurs sont interessants pour deux raisons : D'abord parce–qu'ils généralisent plusieurs opérateurs classiques sur l'espace $C_{00}^\infty(U)$ fort bien connus, notamment les opérateurs différentiels, la convolution avec une fonction fixée, et l'opérateur de Riesz.

La deuxième raison est plus profonde : Considérons une variété réelle, et un opérateur linéaire différentiel $P : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(F)$ de degré k, où E et F sont des fibrés vectoriels réels, sur X, et où $\Gamma(-)$ désigne l'espace des séctions de classe C^∞. Localement, l'opérateur P sera de la forme (25), où les $a_\alpha(x) : E_x \longrightarrow F_x$ sont des applications différentiables, que l'on peut exprimer sous forme matricielle dans des bases locaux. Le symbole principal de P en x est défini comme étant la matrice

$$\mathrm{ppr}(\sigma)(x,\xi) := \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)\xi^\alpha$$

où $\xi_1,\ldots,\xi_n$ sont des indéterminées et $\xi := (\xi_1,\ldots,\xi_n)$. On dit que P est elliptique si si la matrice $\mathrm{ppr}(\sigma)(x,\xi)$ est inversible pour tout $(\xi_1,\ldots,\xi_n) \neq (0,\ldots,0)$ en tout $x \in X$. On montrera qu'un opérateur elliptique sur une variété compacte a la propriété de Fredholm, l'indice analytique $\mathrm{ind}_a(P)$ est donc bien défini. Nous verrons vers la fin de ce chapitre (section 16) que le symbole principal $\mathrm{ppr}(\sigma)(x,\xi)$ peut être identifié à un élément du K–groupe $K(TX)$, où TX est le fibré tangent, et on va construire un homomorphisme de groupes $B : K(TX) \longrightarrow \mathbb{Z}$. On a alors un diagramme

$$\begin{tikzcd} K(TX) \arrow[rr, "B"] & & \mathbb{Z} \\ \mathrm{Ell}(X) \arrow[u, "\sigma"] \arrow[urr, "\mathrm{ind}_a"'] & & \end{tikzcd}$$

On appelle *indice topologique* la composition $\mathrm{ind}_t := B \circ \sigma$. Le théorème de l'indice affirme précisément que $\mathrm{ind}_a = \mathrm{ind}_t$, c'est–à–dire que ce diagramme commute. Lors d'une démonstration du théorème de l'indice on aimerait bien travailler avec $\tau : K(TX) \longrightarrow \mathrm{Ell}(X)/\ker\sigma$, ce qui ne fait qu'un sens si σ est surjectif. Il s'avère que σ n'est pas surjectif. On a donc interrêt à considérer une classe d'opérateurs plus lagre que celle des opérateurs différentiels, suffisamment docile pour qu'on peut prolonger le symbole à cette nouvelle classe, et suffisamment riche pour que cette prolongation de σ soit surjectif. Cette classe sera, bien entendu, la classe des opérateurs pseudo–différentiels.

2. Généralités sur les distributions

Par $\mathbb{K}$ on désignera dans cette section le corps "$\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$" et on note $|\cdot|$ la valeur absolue respectivement le module. On se fixe une variété différentiable X et un $\mathbb{K}$–fibré différentiable E sur X. On note $\Gamma(E)$ ou aussi $C^\infty(X,E)$ l'ensemble de toutes les sections indéfiniment dérivables de E, et on note $\Gamma_{00}(E)$ ou aussi $C^\infty_{00}(X,E)$ l'ensemble de toutes les sections indéfiniment dérivables de E à support compact. Si E est le $\mathbb{C}$–fibré trivial, alors on omettra E de la notation. Il est clair que $\Gamma_{00}(E) \subseteq \Gamma(E)$, avec égalité si et seulement si X est compact.
Les ensembles $\Gamma(E)$ et $\Gamma_{00}(E)$ portent une structure naturelle de $\mathbb{K}$–algèbre, addition et multiplication se faisant point par point. On munit $\Gamma(E)$ et $\Gamma_{00}(E)$ d'une structure d'espace topologique comme on va expliquer dans la suite.

Définition 3.1. Soit V un $\mathbb{K}$–espace vectoriel et $p : V \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction telle que

I : $p(\lambda v) = |\lambda| p(v)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $v \in V$.

II : $p(v + w) \leq p(v) + p(w)$ pour tout $v, w \in V$.

alors on appelle p une *semi–norme* sur V. Si p satisfait de plus

III : $p(v) = 0 \implies v = 0$

alors p est dit *norme* sur V.

Remarque 3.2. Une semi–norme p sur un espace vectoriel V engendre une topologie sur V, comme c'est bien connu du cas des espaces normés. Cette topologie est par définition la topologie la moins fine sur V qui rend continue l'application $p : V \longrightarrow \mathbb{R}_+$ pour la topologie usuelle sur $\mathbb{R}_+$. On l'appelle aussi *topoplogie initiale sur V induite par $p : V \longrightarrow \mathbb{R}_+$*. Un filtre de voisinages ouvertes de $0 \in V$ pour cette topologie est donné par

$$\left\{ \{v \in V \mid p(v) < \tfrac{1}{n}\} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Définition 3.3. Soit V un $\mathbb{K}$–espace vectoriel et P un ensemble de semi–normes sur V. On appelle *topologie engendrée par P sur V* la topologie la moins fine sur V qui rend continue toutes les semi–normes dans P.

Remarque 3.4. Cette topologie est bien sûr la topologie sur V engendrée par toutes les topologies sur V définies par chaque $p \in P$ individuellement. On vérifie sans trop de peine que l'addition et la multiplication scalaire sont des applications continues, c'est–à–dire cette topologie fait de V un vrai espace vectoriel topologique. Un filtre de voisinages ouvertes de $0 \in V$ pour la topologie engendrée par P est donné par

$$\left\{ \{v \in V \mid p(v) < \tfrac{1}{n} \text{ pour tout } p \in F\} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}, F \subseteq P \text{ fini } \right\}$$

On en déduit que la topologie engendrée par P fait de V un espace localement convexe. Un ensemble de semi–normes ne génère en général pas une topologie qui est de Hausdorff.

Remarque 3.5. Soit V un $\mathbb{K}$–espace vectoriel et P, Q des ensembles de semi–normes sur V. Si tout $q \in Q$ est continu pour la topologie sur V engendrée par P, alors la topologie sur V engendrée par Q est moins fine que celle engendrée par P.

Exemple 3.6. Sur l'espace vectoriel $\mathbb{K}^2$ (sans topologie pour l'instant) on considère les semi–normes $p_1 : (x_1, x_2) \longmapsto |x_1|$ et $p_2 : (x_1, x_2) \longmapsto |x_2|$, où $|\cdot|$ désigne la valeur absolue respectivement le module usuel. Les semi–normes p_1 et p_2 ne sont pas des normes. La topologie engendrée par $\{p_1\}$ sur $\mathbb{K}^2$ est la topologie dont les ouverts sont de la forme $U \times \mathbb{K}$ où U est un ouvert de $\mathbb{K}$. Cette topologie n'est pas de Hausdorff. Elle est moins fine que la topologie engendrée par $\{p_1, p_2\}$, qui est la topologie usuelle sur $\mathbb{K}^2$.

Proposition 3.7. *Soit V un $\mathbb{K}$–espace vectoriel et P un ensemble de semi–normes sur V. Munissons V de la topologie engendrée par P. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

I : *V est de Hausdorff.*

II : *Pour tout $v \in V \setminus \{0\}$ il existe $p \in P$ avec $p(v) \neq 0$.*

III : $\bigcap \{U \mid U$ *ouvert* $, 0 \in U\} = \{0\}$.

IV : $\{0\}$ *est fermé.*

Démonstration. (I) $\Longrightarrow$ (II) : Soit $v \in V \setminus \{0\}$. Si V est Hausdorff, alors il existe un voisinage A de 0 qui ne contient pas v. Il existent donc $n \in \mathbb{N}$ et une partie finie F de P tel que

$$v \notin \left\{w \in W \mid p(w) < \tfrac{1}{n} \text{ pour tout } p \in F\right\}$$

Il existe donc au moins un élément $p \in F$ tel que $p(v) \geq \frac{1}{n} > 0$, d'où (II). Si $v \in V$ et si $p \in P$ est tel que $p(v) > 0$, alors $\left\{w \in W \mid p(w) < p(v)\right\}$ est un voisinage ouvert de 0 qui ne contient par v, ce qui montre que (II) $\Longrightarrow$ (III). Afin de montrer (III) $\Longrightarrow$ (IV) considérons $v \in V \setminus \{0\}$. Par hypothèse il existe un voisinage ouvert U de 0 qui ne contient pas v. Ainsi $v - U$ est un voisinage ouvert de v qui ne contient pas 0, et le complément de $v - U$ est un fermé de V qui contient 0 mais pas v. On déduit que l'intersection de toutes les fermés qui contiennent 0 est le singleton $\{0\}$. Finalement supposons que $\{0\}$ est fermé. Soit $v \in V \setminus \{0\}$. Il suffit de montrer que qu'il existent des voisinages disjointes de 0 et v. Comme $\{v\}$ est aussi fermé on a que $V \setminus \{v\}$ est un voisinage ouvert de 0. Comme $0 - 0 = 0$ et par continuité de l'addition, il existe un voisinage ouvert U de 0 tel que $v \notin U - U$. Il suffit maintenant de montrer que $v \notin \overline{U}$, puisque dans ce cas U et $V \setminus \overline{U}$ sont des voisinages disjointes de 0 respectivement v. Soit $x \in \overline{U}$. Comme $x + U$ est un voisinage de x on a $x+U \cap U \neq \varnothing$. Il existe alors $y \in x+U \cap U$ tel que $x+y := z \in U$ ce qui entraine $x = z - y \in U - U$, et alors $x \neq v$. □

Remarque 3.8. Si les assertions de la proposition 3.7 sont vraies pour P, alors on dit que P *sépare les points*. Il est interessant de savoir que si P est dénombrable et sépare les points, alors la topologie engendrée par P est métrisable. En effet, si on numerote $P = \{p_1, p_2, \ldots\}$, alors une métrique sur V compatible avec la topologique engendrée par P est donnée par

$$d(v, w) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \frac{p_j(v - w)}{1 + p_j(v - w)}$$

Cette métrique s'appelle *métrique de Fréchet*. On appelle *espace de Fréchet* tout espace vectoriel topologique complét, métrisable et localement convexe. Un espace vectoriel topologique V est localement convexe si et seulement si il existe un ensemble de semi–normes sur V qui engendre sa topologie.

Si la topologie sur un espace vectoriel topologique est engendrée par un ensemble dénombrable de semi–normes qui sépare les points, alors il suffit de vérifier que cet espace est complét pour conclure qu'il est un espace de Fréchet. Voir Bourbaki [**8**] chap. II §4 No.2. pour plus de détails. On se contentra ici des définitions suivantes, bien sûr équivalentes :

DÉFINITION 3.9. On appelle *espace de Fréchet* tout $\mathbb{K}$–espace vectoriel topologique V tel que

I : V est complét.

II : V est hausdorff.

III : Il existe un ensemble dénombrable P de semi–normes sur V qui engendre la topologie sur V.

DÉFINITION 3.10. On appelle *espace localement convexe* tout $\mathbb{K}$–espace vectoriel topologique $(V, \mathfrak{T})$ tel que la topologie sur l'espace vectoriel V engendré par les semi–normes

$$\{N \mid N \text{ est une semi–norme continue pour } \mathfrak{T}\}$$

coïncide avec $\mathfrak{T}$.

REMARQUE 3.11. Un espace vectoriel topologique est donc localement convexe si et seulement si sa topologie est engendrée par un ensemble de semi–normes. C'est trivial avec la définition de *localement convexe* ci–dessus. Les espaces localement convexes forment une catégorie, les morphismes étant les applications linéaires continues. La catégorie des espaces localement convexes est donc par définition une sous–catégorie pleine de la catégorie des espaces vectoriels topologiques.

PROPOSITION 3.12. *Soit V un $\mathbb{K}$–espace vectoriel et P un ensemble de semi–normes sur V. Munissons V de la topologie engendrée par P. Soit q une semi–norme sur V. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

I : *q est continu.*

II : *q est continu en 0.*

III : *$\{v \in V \mid q(v) < 1\}$ est ouvert.*

IV : *Il existe $M \in \mathbb{R}$ et $F \subseteq P$ fini tel que $q(v) \leq M \max_{p \in F} p(v)$ pour tout $v \in V$.*

De plus, ces assertions sont tous vraies si $q \in P$.

DÉMONSTRATION. Les implications (I) $\iff$ (II) et (II) $\implies$ (III) sont évidentes. Montrons (III) $\implies$ (IV) et (IV) $\implies$ (II).
Supposons alors que $\{v \in V \mid q(v) < 1\}$ est ouvert. Il existe alors $n \in \mathbb{N}$ et $F \subseteq P$ fini tel que

$$\left\{v \in V \mid p(v) < \tfrac{1}{n} \text{ pour tout } p \in F\right\} \subseteq \left\{v \in V \mid q(v) < 1\right\}$$

ce qui équivaut dire que pour tout $v \in V$ on a

$$n \max_{p \in F} p(v) < 1 \implies q(v) < 1$$

ou en d'autre mots que $q(v) \leq n \max_{p \in F} p(v)$ pour tout $v \in V$. Supposons maintenant (IV) et montrons (II). Soit $\varepsilon > 0$, et montrons que $q^{-1}([0,\varepsilon))$ est un voisinage de 0. Par hypothèse il existe $M \in \mathbb{R}$ et $F \subseteq P$ fini tel que

$$q(v) \leq M \max_{p \in F} p(v)$$

pour tout $v \in V$. On a donc

$$\big\{v \in V \mid p(v) < \varepsilon M^{-1} \text{ pour tout } p \in F\big\} \subseteq \big\{v \in V \mid q(v) < \varepsilon\big\} = q^{-1}([0,\varepsilon))$$

ce qui montre que $q^{-1}([0,\varepsilon))$ contient un voisinage ouvert de 0. □

Proposition 3.13. *Soient V, W des K–espaces vectoriels munis de topologies engendrées par des ensembles de semi–normes P et Q sur V et W respectivement, et soit $T : V \longrightarrow W$ un opérateur linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

I : *T est continu.*

II : *T est continu en 0.*

III : *Pour tout semi–norme continue q sur W, $q \circ T$ est une semi–norme continue sur V.*

IV : *Pour tout $q \in Q$ il existe $M \in \mathbb{R}$ et une partie finie F de P, tel que*

$$q(Tv) \leq M \max_{p \in F} p(v)$$

pour tout $v \in V$.

Démonstration. L'équivalence (I) $\iff$ (II) est connue, et (I) $\implies$ (III) est évident. L'implication (III) $\implies$ (IV) est une conséquence directe de 3.12. Montrons donc que (IV) $\implies$ (II). Pour cela, choisissons un voisinage B de $0 \in W$ et montrons que $T^{-1}(B)$ est un voisinage de $0 \in V$. On peut supposer qu'il existent $G \subseteq Q$ fini et $\varepsilon > 0$ tel que

$$B = \{w \in W \mid q(w) < \varepsilon \text{ pour tout } q \in G\}$$

Par hypothèse on peut trouver pour tout $q \in G$ un nombre réel M_q et une partie finie $F_q \subseteq P$ tel que $q(Tv) \leq M_q \max_{p \in F_q} p(v)$ pour tout $v \in V$. En posant

$$M := \max_{q \in G} M_q \qquad \text{et} \qquad F := \bigcup_{q \in G} F_q$$

on trouve $q(Tv) \leq M \max_{p \in F} p(v)$ pour tout $v \in V$ et tout $q \in G$. L'ensemble

$$A := \{v \in V \mid p(v) < \varepsilon M^{-1} \text{ pour tout } p \in F\}$$

est bien un voisinage de $0 \in V$, et on a par construction que $T(A) \subseteq B$. □

COROLLAIRE 3.14. *Soit V un $\mathbb{K}$–espace vectoriel et P un ensemble de semi–normes sur V. On munit V de la topologie engendrée par P. Soit $T : V \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

I : *T est continu.*

II : *T est continu en 0.*

III : *Il existe $M \in \mathbb{R}$ et une partie finie F de P, tel que*

$$|Tv| \leq M \max_{p \in F} p(v)$$

pour tout $v \in V$.

DÉMONSTRATION. C'est la proposition 3.13 avec $W = \mathbb{K}$ et $Q = \{|\cdot|\}$. □

REMARQUE 3.15. Supposons qu'on ait des parties $P_0 \subseteq P_1 \subseteq \cdots$ de P telles que P soit la réunion de toutes les P_i. Pour toute forme linéaire $T : V \longrightarrow \mathbb{K}$ il existe alors, selon le corollaire 3.14 un $k \in \mathbb{N}_0$ tel que

$$|Tv| \leq M \max_{p \in P_k} p(v)$$

Dans un tel cas on dit que T est *d'ordre* k. Evidemment si T est d'ordre k, alors T est aussi d'ordre k' pour tout $k' \geq k$.

REMARQUE 3.16. On a maintenant toutes les outils dans la main pour définir des bonnes topologies sur $\Gamma(E)$, où X est une variété différentiable sans bord de dimension n, et où E est $\mathbb{K}$–fibré sur X. On commence par le cas d'un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^n$ et d'un fibré produit $E = U \times \mathbb{K}^m$. On munit $\mathbb{K}^m$ d'une norme $|\cdot|$.

DÉFINITION 3.17. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et posons $E = U \times \mathbb{K}^m$. Soit $K \subseteq U$ un compact. Pour tout multi–indice α et tout $u \in C^\infty(U, E)$ posons

$$N_{K,\alpha}(u) := \sup_{x \in K} |\partial^\alpha u(x)| \tag{27}$$

On munit $C^\infty(U, E)$ de la topologie engendrée par l'ensemble de semi–normes

$$P := \left\{ N_{K,\alpha} \;\middle|\; K \subseteq U \text{ compact et } \alpha \text{ un multi indice} \right\} \tag{28}$$

On appelle cette topologie *topologie de Schwartz sur* $C^\infty(U, E)$ et on note $\mathcal{E}(U, E)$ l'espace vectoriel $C^\infty(U, E)$ muni de la topologie de Schwartz.

REMARQUE 3.18. Ayant cette définition, on trouve facilement la topologie correspondante sur $\Gamma(E) = C^\infty(X, E)$: Soit $(\psi_i : U_i \longrightarrow C_i)_{i \in I}$ un atlas de X qui trivialise E. Une carte $\psi_i : U_i \longrightarrow C_i$ de cet atlas induit une bijection entre $C^\infty(U_i, E|_{U_i})$ et $C^\infty(C_i, C_i \times \mathbb{K}^m)$ et permet alors de transporter la topologie sur

$\mathcal{E}(C_i, C_i \times \mathbb{K}^m)$ sur $C^\infty(U_i, E|_{U_i})$. On munit $C^\infty(X, E)$ de la topologie la moins fine qui rend continue toutes les réstrictions

$$\mathrm{res}_i : C^\infty(X, E) \longrightarrow C^\infty(U_i, E|_{U_i})$$

On vérifie que cette topologie est intrinsèque (ne dépend par de l'atlas choisi). On appelle cette topologie *topologie de Schwartz sur* $\Gamma(E)$, et on note $\mathcal{E}(X, E)$ l'espace vectoriel $\Gamma(E)$ muni de la topologie de Schwartz.

REMARQUE 3.19. Une suite $(f_i)_{i=1}^\infty$ de sections de classe C^∞ de E tend vers 0 dans $\mathcal{E}(X, E)$ si et seulement si la suite de $(\partial^\alpha f_i)_{i=1}^\infty$ converge uniformement sur tout compact vers la zéro–section, quelque soit le multi–indice α et le système de coordonnées locales choisi.

DÉFINITION 3.20. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et posons $E := U \times \mathbb{K}^m$. Soit $K \subseteq U$ un compact. Pour tout multi–indice α et tout $u \in C^\infty(U, E)$ avec $\operatorname{supp} u \subseteq K$, posons

$$N_\alpha(u) := \sup_{x \in U} |\partial^\alpha u(x)| \tag{29}$$

On munit $\{u \in C^\infty(U, E) \mid \operatorname{supp} u \subseteq K\}$ de la topologie engendrée par l'ensemble de semi–normes

$$P := \left\{ N_\alpha \;\middle|\; \alpha \text{ un multi indice} \right\} \tag{30}$$

On note $\mathcal{D}_K(U, E)$ l'espace vectoriel $\{u \in C^\infty(U) | \operatorname{supp} u \subseteq K\}$ muni de la topologie engendrée par P.

REMARQUE 3.21. On définit $\mathcal{D}_K(X, E)$ où X est une variété et E un $\mathbb{K}$–fibré sur X moyennant un atlas de X, comme on l'a déjà fait dans 3.18. On est tenté de munir $\Gamma_{00}(X) = C_{00}^\infty(X, E)$ de la topologie engendrée par les semi–normes de la forme (29). Mais ce n'est pas le bon choix. Cette topologie est trop faible pour que $\Gamma_{00}(E)$ deviendra complét.

DÉFINITION 3.22. Soit P l'ensemble de toutes les semi–normes p sur $\Gamma_{00}(E)$ telles que pour tout compact $K \subseteq X$ la réstriction $p|_{\mathcal{D}_K(X,E)}$ est une semi–norme continue sur $\mathcal{D}_K(X, E)$. On appelle *topologie de Schwartz sur* $C_{00}^\infty(X, E)$ la topologie engendrée par P, et on note $\mathcal{D}(X, E)$ l'espace vectoriel $C_{00}^\infty(X, E)$ muni de la topologie de Schwartz.

REMARQUE 3.23. La topologie sur $\mathcal{D}(X, E)$ merite d'être étudiée et justifiée. Soient $K \subseteq L$ des parties compactes de X. On a $\mathcal{D}_K(X, E) \subseteq \mathcal{D}_L(X, E)$. L'inclusion $\varphi_{KL} : \mathcal{D}_K(X, E) \longrightarrow \mathcal{D}_L(X, E)$ est facilement vue d'être continue, ce qu'on montre dans 3.24. Voici la trivialité qu'il faut observer : Les parties compactes de X forment, muni de la relation d'inclusion, un ensemble partiellement ordonné filtrant dans le sens de (1). On trouve alors un système de colimite

$$\big(\mathcal{D}_K(X,E), \varphi_{LK}\big) \tag{31}$$

dans la catégorie des espaces vectoriels topologiques localement convexes. On va montrer qu'on a un isomorphisme canonique d'espaces vectoriels topologiques

$$\mathcal{D}(X,E) \cong \operatorname*{colim}_{K\subseteq X} \mathcal{D}_K(X,E) \tag{32}$$

Au lieu de 3.22, on pourrait bien prendre (32) comme définition de $\mathcal{D}(X,E)$. Il faudra s'inquiéter si on ne trouve pas une co–notion pour la topologie de Schwartz sur $C^\infty(X,E)$. La voilà : Notons $\mathcal{E}_k(X,E)$ l'espace de toutes les sections de classe C^k de E muni de la topologie engendrée par l'ensemble de semi–normes

$$N_{K,\alpha}(u) := \sup_{x\in K} |\partial^\alpha u(x)| \qquad |\alpha| \leq k,\ K \text{ compact}$$

On a des inclusions continues $\varphi_{kl} : \mathcal{E}_k(X,E) \longrightarrow \mathcal{E}_l(X,E)$ pour $l \leq k$. L'espace $\mathcal{E}(X,E)$ s'identifie alors à

$$\mathcal{E}(X,E) \cong \lim_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{E}_k(X,E) \tag{33}$$

de manière canonique.

Proposition 3.24. *Soient K, K_1 et K_2 des parties compactes de X et supposons $K_1 \subseteq K_2$. Les assertions suivantes sont vraies :*

I : *L'inclusion $\mathcal{D}_{K_1}(X,E) \longrightarrow \mathcal{D}_{K_2}(X,E)$ est une immersion fermée.*

II : *L'inclusion $\mathcal{D}_K(X,E) \longrightarrow \mathcal{D}(X,E)$ est une immersion fermée.*

III : *Soit V un espace localement convexe et $T : \mathcal{D}(X,E) \longrightarrow V$ linéaire. Alors T est continu si et seulement si $T|_{\mathcal{D}_K(X,E)} : \mathcal{D}_K(X,E) \longrightarrow V$ est continu pour tout $K \subseteq X$ compact.*

Démonstration. (I) : L'ensemble $\mathcal{D}_{K_1}(X,E)$ est une partie fermée de $\mathcal{D}_{K_2}(X,E)$, puisque la limite u d'une suite convergente $(u_k)_{k=1}^n$ dans $\mathcal{D}_{K_2}(X,E)$ satisfait clairement $\operatorname{supp} u \subseteq K_1$ si $\operatorname{supp} u_k \subseteq K_1$ pour tout k. Comme on a

$$\sup_{x\in K_2} |\partial^\alpha u(x)| = \sup_{x\in K_1} |\partial^\alpha u(x)|$$

pour tout $u \in \mathcal{D}_{K_2}(X,E)$ avec $\operatorname{supp} u \subseteq K_1$, la topologie induite par $\mathcal{D}_{K_2}(X,E)$ sur $\mathcal{D}_{K_1}(X,E)$ coïncide avec celle de $\mathcal{D}_{K_1}(X,E)$, ce qui montre (I).
(II) : Soit $x \in X$. La semi–norme $N_x : u \longmapsto |u(x)|$ est continue sur $\mathcal{D}(X,E)$. L'ensemble $F_x := \{u \in \mathcal{D}(X,E) \mid u(x) = 0\}$ est donc fermé. Comme

$$\mathcal{D}_K(X,E) = \bigcap_{x\in X\setminus K} F_x$$

on a que $\mathcal{D}_K(X,E)$ est un fermé de $\mathcal{D}(X,E)$. Soit P l'ensemble de toutes les semi–normes continues sur $\mathcal{D}(X,E)$. La topologie induite par $\mathcal{D}(X,E)$ sur $\mathcal{D}_K(X,E)$ est engendrée par les semi–normes

$$\{N|_{\mathcal{D}_K(X,E)} \mid N \in P\}$$

Mais $N|_{\mathcal{D}_K(X,E)}$ est continu sur $\mathcal{D}_K(X,E)$ par définition dela topologie sur $\mathcal{D}(X,E)$. La topologie induite par $\mathcal{D}(X,E)$ sur $\mathcal{D}_K(X,E)$ est donc moins fine que la topologie de $\mathcal{D}_K(X,E)$. D'autre part, les semi–normes

$$u \longmapsto \sup_{x\in K} |\partial^\alpha u(x)|$$

sont continues sur $\mathcal{D}(X,E)$, ce qui montre que la topologie induite par $\mathcal{D}(X,E)$ sur $\mathcal{D}_K(X,E)$ est plus fine que celle de $\mathcal{D}_K(X,E)$.
(III) : La condition est évidemment nécessaire, vu l'assertion (II). Qu'elle est aussi suffisante est une conséquence de 3.13. En effet, demander que

$$T|_{\mathcal{D}_K(X,E)} : \mathcal{D}_K(X,E) \longrightarrow V$$

est continu pour tout compact $K \subseteq X$, est équivalent à demander que $q\circ T|_{\mathcal{D}_K(X,E)}$ est une semi–norme continue sur $\mathcal{D}_K(X,E)$ pour toute semi–norme continue q sur V et tout compact $K \subseteq X$. Mais cela entraine que $q\circ T$ est une semi–norme continue sur $\mathcal{D}(X,E)$, par définition de la topologie sur $\mathcal{D}(X,E)$, quelque soit la semi–norme continue q sur V, et donc que T est continu sur $\mathcal{D}(X,E)$. □

COROLLAIRE 3.25. *Il y a un isomorphisme*

$$\mathcal{D}(X) \cong \operatorname*{colim}_{K\subseteq X} \mathcal{D}_K(X) \tag{34}$$

DÉMONSTRATION. Comme $\mathcal{D}_K(X)\cap\mathcal{D}_L(X) = \mathcal{D}_{K\cap L}(X)$, la famille de parties $\{\mathcal{D}_K(X) \mid K \subseteq X \text{ compact}\}$ de $\mathcal{D}(X)$ est stable par intersections finies. L'assertion (III) de la proposition 3.24 dit précisement que la topologie sur $\mathcal{D}(X)$ est la topologie finale engendrée par toutes les inclusions

$$\mathcal{D}_K(X) \longrightarrow \mathcal{D}(X) \qquad K \subseteq X \text{ compact}$$

ce qui montre l'isomorphisme (34), vu la remarque 1.15. □

THEORÈME 3.26. *Soit $(f_n)_{n=1}^\infty$ une suite dans $\mathcal{D}(X)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- I : *$(f_n)_{n=1}^\infty$ converge vers 0.*
- II : *Il existe un compact $K \subseteq X$ tel que $f_n \in \mathcal{D}_K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tel que $(f_n)_{n=1}^\infty$ converge vers 0 dans $\mathcal{D}_K(X)$.*
- III : *Il existe un compact $K \subseteq X$ tel que $f_n \in \mathcal{D}_K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tel que pour tout système de coordonnées local et tout multi–indice α la suite $(\partial^\alpha f_n)_{n=1}^\infty$ converge uniformement vers 0.*

DÉMONSTRATION. L'implication (II) $\Longrightarrow$ (I) est triviale, et (III) n'est qu'une reformulation de (II). La seule chose à montrer pour (I) $\Longrightarrow$ (II) est l'existence du compact K tel que $\operatorname{supp} f_n \subseteq K$ pour tout n. Supposons par l'absurde qu'un tel compact n'existe pas. Alors il existe une suite de compacts $(K_n)_{n=1}^\infty$ telle $K_n \subsetneq \overset{\circ}{K}_{n+1}$ pour tout n et telle que

$$Y := \bigcup_{j=1}^\infty K_j$$

n'est pas compact, et une sous–suite $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ de $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ telle que $g_n \in \mathcal{D}_{K_n}(X)$ mais $g_n \notin \mathcal{D}_{K_{n-1}}(X)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ choisissons un élément $x_n \in K_n \setminus K_{n-1}$ tel que $a_n := |g_n(x_n)| > 0$. La semi–norme

$$\pi_n : h \longmapsto a_n^{-1}|h(x_n)|$$

est continue, puisque la topologie sur $\mathcal{D}(X)$ est plus fine que celle de la convergence ponctuelle. Posons

$$\pi := \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n \tag{35}$$

Par (35) on définit bien une semi–norme sur

$$\mathcal{D}(Y) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_{K_n}(Y) \cong \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_{K_n}(X)$$

puisque pour tout $h \in \mathcal{D}(Y)$ la somme (35) qui définit $\pi(h)$ est finie. Pour la même raison on a pour tout compact $K \subseteq Y$

$$\pi|_{\mathcal{D}_K} = \sum_{n=1}^{N} \pi_n \qquad \text{si } K \subseteq K_N$$

ce qui montre en particulier que π est continu sur $\mathcal{D}(Y)$. On a $\pi(g_n) = \pi_n(g_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et d'autre part

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \pi(g_n) = \pi\left(\lim_{n \longrightarrow \infty} g_n\right) = \pi(0) = 0$$

d'où $1 = 0$. $\square$

REMARQUE 3.27. La topologie induite par $\mathcal{E}(X)$ sur $C_{00}^{\infty}(X)$ est par conséquent moins fine que celle de $\mathcal{D}(X)$. En d'autre mots : L'inclusion $\mathcal{D}(X) \longrightarrow \mathcal{E}(X)$ est continue. Lorsque X est compact les topologies sur $\mathcal{D}(X)$ et $\mathcal{E}(X)$ coïncident, et on a donc $\mathcal{E}(X) = \mathcal{D}(X)$ dans ce cas.
Remarquons aussi que les topologies de Schwartz sur $C^{\infty}(X)$ et $C_{00}^{\infty}(X)$ sont moins fines que la topologie compacte–ouverte (topologie de la convergence uniforme sur les compacts), et alors aussi moins fines que la topologie de la convergence ponctuelle. Les espaces topologiques $\mathcal{E}(X)$ et $\mathcal{D}(X)$ sont donc séparables puisque $C^{\infty}(X)$ et $C_{00}^{\infty}(X)$ sont déjà séparables pour la topologie moins fine de la convergence ponctuelle.

PROPOSITION 3.28. *Les espaces vectoriels topologiques $\mathcal{D}(X, E)$ et $\mathcal{E}(X, E)$ sont des espaces de Fréchet*

DÉMONSTRATION. Comme X est à base dénombrable et localement compact, il existe un recouvrement dénombrable $(U_i)_{i \in I}$ de X tel que $K_i := \overline{U}_i$ est compact pour tout $i \in I$. On peut supposer que $\mathfrak{K} := \{K_i \mid i \in I\}$ est stable par réunions finies. Ainsi $\mathfrak{K}$ est cofinal dans l'ensemble de toutes les parties compactes de X. Par le théorème 1.3 la topologie engendrée par

$$\left\{ N_{K_i,\alpha} \;\middle|\; i \in I \text{ et } \alpha \text{ un multi indice} \right\} \tag{36}$$

coïncide avec celle donnée par (28), et est aussi indépendente du choix du recouvrement. La topologie de Schwarz sur $C^\infty(X,E)$ est alors engendrée par un ensemble dénombrable de semi–normes. Le même argument montre que la topologie de Schwartz sur $C^\infty_{00}(X,E)$ est engendrée par un ensemble dénombrable de semi–normes. On a déjà vu que $\mathcal{D}(X,E)$ et $\mathcal{E}(X,E)$ sont séparables. Reste à voir la complétude de ces espaces. L'espace $\mathcal{E}(X)$ est complét : En effet, on sait que l'espace $C(X,E)$ des sections continues de E est complét. On sait aussi que si une suite de fonctions dérivables $(f_i)_{i=1}^\infty$ converge uniformement sur les compacts vers une fonction f, et si la suite des dérivées converge uniformement sur les compacts vers une fonction g, alors f est dérivable et g est la dérivée de f. Ceci permet de conclure que $C^\infty(X,E)$ est complét pour la topologie de Schwarz, puisque on demande convergence uniforme sur les compacts de toutes les dérivées. Le même argument, tenant compte de la caracterisation (II) dans 3.26 montre que $\mathcal{D}(X,E)$ est complét. □

Définition 3.29. On appelle *distributions sur* X et on note $\mathcal{D}'(X)$ l'espace dual de $\mathcal{D}(X)$, muni de la topologie faible.

Remarque 3.30. Les distributions sur X sont donc les formes linéaires continues $f : \mathcal{D}(X) \longrightarrow \mathbb{K}$. Une suite de distributions $(f_j)_{j=1}^\infty$ converge vers f si et seulement si $(f_j(u))_{j=1}^\infty$ converge vers $f(u)$ pour tout $u \in \mathcal{D}(X)$. Au lieu de $f(u)$ on écrit $\langle f, u\rangle$. Dire qu'une forme linéaire f sur $\mathcal{D}(X)$ est continue revient à dire que pour toute partie compacte $K \subseteq X$ il existe $C \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\langle f, u\rangle \leq C \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha u(x)|$$

pour tout $u \in \mathcal{D}(X)$ avec $\operatorname{supp} u \subseteq K$. Si le même nombre naturel k marche pour tout compact K, alors on dit que f est une *distribution d'ordre* k, conformément à la remarque 3.15.

Exemple 3.31. La mesure de Lebesgue μ sur $\mathbb{R}^n$ est une distribution d'ordre 0, vu que pour toute partie compacte $K \subseteq \mathbb{R}^n$ on a

$$\langle \mu, u\rangle = \int u(x)dx \leq \mathrm{Vol}(K) \cdot \sup_{x\in K} |u(x)|$$

La mesure de Dirac δ_x en un point $x \in X$, qui est définie par $\langle \delta_x, u\rangle = u(x)$ est aussi une distribution d'ordre 0. Pour $x \in X$ et un multi–indice α on peut aussi considérer, après avoir choisi un système de coordonnées locales la forme linéaire

$$u \longmapsto \partial^\alpha u(x)$$

Cette forme est une distribution d'ordre $|\alpha|$.

EXEMPLE 3.32. Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(U)$ une fonction localement intégrable sur U. On peut voir f comme distribution T_f en posant pour tout $u \in \mathcal{D}(U)$

$$\langle T_f, u \rangle = \int_U f(x)u(x)dx$$

Il est clair que la distribution T_f ne dépend que de la classe dans $L^1_{\mathrm{loc}}(U)$ de f. On appelle T_f *distribution associée à* f. Si aucune confusion en résulte on parle de la distribution f, et on note $\langle f, u \rangle$. On a défini ainsi une application

$$L^1_{\mathrm{loc}}(U) \longrightarrow \mathcal{D}'(U)$$

qui est plus ou moins facilement vérifiée d'être injective. Cette injection est canonique parce–qu'on dispose d'une mesure préférée sur U. Sur une variété quelconque, il n'y a pas de mesure naturelle. L'injection

$$L^1_{\mathrm{loc}}(X) \longrightarrow \mathcal{D}'(X)$$

devient canonique après le choix d'une densité sur X (voir Simanca [**21**] pour plus de détails).

DÉFINITION 3.33. Soit $f \in \mathcal{D}'(X)$ une distribution. On appelle *support de* f l'ensemble des $x \in X$ telles que pour tout voisinage ouvert U de x il existe une fonction $u \in \mathcal{D}(X)$ telle que $\operatorname{supp} u \subseteq U$ et $\langle f, u \rangle \neq 0$.

REMARQUE 3.34. Le support de f est un fermé de X. En effet, si on pose

$$U := \bigcup \left\{ V \subseteq X \;\middle|\; V \subseteq X \text{ ouvert, et } \langle f, u \rangle = 0 \text{ pour tout } u \in C^\infty_{00}(V) \right\}$$

alors $\operatorname{supp} f$ est le complément de U dans X, et U est manifestement ouvert.

DÉFINITION 3.35. On appelle *distributions à support compact sur* X l'ensemble de toutes les distributions $f \in \mathcal{D}'(X)$ telles que $\operatorname{supp} f$ est compact.

REMARQUE 3.36. On peut identifier les distributions à support compact avec le dual $\mathcal{E}'(X)$ de $\mathcal{E}(X)$. Pour cela, observons que l'application d'inclusion

$$\iota : \mathcal{D}(X) \longrightarrow \mathcal{E}(X)$$

donne lieu à une application duale (on applique le foncteur $(-)'$)

$$\iota' : \mathcal{E}'(X) \longrightarrow \mathcal{D}'(X)$$

On peut montrer sans trop se fatiguer que $\operatorname{im} \iota'$ est précisement l'ensemble des distributions à support compact.

DÉFINITION 3.37. Soit f une distribution sur $U \subseteq \mathbb{R}^n$ et α un multi–indice. On appelle α–ème dérivée de f, et on note $\partial^\alpha f$ la distribution définie par

$$\langle \partial^\alpha f, u \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha u \rangle$$

pour tout $u \in \mathcal{D}(U)$.

REMARQUE 3.38. Si f est une fonction sur U dont la α–ème dérivée existe et est localement intégrable, et si T_f est la distribution associée à f, alors on a $(T_f)^\alpha = T_{f^\alpha}$. Pour voir ceci, il suffit d'intégrer α–fois par parties

$$\int f^\alpha(x) u(x) dx$$

DÉFINITION 3.39. On appelle *espace de Schwartz sur* $\mathbb{R}^n$ et on note $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble de toutes les fonctions $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \left(D^\beta \varphi \right)(x) \right| < \infty \tag{37}$$

pour tout multi indices α, β.

REMARQUE 3.40. L'espace de Schwartz est donc l'ensemble de toutes les fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ dont tout les dérivées (y compris la 0–ème) sont à décroissance rapide. On munit $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ de la topologie engendrée par l'ensemble de toutes les semi–normes $p_{\alpha,\beta}$ définies par

$$p_{\alpha,\beta}(u) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \left(D^\beta \varphi \right)(x) \right|$$

Clairement $C^\infty_{00}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, et cette inclusion est stricte et continue. On peut montrer que la transformation de Fourier

$$F : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

est une bijection bicontinue. Les éléments du dual de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sont appelés *distributions temperées*. Par dualité, on peut étendre la transformation de Fourier aux distributions temperées (voir Simanca **[21]** pour plus de détails).

PROPOSITION 3.41. *Soient X et Y des variétés, et notons $Z := X \times Y$. L'application*

$$\varphi : C^\infty_{00}(X) \otimes_{\mathbb{C}} C^\infty_{00}(Y) \longrightarrow C^\infty_{00}(Z)$$

définie par $\varphi(u \otimes v)(x, y) = u(x)v(y)$ est injective, et son image est dense dans $C^\infty(Z)$.

DÉMONSTRATION. Soient $u_1, \ldots, u_m \in C_{00}^\infty(X)$ et $v_1, \ldots, v_m \in C_{00}^\infty(Y)$ et supposons

$$\sum_{i=1}^m u_i \otimes v_i \quad \in \ker \varphi$$

pour tout $(x,y) \in Z$. Sans perte de généralité supposons que $v_1, \ldots, v_m$ sont linéairement indépendents sur $\mathbb{C}$. Comme par hypothèse

$$\sum_{i=1}^m u_i(x) v_i = 0$$

pour tout $x \in X$, on a $u_i = 0$ pour tout $1 \leq i \leq m$, donc

$$\sum_{i=1}^m u_i \otimes v_i = 0$$

ce qui montre que φ est injectif. Pour la densité on fait un petit détour : Au lieu de montrer que $\operatorname{Im}\varphi$ est dense dans $C_{00}^\infty(Z)$, on peut aussi montrer que toute forme linéaire continue sur $C_{00}^\infty(Z)$ dont la restriction à $\operatorname{Im}\varphi$ est nulle est déjà nulle sur $C_{00}^\infty(Z)$, c'est–à–dire on utilise

$$\operatorname{Im}\varphi \text{ est dense} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \operatorname{res} : \mathcal{D}'(Z) \longrightarrow (\operatorname{Im}\varphi)' \text{ est injectif}$$

Choisissons alors $f \in \ker \operatorname{res}$, et montrons que $f = 0$. Il suffit de montrer que $\operatorname{supp} f = \varnothing$, c'est–à–dire que $x \notin \operatorname{supp} f$ pour tout $x \in X$. Quitte à choisir une carte appropriée, il suffit de montrer l'assertion dans le cas $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$ et $x = (0,0)$.Choisissons des fonctions $\mu \in C_{00}^\infty(X)$ et $\nu \in C_{00}^\infty(Y)$ à valeurs dans $[0,1]$ telles que $\mu(s) = 1$ et $\nu(t) = 1$ dans un voisinage de 0 de X respectivement Y, et telles que

$$\int \mu(s) ds = 1 \qquad \text{et} \qquad \int \nu(t) dt = 1$$

Pout tout $\varepsilon > 0$ posons

$$h_\varepsilon(x,y) := \varepsilon^{-(n+m)} \big(\mu(s\varepsilon^{-1}) \otimes \nu(t\varepsilon^{-1}) \big)$$

Les fonctions h_ε ainsi définies forment une unité approchée de $\mathcal{D}'(Z)$. On a d'une part

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} f * h_\varepsilon = f$$

et d'autre part

$$f * h_\varepsilon(x,y) = 0$$

par hypothèse sur f, ce qui montre que $f = 0$. □

DÉFINITION 3.42. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $T : C_{00}^\infty(U) \longrightarrow C^\infty(U)$ un opérateur continu. On appelle *noyeau de distribution de* T la distribution K sur $U \times U$ définie par

$$\langle Tv, u \rangle = \langle K, u \otimes v \rangle$$

pour tout $u, v \in C_{00}^\infty(U)$.

Remarque 3.43. Cette définition demande bien sûr une justification, surtout ce qui concerne l'existence d'une telle distribution K. L'unicité est une conséquence directe de la proposition 3.41. Le théorème suivant, du à Laurent Schwartz (1950) répond complètement à cette question.

Theorème 3.44 (Noyeau de Schwarz). *Soit $K \in \mathcal{D}'(X_1 \times X_2)$. L'application*

$$T : \mathcal{D}(X_2) \longrightarrow \mathcal{D}'(X_1)$$

définie par $\langle Tv, u\rangle = K(u \otimes v)$ est linéaire et continue dans le sens que $\lim Tv_j = 0$ dans $\mathcal{D}'(X_1)$ si $\lim v_j = 0$ dans $\mathcal{D}(X_2)$.
Reciproquement, pour toute application linéaire continue $T : \mathcal{D}(X_2) \longrightarrow \mathcal{D}'(X_1)$ il existe une distribution unique $K \in \mathcal{D}'(X_1 \times X_2)$ telle que $\langle Tv, u\rangle = K(u \otimes v)$.

Démonstration. Je renvois à Hörmander **[13]**, chapitre 5 section 2. □

Définition 3.45. Une fonction continue $f : X \longrightarrow Y$ entre espaces topologiques est dite *propre* si la préimage par f de toute partie compacte de Y est une partie compacte de X.

Définition 3.46. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $D \subseteq U \times U$. On dit que D est *une partie propre de* $U \times U$ si les projections canoniques $\pi_1, \pi_2 : D \longrightarrow X$ sont des applications propres.
Soit K une distribution (ou fonction) sur $U \times U$. On dit que K est *proprement supporté* si $\operatorname{supp} K$ est une partie propre de $U \times U$.
Soit T un opérateur et K son noyeau de distribution. On dit que T est *proprement supporté* si le noyeau de distribution de T est proprement supporté.

3. Amplitudes : Définition et résultats téchniques

On se fixe dans cette section des nombres naturels $n, N \in \mathbb{N}$ et un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Par "fonction" on entend toujours "fonction à valeurs complexes".

Définition 3.47. Soit $m \in \mathbb{R}$. On appelle *amplitude d'ordre* m toute fonction $\sigma \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^N)$ satisfaisant la condition suivante : Pour tout multi–indices α, β et toute partie compacte $K \subseteq U$ il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\left|D_x^\beta D_\xi^\alpha \sigma(x,\xi)\right| \quad \leq \quad C(1+|\xi|)^{m-|\alpha|} \tag{38}$$

pour tout $x \in K$. On note $\mathrm{Ampl}^m(U \times \mathbb{R}^N)$ l'ensemble de toutes les amplitudes d'ordre m. On appelle *amplitude* tout élément de

$$\mathrm{Ampl}(U \times \mathbb{R}^N) := \bigcup_{m \in \mathbb{R}} \mathrm{Ampl}^m(U \times \mathbb{R}^N)$$

Remarque 3.48. Il découle directement de la définition que $\mathrm{Ampl}(U \times \mathbb{R}^N)$ et $\mathrm{Ampl}^m(U \times \mathbb{R}^N)$ sont des $\mathbb{C}$–espaces vectoriels pour tout $m \in \mathbb{R}$. On note

$$\mathrm{Ampl}^{-\infty}(U \times \mathbb{R}^N) := \bigcap_{m \in \mathbb{R}} \mathrm{Ampl}^m(U \times \mathbb{R}^N)$$

qui est aussi un espace vectoriel. Vu que $(1 + |\xi|)^m \leq (1 + |\xi|)^{m'}$ pour tout nombres réels $m \leq m'$, on a une inclusion

$$\mathrm{Ampl}^m(U \times \mathbb{R}^N) \subseteq \mathrm{Ampl}^{m'}(U \times \mathbb{R}^N) \qquad \text{pour } m \leq m'$$

qui est facilement vue d'ètre stricte si $m < m'$.

Remarque 3.49. Dans la suite j'énnonce et démontre quelques propriétés des amplitudes sous différents points de vues, la plupart de nature téchnique. Les propositions 3.50 et 3.51 traitent des propriétés algébriques des amplitudes et 3.52 la différentiation des amplitudes. Les propositions 3.55 et 3.56 traitent la composition d'une amplitude avec une fonction et le changement de variables. La proposition 3.57 traite la topologie sur $\mathrm{Ampl}^m(U \times \mathbb{R}^N)$.
Comme il s'agira toujours du même ouvert U et du même nombre naturel N, on simplifie la notation en $\mathrm{Ampl}^m := \mathrm{Ampl}^m(U \times \mathbb{R}^N)$.

Proposition 3.50. *Soient $m, m' \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathrm{Ampl}^m$ et $\sigma' \in \mathrm{Ampl}^{m'}$. Alors $\sigma\sigma' \in \mathrm{Ampl}^{m+m'}$.*

Démonstration. Soient α, β des multi–indices et $K \subseteq U$ une partie compacte. Pour tout multi indices γ, δ il existent par définition des nombres réels $C_{\gamma\delta}$ et $C'_{\gamma\delta}$ telles que

$$\sup_{x \in K} \left| D_x^\delta D_\xi^\gamma \sigma(x, \xi) \right| \leq C_{\gamma\delta}(1 + |\xi|)^{m - |\gamma|}$$

$$\text{et} \qquad \sup_{x \in K} \left| D_x^\delta D_\xi^\gamma \sigma'(x, \xi) \right| \leq C'_{\gamma\delta}(1 + |\xi|)^{m' - |\gamma|}$$

Pour $x \in K$ on calcule

$$\begin{aligned}
& \left| D_x^\beta D_\xi^\alpha (\sigma(x,\xi)\sigma'(x,\xi)) \right| \\
\leq \; & \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \left| D_x^\beta \left(D_\xi^{\alpha-\gamma}\sigma(x,\xi) D_\xi^\gamma \sigma'(x,\xi) \right) \right| \\
\leq \; & \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \sum_{\delta \leq \beta} \binom{\beta}{\delta} \left| D_x^{\beta-\delta} D_\xi^{\alpha-\gamma} \sigma(x,\xi) \right| \left| D_x^\delta D_\xi^\gamma \sigma'(x,\xi) \right| \\
\leq \; & \sum_{\gamma \leq \alpha} \sum_{\delta \leq \beta} \binom{\alpha}{\gamma} \binom{\beta}{\delta} C_{\alpha-\gamma,\beta-\delta} (1+|\xi|)^{m-|\alpha-\gamma|} C'_{\gamma\delta} (1+|\xi|)^{m'-|\gamma|} \\
= \; & \sum_{\gamma \leq \alpha} \sum_{\delta \leq \beta} \binom{\alpha}{\gamma} \binom{\beta}{\delta} C_{\alpha-\gamma,\beta-\delta} C'_{\gamma\delta} (1+|\xi|)^{m+m'-|\alpha|} \\
= \; & C(1+|\xi|)^{m+m'-|\alpha|}
\end{aligned}$$

où on a posé

$$C := \sum_{\gamma \leq \alpha} \sum_{\delta \leq \beta} \binom{\alpha}{\gamma} \binom{\beta}{\delta} C_{\alpha-\gamma,\beta-\delta} C'_{\gamma\delta}$$

On a donc

$$\sup_{x \in K} \left| D_x^\beta D_\xi^\alpha \sigma\sigma'(x,\xi) \right| \leq C(1+|\xi|)^{m+m'-|\alpha|}$$

ce qui montre que $\sigma\sigma' \in \mathrm{Ampl}^{m+m'}$. □

Corollaire 3.51. *Les amplitudes forment une $\mathbb{C}$–algèbre, et* $\mathrm{Ampl}^{-\infty}$ *est un idéal*[1] *de cette algèbre.*

Proposition 3.52. *Soient $m \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathrm{Ampl}^m$ et soient γ, δ des multi indices. Alors $D_x^\delta D_\xi^\gamma \sigma \in \mathrm{Ampl}^{m-|\gamma|}$.*

Démonstration. Soient α, β des multi indices et $K \subseteq U$ compact. Il existe par définition $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sup_{x \in K} \left| D_x^{\beta+\delta} D_\xi^{\alpha+\gamma} \sigma(x,\xi) \right| \leq C(1+|\xi|)^{m-|\alpha+\gamma|}$$

c'est–à–dire

$$\sup_{x \in K} \left| D_x^\beta D_\xi^\alpha \left(D_x^\delta D_\xi^\gamma \sigma(x,\xi) \right) \right| \leq C(1+|\xi|)^{(m-|\gamma|)-|\alpha|}$$

donc $D_x^\delta D_\xi^\gamma \sigma \in \mathrm{Ampl}^{m-|\gamma|}$. □

[1] Patience, patience, on quotiente plus tard.

PROPOSITION 3.53. *Soit $\sigma \in \mathrm{Ampl}(U)$ et soient $u \in \mathcal{S}(U)$. Alors la fonction τ définie par*

$$\tau(x,\xi) := \sigma(x,\xi)u(\xi)$$

est un élément de $\mathrm{Ampl}^{-\infty}(U)$.

DÉMONSTRATION. Soient α, β des multi indices, $K \subseteq U$ compact et $m \in \mathbb{R}$. Par hypothèse il existent $k \in \mathbb{R}$ tel que $\sigma \in \mathrm{Ampl}^k(U)$. Pour tout multi indice γ il existe alors $C_\gamma \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sup_{x\in K}\left|D_x^\beta D_\xi^{\alpha-\gamma}\sigma(x,\xi)\right| \le C_\gamma(1+|\xi|)^{k-|\alpha-\gamma|}$$

On calcule pour $x \in K$

$$\begin{aligned}
&\left|D_x^\beta D_\xi^\alpha \tau(x,\xi)\right| \\
\le\ & \sum_{\gamma\le\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}\left|D_x^\beta D_\xi^{\alpha-\gamma}\sigma(x,\xi)D_\xi^\gamma u(\xi)\right| \\
\le\ & \sum_{\gamma\le\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}C_\gamma\left|(1+|\xi|)^{k-|\alpha-\gamma|}D_\xi^\gamma u(\xi)\right| \\
=\ & \sum_{\gamma\le\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}C_\gamma\left|(1+|\xi|)^{k-m+|\gamma|}D_\xi^\gamma u(\xi)\right|(1+|\xi|)^{m-|\alpha|}
\end{aligned}$$

Comme $u \in \mathcal{S}(U)$, le supremum

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}\left|(1+|\xi|)^{k-m+|\gamma|}D_\xi^\gamma u(\xi)\right|$$

est fini. En posant

$$C := \sum_{\gamma\le\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}C_\gamma\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}\left|(1+|\xi|)^{k-m+|\gamma|}D_\xi^\gamma u(\xi)\right|$$

on trouve que

$$\left|D_x^\beta D_\xi^\alpha\tau(x,\xi)\right| \le C(1+|\xi|)^{m-|\alpha|}$$

pour tout $x \in K$, ce qui montre que $\tau \in \mathrm{Ampl}^m(U)$. Comme m etait arbitraire, on a $\tau \in \mathrm{Ampl}^{-\infty}(U)$. □

REMARQUE 3.54. Soient f et g deux fonctions de classe C^∞, réelles à une variable réelle. On s'interesse à la k–me dérivée de $f \circ g$ que l'on veut exprimer en fonction des dérivés de f et g. On a

$$\begin{aligned}
f(g(x))' &= g'(x)\cdot f'(g(x)) \\
f(g(x))'' &= g''(x)\cdot f'(g(x)) + (g')^2(x)\cdot f''(g(x)) \\
f(g(x))''' &= g'''(x)\cdot f'(g(x)) + 3g'(x)g''(x)f''(g(x)) + (g')^3(x)\cdot f'''(g(x))
\end{aligned}$$

mais la formule générale est terrifiante. On peut vérifier facilement (sans blague) par récurrence que la dérivée k–ème $f(g(x))^{(k)}$ s'écrit comme

$$f(g(x))^{(k)} = \sum_{j=1}^{k} P_{kj}\left(g^{(1)}(x), \ldots, g^{(k)}(x)\right) f^{(j)}(g(x)) \tag{39}$$

où $P_{kj} \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_k]$ est un polynôme, à coefficients entiers non–négatifs. Ces polynômes P_{jk} ont la propriété que

$$P_{jk}(X, X^2, X^3, \ldots, X^k) \quad \in \mathbb{Z}[X]$$

est un polynôme homogène de degré k, quelque soit $1 \le j \le k$. En d'autre mots, si $\lambda X_1^{\varepsilon(1)} X_2^{\varepsilon(2)} \cdots X_k^{\varepsilon(k)}$ est un monôme de P_{jk}, alors $\varepsilon(1) + 2\varepsilon(2) + \cdots + k\varepsilon(k) = k$. Ces considérations restent bien sûr justes dans le cadre de fonctions à plusieurs variables, et à valeurs vectoriels. L'équation (39) devient

$$\partial_x^\alpha f(g(x)) = \sum_{\beta \le \alpha}^{k} P_{\alpha\beta}\left(\partial_x^{(0,0,\ldots,1)} g(x), \ldots, \partial_x^\gamma g(x), \ldots, \partial_x^\alpha g(x)\right) (\partial_x^\beta f)(g(x)) \tag{40}$$

où $P_{\alpha\beta}$ est un polynôme en les $\alpha!$ variables $(X_\gamma)_{\gamma \le \alpha}$. Pour $X = (X_1, \ldots X_n)$, où n est le nombre de variables de g, il est toujours vrai que

$$P_{\alpha\beta}\left(X^{(0,0,\ldots,1)}, \ldots, X^\gamma, \ldots, X^\alpha\right) \quad \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$$

est homogène de degré α, c'est–à–dire homogène pour tout j de degré α_j en X_j. Cette observation est importante, vu la conséquence suivante : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\sigma = \sigma(x, \xi) \in \mathrm{Ampl}^m(U \times \mathbb{R}^N)$ une amplitude d'ordre m. Alors

$$P_{\alpha\beta}\left(\partial_{x,\xi}^{(0,0,\ldots,1)} \sigma(x,\xi), \ldots, \partial_{x,\xi}^\gamma \sigma(x,\xi), \ldots, \partial_{x,\xi}^\alpha \sigma(x,\xi)\right)$$

est une amplitude d'ordre $m - (\alpha_{n+1} + \cdots + \alpha_N)$.

Proposition 3.55. *Soit $\sigma \in \mathrm{Ampl}^0$ et soit $V \subseteq \mathbb{C}$ un voisinage ouvert de l'adhérence de l'image de σ. Soit $f = f(z) : V \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction indéfiniment dérivable en tant que fonction à deux variables réelles. Alors $f \circ \sigma \in \mathrm{Ampl}^0$.*

Démonstration (Esquisse). Remarquons tout d'abord que l'image de σ est une partie bornée de $\mathbb{C}$. L'adhérence de l'image de σ est alors une partie compacte de $\mathbb{C}$. Notons $f = f(z)$ et $z = x + iy$, et fixons deux multi–indices α et β. La fonction $\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta (f \circ \sigma)$ s'écrit comme polynôme en les fonctions

$$\begin{aligned} (\partial_x^\gamma \partial_y^\delta f) \circ \sigma &\qquad \gamma \le \alpha,\ \delta \le \beta \\ \partial_x^\gamma \partial_\xi^\delta \sigma &\qquad \gamma \le \alpha,\ \delta \le \beta \end{aligned}$$

Comme $\overline{\mathrm{im}\,\sigma}$ est compact, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\left|(\partial_x^\gamma \partial_y^\delta f) \circ \sigma(x,\xi)\right| \le C$$

pour tout $x \in U$, $\xi \in \mathbb{R}^N$, $\gamma \le \alpha$, $\delta \le \beta$. Il existe donc un polynôme en les amplitudes $\partial_x^\gamma \partial_\xi^\delta \sigma$ avec $\gamma \le \alpha$ et $\delta \le \beta$ qui majore $\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta (f \circ \sigma)$. En raisonnant par récurrence, et tenant compte de 3.50 et 3.52, et de la remarque qui précède, on trouve que toutes les monômes de ce polynôme, qui sont donc des produits en les amplitudes $\partial_x^\gamma \partial_\xi^\delta \sigma$ sont d'ordre inferieur ou égal à $-|\alpha|$, ce qui donne l'éstimation nécessaire de $|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta (f \circ \sigma)|$ et démontre la proposition. $\square$

Proposition 3.56. *Soit* $\sigma \in \mathrm{Ampl}^m(U \times \mathbb{R}^N)$ *et soient* $f : V \times \mathbb{R}^N \longrightarrow U$ *et* $g : V \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ *des fonctions positivement homogènes de degré 0 et 1 respectivement, c'est–à–dire*

$$f(x, t\xi) = f(x, \xi) \qquad \textit{et} \qquad g(x, t\xi) = tg(x, \xi)$$

pour $t > 0$ *suffisamment grand. Alors la fonction* $(x, \xi) \longmapsto \sigma(f(x, \xi), g(x, \xi))$ *est un élément de* $\mathrm{Ampl}^m(V \times \mathbb{R}^N)$.

Démonstration. Similaire à celle de 3.55. $\square$

Proposition 3.57. *Soit* $m \in \mathbb{R}$, $K \subseteq U$ *compact et soient* α *et* β *des multi–indices. Posons pour tout* $\sigma \in \mathrm{Ampl}^m$

$$p^{(m)}_{K,\alpha,\beta}(\sigma) := \sup_{x \in K} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^{|\alpha| - m} \left| D_x^\alpha D_\xi^\beta \sigma(x, \xi) \right|$$

Ce supremum existe par définition, et $p^{(m)}_{K,\alpha,\beta}(\sigma)$ *est une semi–norme sur* Ampl^m. *La topologie engenrée par l'ensemble de toutes les semi–normes*

$$\left\{ p^{(m)}_{K,\alpha,\beta} \;\middle|\; K \subseteq U \textit{ compact et } \alpha, \beta \textit{ multi–indices} \right\}$$

fait de Ampl^m *un espace de Fréchet.*

Sans démonstration. $\square$

Proposition 3.58. *Soit* $m \in \mathbb{R}$, α, β *des multi–indices et* $u \in C^\infty(U)$. *Les applications*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ampl}^m & \longrightarrow & \mathrm{Ampl}^{m-|\alpha|} \\ \sigma(x,\xi) & \longmapsto & \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi) \end{array} \qquad \textit{et} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Ampl}^m & \longrightarrow & \mathrm{Ampl}^m \\ \sigma(x,\xi) & \longmapsto & u(x)\sigma(x,\xi) \end{array}$$

sont continues.

Démonstration. Cela découle immédiatement de la définition des semi–normes $p^{(m)}_{K,\alpha,\beta}(\sigma)$ sur Ampl^m. $\square$

4. Distributions et opérateurs de Fourier

REMARQUE 3.59. Notons Ampl_{00} l'ensemble de toutes les amplitudes $\sigma \in \mathrm{Ampl}$ telles que pour tout compact $K \subseteq U$ il existe $R \in \mathbb{R}$ avec

$$\sigma(x,\xi) = 0 \qquad \text{pour tout } x \in K \text{ et tout } \xi \in \mathbb{R}^N \text{ avec } \|\xi\| > R$$

On a évidemment $\mathrm{Ampl}_{00} \subseteq \mathrm{Ampl}^{-\infty}$. On munit Ampl_{00} de la topologie initiale, induite par toutes le inclusions $\mathrm{Ampl}_{00} \longrightarrow \mathrm{Ampl}^m$ avec $m \in \mathbb{R}$. Une fonction sur Ampl_{00} est donc continue si et seulement si elle est continue pour la topologie induite par Ampl^m sur Ampl_{00}, quelque soit $m \in \mathbb{R}$.

PROPOSITION 3.60. *Soit F un espace de Fréchet et $f : \mathrm{Ampl}_{00} \longrightarrow F$ une application linéaire continue. Alors il existe une unique application linéaire*

$$\overline{f} = \mathrm{Ampl} \longrightarrow F$$

qui prolonge f, et dont la réstriction à Ampl^m est continue pour tout $m \in \mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION. Soit $\varphi \in C^\infty_{00}(\mathbb{R}^N)$ telle que $\varphi(\xi) = 1$ pour tout ξ avec $|\xi| \leq 1$. Soit $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathrm{Ampl}^m$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$ posons

$$\sigma_j(x,\xi) := \varphi(\tfrac{1}{j}\xi)\sigma(x,\xi)$$

Comme φ est à support compact, on a $\sigma_j \in \mathrm{Ampl}_{00}$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Montrons que $(\sigma_j)_{j=1}^\infty$ converge vers σ dans Ampl^{m+1}. En effet, soient α, β des multi–indices et $K \subseteq U$ compact. Alors

$$\begin{aligned}
p^{(m+1)}_{K,\alpha,\beta}(\sigma_j - \sigma) &= \sup_{x\in K}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^N} (1+|\xi|)^{|\alpha|-m-1}\left|\partial^\alpha_\xi\partial^\beta_x\big(\sigma_j(x,\xi) - \sigma(x,\xi)\big)\right| \\
&= \sup_{x\in K}\sup_{|\xi|\geq n} \frac{(1+|\xi|)^{|\alpha|-m}\left|\partial^\alpha_\xi\partial^\beta_x\big(\varphi(\frac{1}{j}\xi) - 1\big)\sigma(x,\xi)\right|}{(1+|\xi|)} \\
&\leq \frac{1}{n}\sup_{x\in K}\sup_{|\xi|\geq n} (1+|\xi|)^{|\alpha|-m}\left|\partial^\alpha_\xi\partial^\beta_x\big(\varphi(\tfrac{1}{j}\xi) - 1\big)\sigma(x,\xi)\right| \\
&\leq \frac{1}{n} p^{(m)}_{K,\alpha,\beta}(\sigma_j - \sigma)
\end{aligned}$$

Pour tout multi–indice γ, il existe un nombre réel C_γ tel que

$$|\partial^\gamma\varphi(\varepsilon\xi)| \leq C_\gamma(1+|\xi|)^{-|\gamma|}$$

pour tout $\varepsilon \in [0,1]$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^N$. On en déduit que $\left\{\varphi(\varepsilon\xi)\sigma(x,\xi) \,\middle|\, \varepsilon \in [0,1]\right\}$ est une partie bornée de Ampl^m. Il existe donc en particulier $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} p^{(m)}_{\alpha,\beta,K}(\sigma - \sigma_j) \leq M$$

On en déduit que

$$p^{(m+1)}_{K,\alpha,\beta}(\sigma_j - \sigma) \leq \frac{M}{j}$$

ce qui montre que $(\sigma_j)_{j=1}^{\infty}$ converge vers σ dans Ampl^{m+1}. Or $\sigma_j \in \mathrm{Ampl}_{00}$, ceci montre que Ampl_{00} est dense dans Ampl^m pour la topologie induite par Ampl^{m+1}. On peut donc prolonger f de manière unique en une fonction $f_m : \mathrm{Ampl}^m \longrightarrow F$ qui est continue pour la topologie induite par Ampl^{m+1}. Comme l'inclusion $\mathrm{Ampl}^m \longrightarrow \mathrm{Ampl}^{m+1}$ est continue, la fonction f_m est aussi continue pour la topologie de Ampl^m. □

DÉFINITION 3.61. Soient $n, N \in \mathbb{N}$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On appelle *fonction de phase sur* $U \times \mathbb{R}^N$ toute fonction continue $\Phi : U \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant

I : Φ est indéfiniment dérivable sur $U \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$.

II : $\Phi(x, t\xi) = t\Phi(x, \xi)$ pour tout $x \in U$ tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ et tout $t > 0$.

III : $\mathrm{grad}_{x,\xi}\,\Phi \neq 0$ si $\xi \neq 0$ où $\mathrm{grad}_{x,\xi}\,\Phi$ est le gradient de Φ par rapport à x et à ξ, en d'autre mots Φ n'a pas de points critiques en dehors de $U \times \{0\}$.

LEMME 3.62. *Soit Φ une fonction de Phase sur $U \times \mathbb{R}^N$. Il existe un opérateur différentiel du premier ordre*

$$L = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j(x, \xi) \frac{\partial}{\partial \xi_j} + \sum_{j=1}^{N} \tau_j(x, \xi) \frac{\partial}{\partial x_j} + c(x, \xi) \tag{41}$$

sur $U \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ tel que

$$^tLe^{i\Phi} = e^{i\Phi}$$

avec $\sigma_j \in \mathrm{Ampl}^0(U \times \mathbb{R}^N)$ et $c, \tau_j \in \mathrm{Ampl}^{-1}(U \times \mathbb{R}^N)$ pour tout $1 \leq j \leq N$.

DÉMONSTRATION. Construisons d'abord un opérateur

$$M_0 = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \frac{\partial}{\partial \xi_j} + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \frac{\partial}{\partial x_j} \tag{42}$$

avec $M_0 e^{i\Phi} = e^{i\Phi}$. Les α_j et les β_j son à déterminer. On a

$$M_0 e^{i\Phi} = \left(i \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_j} + i \sum_{j=1}^{n} \beta_j \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) e^{i\Phi}$$

La somme

$$\omega(x, \xi) := \sum_{j=1}^{N} |\xi|^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_j} \right)^2 + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right)^2$$

définit une fonction homogène de degré 2 dans la variable ξ sur $U \times \mathbb{R}^N$. Vu la condition (III) dans la définition 3.61 et vu que Φ est à valeurs réels, on a $\omega(x, \xi) \neq 0$ sur $U \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$. On peut alors poser

$$\alpha_j = (i\omega)^{-1} |\xi|^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_j} \qquad \text{et} \qquad \beta_j = (i\omega)^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}$$

L'opérateur M_0 défini dans (42) avec ce choix de α_j et β_j satisfait $M_0 e^{i\Phi} = e^{i\Phi}$ par construction. Choisissons une fonction $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ qui vaut 0 sur un certain voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^N$ et 1 en dehors d'une certaine partie compacte de $\mathbb{R}^N$. L'opérateur

$$M = \chi M_0 + (1-\chi)$$

a aussi la propriété que $Me^{i\Phi} = e^{i\Phi}$. En effet

$$Me^{i\Phi} = \chi M_0 e^{i\Phi} + (1-\chi)e^{i\Phi} = \chi e^{i\Phi} + (1-\chi)e^{i\Phi} = e^{i\Phi}$$

Posons $L := {}^tM$, et vérifions que L est bien de la forme (41). En effet on a

$$L = \sum_{j=1}^{n} -\chi\alpha_j \frac{\partial}{\partial \xi_j} + \sum_{j=1}^{N} -\chi\beta_j \frac{\partial}{\partial x_j} + c(x,\xi) + (1-\chi) - \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \chi\alpha_j}{\partial \xi_j} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \chi\beta_j}{\partial x_j}$$

Comme les fonctions

$$(1-\chi) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \chi}{\partial \xi_j}\alpha_j$$

sont à support compact, on a bien

$$\begin{aligned} \sigma_j(x,\xi) &:= \chi(\xi)\alpha_j(x,\xi) && \in \mathrm{Ampl}^0 \\ \tau_j(x,\xi) &:= \chi(\xi)\beta_j(x,\xi) && \in \mathrm{Ampl}^{-1} \end{aligned}$$

et

$$c(x,\xi) := (1-\chi) - \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \chi\alpha_j}{\partial \xi_j} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \chi\beta_j}{\partial x_j} \qquad \in \mathrm{Ampl}^{-1}$$

ce qui démontre le lemme. □

Théorème 3.63. *Soit $\Phi : U \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de phase. Pour tout $\sigma \in \mathrm{Ampl}_{00}$ et tout $u \in C^\infty_{00}(U)$ posons*

$$\langle A(\sigma), u\rangle := \iint e^{i\Phi(x,\xi)}\sigma(x,\xi)u(x)d\xi dx \tag{43}$$

Les assertions suivantes sont vraies :

- I : *La forme linéaire $u \longmapsto \langle A(\sigma), u\rangle$ est une distribution d'ordre 0.*
- II : *La fonction $A : \mathrm{Ampl}_{00} \longrightarrow \mathcal{D}'(U)$ est continue pour la topologie faible sur $\mathcal{D}'(U)$, et il existe une unique extension continue de A à* Ampl.
- III : *Pour tout $\sigma \in \mathrm{Ampl}^m$ et tout $k \in \mathbb{N}_0$ avec $m+N<k$, la distribution $A(\sigma)$ est d'ordre k.*

Démonstration. La double intégrale (43) fait un sens, vu que l'intégrale

$$\int e^{i\Phi(x,\xi)}\sigma(x,\xi)d\xi$$

existe et dépend continument de x, par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, et les hypothèses sur σ. Comme u est à support compact, l'intégrale

$$\iint e^{i\Phi(x,\xi)}\sigma(x,\xi)d\xi u(x)dx$$

existe. Ainsi

$$\langle A(-), -\rangle : \mathrm{Ampl}_{00} \times C^\infty_{00}(U) \longrightarrow \mathbb{C}$$

est bien défini. Montrons que $u \longmapsto \langle A(\sigma), u\rangle$ est continu. Soit $(u_j)_{j=1}^{\infty}$ une suite de $\mathcal{D}(U)$ qui converge vers 0. Par le théorème 3.26 il existe un compact $K \subseteq U$ tel que $\operatorname{supp} u_j \subseteq K$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $j_0 \in \mathbb{N}$, tel que

$$\sup_{x\in U} |u_j(x)| < \varepsilon$$

pour tout $j \geq j_0$. Par définition de Ampl_{00} il existe $R \in \mathbb{R}$ tel que $\sigma(x,\xi) = 0$ pour tout $x \in K$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ avec $|\xi| \geq R$. On estime

$$\begin{aligned} |\langle A(\sigma), u_j\rangle| &= \left|\iint e^{i\Phi(x,\xi)}\sigma(x,\xi)u_j(x)d\xi dx\right| \\ &\leq \iint |\sigma(x,\xi)|\,|u_j(x)|\,d\xi dx \\ &\leq \mathrm{Vol}(B(0,R)) \cdot \mathrm{Vol}(K) \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

ce qui montre que $A(\sigma)$ est une distribution d'ordre 0. Afin de montrer (II), fixons $m \in \mathbb{R}$ et montrons que A est continu sur Ampl_{00} pour la topologie induite par Ampl^m. La proposition 3.60 premettra de conclure. Soit $(\sigma_j)_{j=1}^{\infty}$ une suite dans Ampl_{00} qui tend vers 0 pour la topologie induite par Ampl^m. Il faut montrer que pour $u \in C_{00}^{\infty}(U)$ fixé, la suite

$$\langle A(\sigma_j), u\rangle_{j=1}^{\infty}$$

tend vers 0. Choisissons un opérateur différentiel L sur $U \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ satisfaisant les propriétés ennoncées dans le lemme 3.62. On obtient

$$\begin{aligned} \iint e^{i\Phi(x,\xi)}\sigma_j(x,\xi)u(x)dxd\xi &= \iint \left({}^tLe^{i\Phi(x,\xi)}\right)\sigma(x,\xi)u(x)dxd\xi \\ &= \iint e^{i\Phi(x,\xi)}L\big(\sigma_j(x,\xi)u(x)\big)dxd\xi \end{aligned}$$

et donc, en répetant le calcul ci dessus

$$\iint e^{i\Phi(x,\xi)}\sigma(x,\xi)u(x)dxd\xi = \iint e^{i\Phi(x,\xi)}L^k\big(\sigma_j(x,\xi)u(x)\big)dxd\xi \tag{44}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. L'opérateur différentiel L^k, vu comme opérateur

$$L^k : \mathrm{Ampl}^m(U \times \mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathrm{Ampl}^{m-k}(U \times \mathbb{R}^N)$$

est continu vu 3.58. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sup_{x\in K}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^N}(1+|\xi|)^{-m+k}\left|L^k\sigma_j(x,\xi)u(x)\right| < \varepsilon$$

pour tout $j \geq j_0$, où $K := \operatorname{supp} u$. Ainsi on trouve, en choisissant $k > m + N$

$$\begin{aligned} |\langle A(\sigma_j), u\rangle| &= \left|\iint e^{i\Phi(x,\xi)}L^k\big(\sigma_j(x,\xi)u(x)\big)dxd\xi\right| \\ &\leq \iint \left|L^k\big(\sigma_j(x,\xi)u(x)\big)\right| dxd\xi \\ &\leq \varepsilon \cdot \mathrm{Vol}(K) \cdot \int \frac{1}{(1+|\xi|)^{-m+k}}d\xi \end{aligned}$$

et comme $-m + k > N$ cette dernière intégrale converge, ce qui montre que $\langle A(\sigma_j), u\rangle$ tend vers 0, et donc (II). Cette dernière estimation montre aussi que l'intégrale

$$\iint e^{i\Phi(x,\xi)} L^k\big(\sigma(x,\xi)u(x)\big)dxd\xi$$

converge dans le sens usuel, et donc que $A(\sigma)$ est d'ordre k. $\square$

DÉFINITION 3.64. Soient $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, $\Phi : U \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de phase et $\sigma \in \mathrm{Ampl}^m(U \times \mathbb{R}^N)$. On appelle *distribution de Fourier de phase* Φ *et d'amplitude* σ et on note $A_\Phi(\sigma)$ la distribution sur U définie par

$$\langle A_\Phi(\sigma), u\rangle = \iint e^{i\Phi(x,\xi)} L^k\big(\sigma(x,\xi)u(x)\big)dxd\xi$$

où k est un entier, $k > N + m$, et où L est l'opérateur donné dans 3.62.

REMARQUE 3.65. La démonstration de 3.60 montre en particulier que pour $\sigma \in \mathrm{Ampl}$ on a

$$\langle A_\Phi(\sigma), u\rangle = \lim_{j\longrightarrow\infty} \iint e^{i\Phi(x,\xi)} \varphi(\tfrac{1}{j}\xi)\sigma(x,\xi)u(x)d\xi dx \tag{45}$$

où $\varphi \in C^\infty_{00}(\mathbb{R}^N)$ est une fonction qui vaut 1 dans un certain voisinage de 0.

REMARQUE 3.66. Le théorème 3.63 assure que cette définition fait un sens. On peut aller un pas plus loin, et faire dépendre la phase Φ et l'amplitude σ d'un paramètre y, qui a le droit de se balader dans un ouvert $V \subseteq \mathbb{R}^n$. Interpretant $\big\langle A_{\Phi(y)}(\sigma(y)), u\big\rangle$ comme fonction de y, on trouve un opérateur $T_\Phi(\sigma)$ de $\mathcal{D}(U)$ vers $\mathbb{C}^V$. Si Φ et σ dépendent d'une bonne manière de y, à savoir si $\Phi = \Phi(x, y, \xi)$ est une phase sur $U \times V \times \mathbb{R}^N$ et si $\sigma = \sigma(x, y, \xi)$ est une amplitude, alors $T\Phi(\sigma)$ s'interprête de manière naturelle comme opérateur $T_\Phi(\sigma) : \mathcal{D}(U) \longrightarrow \mathcal{D}'(V)$.

DÉFINITION 3.67. Soient $U \subseteq \mathbb{R}^n$ et $V \subseteq \mathbb{R}^p$ des ouverts, et voyons $U \times V$ comme ouvert de $\mathbb{R}^{n+p}$. Soit $\Phi : U \times V \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de phase et $\sigma \in \mathrm{Ampl}(U \times V \times \mathbb{R}^N)$. On appelle *opérateur de Fourier de phase* Φ *et d'amplitude* σ l'opérateur $T_\Phi(\sigma) : \mathcal{D}(U) \longrightarrow \mathcal{D}'(V)$ défini par

$$\langle T_\Phi(\sigma)u, v\rangle = \langle A_\Phi(\sigma), v \otimes u\rangle$$

REMARQUE 3.68. Attention : Si $\Phi = \Phi(x, y, \xi)$ est une phase sur $U \times V \times \mathbb{R}^N$, alors pour un $y \in V$ fixé, la fonction $(x, \xi) \longmapsto \Phi(x, y, \xi)$ n'est pas nécessairement une phase sur $U \times \mathbb{R}^N$. Ainsi $\Phi(x, y, \xi)$ n'est pas simplement une phase sur $U \times \mathbb{R}^N$ qui dépend d'un paramètre y, et on ne peut pas considérer $T_\Phi(\sigma)u$ comme une "vraie" fonction de y.

Définition 3.69. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et soit f une distribution ou une fonction sur U. On appelle *support singulier de* f et on note $\operatorname{sing\,supp} f$ le complément dans U de l'ensemble

$$\{x \in U \mid \text{il existe un voisinage ouvert } V \text{ de } X \text{ tel que } f|_V \in C^\infty(V)\}$$

Remarque 3.70. Le support singulier de f est par définition un fermé de U. Si f est une distribution, alors on dit que $f|_V$ es de classe C^∞ et on note $f|_V \in C^\infty(V)$ s'il existe une fonction $\tilde{f} \in C^\infty(V)$ telle que $\langle f, u\rangle = \int \tilde{f}(x)u(x)dx$ pour tout $u \in \mathcal{D}(U)$.

Theorème 3.71. *Soient* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *un ouvert. Soit* $\Phi : U \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction de phase et* $\sigma \in \mathrm{Ampl}^m(U \times \mathbb{R}^N)$*. Notons*

$$S_\Phi := \overline{\left\{x \in U \;\middle|\; \exists \xi \in \mathbb{R}^N \textit{ avec } \operatorname{grad}_\xi \Phi(x,\xi) = 0\right\}}$$

Alors $\operatorname{sing\,supp} A_\Phi(\sigma) \subseteq S_\Phi$.

Démonstration. Soit $x \in U \setminus S_\Phi$ et soit V un voisinage de x dans U qui ne rencontre pas le fermé S_Φ. Par hypothèse on a $\operatorname{grad}_\xi \Phi(z,\xi) \neq 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ et pour tout $z \in V$. La fonction $\Psi(z) : \xi \longrightarrow \Phi(z,\xi)$ est donc une fonction de phase sur $\{0\} \times \mathbb{R}^N$ quelque soit $z \in V$. Ici, $\{0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^0$. La fonction $\tau(z) : \xi \longmapsto \sigma(z,\xi)$ est évidemment un élément de $\mathrm{Ampl}^m(\{0\} \times \mathbb{R}^N)$. On peut donc considérer la distribution de Fourier $A_{\Psi(z)}\tau(z)$. C'est une distribution sur $\{0\}$. Pour tout $v \in \mathcal{D}(\{0\})$ on a par définition

$$\begin{aligned} \left\langle A_{\Psi(z)}(\tau(z)), v\right\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\{0\}} e^{i\Phi(z,\xi)} L_z^k\big(\sigma(z,\xi)v(y)\big)dyd\xi \\ &= v(0) \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\Phi(z,\xi)} L_z^k\big(\sigma(z,\xi)\big)d\xi \end{aligned}$$

où k est un entier plus grand que $m+N$ et où L_z est un opérateur différentiel sur $\{0\} \times \mathbb{R}^N$ ayant les propriétés ennoncées dans le lemme 3.62 pour la fonction de phase $\Psi(z)$. Vu la construction de L_z dans la démonstration de 3.62 on peut supposer que la fonction $(z,\xi) \longmapsto L_z\sigma(z,\xi)$ est de classe C^∞. Soit α un multi–indice de dimension n, et choisissons $k > m + N + |\alpha|$. Par le théorème de la convergence dominée on a

$$\partial_z^\alpha \left\langle A_{\Psi(z)}(\tau(z)), v\right\rangle = v(0) \int_{\mathbb{R}^n} \partial_z^\alpha\Big(e^{i\Phi(z,\xi)} L_z^k\big(\sigma(z,\xi)\big)\Big)d\xi$$

La fonction $f : V \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \left\langle A_{\Psi(z)}(\tau(z)), 1_{\{0\}}\right\rangle$ est donc une fonction de classe C^∞. Soit $\varphi \in C_{00}^\infty(\mathbb{R}^N)$ une fonction qui vaut 1 dans un certain voisinage de $\{0\} \in \mathbb{R}^N$. On calcule finalement pour $u \in \mathcal{D}(V)$

$$\begin{aligned}\int_V f(z)u(z)dz &= \int_V \left\langle A_{\Psi(z)}(\tau(z)), 1_{\{0\}} \right\rangle u(z)dz \\ &= \int_V \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\Phi(z,\xi)} L_z^k\big(\sigma(z,\xi)\big)u(z)d\xi dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_V e^{i\Phi(z,\xi)} L_z^k\big(\sigma(z,\xi)\big)u(z)dz d\xi\end{aligned}$$

Cette permutation est légitime, vu que l'intégrale double converge absulument pour k suffisamment grand. Soit L un opérateur différentiel sur $V \times \mathbb{R}^N$ satisfaisant les conclusions du lemme 3.62. Pour tout $\nu \in \mathrm{Ampl}_{00}(V \times \mathbb{R}^N)$ on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \int_V e^{i\Phi(z,\xi)} L_z^k\big(\nu(z,\xi)\big)u(z)dz d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_V {}^tL_z^k e^{i\Phi(z,\xi)} \nu(z,\xi)u(z)dz d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_V e^{i\Phi(z,\xi)} \nu(z,\xi)u(z)dz d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_V {}^tL^k e^{i\Phi(z,\xi)} \nu(z,\xi)u(z)dz d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_V e^{i\Phi(z,\xi)} L^k\big(\nu(z,\xi)u(z)\big)dz d\xi\end{aligned}$$

Comme ces intégrales, vues comme fonctions en ν à valeurs complexes sur Ampl_{00} sont continues par l'assertion (II) du théorème 3.63 on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_V e^{i\Phi(z,\xi)} L_z^k\big(\sigma(z,\xi)\big)u(z)dz d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \int_V e^{i\Phi(z,\xi)} L^k\big(\sigma(z,\xi)u(z)\big)dz d\xi$$

par la proposition 3.60, ce qui montre

$$\int f(z)u(z)dz = \langle A_\Phi(\sigma), u \rangle$$

par définition de $A_\Phi(\sigma)$, et alors que $\operatorname{sing\,supp} A_\Phi(\sigma) \cap V = \varnothing$, et comme V était arbitraire, on a $\operatorname{sing\,supp} A_\Phi(\sigma) \subseteq S_\Phi$ comme ennoncé. □

5. Définition et exemples d'opérateurs pseudo–différentiels

Pour toute cette section, nous fixons un nombre naturel n et un ouvert U non vide de $\mathbb{R}^n$.

Définition 3.72. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On appelle *symbole d'ordre m* toute amplitude $\sigma \in \mathrm{Ampl}^m(U \times \mathbb{R}^n)$, et on note

$$\mathrm{Symb}^m(U) = \mathrm{Ampl}^m(U \times \mathbb{R}^n)$$

REMARQUE 3.73. On note de manière analogue

$$\mathrm{Symb}(U) := \bigcup_{m\in\mathbb{R}} \mathrm{Symb}^m(U) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Symb}^{-\infty}(U) := \bigcap_{m\in\mathbb{R}} \mathrm{Symb}^m(U)$$

et on appelle *symbole* tout élément de $\mathrm{Symb}(U)$. Tout les résultats sur les amplitudes sont évidemment vraies pour les symboles, quitte à spécialiser $N = n$.

PROPOSITION 3.74. *Soit $m \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathrm{Symb}^m(U)$ et soit $u \in C^\infty_{00}(U)$. Alors la fonction*

$$P_\sigma(u) \quad : \quad x \longmapsto \int \chi_x(\xi)\sigma(x,\xi)\widehat{u}(\xi)đ\xi \tag{46}$$

est indéfiniment dérivable.

REMARQUE 3.75. La transformée de Fourier $\widehat{u}$ de $u \in C^\infty_{00}(U)$ est par définition la transformée de Fourier de la fonction $u_! \in C^\infty_{00}(\mathbb{R}^n)$ définie par

$$u_!(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in U \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En particulier $\widehat{u}$ est un élément de l'espace de Schwarz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

DÉMONSTRATION. Soit β un multi–indice, et montrons que $D^\beta P_\sigma(u)$ existe. Pour cela, on va utiliser le théorème de la convergence dominée de Lebesgue. Fixons $x_0 \in U$ et un voisinage compact K de x_0. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, la fonction $v : U \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$v : x \longmapsto \chi_x(\xi)\sigma(x,\xi)\widehat{u}(\xi)$$

est indéfiniment dérivable, vu que $\widehat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et les hypothèses sur σ. Aussi par le fait que $\widehat{u} \in \mathcal{S}(U)$ on a pour tout multi–indice α, que la fonction

$$\xi \longmapsto |\xi^\alpha \widehat{u}(\xi)|$$

est bornée, quelque soit α. La fonction $\widehat{u}$ décroit donc plus rapide que n'importe quelle fonction rationelle. Choisissons $N \in \mathbb{N}$ avec $N > m + n + 1$. Par ce qui précède, il existe $C_1 \in \mathbb{R}$ tel que

$$|\widehat{u}(\xi)| < C_1(1 + |\xi|)^{-N}$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$. D'autre part, il existe par hypothèse $C_2 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\left|D^\beta_x p(x,\xi)\right| < C_2(1 + |\xi|)^m$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ et tout $x \in K$. Ces deux éstimations mises ensemble donnent

$$\left|D^\beta_x \sigma(x,\xi)\widehat{u}(\xi)\right| < C_1C_2(1 + |\xi|)^{m-N} \leq C_1C_2(1 + |\xi|)^{-(n+1)}$$

La fonction $C_1C_2(1 + |\xi|)^{-(n+1)}$ est intégrable. On a majoré $\left|D^\beta_x \sigma(x,\xi)\widehat{u}(\xi)\right|$ par une fonction intégrable qui ne dépend pas de $x \in K$. Le théorème de la convergence dominée de Lebesgue nous assure que la β–ème dérivée de $P_\sigma(u)$ par rapport à la variable x existe dans un voisinage de x_0 et vaut

$$D_x^\beta P_\sigma(u)(x) = \int D_x^\beta \chi_x(\xi)\sigma(x,\xi)\widehat{u}(\xi)đ\xi \tag{47}$$

ce qui montre que la fonction $P_\sigma(u)$ est indéfiniment dérivable. □

Proposition 3.76. *Soit $\sigma \in \mathrm{Symb}(U)$. L'application $P_\sigma : \mathcal{D}(U) \longrightarrow \mathcal{E}(U)$ définie par*

$$P_\sigma(u)(x) = \int \chi_x(\xi)\sigma(x,\xi)\widehat{u}(\xi)đ\xi$$

est un opérateur linéaire continu.

Démonstration. La linéarité découle immédiatement de la linéarité de la transformation de Fourier et de de la linéarité de l'intégration. Vérifions donc la continuité. On utilise la caracterisation (IV) de la proposition 3.13. Soit $K \subseteq U$ compact et α un multi–indice. Il faut trouver $M \in \mathbb{R}$ et un ensemble fini de multi–indices F tel que

$$\sup_{x\in K} |\partial^\alpha P_\sigma u(x)| \leq \sum_{\gamma\in F} \sup_{x\in K} |\partial^\gamma u(x)|$$

pour tout $u \in \mathcal{D}_K(U)$. Ceci établira que P_σ est continu sur $\mathcal{D}_K(U)$, et comme K est arbitraire que P_σ est continu sur $\mathcal{D}(U)$, par la proposition 3.24. On calcule

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in K}|\partial^\gamma u| \cdot \mathrm{Vol}(K) \sup_{x\in K} |\partial^\alpha P_\sigma u(x)| &= \sup_{x\in K} \left|\partial^\alpha \int \chi_x(\xi)\sigma(x,\xi)\widehat{u}(\xi)đ\xi\right| \\
&\leq \sup_{x\in K} \left|\int \partial_x^\alpha \Big(\chi_x(\xi)\sigma(x,\xi)\Big)\widehat{u}(\xi)đ\xi\right| \\
&\leq \int C(1+|\xi|)^{m-|\alpha|}\,|\widehat{u}(\xi)|\,đ\xi
\end{aligned}$$

pour un certain $C \in \mathbb{R}$, puisque $\chi_x(\xi)\sigma(x,\xi)$ est un symbole d'ordre m. Il existe un polynôme en n variables $y_1,\dots,y_n$ à coefficients positifs réels

$$P = \sum_{\gamma\in F} c_\gamma y^\gamma$$

tel que

$$P(\xi) > (1+|\xi|)^{m-|\alpha|+n+1}$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$. On a donc

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in K} |\partial^\alpha P_\sigma u(x)| &\leq \int \left|\frac{C}{(1+|\xi|)^{n+1}} \sum_{\gamma\in F} c_\gamma \widehat{D^\gamma u}(\xi)\right| đ\xi \\
&\leq \int \frac{C}{(1+|\xi|)^{n+1}} \sum_{\gamma\in F} c_\gamma \left|\widehat{D^\gamma u}(\xi)\right| đ\xi
\end{aligned}$$

Mais

$$|\widehat{D^\gamma u}(\xi)| \leq \sup_{x\in K} |\partial^\gamma u| \cdot \mathrm{Vol}(K)$$

et alors

$$\begin{aligned}\sup_{x\in K}|\partial^\alpha P_\sigma u(x)| &\leq \int \frac{C\cdot \mathrm{Vol}(K)}{(1+|\xi|)^{n+1}} đ\xi \cdot \sum_{\gamma\in F} c_\gamma \sup_{x\in K}|\partial^\gamma u| \\ &\leq M\cdot \sum_{\gamma\in F}\sup_{x\in K}|\partial^\gamma u|\end{aligned}$$

pour $M\in\mathbb{R}$ suffisamment grand. □

DÉFINITION 3.77. Soit $m\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ et soit $\sigma\in\mathrm{Symb}^m(U)$. L'opérateur continu $P_\sigma:\mathcal{D}(U)\longrightarrow\mathcal{E}(U)$ défini par

$$P_\sigma(u)(x)=\int \chi_x(\xi)\sigma(x,\xi)\widehat{u}(\xi)đ\xi$$

s'appelle *opérateur pseudo–différentiel d'ordre m associé au symbole σ*. On note $\Psi^m(U)$ l'ensemble de toutes les opérateurs pseudo–différentiels d'ordre m sur U.

REMARQUE 3.78. La proposition 3.74 nous assure qu'on a $P_\sigma u\in\mathcal{D}(U)$, et la proposition 3.76 nous assure que P_σ est bien un opérateur linéaire continu. Clairement $\sigma\longmapsto P_\sigma$ est une application linéaire, surjective par définition. On note $\Psi(U)$ l'ensemble de toutes les opérateurs pseudo–différentiels sur U.

REMARQUE 3.79. Un opérateur pseudo–différentiel est un cas particulier d'un opérateur de Fourier. En effet, on a

$$P_\sigma u(x)=\int \chi_x(\xi)\sigma(x,\xi)\widehat{u}(\xi)đ\xi=\frac{1}{(2\pi)^n}\iint \chi_\xi(x-y)\sigma(x,\xi)u(y)dyd\xi$$

ce qui montre que $P_\sigma=T_\Phi(\tau)$ où Φ est la fonction de phase $\Phi(x,y,\xi)=\langle x-y,\xi\rangle$ et où $\tau\in\mathrm{Ampl}(U\times U\times\mathbb{R}^n)$ est l'amplitude définie par $\tau(x,y,\xi)=(2\pi)^{-n}\sigma(x,\xi)$. Le fait que $P_\sigma u$ est une fonction et non seulement une distribution n'est pas une propriété générale des opérateurs de Fourier, mais quelques conditions légères sur la phase (voir Shubin [**20**] chapitre I §2.2) font l'affaire.

PROPOSITION 3.80. *L'application $P:\mathrm{Symb}(U)\longrightarrow\Psi(U)$ définie par $\sigma\longmapsto P_\sigma$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

DÉMONSTRATION. Il faut seulement démontrer l'injectivité de P. Soit donc $\sigma\in\mathrm{Symb}(U)$ et supposons que P_σ est l'opérateur nul, c'est–à–dire $P_\sigma(u)(x)=0$ pour tout $x\in U$ et tout $u\in C^\infty_{00}(U)$. Donc par définition

$$\int \chi_x(\xi)\sigma(x,\xi)\widehat{u}(\xi)đ\xi=0 \qquad \forall x\in U,\forall u\in C^\infty_{00}(U)$$

En d'autre mots, la transformée de Fourier de la distribution temperée $\chi_x(\xi)\sigma(x,\xi)$ est nulle, ce qui montre, puisque $\chi_x(\xi)\sigma(x,\xi)$ est continu, que $\chi_x(\xi)\sigma(x,\xi)=0$ pour tout x et tout ξ, et donc que $\sigma=0$. □

Exemple 3.81. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Comme on a déjà dit, si $P : C^\infty_{00}(U) \longrightarrow C^\infty_{00}(U)$ est un opérateur différentiel, alors P est aussi un opérateur pseudo–différentiel. En effet, lorsque

$$P : u \longmapsto Pu = \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha D^\alpha u$$

alors

$$\begin{aligned} Pu(x) &= \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(x) D^\alpha_x \int \chi_x(\xi)\widehat{u}(\xi) đ\xi \\ &= \int \left(\sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(x)\xi^\alpha\right)\chi_x(\xi)\widehat{u}(\xi)đ\xi \\ &= \int \chi_x(\xi)\sigma(x,\xi)\widehat{u}(\xi)đ\xi \end{aligned}$$

où

$$\sigma(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(x)\xi^\alpha$$

Montrons que σ est un symbole. Soient donc α, β des multi indices et $K \subseteq U$ une partie compacte. Il existe

$$C := \max_{|\gamma|\leq k} \sup_{x\in K} \left|D^\beta a_\gamma(x)\right|$$

Et d'autre part

$$D^\alpha \xi^\gamma = \begin{cases} \frac{\gamma!}{(\gamma-\alpha)!}\xi^{\gamma-\alpha} & \text{si } \gamma \geq \alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

donc de toute façon

$$|D^\alpha \xi^\gamma| \leq \gamma!(1+|\xi|)^{|\gamma|-|\alpha|}$$

Ces estimations mises ensemble donnent ce qu'on veut :

$$\begin{aligned} \sup_{x\in K}\left|D^\beta_x D^\alpha_\xi \sigma(x,\xi)\right| &= \sup_{x\in K}\left|D^\beta_x D^\alpha_\xi \sum_{|\gamma|\leq k} a_\gamma(x)\xi^\gamma\right| \\ &= \sup_{x\in K}\left|\sum_{|\gamma|\leq k} D^\beta_x a_\gamma(x) D^\alpha_\xi \xi^\gamma\right| \\ &\leq \sup_{x\in K}\sum_{|\gamma|\leq k}\left|D^\beta_x a_\gamma(x)\right|\left|D^\alpha_\xi\xi^\gamma\right| \\ &\leq \sum_{|\gamma|\leq k} C\gamma!(1+|\xi|)^{|\gamma|-|\alpha|} \\ &\leq (k+1)^n Ck! \cdot (1+|\xi|)^{k-|\alpha|} \end{aligned}$$

ce qui montre que $\sigma(x,\xi) \in \mathrm{Symb}^k(U)$.

PROPOSITION 3.82. *Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert, $K \in C^\infty(U \times U)$ tel que la condition suivante est vérifiée :*

(H) : *Pour tout compact $F \subseteq U$ il existe un compact $G \subseteq U$ tel que $K(x,y) = 0$ pour tout $x \in F$ et tout $y \in U \setminus G$.*

Alors l'opérateur $P : \mathcal{D}(U) \longrightarrow \mathcal{E}(U)$ défini par

$$Pu(x) = \int K(x,y)u(y)dy$$

est un opérateur pseudo–différentiel d'ordre $-\infty$ sur U.

DÉMONSTRATION. On commence par introduire la formule d'inversion de Fourier, et on permute les intégrales :

$$\begin{aligned} Pu(x) &= \int K(x,y)u(y)dy \\ &= \int K(x,y) \int \chi_y(\xi)\widehat{u}(\xi)đ\xi \; dy \\ &= \iint \chi_y(\xi)K(x,y)dy \; \widehat{u}(\xi)đ\xi \end{aligned}$$

Cette permutation est légitime, vu que $\widehat{u} \in \mathcal{S}(U)$ et vu que $K(x,y)$ est à support campact dans la variable y. On poursuit le calcul :

$$\begin{aligned} Pu(x) &= \iint \chi_y(\xi)K(x,y)dy \; \widehat{u}(\xi)đ\xi \\ &= \int \chi_x(\xi) \int \chi_\xi(y-x)K(x,y)dy \; \widehat{u}(\xi)đ\xi \\ &= \int \chi_x(\xi) \int \chi_\xi(y)K(x,y+x)dy \; \widehat{u}(\xi)đ\xi \\ &= \int \chi_x(\xi)\sigma(x,\xi)\widehat{u}(\xi)đ\xi \end{aligned}$$

où

$$\sigma(x,\xi) = \int \chi_\xi(y)K(x,y+x)dy$$

Reste à verifier que $\sigma(x,\xi) \in \mathrm{Symb}^m$. Pour tout multi–indices α, β, γ on a

$$\begin{aligned} &\left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \big(\xi^\gamma \sigma(x,\xi)\big)\right| \\ = &\left|\int \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \chi_\xi(y) \partial_y^\gamma K(x,x+y)dy\right| \\ \leq &\int \left|y^\alpha \partial_x^\beta \partial_y^\gamma K(x,x+y)\right| dy \end{aligned}$$

La fonction $(x,y) \longmapsto y^\alpha \partial_x^\beta \partial_y^\gamma K(x,x+y)$ satisfait aussi la condition (H). Par le théorème de la convergence dominée, la dernière integrale est est une fonction continue en x. Pour tout compact $K \subseteq U$, et tout multi–indices α, β et γ on a donc

$$\sup_{x\in K} \left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \big(\xi^\gamma \sigma(x,\xi)\big)\right| < \infty$$

En d'autre mots, la fonction

$$\xi \longrightarrow \sup_{x\in K} \left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)\right|$$

décroit plus vite que n'importe quelle fonction rationelle, ce qui montre qu'il existe pour n'importe quel $m \in \mathbb{R}$ un $C \in \mathbb{R}$ avec

$$\left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)\right| \leq C(1+|\xi|)^m$$

pour tout $x \in K$. Ainsi $\sigma \in \mathrm{Symb}^{-\infty}(U)$ et $P \in \Psi^{-\infty}(U)$. □

Corollaire 3.83. *Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert, $\varphi \in C_{00}^\infty(U)$. Alors $P : u \longmapsto u * \varphi$ est un opérateur pseudo–différentiel.*

Démonstration. C'est la proposition 3.82 avec $K(x,y) = \varphi(x-y)$. □

6. Expansion asymptotique d'un symbole

On a déja remarqué que $\mathrm{Symb}(U)$ est un $\mathbb{C}$–espace vectoriel. Nous examinons dans la suite de manière un peu plus approfondi l'algèbre $\mathrm{Symb}(U)$, la multiplication étant la multiplication ponctuelle de fonctions. Pour cela, fixons pour toute cette section un nombre naturel $n \in \mathbb{N}$ et un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^n$. On aimerait bien une formule du genre

$$T_{\sigma\tau} = T_\sigma T_\tau \tag{48}$$

ce qui fera de $\sigma \longmapsto T_\sigma$ un homomorphisme d'algèbres. Malhereusement l'équation (48) est fausse, mais, dans un sens à préciser, pas loin d'être vraie. Le résultat principal de cette séction est le théorème 3.103, qui justement exprime jusqu'à quel point la formule (48) est correcte.

Définition 3.84. Soit $\sigma \in \mathrm{Symb}^m(U)$, et supposons qu'il existe une suite de nombres réels $(m_j)_{j=1}^\infty$ avec $m_0 = m$ et $m_j \longrightarrow -\infty$ pour $j \longrightarrow \infty$, et des symboles $\sigma_j \in \mathrm{Symb}^{m_j}(U)$ tels que

$$\sigma - \sum_{j=0}^N \sigma_j \quad \in \mathrm{Symb}^{m_{N+1}}(U)$$

pour tout $j \in \mathbb{N}_0$. Alors on dit que $(\sigma_j)_{j=0}^\infty$ est une *expansion asymptotique* de σ, et on note

$$\sigma \sim \sum_{j=0}^\infty \sigma_j$$

THEORÈME 3.85. *Soit $(m_j)_{j=1}^{\infty}$ une suite de nombres réels avec $m_j \longrightarrow -\infty$ pour $j \longrightarrow \infty$, et soit $\sigma_j \in \mathrm{Symb}^{m_j}(U)$. Alors il existe $\sigma \in \mathrm{Symb}^{m_0}(U)$ tel que*

$$\sigma \sim \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j$$

De plus, si τ est un autre symbole avec cette propriété, alors $\sigma - \tau \in \mathrm{Symb}^{-\infty}(U)$.

DÉMONSTRATION. Sans perte de généralité nous pouvons supposer que $(m_j)_{j=1}^{\infty}$ est une suite décroissante, quitte à reordonner les m_j. Soit $\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]$ une fonction lisse telle que

$$\psi(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\xi| > 2 \\ 0 & \text{si } |\xi| < 1 \end{cases}$$

Considérons deux multi indices α et β, et $j \in \mathbb{N}$. J'affirme qu'il existe $C_{j\alpha\beta} \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $1 \geq \varepsilon > 0$ on ait

$$\left|D_\xi^\alpha D_x^\beta\big(\psi(\varepsilon\xi)\sigma_j(x,\xi)\big)\right| \leq C_{j\alpha\beta}(1+|\xi|)^{-|\alpha|+m_j} \tag{49}$$

En effet pour un multi indice α non nul on a $D_\xi^\alpha\psi(\xi) = 0$ si $|\xi| < 1$ ou $|\xi| > 2$ par définition de ψ. Il existe donc

$$C_\alpha := 4^{|\alpha|} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |D^\alpha\psi(\xi)|$$

Par conséquent

$$|D^\alpha\psi(\varepsilon\xi)| \quad \begin{cases} = \ 0 & \text{si } |\xi| < \frac{1}{\varepsilon} \\[2ex] \leq \ \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^{|\alpha|} C_\alpha & \text{si } \frac{1}{\varepsilon} \leq |\xi| \leq \frac{2}{\varepsilon} \\[2ex] = \ 0 & \text{si } \frac{2}{\varepsilon} < |\xi| \end{cases}$$

Si $\frac{1}{\varepsilon} \leq |\xi| \leq \frac{2}{\varepsilon}$, alors $\varepsilon \leq \frac{4}{1+|\xi|}$, et l'estimation ci dessus donne

$$|D^\alpha\psi(\varepsilon\xi)| \leq C_\alpha(1+|\xi|)^{-|\alpha|} \tag{50}$$

Cette éstimation reste évidemment vraie pour $\alpha = 0$, avec la constante $C_0 := 1$. On peut maintenant estimer

$$\begin{aligned} & \left|D_\xi^\alpha D_x^\beta\big(\psi(\varepsilon\xi)\sigma_j(x,\xi)\big)\right| \\ = \ & \left|D_\xi^\alpha\big(\psi(\varepsilon\xi)D_x^\beta\sigma_j(x,\xi)\big)\right| \\ = \ & \left|\sum_{\gamma\leq\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}D_\xi^{\alpha-\gamma}\big(\psi(\varepsilon\xi)\big)D_\xi^\gamma D_x^\beta\big(\sigma_j(x,\xi)\big)\right| \\ \leq \ & \sum_{\gamma\leq\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}\left|D_\xi^{\alpha-\gamma}\big(\psi(\varepsilon\xi)\big)D_\xi^\gamma D_x^\beta\big(\sigma_j(x,\xi)\big)\right| \end{aligned}$$

Vu (50) et l'hypothèse que $\sigma_j \in \mathrm{Symb}^{m_j}$, il existent des constantes $C_{\alpha\gamma}$ et $C_{j\beta\gamma}$ telles que

$$\begin{aligned} \cdots &\leq \sum_{\gamma\leq\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}C_{\alpha\gamma}(1+|\xi|)^{-|\alpha|+|\gamma|}C_{j\beta\gamma}(1+|\xi|)^{m_j-|\gamma|} \\ &= \sum_{\gamma\leq\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}C_{\alpha\gamma}C_{j\beta\gamma}(1+|\xi|)^{-|\alpha|+m_j} \end{aligned}$$

Si on pose

$$C_{j\alpha\beta} := \sum_{\gamma\leq\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}C_{\alpha\gamma}C_{j\beta\gamma}$$

on obtient bien l'estimation (49). Soit $(\varepsilon_j)_{j=0}^{\infty}$ une suite de nombres réels telle que et telle que

$$\begin{aligned} 1 > \varepsilon_0 > \varepsilon_j > \varepsilon_{j+1} > 0 &\qquad \text{pour tout } j \in \mathbb{N}_0 \\ \varepsilon_j < \frac{1}{2^j C_{j\alpha\beta}} &\qquad \text{pour tout } \alpha, \beta \text{ tel que } |\alpha+\beta| \leq j \\ \lim_{j\longrightarrow\infty} \varepsilon_j = 0 & \end{aligned}$$

Par définition de ψ on a $\psi(\varepsilon_j\xi) = 0$ si $1+|\xi| \leq \varepsilon_j^{-1}$, et donc

$$\begin{aligned} \left|D_\xi^\alpha D_x^\beta\big(\psi(\varepsilon\xi)\sigma_j(x,\xi)\big)\right| &\overset{(49)}{\leq} C_{j\alpha\beta}(1+|\xi|)^{-|\alpha|+m_j} \\ &= C_{j\alpha\beta}(1+|\xi|)^{-1}(1+|\xi|)^{-|\alpha|+1+m_j} \\ &\leq C_{j\alpha\beta}\varepsilon_j(1+|\xi|)^{-|\alpha|+1+m_j} \\ &\leq 2^{-j}(1+|\xi|)^{-|\alpha|+1+m_j} \end{aligned} \tag{51}$$

Ceci étant, définissons la fonction $\sigma : U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ postulée dans l'énnoncé par

$$\sigma(x,\xi) = \sum_{j=0}^{\infty}\psi(\varepsilon_j\xi)\sigma_j(x,\xi) \tag{52}$$

Soit $K \subseteq U \times \mathbb{R}^n$ compact, et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\varepsilon_N^{-1} > \max\{|\xi| \mid (x,\xi) \in K\}$. Pour tout $j \geq N$ on a $\psi(\varepsilon_j\xi) = 0$, et donc

$$\sigma(x,\xi) = \sum_{j=0}^{N}\psi(\varepsilon_j\xi)\sigma_j(x,\xi)$$

pour tout $x, \xi \in K$. Ceci montre que la somme (52) converge absolument sur tout compact de $U \times \mathbb{R}^n$, et que σ est bien une fonction lisse.
Pour deux multi indices fixés α_0, β_0 choisissons $j_0 \in \mathbb{N}$ suffisamment grand pour que $j_0 \geq |\alpha_0+\beta_0|$ et $m_{j_0}+1 \leq m_0$. Posons

$$\sigma(x,\xi) = \underbrace{\sum_{j=0}^{j_0-1}\psi(\varepsilon_j\xi)\sigma_j(x,\xi)}_{I(x,\xi)} + \underbrace{\sum_{j=j_0}^{\infty}\psi(\varepsilon_j\xi)\sigma_j(x,\xi)}_{J(x,\xi)}$$

La fonction $(x,\xi) \longmapsto \psi(\varepsilon_j \xi)$ est facilement vérifiée d'etre un élément de $\mathrm{Symb}^0(U)$, et on a alors $I \in \mathrm{Symb}^{m_0}(U)$ puisque I est une somme finie dans $\mathrm{Symb}^{m_0}(U)$, tenant compte de la proposition 3.50. Quant à la partie J, on a par (51) que

$$\begin{aligned}
\left|D_\xi^\alpha D_x^\beta\big(\psi(\varepsilon\xi)J(x,\xi)\big)\right| &\leq \sum_{j=j_0}^{\infty}\left|D_\xi^\alpha D_x^\beta\big(\psi(\varepsilon\xi)\sigma_j(x,\xi)\big)\right| \\
&\leq \sum_{j=j_0}^{\infty} 2^{-j}(1+|\xi|)^{-|\alpha_0|+1+m_j} \\
&\leq \sum_{j=j_0}^{\infty} 2^{-j}(1+|\xi|)^{-|\alpha_0|+m_0} \\
&= 2^{-j+1}(1+|\xi|)^{-|\alpha_0|+m_0}
\end{aligned}$$

ce qui montre que $J \in \mathrm{Symb}^{m_0}(U)$, et donc $\sigma \in \mathrm{Symb}^{m_0}(U)$. Il reste à vérifier que $(\sigma_j)_{j=0}^{\infty}$ est une expansion asymptotique de σ. Pour cela, prenons $N \in \mathbb{N}$ et obervons que

$$\begin{aligned}
\sigma(x\xi) - \sum_{j=0}^{N-1}\sigma_j(x,\xi) &= \sum_{j=0}^{\infty}\psi(\varepsilon_j\xi)\sigma_j(x,\xi) - \sum_{j=0}^{N-1}\sigma_j(x,\xi) \\
&= \sum_{j=0}^{N-1}\big(\psi(\varepsilon_j\xi)-1\big)\sigma_j(x,\xi) + \sum_{j=N}^{\infty}\psi(\varepsilon_j\xi)\sigma_j(x,\xi)
\end{aligned}$$

Le même raisonnement qu'on vient de faire pour montrer que $\sigma \in \mathrm{Symb}^{m_0}(U)$ montre que

$$\sum_{j=N}^{\infty}\psi(\varepsilon_j\xi)\sigma_j(x,\xi) \quad \in \mathrm{Symb}^{m_N}(U) \tag{53}$$

Les fonctions $(\psi(\varepsilon_j\xi)-1)$ sont à support compact, et on a alors par la proposition 3.53 que

$$\big(\psi(\varepsilon_j\xi)-1\big)\sigma_j(x,\xi) \quad \in \mathrm{Symb}^{-\infty}(U) \tag{54}$$

Les relations (53) et (54) mises ensemble donnent

$$\sigma(x\xi) - \sum_{j=0}^{N-1}\sigma_j(x,\xi) \quad \in \mathrm{Symb}^{m_N}(U)$$

pour tout $N \in \mathbb{N}$, ce qui montre justement que

$$\sigma \sim \sum_{j=0}^{\infty}\sigma_j$$

Finalement, si τ est un autre symbole avec expansion asymptotique $(\sigma_j)_{j=0}^{\infty}$, alors on a pour tout nombre naturel N

$$\sigma - \tau = \left(\sigma - \sum_{j=0}^{N-1}\sigma_j\right) - \left(\tau - \sum_{j=0}^{N-1}\sigma_j\right) \qquad \in \mathrm{Symb}^{m_N}(U)$$

Mais vu que $m_j \longrightarrow -\infty$, ceci entraine que $\sigma - \tau \in \mathrm{Symb}^{-\infty}(U)$. $\square$

LEMME 3.86. *Soit K un voisinage compact de 0 dans $\mathbb{R}$ et $f \in C^2(K)$. Posons $A_j := \sup_{t\in K} \left|f^{(j)}(t)\right|$ pour $j = 0, 2$. Soit $r > 0$ tel que $B(0,r) \subseteq K$. Alors*

$$f'(0)^2 \leq 4r^{-2}A_0^2 + 4A_0A_2$$

DÉMONSTRATION. Dans le cas où $f'(0) = 0$ on n'a rien à démontrer. Supposons donc sans perte de généralité que $f'(0) > 0$. Considérons d'abord le cas où $r = 1$. Posons

$$\Delta := \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 2A_2 \leq f'(0) \\ \frac{f'(0)}{2A_2} & \text{si} \quad 2A_2 > f'(0) \end{cases}$$

Par hypothèse, $\Delta \neq 0$. Remarquons que

$$|f'(t) - f'(0)| = \left|\int_0^t f''(s)ds\right| \leq \int_0^t |f''(s)|\, ds \leq A_2|t|$$

Si $t \in [-\Delta, \Delta]$, alors on a $2A_2|t| \leq f'(0)$, ce qui entraine $2\,|f'(t) - f'(0)| \leq f'(0)$ et donc que $2f'(t) \geq f'(0)$. On a alors

$$f(\Delta) - f(-\Delta) = \int_{-\Delta}^{\Delta} f'(t)dt \geq \Delta f'(0)$$

On a aussi $2A_0 \geq f(\Delta) - f(-\Delta)$, et par conséquent

$$f'(0) \leq \frac{2A_0}{\Delta} = 2A_0 \max\left\{\frac{2A_2}{|f'(0)|}\ ,\ 1\right\}$$

On a donc ou bien $f'(0)^2 \leq 4A_0A_2$ ou bien $f'(0)^2 \leq 4A_0^2$, ce qui se résume en

$$f'(0)^2 \leq 4A_0^2 + 4A_0A_2$$

ce qui démontre le lemme dans le cas $r = 1$. Pour un $r > 0$ quelconque, on considère la fonction $g(t) = f(rt)$. On a

$$\begin{aligned} B_0 &:= \sup_{-1\leq t\leq 1} |g(t)| = \sup_{-r\leq t\leq r} |f(t)| \leq A_0 \\ B_2 &:= \sup_{-1\leq t\leq 1} |g''(t)| = r^2 \sup_{-r\leq t\leq r} |f(t)| \leq r^2 A_2 \end{aligned}$$

Par le cas d'avant on a

$$r^2 f'(0)^2 = g'(0)^2 \leq 4B_0^4 + 4B_0B_2 \leq 4A_0^2 + 4r^2A_0A_2$$

et alors

$$f'(0)^2 \leq 4r^{-2}A_0^2 + 4A_0A_2$$

ce qu'il fallait démontrer. □

COROLLAIRE 3.87. *Soient K_1, K_2 des parties compactes de $\mathbb{R}^n$ avec $K_1 \subseteq \overset{\circ}{K_2}$. Il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour toute fonction f de classe C^2 dans un voisinage de K_2 on ait*

$$B_1^2 \leq CA_0(A_0 + A_2)$$

où

$$A_j := \sup_{x\in K_2} \sum_{|\alpha|=j} |D^\alpha f(x)| \qquad \text{et} \qquad B_1 := \sup_{x\in K_1} \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha f(x)|$$

DÉMONSTRATION. Remarquons que

$$B_1 = \sup_{x\in K_1} \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha f(x)| \le \sup \left\{ Df(x)(\xi) \;\middle|\; x \in K_1, \xi \in \mathbb{R}^n, \|\xi\| \le \sqrt{n} \right\}$$

où Df est la dérivée totale de f. Comme $K_1 \times \overline{B(0,\sqrt{n})}$ est compact, il existe $x_0 \in K_1$ et $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ avec $\|\xi\| \le \sqrt{n}$ tel que

$$\sup_{x\in K_1} \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha f(x)| = Df(x_0)(\xi_0)$$

Le lemme 3.86 appliqué à la fonction $g(t) = f(x_0 + t\xi_0)$ permet de conclure. □

LEMME 3.88. *Soit $(m_j)_{j=1}^\infty$ une suite de nombres réels avec $m_j \longrightarrow -\infty$ pour $j \longrightarrow \infty$, et soit $\sigma_j \in \mathrm{Symb}^{m_j}(U)$. Soit $\tau \in C^\infty(U \times \mathbb{R})$ et supposons les deux conditions suivantes vérifiées :*

I : *Pour tout compact $K \subseteq U$ et tout multi indices α, β il existent des nombres réels C, μ tels que*

$$\left| D_\xi^\alpha D_x^\beta \tau(x,\xi) \right| \le C(1+|\xi|)^\mu \qquad \text{pour tout } x \in K, \xi \in \mathbb{R}^n$$

II : *Pour tout compact $K \subseteq U$ il existent des suites de nombres réels $(\mu_j)_{j=1}^\infty$ et $(C_j)_{j=1}^\infty$ avec $\mu_j \longrightarrow -\infty$ pour $j \longrightarrow \infty$ tels que*

$$\left| \tau(x,\xi) - \sum_{j=1}^{k-1} \sigma_j(x,\xi) \right| \le C_k (1+|\xi|)^{\mu_k} \qquad \text{pour tout } x \in K, \xi \in \mathbb{R}^n$$

Alors τ est un symbole qui a $(\sigma_j)_{j=1}^\infty$ comme expansion asymptotique.

DÉMONSTRATION. Par le théorème 3.85 il existe un symbole σ qui admet $(\sigma_j)_{j=1}^\infty$ comme expansion asymptotique. Posons $h := \sigma - a$, et montrons que $h \in \mathrm{Symb}^{-\infty}(U)$. Pour cela, il suffit de montrer que l'assertion suivante est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}_0$:

$A(k)$: *Pour tout partie compacte K de U, tout nombre réel r et tout multi–indices α, β tel que $|\alpha+\beta| = k$ il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\sup_{x\in K} \left| \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta h(x,\xi) \right| \le C(1+|\xi|)^m$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$.

On va montrer que $A(k)$ par récurrence sur k. Par hypothèse (II), il existent des suites $(\mu_j)_{j=1}^\infty$ et $(C_j^{(1)})_{j=1}^\infty$ dans $\mathbb{R}$ avec $\mu_j \longrightarrow -\infty$ pour $j \longrightarrow \infty$ et tels que

$$\left| \tau(x,\xi) - \sum_{j=1}^{N-1} \sigma_j(x,\xi) \right| \le C_N^{(1)} (1+|\xi|)^{\mu_N} \qquad \forall x \in K,\ \xi \in \mathbb{R}^n \tag{55}$$

pour tout $N \in \mathbb{N}$. Par définition de l'expansion asymptotique on a pour tout $N \in \mathbb{N}$ que

$$\sigma - \sum_{j=1}^{N-1} \sigma_j \quad \in \mathrm{Symb}^{m_N}(U)$$

Il existe donc pour tout $j \in \mathbb{N}$ un nombre réel $C_j^{(2)}$ tel que

$$\left|\sigma(x,\xi) - \sum_{j=1}^{N-1} \sigma_j(x,\xi)\right| \leq C_N^{(2)}(1+|\xi|)^{m_N} \qquad \forall x \in K,\ \xi \in \mathbb{R}^n \tag{56}$$

Soit $r \in \mathbb{R}$ et choisissons $N_r \in \mathbb{N}$ suffisamment grand pour que $m_j < r$ et $\mu_j < r$ pour tout $j \geq N$. Les inégalités (55) et (56) montrent qu'il existe $C_r \in \mathbb{R}$ tel que

$$|h(x,\xi)| \leq C_r(1+|\xi|)^r \qquad \forall x \in K,\ \xi \in \mathbb{R}^n \tag{57}$$

ce qui montre $A(0)$. Fixons donc $k \in \mathbb{N}$, supposons que $A(k)$ est vrai, et montrons que $A(k+1)$ est vrai.
Soit $K \subseteq U$ compact, et soient α, β des multi–indices avec $|\alpha+\beta| = k+1$. Soit K' un voisinage compact de K dans U, c'est–à–dire une partie compacte de U telle que K est contenu dans l'interieur de K'. Définissons des parties compactes K_1, K_2 de $U \times \mathbb{R}^n$ par

$$K_1 := K \times \{0\} \qquad \text{et} \qquad K_2 := K' \times \overline{B(0,1)}$$

où $B(0,1)$ désigne la boule de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^n$. Par le corollaire 3.87 il existe $C^{(3)} \in \mathbb{R}$ tel que

$$\left(\sup_{z\in K_1} |\partial_z^\eta f(z)|\right)^2 \leq C^{(3)} \sup_{z\in K_2} |f(z)| \left(\sup_{z\in K_2} |f(z)| + \sup_{z\in K_2} \sum_{|\eta|=2} |\partial_z^\eta f(z)|\right) \tag{58}$$

pour toute fonction f qui est de classe C^2 dans U, et tout multi–indice η avec $|\eta| = 1$. Choisissons des multi–indices γ, δ avec $|\gamma+\delta| = k$ et tels que $\alpha \geq \gamma$ et $\beta \geq \delta$, et posons $h_\theta(x,\xi) := h(x,\xi+\theta)$. L'inégalité (58) est en particulier vraie pour les fonctions

$$\partial_\xi^\gamma \partial_x^\delta h_\theta(x,\xi) \qquad \theta \in \mathbb{R}^n$$

Comme $\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta h_\theta(x,\xi)|_{\xi=0} = \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta h(x,\theta)$ l'inégalité (58) devient dans ce cas

$$\begin{aligned}\left(\sup_{x\in K} |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta h(x,\theta)|\right)^2 \leq C^{(3)} &\sup_{(x,\xi)\in K_2} \left|\partial_\xi^\gamma \partial_x^\delta h_\theta(x,\xi)\right| \cdot \\ &\cdot \left(\sup_{(x,\xi)\in K_2} \left|\partial_\xi^\gamma \partial_x^\delta h_\theta(x,\xi)\right| + \sup_{(x,\xi)\in K_2} \sum_{|\eta+\nu|=2} \left|\partial_\xi^{\gamma+\eta} \partial_x^{\delta+\nu} h_\theta(x,\xi)\right|\right)\end{aligned} \tag{59}$$

Par hypothèse de récurrence il existe, quelque soit $r \in \mathbb{R}$ un nombre réel $C_r^{(4)}$ tel que

$$\sup_{x\in K'} \left|\partial_\xi^\gamma \partial_x^\delta h_\theta(x,\xi)\right| \leq C_r^{(4)}(1+|\xi+\theta|)^r$$

pour tout $\xi, \theta \in \mathbb{R}^n$. On trouve ainsi que

$$\begin{aligned}\sup_{(x,\xi)\in K_2} \left|\partial_\xi^\gamma \partial_x^\delta h_\theta(x,\xi)\right| &= \sup_{\xi\in\overline{B(0,1)}} \sup_{x\in K'} \left|\partial_\xi^\gamma \partial_x^\delta h_\theta(x,\xi)\right| \\ &\leq \sup_{\xi\in\overline{B(0,1)}} C_{r-1}^{(4)}(1+|\xi+\theta|)^{r-1} \\ &\leq C_{r-1}^{(4)}(2+|\theta|)^{r-1} \\ &\leq C_r^{(5)}(1+|\theta|)^r\end{aligned}$$

pour une constante $C_r^{(5)}$ appropriée. Cette estimation mise dans (59) donne, pour un certain $C_r^{(6)} \in \mathbb{R}$

$$(60) \quad \left(\sup_{x\in K} |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta h(x,\theta)|\right)^2 \leq$$
$$C_r^{(6)}(1+|\theta|)^r \left((1+|\theta|)^r + \sup_{x\in K_2} \sum_{|\gamma+\delta|=2} \left|\partial_\xi^{\alpha+\gamma}\partial_x^{\beta+\delta} h_\theta(x,\xi)\right|\right)$$

Par hypothèse (I), il existent des nombres réels $C^{(7)}, \mu^{(7)}$ tels que

$$(61) \qquad \left|\partial_\xi^{\gamma+\eta}\partial_x^{\delta+\nu} a(x,\xi)\right| \leq C^{(7)}(1+|\xi|)^{\mu^{(7)}} \qquad \forall x \in K, \xi \in \mathbb{R}^n$$

Comme σ est un symbole, il existent $C^{(8)}$,$\mu^{(8)} \in \mathbb{R}$ tels que

$$(62) \qquad \left|\partial_\xi^{\gamma+\eta}\partial_x^{\delta+\nu} \sigma(x,\xi)\right| \leq C^{(8)}(1+|\xi|)^{\mu^{(8)}} \qquad \forall x \in K, \xi \in \mathbb{R}^n$$

Les éstimations (61) et (62) montrent qu'il existent $C^{(9)}, \mu^{(9)} \in \mathbb{R}$ tels que

$$(63) \qquad \left|\partial_\xi^{\gamma+\eta}\partial_x^{\delta+\nu} h(x,\xi)\right| \leq C^{(9)}(1+|\xi|)^{\mu^{(9)}} \qquad \forall x \in K, \xi \in \mathbb{R}^n$$

Cette estimation mise dans (60) montre que pour tout $r \in \mathbb{R}$ il existe un nombre réel $C_r^{(10)}$ tel que

$$(64) \qquad \left(\sup_{x\in K} |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta h(x,\theta)|\right)^2 \leq C_r^{(10)}(1+|\theta|)^r \left((1+|\theta|)^r + (1+|\theta|)^{\mu^{(9)}}\right)$$

Comme $\mu^{(9)}$ est indépendent de r, on peut aussi trouver pour tout $r \in \mathbb{R}$ un nombre $C_r \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sup_{x\in K} |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta h(x,\theta)| \leq C_r(1+|\theta|)^r$$

ce qui montre $A(k+1)$, et termine la démonstration. □

7. Opérateurs proprement supportés

Je rappelle qu'un opérateur $P : \mathcal{D}(U) \longrightarrow \mathcal{E}(U)$ est dit *proprement supporté* si le support de son noyeau de distribution est une partie propre de $U \times U$ (définition 3.46).

On s'interesse au noyeau de distribution d'un opérateur pseudo–différentiel. Soit P un opérateur pseudo–différentiel et σ son symbole. On a vu que P est un opérateur de Fourier de phase $\Phi(x,y,\xi) = \langle x-y, \xi\rangle$ et d'amplitude $\tau(x,y,\xi) = \sigma(x,\xi)$. Par définition de l'opérateur $P = T_\Phi(\sigma)$ on a

$$\langle T_\Phi(\sigma)u, v\rangle = \langle A_\Phi(\sigma), v \otimes u\rangle$$

où $A_\Phi(\sigma)$ est la distribution de Fourier sur $U \times U$ de phase Φ est d'amplitude τ. La distribution $K := A_\Phi(\sigma)$ est donc le noyeau de distribution de l'opérateur

$P : \mathcal{D}(U) \longrightarrow \mathcal{D}'(U)$ conformément à la définition 3.42. Plus explicitement, on calcule pour $u, v \in C^\infty_{00}(U)$

$$\begin{aligned}\langle Pu, v\rangle &= \int Pu(x)v(x)dx \\ &= \iint \chi_x(\xi)\sigma(x,\xi)\widehat{u}(\xi)v(x)đ\xi dx \\ &= \iint \chi_\xi(x)\sigma(x,\xi)\int \overline{\chi}_\xi(y)u(y)dy\, v(x)đ\xi dx \\ &= \iiint \chi_\xi(x-y)\sigma(x,\xi)v\otimes u(x,y)dyđ\xi dx\end{aligned}$$

Vu que les combinaisons linéaires de fonctions de type $u \otimes v$ sont denses dans $C^\infty_{00}(U \times U)$, le noyeau de distribution K de P est donné par

$$\langle K, w\rangle = \iiint \chi_\xi(x-y)\sigma(x,\xi)w(x,y)dyđ\xi dx \tag{65}$$

Je rappelle qu'on dit que P est proprement supporté si $\operatorname{supp} K$ est une partie propre de $U \times U$. Voici le truc important :

PROPOSITION 3.89. *Soit $P \in \Psi(U)$. Alors P est proprement supporté si et seulement si pour tout compact $C \subseteq U$ il existe un compact $C' \subseteq U$ tel que* $\operatorname{supp} Pu \subseteq C'$ *et* $\operatorname{supp} {}^tPu \subseteq C'$ *pour tout $u \in \mathcal{D}(U)$ avec* $\operatorname{supp} u \subseteq C$.
En particulier si P est proprement supporté, alors Pu est à support compact pour tout $u \in C^\infty_{00}(U)$.

DÉMONSTRATION. Notons K le noyeau de distribution de P. Supposons d'abord que P est proprement supporté. Soit $C \subseteq U$ compact et $u \in \mathcal{D}(U)$ avec $\operatorname{supp} u \subseteq C$. Notons π_1, π_2 les projections canoniques de $\operatorname{supp} K$ sur U. On a

$$Pu = \langle K, u\rangle = \int K(x,y)u(y)dy$$

et donc $\operatorname{supp} Pu \subseteq \pi_1 \circ \pi_2^{-1}(\operatorname{supp} u) \subseteq \pi_1 \circ \pi_2^{-1}(C) =: C'$.
Supposons maintenant que pour tout compact $C \subseteq U$ il existe un compact $C' \subseteq U$ tel que $\operatorname{supp} Pu \subseteq C'$ et $\operatorname{supp} {}^tPu \subseteq C'$ pour tout $u \in C^\infty_{00}(U)$ avec $\operatorname{supp} u \subseteq C$. L'inclusion $\operatorname{supp} Pu \subseteq C'$ montre, par définition du noyeau de distribution que $\pi_1^{-1}(C) \subseteq C'$, et l'inclusion $\operatorname{supp} {}^tPu \subseteq C'$ entraine que $\pi_1^{-1}(C) \subseteq C'$, ce qui montre que P est proprement supporté. □

COROLLAIRE 3.90. *Les opérateurs pseudo–différentiels proprement supportés sur U forment un sous–espace vectoriel de $\Psi(U)$. Tout opérateur pseudo–différentiel proprement supporté $P : \mathcal{D}(U) \longrightarrow \mathcal{D}(U)$ se prolonge par continuité et dualité en des opérateurs*

$$\begin{aligned} P: &\quad \mathcal{D}'(U) \longrightarrow \mathcal{D}'(U) \\ P: &\quad \mathcal{E}(U) \longrightarrow \mathcal{E}(U) \\ P: &\quad \mathcal{E}'(U) \longrightarrow \mathcal{E}'(U)\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. C'est clair. □

Le théorème 3.71 montre en particulier que $\operatorname{sing\,supp} K$ est contenu dans la diagonale $\Delta \subseteq U \times U$, et donc que K est de classe C^∞ en dehors de la diagonale. Le théorème qui suit précise ce résultat.

THEORÈME 3.91. *Soit P un opérateur pseudo–différentiel d'ordre m et K son noyeau de distribution. Pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout multi indice α avec $|\alpha| > m+n+j$ on a*

$$(x-y)^\alpha K(x,y) \in C^j(U \times U)$$

En particulier K est est indéfiniment dérivable en dehors de la diagonale $\Delta \subseteq U \times U$, ou bien, en d'autre mots, $\operatorname{sing\,supp} K \subseteq \Delta$.

DÉMONSTRATION. Pour $w \in C^\infty_{00}(U \times U)$ calculons à partir de (65)

$$\begin{aligned}
& \langle (x-y)^\alpha K, w\rangle \\
= \; & \langle K, (x-y)^\alpha w\rangle \\
= \; & \iiint \chi_\xi(x-y)\sigma(x,\xi)(x-y)^\alpha w(x,y)dy đ\xi dx \\
= \; & \iiint \chi_\xi(x-y)\sigma(x,\xi) \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} x^\beta (-y)^{\alpha-\beta} w(x,y) dy đ\xi dx \\
= \; & \iint \chi_x(\xi)\sigma(x,\xi) \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} x^\beta \int \overline{\chi}_\xi(y)(-y)^{\alpha-\beta} w(x,y) dy đ\xi dx \\
= \; & \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \iint \chi_x(\xi)\sigma(x,\xi) x^\beta (-D_\xi)^{\alpha-\beta} \int \overline{\chi}_\xi(y) w(x,y) dy đ\xi dx \\
= \; & \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \iint \left(\int \overline{\chi}_\xi(y) w(x,y) dy \right) x^\beta (-D_\xi)^{\alpha-\beta} \Big(\chi_x(\xi)\sigma(x,\xi) \Big) đ\xi dx \\
= \; & \iint \left(\int \overline{\chi}_\xi(y) w(x,y) dy \right) (x-D_\xi)^\alpha \Big(\chi_x(\xi)\sigma(x,\xi) \Big) đ\xi dx
\end{aligned}$$

En utilisant la formule de Leibnitz on trouve

$$\begin{aligned}
& (x-D_\xi)^\alpha\big(\chi_x(\xi)\sigma(x,\xi)\big) \\
= & \sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}x^{\alpha-\beta}(-1)^{|\beta|}D_\xi^\beta\big(\chi_x(\xi)\sigma(x,\xi)\big) \\
= & \sum_{\beta\leq\alpha}\sum_{\gamma\leq\beta}\binom{\alpha}{\beta}\binom{\beta}{\gamma}x^{\alpha-\beta}(-1)^{|\beta|}D_\xi^{\beta-\gamma}\chi_x(\xi)D_\xi^\gamma\sigma(x,\xi) \\
= & \sum_{\beta\leq\alpha}\sum_{\gamma\leq\beta}\binom{\alpha}{\beta}\binom{\beta}{\gamma}x^{\alpha-\gamma}(-1)^{|\beta|}\chi_x(\xi)D_\xi^\gamma\sigma(x,\xi) \\
= & \sum_{\gamma\leq\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}\left(\sum_{\gamma\leq\beta\leq\alpha}\binom{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}(-1)^{|\beta|}\right)x^{\alpha-\gamma}\chi_x(\xi)D_\xi^\gamma\sigma(x,\xi) \\
= & \sum_{\gamma\leq\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}\left(\sum_{\beta\leq\alpha-\gamma}\binom{\alpha-\gamma}{\beta}(-1)^{|\beta|}\right)x^{\alpha-\gamma}\chi_x(\xi)D_\xi^\gamma\sigma(x,\xi) \\
= & \chi_x(\xi)D_\xi^\alpha\sigma(x,\xi)
\end{aligned}$$

et ainsi

$$\begin{aligned}
\langle(x-y)^\alpha K,w\rangle &= \iint\left(\int\overline{\chi}_\xi(y)w(x,y)dy\right)\chi_x(\xi)D_\xi^\alpha\sigma(x,\xi)đ\xi dx \\
&= \iiint\chi_\xi(x-y)D_\xi^\alpha\sigma(x,\xi)w(x,y)dyđ\xi dx
\end{aligned}$$

ce qui montre que

$$(x-y)^\alpha K(x,y)=\int\chi_\xi(x-y)D_\xi^\alpha\sigma(x,\xi)đ\xi \tag{66}$$

Cette intégrale converge, si $|\alpha|>m+n$, et on peut permuter D^β avec l'intégrale pourvu que $|\alpha|>m+n+|\beta|$, vu l'éstimation

$$|D_\xi^\beta D_\xi^\alpha\sigma(x,\xi)|\leq C(1+|\xi|)^{m-|\alpha|-|\beta|}$$

On en deduit que

$$(x-y)^\alpha K(x,y)\in C^j(U\times U)$$

pour tout nombre naturel $j<|\alpha|-m-n$, et en particulier que K est indéfiniment dérivable en dehors de la diagonale $\Delta\subseteq U\times U$. □

Corollaire 3.92. *Soit $P\in\Psi(U)$. Alors le noyeau de distribution K de P est dans $C^\infty(U\times U)$ si et seulement si $P\in\Psi^{-\infty}(U)$.*

Démonstration. Si P est d'ordre $-\infty$, alors le théorème 3.91 avec $\alpha=0$ permet de conclure que $K\in C^j(U\times U)$ quelque soit $j\in\mathbb{N}$. D'autre part, si $K\in C^\infty(U\times U)$, et si σ est le symbole de P, alors on a les expressions suivantes de $Pu(x)$

$$\int K(x,y)u(y)dy=\int\chi_x(\xi)\sigma(x,\xi)\widehat{u}(\xi)đ\xi$$

En écrivant u comme transformée inverse de Fourier de $\widehat{u}$ dans le membre de gauche de cette égalité, on trouve que

$$\iint \chi_y(\xi)K(x,y)\widehat{u}(\xi)đ\xi dy = \int \chi_x(\xi)\sigma(x,\xi)\widehat{u}(\xi)đ\xi$$

pour tout $u \in cD(U)$. En voyant ces intégrales comme distributions temperées évaluées en $\widehat{u}$ on peut conclure

$$\sigma(x,\xi) = \overline{\chi}_x(\xi) \int \chi_\xi(y)K(x,y)dy$$

Mais cette intégrale represente la transformée de Fourier de $K(x,y)$ par rapport à la variable y, ce qui montre que $\sigma(x,\xi)$ est à décroissance rapide en ξ. Comme de plus la fonction $y \longmapsto K(x,y)$ dépend continument de x pour la topologie de Schwartz, on peut estimer

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)| \leq C(1+|\xi|)^m \qquad \forall x \in K,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

pour n'importe quels multi–indices α, β, n'importe quel $m \in \mathbb{R}$ et n'importe quelle partie compacte K de U, ce qui montre que $\sigma \in \mathrm{Symb}^{-\infty}(U)$ et donc que P est d'ordre $-\infty$. □

Remarque 3.93. La proposition suivante affirme que les opérateurs pseudo–différentiels ont le bon goût de ne pas produire de singularités, c'est–à–dire si u est une fonction de classe C^∞ dans un voisinage d'un point x, alors Pu l'est aussi. Cette propriété s'appelle propriété de *pseudo–localité*.

Proposition 3.94. *Soit* $P \in \Psi(U)$ *et* $u \in \mathcal{E}(U)$. *Alors*

$$\operatorname{sing\,supp} Pu \subseteq \{x \in U \mid (x,x) \in \operatorname{sing\,supp} K \text{ et } x \in \operatorname{sing\,supp} u\}$$

en particulier on a $\operatorname{sing\,supp} Pu \subseteq \operatorname{sing\,supp} u$.

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{E}'(U)$ et soit V un voisinage ouvert de $\operatorname{sing\,supp} u$ dans U. Soit $\varphi \in C^\infty(U)$ une fonction qui vaut 1 sur $\operatorname{sing\,supp} u$ et 0 en dehors de V. En posant $u_1 := \varphi u$ et $u_2 := (1-\varphi)u$ on a

$$u = u_1 + u_2 \qquad \text{et} \qquad Pu = Pu_1 + Pu_2$$

Par la formule évidente

$$\operatorname{sing\,supp} \varphi u \subseteq \operatorname{supp} \varphi \cap \operatorname{sing\,supp} u$$

on trouve que $\operatorname{sing\,supp} u_2 = \varnothing$ c'est–à–dire $u_2 \in C^\infty(U)$, Ainsi $Pu_2 \in C^\infty(U)$ et

$$\operatorname{sing\,supp} Pu = \operatorname{sing\,supp} Pu_1$$

Soit $z \in U \setminus \overline{V}$, et W un voisinage de z avec $\overline{V} \cap W = \varnothing$. On a que $u_1(y) = 0$ pour tout $y \in W$, et par conséquent

$$Pu_1(x) = \int_U K(x,y)u_1(y)dy = \int_{U\setminus W} K(x,y)u_1(y)dy$$

est aussi de classe C^∞ dans un voisinage de z. Ainsi $\operatorname{sing\,supp} Pu \subseteq \overline{V}$ et comme V était un voisinage arbitraire du fermé $\operatorname{sing\,supp} u$, on a

$$\operatorname{sing\,supp} Pu \subseteq \operatorname{sing\,supp} u$$

Il reste à montrer que

$$\operatorname{sing\,supp} Pu \subseteq S := \{x, \in U \mid (x,x) \in \operatorname{sing\,supp} K\}$$

Soit cette fois–ci V un voisinage de S dans U et $\varphi \in C^\infty(U)$ une fonction qui vaut 1 sur S et 0 en dehors de V. Posons $K_1(x,y) = \varphi(x)K(x,y)$ et $K_2(x,y) = (1-\varphi(x))K(x,y)$. On a $K_2 \in C^\infty(U \times U)$, et donc

$$\begin{aligned} Pu(x) &= \langle K(x,-), u\rangle \\ &= \langle K_1(x,-), u\rangle + \int K_2(x,y)u(y)dy \\ &= \varphi(x)\langle K, u\rangle + \int K_2(x,y)u(y)dy \\ &= \varphi(x)Pu(x) + \int K_2(x,y)u(y)dy \end{aligned}$$

Mais

$$x \longmapsto \int K_2(x,y)u(y)dy$$

est une fonction de classe C^∞ par le théorème de la convergence dominée, et $\varphi(x)Pu(x)$ vaut 0 en dehors de V, ce qui montre que $\operatorname{sing\,supp} Pu \subseteq \overline{V}$. Comme V était un voisinage arbitraire du fermé S, on a $\operatorname{sing\,supp} Pu \subseteq S$. □

Définition 3.95. Un opérateur continu $A : \mathcal{E}'(U) \longrightarrow \mathcal{D}'(U)$ est dit *lisse* si $\operatorname{im} A \subseteq \mathcal{E}(U)$.

Corollaire 3.96. *Soit $P \in \Psi^{-\infty}(U)$. Alors P se prolonge en un opérateur continu $\overline{P} : \mathcal{E}'(U) \longrightarrow \mathcal{E}(U)$. En d'autre mots, P est lisse.*

Démonstration. Par le corollaire 3.92, le noyeau de distribution K de P est dans $C^\infty(U \times U)$, c'est–à–dire $\operatorname{sing\,supp} K = \varnothing$. On a alors $\operatorname{sing\,supp} Pu = \varnothing$ pour tout $u \in \mathcal{E}'(U)$ par 3.94. □

Proposition 3.97. *Tout opérateur différentiel est proprement supporté. Plus précisement, si P est un opérateur différentiel sur X, et K son noyeau de distribution, alors $\operatorname{supp} K \subseteq \Delta$, où $\Delta \subseteq X \times X$ est la diagonale.*

Démonstration. L'opérateur différentiel P est de la forme

$$P = \sum_{\alpha \le m} a_\alpha D^\alpha$$

Le symbole de P est donné par

$$\sigma(x,\xi) = \sum_{\alpha \le k} a_\alpha(x)\xi^\alpha$$

Pour toute fonction $w \in C^\infty_{00}(X \times X)$ on trouve à partir de l'expression (66) pour le noyeau de distribution de P que

$$\begin{aligned}(x-y)^\beta K(x,y) &= \int \chi_\xi(x-y) D^\beta_\xi \sum_{\alpha \le k} a_\alpha(x)\xi^\alpha đ\xi \\ &= \sum_{\alpha \le k} a_\alpha(x) \int \chi_\xi(x-y) D^\beta_\xi \xi^\alpha đ\xi\end{aligned}$$

ce qui montre en particulier que $(x-y)^\beta K(x,y) = 0$ pour β suffisamment grand. Ainsi $\operatorname{supp} K \subseteq \Delta$, et P est proprement supporté. $\square$

Dans la suite, on considère des amplitudes $\sigma \in \mathrm{Ampl}^m(U \times U \times \mathbb{R}^n)$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et où $U \times U$ est simplement vu comme ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$. Par définition, il existe pour tout multi indices α, β, γ et tout kompact $K \subseteq U \times U$ un $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sup_{(x,y)\in K} \left| D^\gamma_x D^\beta_y D^\alpha_\xi \sigma(x,y,\xi)\right| \quad \le \quad C(1+|\xi|)^{m-|\alpha|}$$

Pour $\sigma \in \mathrm{Ampl}^m(U \times U \times \mathbb{R}^n)$, nous considérons l'opérateur de Fourier T_σ avec amplitude σ et fonction de phase $\Phi(x,y,\xi) = \langle x-y, \xi\rangle$, qui, je rappelle, est défini par

$$T_\sigma u(x) = \iint e^{i\langle x-y,\xi\rangle} \sigma(x,y,\xi) u(y) dy đ\xi \tag{67}$$

Ces intégrales ne peuvent pas être permutées. Remarquons qu'en général T_σ n'est pas un opérateur pseudo–différentiel. Il l'est, si $\sigma(x,y,\xi)$ est indépendent de y, mais pas seulement dans ce cas. Les opérateurs de la forme (67) sont donc plus générales que les opérateurs pseudo–différentiels. Soit, on n'introduira pas la notion d'opérateur pseudo–pseudo–différentiel. Pour $\sigma \in \mathrm{Ampl}(U \times U \times \mathbb{R}^n)$, nous noterons

$$\Sigma_\sigma := \{(x,y) \in U \times U \mid \exists \xi \in \mathbb{R}^n \text{ avec } \sigma(x,y,\xi) \in \operatorname{supp} \sigma\}$$

LEMME 3.98. *Soit $\sigma \in \mathrm{Ampl}^m(U \times U \times \mathbb{R}^n)$ et notons T_σ l'opérateur de Fourier avec amplitude σ et phase $\langle x-y,\xi\rangle$. Soit K le noyeau de distribution de T_σ. Alors $\operatorname{supp} K \subseteq \Sigma_\sigma$, et si T_σ est proprement supporté, il existe une amplitude $\tau \in \mathrm{Ampl}^m(U \times U \times \mathbb{R}^n)$ et un voisinage V de la diagonale $\Delta \subseteq U \times U$ tel que*

I : $T_\tau = T_\sigma$

II : *Si $(x,y) \in V$ alors $\tau(x,y,\xi) = \sigma(x,y,\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$.*

III : *Σ_τ est une partie propre de $U \times U$, en particulier T_τ est proprement supporté.*

DÉMONSTRATION. Pour tout $u, v \in C^\infty_{00}(U)$ on a

$$\langle K, u \otimes v\rangle = \langle Av, u\rangle = \iiint \chi_\xi(x-y)\sigma(x,y,\xi) u \otimes v(x,y) dy đ\xi dx$$

ce qui montre, vu que $C^\infty_{00}(U)\otimes C^\infty_{00}(U)$ est dense dans $C^\infty_{00}(U\times U)$ par 3.41, qu'on a pour tout $w\in C^\infty_{00}(U\times U)$

$$\langle K,w\rangle = \iiint \chi_\xi(x-y)\sigma(x,y,\xi)w(x,y)dy đ\xi dx$$

Si $\operatorname{supp} w\cap\Sigma_\sigma=\varnothing$, alors $\sigma(x,y,\xi)w(x,y)=0$ pour tout $(x,y)\in U\times U$ et tout $\xi\in\mathbb{R}^n$, et on a donc dans ce cas $\langle K,w\rangle=0$, ce qui montre que $\operatorname{supp} K\subseteq\Sigma_\sigma$. Supposons maintenant que T_σ est proprement supporté. Choisissons $\varphi\in C^\infty(U\times U)$ proprement supporté et tel que $\varphi=1$ sur un voisinage V de $\Delta\cup\operatorname{supp} K$. Posons

$$\tau(x,y,\xi):=\varphi(x,y)\sigma(x,y,\xi)$$

Ainsi $\Sigma_\tau\subseteq\operatorname{supp}\varphi$, et Σ_τ est par conséquent propre. Comme le support du noyeau de distribution de T_τ est contenu dans Σ_τ on sait par la première assertion du lemme que T_τ est proprement supporté. On a aussi $\sigma(x,y,\xi)=\tau(x,y,\xi)$ pour tout $(x,y)\in V$. Finalement, calculons pour $u,v\in C^\infty_{00}(U)$

$$\begin{aligned}
\langle T_\sigma u,v\rangle &= \langle K, v\otimes u\rangle\\
&= \langle \varphi K, v\otimes u\rangle\\
&= \langle K, \varphi\cdot(v\otimes u)\rangle\\
&= \iiint e^{i\langle x-y,\xi\rangle}\sigma(x,y,\xi)\varphi(x,y)\cdot(v\otimes u)(x,y)dy đ\xi dx\\
&= \iiint e^{i\langle x-y,\xi\rangle}\tau(x,y,\xi)(v\otimes u)(x,y)dy đ\xi dx\\
&= \langle T_\tau u,v\rangle
\end{aligned}$$

ce qui montre, vu 3.41, que $T_\sigma=T_\tau$. □

Theorème 3.99. *Soit $\sigma\in\operatorname{Ampl}^m(U\times U\times\mathbb{R}^n)$ et soit T l'opérateur de Fourier d'amplitude σ et de fonction de phase $\Phi(x,y,\xi)=\langle x-y,\xi\rangle$. Supposons que T soit proprement supporté. Alors*

I : *T est un opérateur pseudo–différentiel d'ordre m.*

II : *Le symbole τ de T est donné par $\tau(x,\xi)=\overline{\chi}_x(\xi)(T\chi_\xi)(x)$*

III :

$$\tau\sim\sum_{k=0}^\infty\left(\sum_{|\alpha|=k}\frac{1}{\alpha!}(\partial_\xi^\alpha D_y^\alpha\sigma)(x,x,\xi)\right)$$

Démonstration. Tout d'abord, l'expansion asymptotique donée fait du sens, puisque

$$\sum_{|\alpha|=k}\frac{1}{\alpha!}(\partial_\xi^\alpha D_y^\alpha\sigma)(x,x,\xi)\quad\in\quad\operatorname{Symb}^{m-k}(U)$$

pour tout $k\in\mathbb{N}_0$. De plus, il fait du sens de définir

$$\tau(x,\xi):=\overline{\chi}_x(\xi)(T\chi_\xi)(x)$$

puisque l'opérateur T est proprement supporté, et se prolonge donc en un opérateur $T:\mathcal{E}(U)\longrightarrow\mathcal{E}(U)$. Pour $u\in\mathcal{E}(U)$, la formule d'inversion de Fourier affirme que

$$u(x)=\int\chi_x(\xi)\widehat{u}(\xi)đ\xi$$

Par linéarité et continuité de l'opérateur T, on a

$$\begin{aligned} Tu(x) &= \int (T\chi_\xi)(x)\widehat{u}(\xi)đ\xi \\ &= \int \chi_x(\xi)\tau(x,\xi)\widehat{u}(\xi)đ\xi \end{aligned}$$

Afin de démontrer le théorème, il suffit donc de montrer que τ est un symbole admettant l'expansion asymptotique donnée. Par le lemme 3.98 on peut supposer sans perte de généralité que Σ_σ est une partie propre de $U\times U$. Posons $h(x,y,\xi) := \sigma(x,x+y,\xi)$. En tant que fonction de y, h est à support compact. En effet, pour x et ξ fixés, on a

$$h(x,y,\xi)\neq 0 \implies x+y\in \pi_2(\pi_1^{-1}(x)\cap\Sigma_\sigma)$$

et $\pi_2(\pi_1^{-1}(x)\cap\Sigma_\sigma)$ est compact. Ici, $\pi_1,\ \pi_2 : U\times U \longrightarrow U$ sont les projections canoniques. On calcule

$$\begin{aligned} \tau(x,\xi) &= \overline{\chi}_x(\xi)(T\chi_\xi)(x) \\ &= \overline{\chi}_x(\xi)\iint \chi_\eta(x-y)\chi_\xi(y)\sigma(x,y,\eta)dyđ\eta \\ &= \chi_x(-\xi)\iint \chi_\eta(-y)\chi_\xi(x+y)\sigma(x,x+y,\eta)dyđ\eta \\ &= \iint \overline{\chi}_y(\eta-\xi)\sigma(x,x+y,\eta)dyđ\eta \\ &= \int \widehat{h}_2(x,\eta-\xi,\eta)đ\eta \\ &= \int \widehat{h}_2(x,\eta,\eta+\xi)đ\eta \end{aligned}$$

où $\widehat{h}_2$ est la transformée de Fourier de h par rapport à la deuxième variable. Comme h est à support compact dans la deuxième variable, $\widehat{h}_2$ est à décroissance rapide (dans la deuxième variable). Fixons un compact $K\subseteq U$ et démontrons l'affirmation suivante :

(A) : *Pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout multi indices α,β il existe $C_{\alpha\beta N}\in\mathbb{R}$ tel que*

$$\sup_{x\in K}\left|\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha\widehat{h}_2(x,\eta,\xi)\right| \leq C_{\alpha\beta N}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|}(1+|\eta|)^{-N} \tag{68}$$

pour tout $\eta,\xi\in\mathbb{R}^n$.

En effet, les propriétés de h permettent de dériver sous le signe d'intégration :

$$\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta\eta^\gamma\widehat{h}_2(x,\eta,\xi) = \int \partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta\chi_y(\eta)D_y^\gamma h(x,y,\xi)dy$$

d'où l'estimation

$$\left|\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta\eta\gamma\widehat{h}_2(x,\eta,\xi)\right| \leq \int \left|\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta D_y^\gamma h(x,y,\xi)\right| dy = \int \left|\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta D_y^\gamma\sigma(x,y,\xi)\right| dy$$

Comme Σ_σ est propre, $L := \pi_2(\pi_1^{-1}K\cap\Sigma_\sigma)$ est une partie compacte de U, et on a par définition de Σ_σ que $\sigma(x,y,\xi) = 0$ si $x\in K$ et $y\notin L$. Comme σ est une amplitude d'ordre m, il existe, quelque soient les multi–indices α, β, γ un nombre $C^{(1)} \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sup_{(x,y)\in K\times L} \left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta D_y^\gamma \sigma(x,y,\xi)\right| \leq C^{(1)}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|}$$

Ainsi on trouve

$$\begin{aligned} \sup_{x\in K} \left|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha \eta^\gamma \widehat{h}_2(x,\eta,\xi)\right| &\leq \sup_{x\in K} \int_L \left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta D_y^\gamma \sigma(x,y,\xi)\right| dy \\ &\leq \sup_{x\in K} \sup_{y\in L} \mathrm{Vol}(L) \left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta D_y^\gamma \sigma(x,y,\xi)\right| \\ &\leq \mathrm{Vol}(L) C^{(1)}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|} \end{aligned}$$

ce qui montre l'affirmation (A), vu que le multi–indice γ est arbitraire. De l'inégalité élémentaire, vraie pour tout $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ et tout $s \in \mathbb{R}$

$$\left(\frac{1+|\eta|}{1+|\xi|}\right)^s \leq (1+|\xi-\eta|)^{|s|}$$

on tire, en prenant $\eta+\xi$ au lieu de η

$$(1+|\eta+\xi|)^s \leq (1+|\xi|)^s(1+|\eta|)^{|s|} \tag{69}$$

L'équation (68) est

$$\sup_{x\in K} \left|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha \widehat{h}_2(x,\eta,\xi+\eta)\right| \leq C_{\alpha\beta N}(1+|\xi+\eta|)^{m-|\alpha|}(1+|\eta|)^{-N}$$

En appliquant (69) on trouve

$$\sup_{x\in K} \left|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha \widehat{h}_2(x,\eta,\xi+\eta)\right| \leq C_{\alpha\beta N}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|}(1+|\eta|)^{-N+|m-|\alpha||}$$

Prenons N suffisamment grand pour que $-N+|m-|\alpha||<-n$. Ainsi

$$\begin{aligned} \sup_{x\in K} \left|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha \tau(x,\xi)\right| &= \sup_{x\in K} \left|\int \partial_x^\beta \partial_\eta^\alpha \widehat{h}_2(x,\eta,\eta+\xi) đ\eta\right| \\ &\leq \int \sup_{x\in K} \left|\partial_x^\beta \partial_\eta^\alpha \widehat{h}_2(x,\eta,\eta+\xi)\right| đ\eta \\ &\leq C_{\alpha\beta N}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|} \int (1+|\eta|)^{-N+|m-|\alpha||} đ\eta \\ &= C_{\alpha\beta}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|} \end{aligned} \tag{70}$$

où $C_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$ ne dépend que de α et de β et du compact K. On a donc montré que τ est un symbole d'ordre m. Reste à verifier l'expansion asymptotique.
L'inégalité (70) montre en particulier que τ satisfait la condition (I) du lemme 3.88, avec $\mu = m-|\alpha|$. Vérifions que les fonctions

$$\sigma_j(x,\xi) := \sum_{|\alpha|=j} \frac{1}{\alpha!}(\partial_\xi^\alpha D_y^\alpha \sigma)(x,x,\xi)$$

satisfont la condition (II) du lemme 3.88, ce qui terminera la démonstration. A ce fin, considérons un développement de Taylor (théorème 0.5) d'ordre k de $\widehat{h}_2(x,\eta,\xi+\nu)$ dans la variable ν au point $\nu=0$:

$$\widehat{h}_2(x,\eta,\xi+\nu) = \sum_{|\alpha|<k} \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha \widehat{h}_2(x,\eta,\xi)\nu^\alpha + r_k(x,\eta,\xi,\nu)$$

où r_k est le reste d'ordre k, donné par

$$r_k(x,\eta,\xi,\nu) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{\nu^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{k-1} \partial_\xi^\alpha \widehat{h}_2(x,\eta,\xi+t\nu)dt$$

On estime, tenant compte de (68)

$$\begin{aligned}
|r_k(x,\eta,\xi,\eta)| &\leq C^{(2)}|\eta|^k \sup_{0\leq t\leq 1} \sup_{|\alpha|=k} \left|\partial_\xi^\alpha \widehat{h}_2(x,\eta,\xi+t\eta)\right| \\
&\leq C^{(3)}|\eta|^k \sup_{0\leq t\leq 1} (1+|\xi+t\eta|)^{m-k}(1+|\eta|)^{-N} \\
&\leq C^{(3)}(2+|\xi|+|\eta|)^{m-k}(1+|\eta|)^{-N+k}
\end{aligned}$$

où $C^{(3)}$ ne dépend que de N et k. On a alors

$$\begin{aligned}
|r_k(x,\eta,\xi,\eta)| &\leq C_N(1+|\xi|)^{m-N} \qquad \text{si } |\eta|\leq|\xi| \\
|r_k(x,\eta,\xi,\eta)| &\leq C'_N(1+|\eta|)^{m-N} \qquad \text{si } |\eta|\geq|\xi|
\end{aligned}$$

où C_N et C'_N ne dépendent que de N. De plus on a

$$\begin{aligned}
\int \partial_\xi^\alpha \widehat{h}_2(x,\eta,\xi)\eta^\alpha đ\eta &= \left.\left(D_y^\alpha \int \chi_y(\eta)\partial_\xi^\alpha \widehat{h}_2(x,\eta,\xi)đ\eta\right)\right|_{y=0} \\
&= D_y^\alpha \partial_\xi^\alpha h(x,y,\xi)|_{y=0} \\
&= (D_y^\alpha \partial_\xi^\alpha \sigma)(x,x,\xi)
\end{aligned}$$

Mis ensemble ceci donne, en choisissant $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > m+n$, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\tau(x,\xi) - \sum_{|\alpha|<k} \frac{1}{\alpha!}(D_y^\alpha \partial_\xi^\alpha \sigma)(x,x,\xi)\right| \\
&= \left|\int \widehat{h}_2(x,\eta,\eta+\xi)đ\eta - \sum_{|\alpha|<k} \frac{1}{\alpha!} \int \partial_\xi^\alpha \widehat{h}_2(x,\eta,\xi)\eta^\alpha đ\eta\right| \\
&\leq \int \left|\widehat{h}_2(x,\eta,\eta+\xi) - \sum_{|\alpha|<k} \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha \widehat{h}_2(x,\eta,\xi)\eta^\alpha\right| đ\eta \\
&= \int |r_k(x,\eta,\xi,\eta)|\, đ\eta \\
&= \int_{|\eta|\leq|\xi|} |r_k(x,\eta,\xi,\eta)|\, đ\eta + \int_{|\eta|\geq|\xi|} |r_k(x,\eta,\xi,\eta)|\, đ\eta \\
&\leq \int_{|\eta|\leq|\xi|} C_k(1+|\xi|)^{m-k}đ\eta + \underbrace{\int_{|\eta|\geq|\xi|} C'_N(1+|\eta|)^{m-N}đ\eta}_{\text{converge}} \\
&\leq C_k(2\pi)^{-n}\operatorname{Vol}(B(0,|\xi|))(1+|\xi|)^{m-k} + C^{(4)} \\
&\leq c_k(1+|\xi|)^{m-k+n}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\left|\tau(x,\xi) - \sum_{|\alpha|<N} \frac{1}{\alpha!}(D_y^\alpha \partial_\xi^\alpha \sigma)(x,x,\xi)\right| \leq c_k(1+|\xi|)^{\mu_k}$$

pour $\mu_k = m - k + n$. Les hypothèses du lemme 3.88 sont alors satisfaites, ce qui permet de conclure que τ est un symbole ayant l'expansion asymptotique donnée dans l'énnoncé $\square$

COROLLAIRE 3.100. *Soit $P \in \Psi^m(U)$. Alors il existent des opérateurs pseudo–différentiels P_0 et L avec $P = P_0 + L$ tels que $P_0 \in \Psi^m(U)$ est proprement supporté et L est lisse.*

DÉMONSTRATION. Soit σ le symbole de P, et soit V un voisinage propre de la diagonale $\Delta \subseteq U \times U$. Choisissons une fonction $\varphi \in C^\infty(U \times U)$ qui est proprement supportée et qui vaut 1 dans V. Posons

$$a(x, y, \xi) = \varphi(x, y)\sigma(x, \xi)$$

Alors $a \in \mathrm{Ampl}(U \times U \times \mathbb{R}^n)$, et $\Sigma_a \subseteq \operatorname{supp}\varphi$ est propre par construction. Ainsi l'opérateur P_0 défini par

$$P_0u(x) = \iint \chi_\xi(x - y)a(x, y, \xi)u(y)dy\bar{d}\xi$$

est proprement supporté par le lemme 3.98, et est donc un opérateur pseudo–différentiel par le théorème 3.99. L'opérateur $L := P - P_0$ est alors aussi un opérateur pseudo–différentiel. Le noyeau de distribution de L est $(1 - \varphi)K$, où K est le noyeau de distribution de P. Le noyeau de distribution de L est en particulier de classe C^∞ dans $U \times U$ par le théorème 3.91, et le corollaire 3.92 permet de conclure que L est lisse. $\square$

8. Transposé, adjoint et produit d'opérateurs pseudo–différentiels

Dans cette section on montre que le transposé et l'adjoint d'un opérateur pseudo–différentiel, ainsi que le produit de deux opérateurs pseudo–différentiels est de nouveau un opérateur pseudo–différentiel, et on donne à chaque fois un développement asymptotique de son symbole. Je rappelle que pour un opérateur A son transposé ${}^tA$ et son adjoint A^* sont caracterisés par

$$\langle Au, v\rangle = \langle u, {}^tAv\rangle \qquad \text{où} \qquad \langle u, v\rangle = \int u(x)v(x)dx \tag{71}$$

$$\big(Au, v\big) = \big(u, A^*v\big) \qquad \text{où} \qquad \big(u, v\big) = \int u(x)\overline{v(x)}dx \tag{72}$$

On a ${}^{tt}A = A$ et $A^{**} = A$.

THEORÈME 3.101. *Soit P un opérateur pseudo–différentiel d'ordre m. Soit σ son symbole. Alors ${}^tP$ est un opérateur pseudo–différentiel, et le symbole ${}^t\sigma$ de ${}^tP$ a comme expansion asymptotique*

$$ {}^t\sigma(x,\xi) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha \sigma(x,-\xi) \right) $$

De plus, ${}^tP$ est proprement supporté si et seulement si P l'est.

DÉMONSTRATION. Soient $u, v \in \mathcal{D}(U)$. L'opérateur transposé ${}^tP$ de P satisfait par définition

$$ \left\langle {}^tPu, v \right\rangle = \langle Pv, u \rangle \tag{73} $$

Soit K le noyeau de distribution de P et ${}^tK$ celui de ${}^tP$. Par la formule ci dessus on a

$$ \left\langle {}^tK, v \otimes u \right\rangle = \langle K, u \otimes v \rangle $$

et par conséquent ${}^tK(x,y) = K(y,x)$. Ainsi $\operatorname{supp} {}^tK = \{(y,x) \mid (x,y) \in \operatorname{supp} K\}$, ce qui montre que $\operatorname{supp} {}^tK$ est propre si et seulement si $\operatorname{supp} K$ l'est, et que ${}^tK$ est de classe C^∞ si et seulement si K l'est. On conclut que P est proprement supporté si et seulement si ${}^tP$ l'est. C'est d'ailleurs aussi une conséquence immédiate de la proposition 3.89.
Dans un premier temps, démontrons le théorème pour le cas où P, et donc ${}^tP$, est proprement supporté. A partir de (73) on calcule

$$ \begin{aligned} \left\langle {}^tPu, v \right\rangle &= \int Pv(x)u(x)dx \\ &= \iint \chi_x(\xi)\sigma(x,\xi)\widehat{v}(\xi)u(x)đ\xi dx \\ &\overset{*}{=} \int \left(\int \chi_x(\xi)\sigma(x,\xi)u(x)dx \right) \widehat{v}(\xi)đ\xi \end{aligned} $$

La permutation des intégrales $*$ est permise, vu que $u \in \mathcal{D}(U)$ et $\widehat{v} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. La fonction g, définie par

$$ g(\xi) = \int \chi_x(\xi)\sigma(x,\xi)u(x)dx $$

est un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, vu que u est à support compact. Ainsi

$$ \left\langle {}^tPu, v \right\rangle = \int g(\xi)\widehat{v}(\xi)đ\xi = \int \widehat{g}(\xi)v(\xi)đ\xi $$

Ceci étant vrai pour tout $v \in \mathcal{D}(U)$, on a

$$
\begin{aligned}
{}^tPu(x) &= (2\pi)^{-n}\widehat{g}(x) \\
&= \int \overline{\chi}_x(\xi)g(\xi)đ\xi \\
&= \iint \overline{\chi}_x(\xi)\chi_y(\xi)\sigma(y,\xi)u(y)dyđ\xi \\
&= \iint \chi_\xi(y-x)\sigma(y,\xi)u(y)dyđ\xi \qquad (74)\\
&= \iint \chi_\xi(x-y)\sigma(y,-\xi)u(y)dyđ\xi \\
&= \iint \chi_\xi(x-y)a(x,y,\xi)u(y)dyđ\xi
\end{aligned}
$$

avec $a(x,y,\xi) = \sigma(y,-\xi)$. Comme ${}^tP$ est proprement supporté, on a

$$
{}^t\sigma(x,\xi) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{|\alpha|=k}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_y^\alpha a(x,y,\xi)\right) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{|\alpha|=k}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_x^\alpha \sigma(x,-\xi)\right)
$$

par le théorème 3.99. Que ${}^tP$ est d'ordre m est une conséquence de l'expansion ci dessus pour ${}^t\sigma$ et le théorème 3.85. Ceci démontre le théorème dans le cas d'un opérateur proprement supporté.

Le cas général peut être rendu facilement à la situation d'avant : En effet, si P est un opérateur pseudo–différentiel, alors on a par 3.100 une décomposition $P = P_0 + S$ où P_0 est proprement supporté et où S est lisse, donc $S \in \Psi^{-\infty}(U)$ par 3.92. Ainsi ${}^tP = {}^tP_0 + {}^tS$. Le noyeau de distribution de S est de classe C^∞, et donc aussi celui de ${}^tS$. Utilisant encore une fois 3.92 on trouve ${}^tS \in \Psi^{-\infty}(U)$, ce qui permet de conclure que ${}^tP$ est un opérateur pseudo–différentiel d'ordre m, et que l'expansion asymptotique pour le symbole de ${}^tP_0$ est aussi une expansion pour celui de ${}^tP$. □

Corollaire 3.102. *Soit P un opérateur pseudo–différentiel d'ordre m. Soit σ son symbole. Alors P^* est un opérateur pseudo–différentiel, et le symbole σ^* de P^* a comme expansion asymptotique*

$$
\sigma^*(x,\xi) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{|\alpha|=k}\frac{1}{\alpha!}D_\xi^\alpha D_x^\alpha\overline{\sigma(x,\xi)}\right)
$$

De plus, P^* est proprement supporté si et seulement si A l'est.

Démonstration. Similaire à la démonstration de 3.101. □

Theorème 3.103. *Soient P, Q des opérateurs pseudo–différentiels proprement supportés, soit $\sigma \in \mathrm{Symb}^m(U)$ le symbole de P et $\tau \in \mathrm{Symb}^{m'}(U)$ le symbole de Q. Alors PQ est un opérateur pseudo–différentiel proprement supporté d'ordre $m+m'$,* *et le symbole* $\lambda \in \mathrm{Symb}^{m+m'}$ *de* PQ *a comme expansion asymptotique*

$$\lambda \sim \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{|\alpha|=j} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha \sigma D_x^\alpha \tau \right)$$

Démonstration. Il fait un sens de composer P et Q vu la proposition 3.89, et la même proposition permet de conclure que PQ est proprement supporté. Par 3.101 on sait que ${}^tQ$ est un opérateur pseudo–différentiel proprement supporté. Notons ${}^t\tau$ le symbole de ${}^tQ$. Comme ${}^{tt}Q = Q$, on a

$$Qu(x) = \iint \chi_\xi(x-y)\, {}^t\tau(y,-\xi) u(y) dy đ\xi$$

vu l'expression (74). En d'autre mots

$$\widehat{Qu}(\xi) = \int \chi_\xi(-y)\, {}^t\tau(y,-\xi) u(y) dy$$

Par définition $(PQ)u$ est la transformée inverse de Fourier de $\sigma\widehat{Qu}$ par rapport à la variable ξ, c'est–à–dire

$$\begin{aligned}(PQ)u(x) &= \iint \chi_\xi(x-y)\sigma(x,\xi)\, {}^t\tau(y,-\xi) u(y) dy đ\xi \\ &= \iint \chi_\xi(x-y) a(x,y,\xi) u(y) dy đ\xi\end{aligned}$$

où $a(x,y,\xi) = \sigma(x,\xi)\, {}^t\tau(y,-\xi)$. Clairement $a \in \mathrm{Ampl}^{m+m'}(U \times U \times \mathbb{R}^n)$, et le théorème 3.99 permet alors de conclure que $PQ \in \Psi^{m+m'}(U)$, et que le symbole λ de PQ a comme expansion asymptotique

$$\lambda \sim \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} (\partial_\xi^\alpha D_y^\alpha a)(x,x,\xi) \right)$$

En insérant la définition de a on trouve

$$\begin{aligned}\lambda &\sim \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha D_y^\alpha \sigma(x,\xi)\, {}^t\tau(y,-\xi)|_{y=x} \right) \\ &\sim \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha \Big(\sigma(x,\xi) D_x^\alpha\, {}^t\tau(x,-\xi) \Big) \right) \\ &\sim \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial_\xi^\beta \sigma(x,\xi) \partial_\xi^{\alpha-\beta} D_x^\alpha\, {}^t\tau(x,-\xi) \right) \\ &\sim \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{|\beta+\gamma|=k} \frac{1}{\beta!\gamma!} \partial_\xi^\beta \sigma(x,\xi) \partial_\xi^\gamma D_x^{\beta+\gamma}\, {}^t\tau(x,-\xi) \right)\end{aligned}$$

Dans 3.101 on donnait l'expansion suivante pour ${}^t\tau(x,-\xi)$

$${}^t\tau(x,-\xi) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{|\delta|=k} \frac{(-1)^{|\delta|}}{\delta!} \partial_\xi^\delta D_x^\delta \tau(x,\xi) \right)$$

Le $(-1)^{|\delta|}$ dans cette expression provient de la "dérivée interieure". On poursuit le calcul :

$$\begin{aligned}
\lambda &\sim \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{|\beta+\gamma+\delta|=k}\frac{(-1)^{|\delta|}}{\beta!\gamma!\delta!}\partial_\xi^\beta\sigma(x,\xi)\partial_\xi^{\gamma+\delta}D_x^{\beta+\gamma+\delta}\tau(x,-\xi)\right)\\
&\sim \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{|\beta+\mu|=k}\sum_{\gamma+\delta=\mu}\frac{(-1)^{|\delta|}}{\beta!\gamma!\delta!}\partial_\xi^\beta\sigma(x,\xi)\partial_\xi^{\mu}D_x^{\beta+\mu}\tau(x,-\xi)\right)
\end{aligned}$$

Utilisant que

$$\sum_{\gamma+\delta=\mu}\frac{(-1)^{|\delta|}}{\gamma!\delta!}=\begin{cases}1 & \text{si } \mu=0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

on trouve

$$\lambda\sim\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{|\beta|=k}\frac{1}{\beta!}\partial_\xi^\beta\sigma(x,\xi)D_x^\beta\tau(x,-\xi)\right)$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Remarque 3.104. L'énnoncé du théorème 3.103 fait aussi un sens si seulement l'un parmi les opérateurs P et Q est proprement supporté, et la conclusion reste vraie dans ce cas.

9. Opérateurs pseudo–différentiels sur une variété

Si on veut définir sur une variété X de dimension n la notion de "être un truc", et si on sait déjà ce que signifie "être un truc sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$", il faut savoir faire deux choses : Transporter les trucs par des difféomorphismes entre ouverts de $\mathbb{R}^n$ et restreindre un truc T sur U en un truc $T|_V$ sur V si V est un ouvert de U. De plus, il est nécessaire que les trucs en question sont des objets *locaux* dans le sens suivant : Si $(V_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de U, et si M est un machin sur U tel que pour tout $i\in I$ la restriction M à V_i est un truc, alors le machin total M est un truc. En d'autre termes : T est un truc sur U si et seulement si tout $x\in U$ possède un voisinage ouvert V tel que $T|_V$ est un truc sur V. Voilà la définition générique :

Définition 3.105. Soit X une variété et T un machin sur X. On dit que T est un truc sur X si pour toute carte $\varphi : U \longrightarrow C$ de X le machin transporté $\varphi^*(T|_U)$ est un truc sur C.

Les trucs en question sont ici bien sûr les opérateurs pseudo–différentiels. L'importance de la localité est qu'elle fait que sur un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^n$ on ne modifie pas la définition de ce que c'est être un truc. Malhereusement, les opérateurs pseudo–différentiels ne sont pas des objets locaux comme on l'a demandé ci dessus, c'est–à–dire l'assertion

A : *Un opérateur $P : \mathcal{D}(U) \longrightarrow \mathcal{E}(U)$ est un opérateur pseudo–différentiel sur U si pour tout $x \in U$ il existe voisinage ouvert V de x dans U tel que la restriction de P à V est un opérateur pseudo–différentiel sur V.*

est fausse. On corrigera ce défaut par force brutale. Mais mettons nous d'abord en accord sur les mots *restriction de P à V*.

DÉFINITION 3.106. Soient U, V des ouverts de $\mathbb{R}^n$ avec $V \subseteq U$, et soit $P : \mathcal{D}(U) \longrightarrow \mathcal{E}(U)$ un opérateur. On appelle *réstriction de P à V* et on note $P|_V$ l'opérateur

$$\begin{aligned} P|_V : \mathcal{D}(V) &\longrightarrow \mathcal{E}(V) \\ u &\longmapsto (Pu)|_V \end{aligned}$$

REMARQUE 3.107. Il est clair que si P est un opérateur pseudo–différentiel d'ordre m sur U de symbole σ, alors sa restriction $P|_V$ est aussi un opérateur pseudo–différentiel d'ordre m, et le symbole de $P|_V$ est $\sigma|_{V\times\mathbb{R}^n}$. Il est faux en général que la restriction d'un opérateur pseudo–différentiel proprement supporté est de nouveau proprement supporté.

DÉFINITION 3.108. Soit $P : \mathcal{D}(U) \longrightarrow \mathcal{E}(U)$ un opérateur continu. On dit que P est *localement un opérateur pseudo–différentiel d'ordre m sur U* si pour tout fonctions $f, g \in \mathcal{D}(U)$ on a

$$M_f P M_g \in \Psi^m(U)$$

où M_f et M_g désignent respectivement les opérateurs "multiplication par f" et "multiplication par g". On note $\Psi^m_{\mathrm{loc}}(U)$ l'ensemble de toutes les opérateurs localement pseudo–différentiels d'ordre m sur U. On note encore

$$\Psi_{\mathrm{loc}}(U) := \bigcup_{m\in\mathbb{R}} \Psi^m_{\mathrm{loc}}(U) \qquad \text{et} \qquad \Psi^{-\infty}_{\mathrm{loc}}(U) := \bigcap_{m\in\mathbb{R}} \Psi^m_{\mathrm{loc}}(U)$$

PROPOSITION 3.109. *Tout opérateur pseudo–différentiel d'ordre m sur U est localement un opérateur pseudo–différentiel d'ordre m sur U, c'est–à–dire*

$$\Psi^m(U) \subseteq \Psi^m_{\mathrm{loc}}(U)$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer que les opérateurs M_f et M_g sont des opérateurs différentiels d'ordre 0, donc en particulier des opérateurs pseudo–différentiels proprement supportés d'ordre 0. Leurs symboles sont $(x, \xi) \longmapsto f(x)$ et $(x, \xi) \longmapsto g(x)$ respectivement. Le théorème 3.103 et la remarque 3.104 qui suit permettent de conclure. $\square$

PROPOSITION 3.110. *Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert et $P : \mathcal{D}(U) \longrightarrow \mathcal{E}(U)$ un opérateur. les assertions suivantes sont équivalentes*

I : *L'opérateur P est localement pseudo–différentiel d'ordre m sur U.*

II : *Pour tout ouvert $V \subseteq U$ on a $P|_V \in \Psi^m_{\text{loc}}(V)$.*

III : *Tout $x \in U$ admet un voisinage ouvert V tel que $P|_V \in \Psi^m_{\text{loc}}(V)$.*

IV : *Tout $x \in U$ admet un voisinage ouvert V tel que $P|_V \in \Psi^m(V)$.*

V : *Pour tout $f \in \mathcal{D}(X)$, on a $PM_f \in \Psi' m(U)$.*

DÉMONSTRATION. (I) $\Longrightarrow$ (II) : Immédiat, puisque pour tout $g, f \in \mathcal{D}(V)$ on a $M_g(P|_V)M_f = M_g P M_f$. (II) $\Longrightarrow$ (III) : C'est trivial. (III) $\Longrightarrow$ (IV) : Soit $x \in U$ et V un voisinage de x tel que $P|_V \in \Psi^m_{\text{loc}}(V)$. Soit $W \subseteq V$ un voisinage de X d'adhérence compacte dans V, et choisissons une fonction $f \in \mathcal{D}(V)$ qui vaut 1 dans un voisinage de $\overline{W}$. Par hypothèse $M_f P M_f \in \Psi^m(V)$, et comme $M_f P M_f|_W = P|_W$ on a $P|_W \in \Psi^m(W)$. (IV) $\Longrightarrow$ (V) Choisissons pour tout $x \in U$ un voisinage ouvert V_x de x tel que $P|_{V_x} \in \Psi^m(V_x)$. Pour $x, y \in X$, considérons $V_{xy} := V_x \cap V_y$. Par hypothèse les opérateurs $P|_{V_x}$ et $P|_{V_x}$ sont pseudo–différentiels. On peut donc considérer leurs symboles, disons σ_x et σ_y. L'opérateur $P|_{V_{xy}}$ est aussi pseudo–différentiel, et a comme symbole la restriction de σ_x à $V_{xy} \times \mathbb{R}^n$ ou bien aussi la réstriction de σ_y à $V_{xy} \times \mathbb{R}^n$. Ainsi σ_x et σ_y doivent coïncider sur $V_{xy} \times \mathbb{R}^n$. Pour $z \in U$ et $\xi \in \mathbb{R}^n$ il fait donc un sens de définir

$$\sigma(z, \xi) := \sigma_x(z, \xi)$$

où $x \in U$ est tel que $z \in V_x$ et où σ_x est le symbole de $P|_{V_x}$. La fonction σ sur $U \times \mathbb{R}^n$ ainsi définie est clairement un symbole d'ordre m si tout les σ_x sont d'ordre m. Soit $f \in \mathcal{D}(U)$. Comme $\operatorname{supp} f$ est compact, il existent $N \in \mathbb{N}$ et $x_1, \ldots, x_N \in U$ tels que

$$\operatorname{supp} f \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} V_i$$

où on a posé $V_i := V_{x_i}$. Moyennant une partition de l'unité on peut trouver des fonctions $f_1, \ldots, f_N$ $\operatorname{supp} f_i \subseteq V_i$ et tels que

$$f = \sum_{i=1}^{N} f_i$$

Par choix des fonctions f_i et linéarité de P on a pour tout $u \in \mathcal{D}(U)$

$$\begin{aligned} PM_f(u) &= \sum_{i=1}^{N} P(f_i u) \\ &= \sum_{i=1}^{N} P|_{V_i}(f_j u) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \int_{V_i} \chi_x(\xi)\sigma_{x_i}(x,\xi)\widehat{f_i u} đ\xi \\ &= \sum_{i=1}^{N} \int_{U} \chi_x(\xi)\sigma(x,\xi)\widehat{f_i u} đ\xi \\ &= \int_{U} \chi_x(\xi)\sigma(x,\xi)\widehat{fu} đ\xi \end{aligned}$$

ce qui montre que PM_f est en effet la composition de l'opérateur pseudo–différentiel M_f qui est d'ordre 0, et de l'opérateur pseudo–différentiel sur U qui a σ comme symbole. Le théorème 3.103 permet alors de conclure que $PM_f \in \Psi^m(U)$.
(V) $\Longrightarrow$ (I) est évident, vu que M_g est pseudo–différentiel d'ordre 0 pour tout $g \in \mathcal{D}(U)$. □

Remarque 3.111. Les opérateurs $P \in \Psi^m_{\mathrm{loc}}(U)$ ont donc l'avantage d'être des objets *locaux* au sens de l'introduction pour cette section. De manière plus snobiste la chose suivante se passe : Pour un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^n$ l'attribution

$$V \longrightarrow \Psi^m(V) \qquad\qquad V \subseteq U \text{ ouvert}$$

est un foncteur de la catégorie des ouverts de U vers la catégorie des $\mathbb{C}$–espaces vectoriels. Le foncteur Ψ^m est donc un préfaisceau, et le faisceau associé n'est rien d'autre que le foncteur Ψ^m_{loc}. En effet, la démonstration de (III) $\Longrightarrow$ (IV) de la proposition 3.110 montre que Ψ^m_{loc} est un faisceau, c'est–à–dire

$$0 \longrightarrow \Psi^m_{\mathrm{loc}}(U) \longrightarrow \prod_{V \subseteq U} \Psi^m_{\mathrm{loc}}(V) \rightrightarrows \prod_{V,V' \subseteq U} \Psi^m_{\mathrm{loc}}(V \cap V')$$

est exact, et l'équivalence (III) $\Longleftrightarrow$ (IV) montre que Ψ^m_{loc} est associé à Ψ^m. Afin d'appliquer la définition générique 3.105 il faut étudier comment se comportement les opérateurs pseudo–différentiels face au transport.

Définition 3.112. Soient $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ des ouverts et $f : V \longrightarrow U$ un difféomorphisme. Soit $P : \mathcal{D}(V) \longrightarrow \mathcal{E}(V)$ un opérateur quelconque. L'opérateur $f^*P : \mathcal{D}(U) \longrightarrow \mathcal{E}(U)$ défini par

$$(f^*P)u = P(u \circ f) \circ f^{-1} \qquad \forall u \in C^\infty(U)$$

est appelé *opérateur transporté de P via f.*

Remarque 3.113. Cette définition se visualise à l'aide du diagramme commutatif suivant, où $f^* : C^\infty(U) \longrightarrow C^\infty(V)$ est défini par $f^*(u) = u \circ f$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}(V) \arrow[r, "P"] & \mathcal{E}(V) \\ \mathcal{D}(U) \arrow[u, "f^*"] \arrow[r, "f^*P"] & \mathcal{E}(U) \arrow[u, "f^*"'] \end{tikzcd}$$

Le transport $f^* : \mathrm{Op}(\mathcal{D}(V), \mathcal{E}(V)) \longrightarrow \mathrm{Op}(\mathcal{D}(U), \mathcal{E}(U))$ est une bijection, ayant $(f^{-1})^*$ comme inverse. Un difféomorphisme est toujours une application propre. La proposition 3.89 entraine donc que l'opérateur f^*P est proprement supporté si et seulement si P l'est. Les relations

$$f^*(P+Q) = f^*P + f^*Q \tag{75}$$
$$f^*(PQ) = f^*Pf^*Q \tag{76}$$
$$f^*M_g = M_{g\circ f^{-1}} \tag{77}$$

sont évidentes.

Proposition 3.114. *Soit $f : V \longrightarrow U$ un difféomorphisme entre ouverts de $\mathbb{R}^n$, et soit $L : \mathcal{D}(V) \longrightarrow \mathcal{E}(V)$ un opérateur de noyeau de distribution $K \in C^\infty(V \times V)$. Alors le noyeau de distribution de f^*L est dans $C^\infty(U \times U)$.*

Démonstration. En effet, si

$$Pu(x) = \int_V K(x,y)v(y)dy$$

pour tout $v \in \mathcal{D}(V)$, alors on a par définition de f^*P

$$f^*Pu(x) = \int_V K(f^{-1}(x),y)u(f(y))dy$$

Faisant un changement de variables $y \rightsquigarrow f^{-1}(y)$ on trouve

$$f^*Pu(x) = \int_V J(y)K(f^{-1}(x), f^{-1}(y))u(y)dy \tag{78}$$

où $J(y)$ est la valeur absolue du jacobien en question, qui n'est jamais nul. En particulier $J(y)$ est de classe C^∞. L'equation (78) montre que le noyeau de distribution de f^*P est donné par la fonction $(x,y) \longmapsto J(y)K(f^{-1}(x), f^{-1}(y))$, qui est bien une fonction de classe C^∞. □

Remarque 3.115. Les opérateurs pseudo–différentiels se comportent bien face au transport, c'est–à–dire si P est un opérateur pseudo–différentiel proprement supporté sur V, alors f^*P est un opérateur pseudo–différentiel proprement supporté sur U dans la situation décrite auparavant. L'ordre est conservé, et on a on a une bonne formule, i.e. expansion asymptotique pour le symbôle de l'opérateur transporté. Avant d'attaquer la démonstration, voyons d'abord ce qui se passe :

Soit P un opérateur pseudo–différentiel sur V, σ son symbole et soit $f : V \longrightarrow U$ un difféomorphisme. Pour $u \in \mathcal{D}(U)$ et $x \in U$ on a

$$\begin{aligned}
f^*P(u)(x) &= P(u \circ f)(f^{-1}(x)) \\
&= \int \chi_{f^{-1}(x)}(\xi)\sigma(f^{-1}(x),\xi)\widehat{(u \circ f)}(\xi)đ\xi \\
&= \iint_V \chi_{f^{-1}(x)}(\xi)\sigma(f^{-1}(x),\xi)\overline{\chi}_\xi(y)u(f(y))dyđ\xi \\
&= \iint_V \chi_\xi\big(f^{-1}(x)-y\big)\sigma(f^{-1}(x),\xi)u(f(y))dyđ\xi \\
&= \iint_U \chi_\xi\big(f^{-1}(x)-f^{-1}(y)\big)\sigma(f^{-1}(x),\xi)u(y)J(y)dyđ\xi
\end{aligned}$$

où $J(y)$ désigne le déterminant du Jacobien de f^{-1} en $y \in U$. Si on pose

$$\Phi(x,y,\xi) := \big\langle f^{-1}(x) - f^{-1}(y)\ ,\ \ \xi\ \big\rangle \tag{79}$$

et

$$a(x,y,\xi) := J(y)\sigma(f^{-1}(x),\xi) \tag{80}$$

on obtient

$$f^*P(u)(x) = \iint e^{i\Phi(x,y,\xi)}a(x,y,\xi)u(y)dyđ\xi \tag{81}$$

On va montrer dans la suite que les opérateurs de la forme (81) sont, sous des conditions qu'on impose à Φ et a, des opérateurs pseudo–différentiels.

Remarque 3.116. La fonction $\Phi(x,y,\xi)$ définie dans (79) est une fonction de phase. En effet, Φ est différentiable sur tout $U \times U \times \mathbb{R}^n$ et linéaire en ξ, et satisfait alors les conditions (I) et (II) de la définition 3.61. Quant à la condition (III), on a

$$\operatorname{grad}_{x,y,\xi}\Phi = \big(\operatorname{grad}_x\Phi, \operatorname{grad}_y\Phi, \operatorname{grad}_\xi\Phi\big)$$

et

$$\operatorname{grad}_x\Phi(x,y,\xi) = D_xf^{-1}(x)(\xi)$$

Comme f^{-1} est un difféomorphisme, la dérivée totale de f^{-1} est inversible en tout $x \in U$, et donc

$$\operatorname{grad}_x\Phi(x,y,\xi) = D_xf^{-1}(x)(\xi) = 0 \iff \xi = 0 \tag{82}$$

ce qui montre que Φ est une fonction de phase.

Lemme 3.117. *Soit Φ une fonction de phase sur $U \times U \times \mathbb{R}^n$ telle que*

I : *Pour tout $x, y \in U \times U$ l'application $\xi \longmapsto \Phi(x,y,\xi)$ est linéaire.*

II : $\operatorname{grad}_\xi\Phi(x,y,\xi) = 0$ *si et seulement si $x = y$.*

Alors il existe un voisinage V de la diagonale $\Delta \subseteq U \times U$ et une application indéfiniment dérivable $\psi : V \longrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ telle que

$$\Phi\big(x, y, \psi(x,y)\xi\big) = \langle x - y, \xi \rangle \tag{83}$$

pour tout $(x,y) \in V$, et de plus telle que

$$\det \psi(x,x) \cdot \det M(x,x) = 1 \tag{84}$$

pour tout $x \in U$, où $M(x,y)$ est la matrice $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j, \leq n}$ définie par

$$m_{ij}(x,y) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial \xi_j}(x,y,\xi) \tag{85}$$

Démonstration. Remarquons d'abord que la définition (85) fait un sens, puisque Φ est linéaire en la variable ξ, et le membre de droite de (85) est alors indépendent de ξ. Soit $e_1, \ldots, e_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et soit $e_1^*, \ldots, e_n^*$ la base duale. On a

$$\Phi(x,y,\xi) = \sum_{k=1}^{n} \Phi(x,y,e_k) e_k^*(\xi)$$

et alors

$$m_{ij}(x,y) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x,y,e_k) \underbrace{\frac{\partial e_k^*}{\partial \xi_j}(\xi)}_{\delta_{jk}} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x,y,e_j)$$

On a

$$\operatorname{grad}_x \Phi(x,y,\xi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(x,y,\xi) \\ \vdots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(x,y,\xi) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(x,y,e_k) e_k^*(\xi) \\ \vdots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(x,y,e_k) e_k^*(\xi) \end{pmatrix} = M(x,y) \cdot \xi$$

Par l'hypothèse (II) on a $\Phi(x,x,e_j) = 0$ pour tout $x \in U$ et tout $1 \leq j \leq n$, et donc $\Phi(x,x,\xi) = 0$ pour tout $x \in U$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^n$. Ainsi on trouve

$$0 = \operatorname{grad}_x \big(\Phi(x,x,\xi)\big) = \operatorname{grad}_x \Phi(x,y,\xi)|_{x=y} + \operatorname{grad}_y \Phi(x,y,\xi)|_{x=y}$$

et on a en particulier l'équivalence

$$\operatorname{grad}_x \Phi(x,x,\xi) = 0 \iff \operatorname{grad}_y \Phi(x,x,\xi) = 0$$

Comme Φ est une fonction de phase, on a (définition 3.61, condition (III)) que $\operatorname{grad}_{x,y,\xi} \Phi(x,y,\xi) \neq 0$ si $\xi \neq 0$ et on a alors des implications

$$\begin{aligned} & \xi \neq 0 \text{ et } \operatorname{grad}_\xi \Phi(x,x,\xi) = 0 \\ \Longrightarrow \quad & \operatorname{grad}_x \Phi(x,x,\xi) \neq 0 \text{ ou } \operatorname{grad}_y \Phi(x,x,\xi) \neq 0 \\ \Longrightarrow \quad & \operatorname{grad}_x \Phi(x,x,\xi) \neq 0 \end{aligned}$$

En vertu de l'hypothèse (II), ceci est

$$\xi \neq 0 \implies \operatorname{grad}_x \Phi(x,x,\xi) = \xi_k^*\Big(M(x,x) \cdot \xi\Big) \neq 0$$

ce qui permet de conclure que la matrice $M(x,x)$ est non singulière pour tout $x \in U$. Par un développement de Taylor de premier ordre, on peut trouver des fonctions $s_{ij}(x,y)$ sur $U \times U$ telles que

$$\Phi(x,y,e_j) = \sum_{i=1}^{n} s_{ij}(x,y) e_i^*(x-y) \qquad \text{et} \qquad m_{ij}(x,x) = s_{ij}(x,x)$$

pour tout $x, y \in U$. Notons $S(x,y)$ la matrice $S = (s_{ij})_{1 \le i,j \le n}$. On a par définition $\det M(x,x) = \det S(x,x)$ pour tout $x \in U$, et en particulier $\det S(x,x) \neq 0$ pour tout $x \in U$. La fonction $(x,y) \longrightarrow \det S(x,y)$ étant continue, il existe un voisinage V de la diagonale $\Delta \subseteq U \times U$ tel que $\det S(x,y) \neq 0$ pour tout $(x,y) \in V$. Pour tout $(x,y) \in V$ posons $\psi(x,y) = S(x,y)^{-1}$. La fonction $\psi : V \longrightarrow \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ satisfait par construction (83), mais aussi (84) : En effet

$$\begin{aligned}
\Phi(x,y,\psi(x,y)\xi) &= \sum_{j=1}^{n} \Phi(x,y,e_j) e_j^*(\psi(x,y)\xi) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} s_{ij}(x,y) e_i^*(x-y) \sum_{k=1}^{n} \psi_{jk}(x,y) e_k^*(\xi) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} s_{ij}(x,y)\psi_{jk}(x,y)\right)}_{=\delta_{ik}} e_i^*(x-y) e_k^*(\xi) \\
&= \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x-y) e_i^*(\xi) \\
&= \langle x-y, \xi \rangle
\end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration. □

Theorème 3.118. *Soit* $\sigma \in \mathrm{Ampl}^m(U \times U \times \mathbb{R}^n)$ *et soit* Φ *une fonction de phase sur* $U \times U \times \mathbb{R}^n$ *telle que*

I : $\Phi(x,y,\xi)$ *est linéaire en* ξ.

II : $\mathrm{grad}_\xi \Phi(x,y,\xi) = 0$ *si et seulement si* $x = y$

Si l'opérateur de Fourier $T = T_\Phi(\sigma)$*, donné par*

$$Tu(x) = \iint e^{i\Phi(x,y,\xi)} \sigma(x,y,\xi) u(y) dy d\xi$$

est proprement supporté, alors il est un opérateur pseudo–différentiel d'ordre m.

Démonstration. Soit K le noyeau de distribution de T. On sait que K est la distribution de Fourier sur $U \times U$ donnée par la phase Φ et l'amplitude σ. Par le théorème 3.71 on a $\operatorname{sing\,supp} K \subseteq S_\Phi$ où

$$S_\Phi := \overline{\left\{(x,y) \in U \times U \;\middle|\; \exists \xi \in \mathbb{R}^N \text{ avec } \mathrm{grad}_\xi \Phi(x,y,\xi) = 0\right\}}$$

Par l'hypothèse (II), on a alors $\operatorname{sing\,supp} K \subseteq \Delta$ où $\Delta \subseteq U \times U$ est la diagonale. Par le lemme 3.117 il existe un voisinage V de la diagonale Δ et une fonction $\psi : V \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $\Phi(x,y,\psi(x,y)\xi) = \langle x-y, \xi\rangle$ pour tout $(x,y) \in V$. Choisissons une fonction proprement supportée $\varphi :\in C^\infty(U \times U)$ qui vaut 1 sur un voisinage de Δ et 0 en dehors de V. Posons

$$\begin{aligned}
P_1 u(x) &= \iint e^{i\Phi(x,y,\xi)} \varphi(x,y)\sigma(x,y,\xi) u(y) dy d\xi \\
P_2 u(x) &= \iint e^{i\Phi(x,y,\xi)} (1-\varphi(x,y))\sigma(x,y,\xi) u(y) dy d\xi
\end{aligned}$$

Dans l'expression intégrale pour l'opérateur P_1 on peut faire le changement de variables $\xi \rightsquigarrow \psi(x,y)\xi$. On obtient

$$\begin{aligned} P_1u(x) &= \iint e^{i\Phi(x,y,\psi(x,y)\xi)}\varphi(x,y)\sigma(x,y,\xi)u(y)dyd\xi \\ &= \iint e^{i\langle x-y,\xi\rangle}|\det\psi(x,y)|\varphi(x,y)\sigma(x,y,\psi(x,y)\xi)u(y)dyd\xi \\ &= \iint e^{i\langle x-y,\xi\rangle}\tau(x,y,\xi)u(y)dyd\xi \end{aligned}$$

Le terme $|\det\psi(x,y)|$ qui provient du jacobien pour le changement de variables $\xi \rightsquigarrow \psi(x,y)\xi$ est une fonction de classe C^∞ puisque $\det\psi(x,y)$ ne s'annulle jamais, et on a posé

$$\tau(x,y,\xi) := |\det\psi(x,y)|\varphi(x,y)\sigma(x,y,\psi(x,y)\xi)$$

Comme σ est une amplitude d'ordre m, et vu la proposition 3.56, τ est une amplitude d'ordre m. De plus

$$\Sigma_\tau := \{(x,y) \in U \times U \mid \exists\xi \in \mathbb{R}^n \text{ avec } \tau(x,y,\xi) \in \operatorname{supp}\tau\} \subseteq \operatorname{supp}\varphi$$

est propre. Le lemme 3.98 permet de conclure que P_1 est proprement supporté, et par le théorème 3.99 on a finalement $P_1 \in \Psi^m(U)$.
Reste à voir que P_2 est un opérateur pseudo–différentiel d'ordre pas plus grand que m. En effet, on montrera que $P_2 \in \Psi^{-\infty}(U)$. Le noyeau de distribution K_2 de P_2 est donné par $K_2 = (1-\varphi)K$, se qui montre que P_2 est proprement supporté, et que de plus $K_2 \in C^\infty(U \times U)$. On a donc

$$P_2u(x) = \int K_2(x,y)u(y)dy$$

Comme $\operatorname{supp} K_2$ est propre, K_2 satisfait en particulier l'hypothèse (H) de la proposition 3.82, et on a donc $P_2 \in \Psi^{-\infty}(U)$. □

REMARQUE 3.119. Cette démonstration montre que même sans supposer que T soit proprement supporté, il est toujours possible d'écrire T comme $T = P_1 + P_2$ où P_1 est un opérateur pseudo–différentiel, et où P_2 est un opérateur de noyeau $K_2 \in C^\infty(U \times U)$ construit comme auparavant.

COROLLAIRE 3.120. *Soit $f : V \longrightarrow U$ un difféomorphisme entre ouverts de $\mathbb{R}^n$, et soit P un opérateur pseudo–différentiel proprement supporté sur V. Alors f^*P est un opérateur pseudo–différentiel proprement supporté sur U.*

DÉMONSTRATION. Cela resulte de la remarque 3.116, du théorème 3.118, et du fait que f^*P est proprement supporté si et seulement si P l'est. □

COROLLAIRE 3.121. *Soit $f : V \longrightarrow U$ un difféomorphisme entre ouverts de $\mathbb{R}^n$, et soit P un opérateur pseudo–différentiel sur V et soit L un opérateur de noyeau* *de distribution de classe C^∞. Alors $f^*(P+L)$ s'écrit comme somme d'un opérateur pseudo–différentiel proprement supporté sur U et d'un opérateur de noyeau de distribution de classe C^∞.*

Démonstration. Par le corollaire 3.100 on peut écrire $P = P_1 + L'$, où P_1 est un opérateur proprement supporté et où L' est un opérateur lisse, donc de noyeau de distribution C^∞. Le corollaire 3.120 appliqué à P_1 et la proposition 3.114 apliquée à $L'+L$ permettent de conclure. □

Proposition 3.122. *Soient U, V des ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $f : V \longrightarrow U$ un difféomorphisme. Soit P un opérateur pseudo–différentiel proprement supporté sur V de symbole σ, et notons $f^*\sigma$ le symbole de f^*P. Alors il existe un symbole $\tau \in \mathrm{Symb}^{m-1}(U)$ tel que*

$$f^*\sigma(x,\xi) = \tau(x,\xi) + \sigma\big(f^{-1}(x), ({}^tJ(x))^{-1}\xi\big)$$

où $J(x)$ est le jacobien de f^{-1} en x.

Démonstration. L'opérateur f^*P est donné sous forme intégrale par les equations (79), (80), et (81), c'est–à–dire pour $u \in \mathcal{D}(U)$ et $x \in U$ on a

$$f^*P(u)(x) = \iint e^{\Phi(x,y,\xi)} a(x,y,\xi) u(y) dy đ\xi$$

avec

$$\Phi(x,y,\xi) := \big\langle f^{-1}(x) - f^{-1}(y)\ ,\ \xi \big\rangle \qquad \text{et} \qquad a(x,y,\xi) := |\det J(y)| \sigma(f^{-1}(x),\xi)$$

et où $J(y)$ désigne le Jacobien de $f^{-1} : U \longrightarrow V$. Dans la démonstration de 3.118 on a scindé f^*P en une somme $f^*P = P_1 + P_2$ où $P_2 \in \Psi^{-\infty}(U)$. Il suffit donc de montrer que l'expansion donnée est une expansion de P_1. Cet opérateur P_1 est donné par

$$P_1 u(x) = \iint e^{i\langle x-y,\xi\rangle} b(x,y,\xi) u(y) dy d\xi$$

L'amplitude b est donnée par

$$b(x,y,\xi) := |\det \psi(x,y)| \varphi(x,y) a(x,y,\psi(x,y)\xi)$$

où $\varphi \in C^\infty_{00}(U \times U)$ est égal à 1 dans un voisinage de la diagonale, ψ une fonction matricielle ayant les propriétés ennoncées dans le lemme 3.117. On a donc

$$b(x,y,\xi) := |\det \psi(x,y)| \varphi(x,y) |\det J(y)| \sigma(f^{-1}(x), \psi(x,y)\xi)$$

Par le théorème 3.99, et vu que Σ_b est propre on a une expansion asymptotique

$$\begin{aligned} f^*\sigma \quad &\sim \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} (\partial_\xi^\alpha D_y^\alpha b)(x,x,\xi) \right) \\ &\sim \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha D_y^\alpha |\det \psi(x,y)| |\det J(y)| \sigma(x,\psi(x,y)\xi) \right) \Bigg|_{x=y} \end{aligned} \tag{86}$$

Dans l'expression (86) on a pu omettre $\varphi(x,y)$, puisque cette fonction est constante égale à 1 près de la diagonale. Un terme

$$\sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_y^\alpha |\det\psi(x,y)||\det J(y)|\sigma(x,\psi(x,y)\xi)\Bigg|_{x=y}$$

de la somme (86) est bien un symbole d'ordre $m-|\alpha|$ vu 3.56, et pour $k=0$ ce terme vaut $\sigma(f^{-1}(x),(\,^tJ(x))^{-1}\xi)$, vu que $\psi(x,x)=(\,^tJ(x))^{-1}$. Il suffit donc de poser

$$\tau(x,\xi)=f^*\sigma(x,\xi)-\sigma\big(f^{-1}(x),(\,^tJ(x))^{-1}\xi\big)$$

Le symbole τ est d'ordre $m-1$ par définition de l'être expansion asymptotique, ce qui achève la démonstration. □

Remarque 3.123. La proposition 3.122 n'est qu'une version bien marchée (mais amplement suffisante pour nos besoins futurs) du théorème suivant :

Theorème 3.124. *Soient U,V des ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $f:V\longrightarrow U$ un difféomorphisme. Soit P un opérateur pseudo–différentiel proprement supporté sur V de symbole σ, et notons $f^*\sigma$ le symbole de f^*P. Soit $J(x)$ le jacobien de f^{-1} en $x\in U$. Alors*

$$f^*\sigma(x,\xi)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{|\alpha|=k}\frac{1}{\alpha!}\sigma^{(\alpha)}\big(f^{-1}(x),(\,^tJ(x))^{-1}\xi\big)\cdot p_\alpha(x,\xi)\right)$$

où on a noté $\sigma^{(\alpha)}(y,\eta)=\partial_\eta^\alpha\sigma(y,\eta)$, et où p_α est donné par

$$p_\alpha(x,\xi)=D_z^\alpha e^{ig(x,z)\eta}\Big|_{x=z}$$

avec $g(x,z)=f(x)-f(z)-Df(x)(z-x)$.

Démonstration. Je renvois à Shubin, **[20]** Ch.1, §4.2. La démonstration de ce resultat consiste en un calcul direct des termes de (86). Les $p_\alpha(x,\xi)$ sont en fait des polynômes en ξ de degré inferieur à $|\alpha|/2$, puisque pour un $x\in U$ fixé, la fonction $z\longmapsto g(x,z)$ a un zéro double en $z=x$. □

Remarque 3.125. Notons pour un instant $\Lambda(U)$ l'espace de tout les opérateurs $L:\mathcal{D}(U)\longrightarrow\mathcal{E}(U)$ qui ont un noyeau de distribution de classe C^∞. On sait déjà que

$$\Lambda(U)\cap\Psi(U)=\Psi^{-\infty}(U) \tag{87}$$

mais il est faux que $\Lambda(U)\subseteq\Psi(U)$. Dans l'espace des opérateurs continus $\mathrm{Op}(\mathcal{D}(U),\mathcal{E}(U))$ considérons la somme (non directe)

$$\widetilde{\Psi}^m(U):=\Lambda(U)+\Psi^m(U)$$

qui contient donc $\Psi(U)$ de manière stricte. Tout élément $\widetilde{P}\in\widetilde{\Psi}(U)$ s'écrit comme $\widetilde{P}=L+P$, avec $L\in\Lambda(U)$ et $P\in\Psi^m(U)$. On appelle *symbôle de $\widetilde{P}$* la classe modulo $\mathrm{Symb}^{-\infty}(U)$ du symbôle de P, ce qui est bien défini, justement a cause de (87). Le corollaire 3.121 montre que pour un difféomorphisme $f : V \longrightarrow U$, l'application de transport

$$f^* : \widetilde{\Psi}^m(V) \longrightarrow \widetilde{\Psi}^m(U)$$

est une bijection. Enfin, remarquons encore que

$$\widetilde{\Psi}^m(U) \subseteq \Psi^m_{\mathrm{loc}}(U) \tag{88}$$

En effet, si $L \in \Lambda(U)$ et si $f, g \in \mathcal{D}(U)$, alors il est clair que $M_g L M_f \in \Lambda(U)$ et que $M_g L M_f$ est proprement supporté. Ainsi $M_g L M_f \in \Psi^{-\infty}(U)$, ce qui entraine (88).

Proposition 3.126. *Soit $f : V \longrightarrow U$ un difféomorphisme entre ouverts de $\mathbb{R}^n$. Alors $f^* : \Psi^m_{\mathrm{loc}}(V) \longrightarrow \Psi^m_{\mathrm{loc}}(U)$ est une bijection.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $f^*P \in \Psi^m_{\mathrm{loc}}(U)$ pour tout $P \in \Psi^m_{\mathrm{loc}}(V)$. En effet, soient $P \in \Psi^m_{\mathrm{loc}}(V)$ et $g, h \in \mathcal{D}(V)$. On a

$$M_h f^* P M_g = f^*(M_{h\circ f} P M_{g\circ f})$$

Comme $M_{h\circ f} P M_{g\circ f}$ est un opérateur pseudo–différentiel proprement supporté et d'ordre m sur V par hypothèse, on a que $M_h f^* P M_g$ est une est un opérateur pseudo–différentiel d'ordre m sur U par le corollaire 3.120. $\square$

Définition 3.127. Soit X une variété différentiable et $(\varphi_i : U_i \longrightarrow C_i)_{i\in I}$ un atlas de X. Un opérateur $P : \mathcal{D}(X) \longrightarrow \mathcal{E}(X)$ est dit *localement opérateur pseudo–différentiel d'ordre m sur X* si pour tout $i \in I$, on a

$$\varphi^*(P|_{\mathcal{D}(U_i)}) \in \Psi^m_{\mathrm{loc}}(C)$$

On note $\Psi^m_{\mathrm{loc}}(X)$ l'ensemble de toutes les opérateurs localement pseudo–différentiels d'ordre m sur X, et

$$\Psi_{\mathrm{loc}}(X) := \bigcup_{m\in\mathbb{R}} \Psi^m_{\mathrm{loc}}(X) \qquad \text{et} \qquad \Psi^{-\infty}_{\mathrm{loc}}(X) := \bigcap_{m\in\mathbb{R}} \Psi^m_{\mathrm{loc}}(X)$$

Remarque 3.128. Si aucune confusion ne parait possible on note $\Psi^m(X)$ au lieu de $\Psi_{\mathrm{loc}}(X)$ et on parle d'opérateurs pseudo–différentiels sur X.

Remarque 3.129. Soit X une variété différentiable et $P \in \Psi^m_{\mathrm{loc}}(X)$. Il ne fait plus de sens de parler du symbole de de P, mais on peut récupérer les symboles "localement", comme la démonstration de 3.110 le sugère : Considérons $x \in X$ et $\varphi : U \longrightarrow C$ une carte avec $x \in U$. Soit $V \subseteq U$ un voisinage de x d'adhérence compacte dans U et soient $f, g \in \mathcal{D}(X)$ tels que $f(x) = g(x) = 1$ pour $x \in \overline{V}$ et $f(x) = (gx) = 0$ en dehors de U. Soit σ_V le symbole de l'opérateur transporté

$$\varphi^*(M_g P M_f)|_{\varphi(V)} \in \Psi^m(\varphi(V))$$

Il faut évidemment considérer le "symbole" $\sigma : TU \longrightarrow \mathbb{C}$ défini par

$$\sigma(x,\xi) = \sigma_V(\varphi(x),\ {}^tJ(x)\xi)$$

où TU est le fibré tangent[2] de U. La fonction σ dépend de g et de f, même si f et g valent 1 sur V, c'est parce que P n'est pas un opérateur local. Mais le théorème 3.103 et la proposition 3.122 montrent que la classe de σ modulo des symboles d'ordre $m-1$ ne dépend pas de g et f, ni de la carte $\varphi : U \longrightarrow V$. En recollant ces classes sur tout X, on trouve

$$[\sigma] \in \frac{\mathrm{Symb}^m(X)}{\mathrm{Symb}^{m-1}(X)}$$

Voilà les définitions précises :

Définition 3.130. Soit X une variété différentiable de dimension n et $m \in \mathbb{R}$. Une fonction différentiable $\sigma : TX \longrightarrow \mathbb{C}$ s'appelle *symbole d'ordre m sur X* si pour toute carte $\varphi : U \longrightarrow C$ de X la fonction

$$\tau : TC = C \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$$

est un symbole d'ordre m sur C. On note $\mathrm{Symb}^m(X)$ l'ensemble de tout les symboles d'ordre m sur X.

Remarque 3.131. On vérifie facilement que cette définition fait du sens, et que les propriétés évidentes des symboles sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ restent vraies dans ce cadre plus général, notamment $\mathrm{Symb}^m(X)$ est un $\mathbb{C}$–espace vectoriel pour tout m, et $\mathrm{Symb}(X)$ est une $\mathbb{C}$–algèbre. On a toujours $\sigma\tau \in \mathrm{Symb}^{m+m'}(X)$ si $\sigma \in \mathrm{Symb}^m(X)$ et $\tau \in \mathrm{Symb}^{m'}(X)$, et $\mathrm{Symb}^{-\infty}(X)$ est un idéal de $\mathrm{Symb}(X)$.
Il est par contre faux qu'un symbole $\sigma \in \mathrm{Symb}^m(X)$ définit un opérateur pseudo–différentiel sur X, sans qu'on ait donné quelques informations supplémentaires.

Définition 3.132. Soit X une variété et $P \in \Psi^m_{\mathrm{loc}}(X)$. Pour tout $x \in X$ soit $\varphi_x : U_x \longrightarrow C_x$ une carte de X contenant x et soit V_x un voisinage compact de x dans U_x. Soit $f_x \in C^\infty_{00}(U_x)$ une fonction qui vaut 1 sur V_x. Soit $Q_x \in \Psi^m_{\mathrm{loc}}(C_x)$ l'opérateur transporté

$$Q_x = \varphi_x^*(PM_f|_{U_x}) = \varphi_x^*(P|_{U_x})M_{f\circ\varphi_x^{-1}}$$

Quitte à choisir V_x suffisamment petit, on peut supposer que $Q_x|_{\varphi(V_x)}$ est un élément de $\Psi^m(\varphi(V_x))$ (proposition 3.110). Soit $\sigma_x \in \mathrm{Symb}^m(\varphi_x(V_x))$ le symbole de $Q_x|_{\varphi(V_x)}$. La classe du symbole σ_x modulo des symboles d'ordre $\leq m-1$ est indépendente de la fonction f_x, par le théorème 3.103. Choisissons finalement une partition de l'unité $(\eta_x)_{x\in X}$ de X telle que

I : $\operatorname{supp}\eta_x \subseteq V_x$ pour tout $x \in X$.

[2]En fait il faudra prendre le fibré cotangent, puisque on a la transposée du jacobien, et non simplement le jacobien dans la formule pour le symbole de l'opérateur transporté. Mais ici, et dans toute la suite, nous identifierons systématiquement le fibré tangent avec le fibré cotangent.

II : Tout $x \in X$ admet un voisinage W tel que $\{x \in X | \operatorname{supp} \eta_x \cap W \neq \varnothing\}$ est fini.

III : $\displaystyle\sum_{x \in X} \eta_x = 1$.

On appelle alors *symbole complét de* P le symbole $\sigma \in \operatorname{Symb}^m(X)$ défini par

$$\sigma(x, \xi) = \sum_{y \in X} \eta_y(x) \sigma_y\big(\varphi(x),\ {}^tJ(x)\xi\big)$$

Le symbole complét dépend du choix des fonctions $(f_x)_{x \in X}$. On appelle *symbole de* P ou encore *symbole global de* P la classe modulo $\operatorname{Symb}^{m-1}(X)$ du symbole complét de X. Cette classe est indépendante de tout choix.

Remarque 3.133. Par la construction du symbole ci dessus, il est clair que si on a deux opérateurs P et $Q \in \Psi^m_{\mathrm{loc}}(X)$ tels que $P - Q \in \Psi^{m-1}_{\mathrm{loc}}(X)$, alors leurs symboles globaux coïncident. On a donc un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\frac{\Psi^m_{\mathrm{loc}}(X)}{\Psi^{m-1}_{\mathrm{loc}}(X)} \longrightarrow \frac{\operatorname{Symb}^m(X)}{\operatorname{Symb}^{m-1}(X)}$$

qui à la classe d'un opérateur $P \in \Psi^m_{\mathrm{loc}}(X)$ associe le symbole global de P. De plus, on sait que si $\sigma \in \operatorname{Symb}^m(X)$ represente le symbole global de P, et si $\tau \in \operatorname{Symb}^m(X)$ represente le symbole global d'un autre opérateur $Q \in \Psi^{m'}(X)$, alors le produit $\sigma\tau$ represente le symbole global de PQ, qui est un élément de $\operatorname{Symb}^{m+m'}(X) / \operatorname{Symb}^{m+m'-1}(X)$.
Plus tard on aimerait bien, étant donné $\sigma \in \operatorname{Symb}^m(X)$ construire un opérateur P sur X ayant la classe de σ comme symbole. A ce fin, voyons maintenant comment de manière générale recoller des opérateurs sur X.

Définition 3.134. Soit X une variété différentiable et $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de X. Pour tout $i \in I$ soir P_i un opérateur

$$P_i : \mathcal{D}(U_i) \longrightarrow \mathcal{E}(U_i)$$

Soit $(\eta_i)_{i \in I}$ une partition de l'unité de X comme suit :

I : $\operatorname{supp} \eta_i \subseteq U_i$ pour tout $i \in I$.

II : Tout $x \in X$ a un voisinage V tel que $\{i \in I | \operatorname{supp} \eta_i \cap V \neq \varnothing\}$ est fini.

III : $\displaystyle\sum_{i \in I} \eta_i = 1$.

De plus, choisissons des fonctions $(\vartheta_i)_{i \in I}$ tels que

I : $\operatorname{supp} \vartheta_i \subseteq U_i$ pour tout $i \in I$.

II : Tout $x \in X$ a un voisinage V tel que $\{i \in I | \operatorname{supp} \vartheta_i \cap V \neq \varnothing\}$ est fini.

III : $\vartheta(x) = 1$ si $x \in \operatorname{supp} \eta_i$.

l'opérateur $P = \mathcal{D}(X) \longrightarrow \mathcal{E}(X)$ défini par

$$P = \sum_{i \in I} M_{\vartheta_i} P M_{\eta_i}$$

s'appelle *recollement de la famille d'opérateurs* $(P_i)_{i \in I}$.

Remarque 3.135. Soit X une variété différentiable et $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de X, et soient $(\eta_i)_{i\in I}$ et $(\vartheta_i)_{i\in I}$ comme dans la définition. Alors le recollement d'une famille d'opérateurs dépend en général de ces fonctions, et si P est un opérateur sur X et P_i la restriction de P à U_i, alors le recollement des P_i, notons le P', est en général différent de P. Le problème est que si U_i et U_j sont disjoints, alors la fonction $P'u$ considérée sur U_i est complètement indépendent de ce que fait u sur U_j, en particulier $P'u$ est nul sur U_i si $\operatorname{supp} u \subseteq U_j$. Bien sûr que que P n'a pas cette propriété en général.

Proposition 3.136. *Soit X une variété différentiable et $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de X, et soient $(\eta_i)_{i\in I}$ et $(\vartheta_i)_{i\in I}$ comme dans la définition 3.134. Soit $P : \mathcal{D}(X) \longrightarrow \mathcal{E}(X)$ est un opérateur sur X et P_i la restriction de P à U_i. Supposons que P soit local, dans le sens*

$$\operatorname{supp} Pu \subseteq \operatorname{supp} u \qquad \textit{pour tout } u \in \mathcal{D}(X)$$

Alors le recollement des P_i est égal à P, et ne dépend en particulier pas des fonctions $(\eta_i)_{i\in I}$ et $(\vartheta_i)_{i\in I}$.

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{D}(X)$. On a, vu la linéarité de P et les propriétés des fonctions $(\eta_i)_{i\in I}$ que

$$Pu = P\left(\sum_{i\in I} \eta_i u\right) = \sum_{i\in I} P(\eta_i u)$$

Par hypothèse on a $\operatorname{supp} P(\eta_i u) \subseteq \operatorname{supp} \eta_i u \subseteq \operatorname{supp} \eta_i$. Comme ϑ_i vaut 1 sur $\operatorname{supp} \eta_i$, on a $P(\eta_i u) = \vartheta_i P(\eta_i u)$ et donc

$$Pu = \sum_{i\in I} \vartheta_i P(\eta_i u)$$

ce qui montre que P est le recollement des opérateurs $(P_i)_{i\in I}$. □

Proposition 3.137. *Soit X une variété différentiable, $P \in \Psi^m_{\mathrm{loc}}(X)$ et $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de X, et soient $(\eta_i)_{i\in I}$ et $(\vartheta_i)_{i\in I}$ comme dans la définition 3.134. Soit P_i la restriction de P à U_i et P' le recollement des $(P_i)_{i\in I}$. Alors $P - P'$ est lisse, et en particulier $P' \in \Psi^m_{\mathrm{loc}}(X)$.*

Démonstration. Par la proposition 3.110 il suffit de montrer que pour tout $x \in X$ on peut trouver un voisinage V de x tel que $P'|_V$ est pseudo–différentiel sur V. Pour $x \in X$, choisissons V tel que $J := \{i \in I \,|\, \operatorname{supp} \vartheta_i \cap V \neq \varnothing\}$ soit fini. l'opérateur $P'|_V$ s'écrit donc comme

$$P'|_V = \sum_{j\in J} (M_{\vartheta_j} P_j M_{\eta_j})|_V$$

Mais, aussi par la proposition 3.110 on sait que $(M_{\vartheta_j} P_j M_{\eta_j})|_V$ est pseudo–différentiel pour tout $j \in J$. Comme J est fini, $P'|_V$ est une somme finie d'opérateurs pseudo–différentiels, donc un opérateur pseudo–différentiel.
Afin de montrer que $P - P'$ est lisse, il suffit de trouver pour tout $x \in X$ un voisinage V de x tel que $(P - P')|_V$ est lisse sur V. Choisissons cette fois ci V tel

que $J := \{i \in I | \operatorname{supp} \eta_i \cap V \neq \varnothing\}$ soit fini. Comme la propriété "être lisse" est conservée lors du transport, et vu la proposition 3.110 on peut supposer que V est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et que P est un opérateur pseudo–différentiel (global) sur V. On a, restrictions à V sousentendues

$$\begin{aligned} P - P' &= P - \sum_{j \in J} M_{\vartheta_j} P_j M_{\eta_j} \\ &= \sum_{j \in J} P M_{\eta_j} - \sum_{j \in J} M_{\vartheta_j} P_j M_{\eta_j} \\ &= \sum_{j \in J} (1 - M_{\vartheta_j}) P M_{\eta_j} \end{aligned}$$

Soit maintenant $u \in \mathcal{D}'(V)$ et $y \in \operatorname{sing\,supp} P M_{\eta_j} u$. Par la propriété de pseudo–localité de P (proposition 3.94) on a dans ce cas $y \in \operatorname{sing\,supp} M_{\eta_j} u$ et donc en particulier $y \in \operatorname{supp} \eta_j$. Mais si $y \in \operatorname{supp} \eta_j$, alors $1 - \vartheta_j(y) = 0$, puisque ϑ_j vaut 1 sur $\operatorname{supp} \eta_j$. Ainsi, le support singulier de $M_{\vartheta_j} P M_{\eta_j} u$ est vide, et par conséquent $P - P'$ un opérateur lisse. $\square$

10. Généralisation à des fonctions à valeurs vectoriels

DÉFINITION 3.138. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et posons $E := U \times \mathbb{R}^k$ et $F := \mathbb{R}^l$. Notons $e_1^*, \dots, e_k^*$ la base duale de sections canonique de E, et $f_1^*, \dots, e_l^*$ celle de F. Un opérateur $P : \mathcal{D}(U, E) \longrightarrow \mathcal{E}(U, F)$ est dit *opérateur pseudo–différentiel (local) d'ordre* m si l'opérateur

$$P_{ij} : u \longmapsto f_i^* P(e_j^* u)$$

est un opérateur pseudo–différentiel (local) d'ordre m pour tout $1 \leq i \leq l$ et tout $1 \leq j \leq k$. La matrice (P_{ij}) s'appelle *matrice de* P et les P_{ij} s'appellent *composantes de* P, tout relatif aux bases $e_1, \dots, e_k$ et $f_1, \dots, f_l$.
Soit σ_{ij} le symbole de P_{ij}. On appelle *symbole de* P l'application

$$\sigma : U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l)$$

dont la matrice exprimée dans les bases $e_1, \dots, e_k$ et $f_1, \dots, f_l$ vaut (σ_{ij}).

REMARQUE 3.139. La proposition 3.56 montre que cette définition est indépendante du choix des bases, c'est–à–dire si les composantes de P dans une certaine base sont tous des opéarateurs d'ordre m, alors les composantes de P par rapport à n'importre quelle autre base le sont aussi.

DÉFINITION 3.140. Soit X une variété différentiable de dimension n et soient E, F des fibrés vectoriels réels sur X. Un opérateur $P : \mathcal{D}(X, E) \longrightarrow \mathcal{E}(X, F)$ est dit *opérateur pseudo–différentiel* si pour toute carte $\psi : U \longrightarrow C$ de X qui trivialise E et F, l'opérateur transporté $\psi^* P$ est un opérateur pseudo–différentiel sur C. On note $\Psi^m_{\text{loc}}(X, E, F)$ l'espace vectoriel des opérateurs pseuso–différentiels sur X de E vers F.

REMARQUE 3.141. Pour $P \in \Psi^m(X, E, F)$ on peut considérer son symbole, qui est bien sur representé par une application

$$\sigma : TX \longrightarrow \text{Hom}_X(E, F)$$

Notons $\text{Symb}^m(X, E, F)$ les applications différentiables $TX \longrightarrow \text{Hom}_X(E, F)$ satisfaisant les conditions évidentes. On a de nouveau un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\frac{\Psi^m_{\text{loc}}(X, E, F)}{\Psi^{m-1}_{\text{loc}}(X, E, F)} \longrightarrow \frac{\text{Symb}^m(X, E, F)}{\text{Symb}^{m-1}(X, E, F)}$$

11. Opérateurs hypo–elliptiques et elliptiques

DÉFINITION 3.142. Soient m et m' des nombres réels et soit X une variété différentiable. Un symbole $\sigma \in \text{Symb}^m(X)$ est dit *hypo–elliptique d'ordre* (m, m') s'il existe un symbole $\tau \in \text{Symb}^{-m'}(X)$ tel que $\sigma\tau - 1 \in \text{Symb}^{-\infty}(X)$. Un tel symbole τ s'appelle *quasi–inverse de* σ. On dit que σ est *elliptique d'ordre* m si σ est hypo–elliptique d'ordre (m, m).

EXEMPLE 3.143. Le symbole du laplacien est $\sigma(x, \xi) = \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2$ est un symbole elliptique d'ordre 2. En effet, un quasi–inverse de σ est donné par

$$\tau(x, \xi) = \frac{1 - \varphi(\xi)}{\sigma(x, \xi)}$$

où $\varphi \in C^\infty_{00}(\mathbb{R}^n)$ vaut 1 dans un voisinage de 0. Par contre (dans le cas $n = 2$) le symbole $\sigma(x, \xi) = \xi_1^2 + \xi_2^4$ est hypo–elliptique d'ordre $(4, 2)$ mais pas elliptique.

PROPOSITION 3.144. *Soient $\overline{m}, \overline{m}', m, m'$ des nombres réels et soit X une variété différentiable. Soient $\overline{\sigma}$ et $\sigma \in \text{Symb}^m(X)$ hypo–elliptique d'ordre $(\overline{m}, \overline{m}')$ et (m, m') respectivement et soient $\overline{\tau}$ et τ des quasi–inverses de $\overline{\sigma}$ et σ respectivement. Les assertions suivantes sont vraies :*

I : *Le symbole $\overline{\sigma}\sigma$ est hypo–elliptique d'ordre $(\overline{m}+m, \overline{m}'+m')$ et $\overline{\tau}\tau$ est un quasi–inverse de $\overline{\sigma}\sigma$.*

DÉMONSTRATION. (I) : On sait par 3.50 que $\overline{\sigma}\sigma$ est un symbole d'ordre $\overline{m}+m$ et que $\overline{\tau}\tau$ est un symbole d'ordre $-(\overline{m}'+m')$. La seule chose qui reste à vérifier est que $\overline{\sigma}\sigma\overline{\tau}\tau - 1 \in \mathrm{Symb}^{-\infty}(U)$. En effet, en désignant par " $\equiv$ " congruence modulo l'idéal $\mathrm{Symb}^{-\infty}(U)$ on a

$$\overline{\sigma}\sigma\overline{\tau}\tau - 1 = (\overline{\sigma}\sigma - 1 + 1)(\overline{\tau}\tau - 1 + 1) - 1 \equiv 1 \cdot 1 - 1 = 0$$

ce qui montre (I). □

DÉFINITION 3.145. Soient m et m' des nombres réels et X une variété différentiable. Un opérateur pseudo–différentiel $P \in \Psi^m_{\mathrm{loc}}(X)$ est dit *hypo–elliptique d'ordre* (m, m') s'il existent des opérateurs opérateur pseudo–différentiels $Q, Q' \in Psi^{-m'}_{\mathrm{loc}}(X)$ tels que

$$PQ - 1 \in \Psi^{-\infty}_{\mathrm{loc}}(X) \qquad \text{et} \qquad Q'P - 1 \in \Psi^{-\infty}_{\mathrm{loc}}(X)$$

On dit que Q est un *quasi–inverse de P à droite* et que Q est un *quasi–inverse de P à gauche*. Si $Q = Q'$ on dit que Q est un *quasi–inverse bilatère*.

PROPOSITION 3.146. *Tout quasi–inverse à gauche (ou à droite) d'un opérateur hypo–elliptique est bilatère, et deux quasi–inverses diffèrent par un opérateur d'ordre $-\infty$.*

DÉMONSTRATION. C'est purement algébrique : Soit P hypo–elliptique, Q et Q' des quasi–inverses de P à gauche et à droite respectivement, c'est–à–dire il existent des opérateurs R, R' d'ordre $-\infty$ tels que

$$PQ - 1 = R \qquad \text{et} \qquad Q'P - 1 = R'$$

Il suffit de montrer que $Q - Q'$ est d'ordre $-\infty$. Voilà la manipulation : Multiplier $PQ - 1 = R$ par Q' à gauche donne

$$Q'PQ - Q' = (R'+1)Q - Q' = Q'R$$

donc $Q - Q' = Q'R - R'Q$, et $Q'R - R'Q$ est bien d'ordre $-\infty$. □

THEORÈME 3.147. *Soit P un opérateur pseudo–différentiel sur une variété X. Si le symbole de P est hypo–elliptique, alors P est hypo–elliptique.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de démontrer ce théorème dans le cas où $X = U$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et où P est un opérateur pseudo–différentiel (global) proprement supporté sur U d'ordre m. Soit σ le symbole de P. Par hypothèse il existe un symbole τ sur U tel que le symbole $\sigma\tau - 1$ est d'ordre $-\infty$. On peut supposer sans perte de généralité que l'opérateur Q dont τ est le symbole est proprement supporté. Vu le développement asymptotique du symbole λ_1 de $R := QP - 1$ donné par 3.103 on a que R est d'ordre -1. En effet

$$\lambda_1 \sim \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha \sigma(x,\xi) D_x^\alpha \tau(x,-\xi) \right)$$

Notons λ_j le symbole de R^j. Par le 3.85 il existe un symbole μ sur U ayant comme expansion asymptotique

$$\mu \sim \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \lambda_j$$

Soit S l'opérateur sur U dont μ est le symbole. De nouveau on suppose que S est proprement supporté. L'opérateur $S(1+R) - 1$ est par construction d'ordre $-\infty$, et si on pose $T := SQ$, alors

$$TP - 1 = S(1 - QP + 1) - 1 = S(1+R) - 1$$

ce qui montre que T est un quasi–inverse de P à gauche. De la même façon un trouve un quasi–inverse à droite. □

Theorème 3.148. *Pour tout opérateur hypo–elliptique* $P \in \mathrm{Hell}(X)$ *et tout* $u \in \mathcal{E}'(X)$ *on a*

$$\operatorname{sing\,supp} Pu = \operatorname{sing\,supp} u \tag{89}$$

Démonstration. Utilisant une partition de l'unité appropriée, il suffit de démontrer ce resultat dans le cas où X est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et où P est un opérateur hypo–elliptique global sur X. Soit $u \in \mathcal{E}'(X)$. Par la proposition 3.94 on a l'inclusion

$$\operatorname{sing\,supp} Pu \subseteq \operatorname{sing\,supp} u$$

Afin de montrer l'inclusion dans l'autre sens, choisissons un quasi–inverse à gauche de P. Notons

$$\begin{aligned} PQ - I &=: S \in \Psi^{-\infty}(X) \\ QP - I &=: T \in \Psi^{-\infty}(X) \end{aligned}$$

On a donc $u = QPu - Tu$, et alors

$$\operatorname{sing\,supp} u \subseteq \operatorname{sing\,supp} QPu \cup \operatorname{sing\,supp} Tu \subseteq \operatorname{sing\,supp} Pu$$

vu que $\operatorname{sing\,supp} Tu = \varnothing$ par 3.96, et par la proposition 3.94 appliquée à Q. □

Remarque 3.149. Si P est proprement supporté, alors (89) est évidemment vrai pour tout $u \in \mathcal{D}'(X)$.

12. Prolongement à $\mathcal{L}^2$ d'opérateurs d'ordre 0

But de cette section est de démontrer quelques estimations dans L^2 d'opérateurs pseudo–différentiels d'ordre 0, afin de pouvoir introduire le prolongement d'opérateurs pseudo–différentiels aux espaces de Sobolev dans la section qui suit.

LEMME 3.150. *Soit $P \in \Psi^0(U)$ proprement supporté et σ le symbole de P. Supposons que*

I : $P = P^*$

II : $\liminf_{\substack{|\xi| \longrightarrow \infty \\ x \in K}} \operatorname{Re} \sigma(x,\xi) > 0$ *pour tout compact $K \subseteq U$*

Alors il existe $Q \in \Psi^0(U)$ proprement supporté et tel que le noyeau de distribution de $QQ^* - P$ est de classe C^∞ dans $U \times U$.

DÉMONSTRATION. L'idée de la démonstration est de construire successivement des opérateurs proprement supportés $Q_0, Q_1, \ldots$ avec symbôles $\tau_0, \tau_1, \ldots$, tel que Q_j est d'ordre $-j$ et tel que

$$\left(\sum_{j=0}^{k} Q_j\right)\left(\sum_{j=0}^{k} Q_j^*\right) - P \tag{90}$$

est d'ordre $-(k+1)$. Le symbole τ de l'opérateur Q cherché aura $(\tau_j)_{j=0}^{\infty}$ comme expansion asymptotique.
La fonction $z \longmapsto \sqrt{\operatorname{Re} z}$ est, en dehors de la droite $\operatorname{Re} z = 0$ indéfiniment dérivable en tant que fonction à deux variables réelles. Par la proposition 3.55 et vu l'hypothèse (II) on a que $\sqrt{\operatorname{Re}\sigma(x,\xi)}$ est un symbole d'ordre 0 pour ξ assez grand. Il existe alors un opérateur $Q_0 \in \Psi^0(U)$ proprement supporté avec symbole τ_0 tel que $|\tau_0|^2 - \operatorname{Re}\sigma \in \operatorname{Symb}^{-\infty}(U)$, d'où on conclut que

$$Q_0 Q_0^* - P \in \Psi^{-1}(U)$$

par les formules pour le symbole de l'adjoint 3.102 et du produit 3.103. Soit $k \in \mathbb{N}$, et supposons qu'on ait trouvé des opérateurs proprement supportés $Q_0, Q_1, \ldots, Q_k$ avec symbôles $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_k$, tel que Q_j est d'ordre $-j$ et tel que

$$R := \left(\sum_{j=0}^{k} Q_j\right)\left(\sum_{j=0}^{k} Q_j^*\right) - P$$

est d'ordre $-(k+1)$. Soit ν le symbole de R. Choisissons $\tau_{k+1} \in \operatorname{Symb}^{k+1}(U)$ tel que

$$2\tau_{k+1}\tau_0 \equiv \nu \qquad \mod \operatorname{Symb}^{-\infty}(U)$$

Un tel symbole τ_{k+1} existe, puisque τ_0 est inversible modulo $\mathrm{Symb}^{-\infty}(U)$ vu (90). Soit Q_{k+1} l'opérateur de symbole τ_{k+1}. On calcule

$$\begin{aligned} R' &:= \left(Q_{k+1} + \sum_{j=0}^{k} Q_j\right)\left(Q_{k+1}^* + \sum_{j=0}^{k} Q_j^*\right) - P \\ &= Q_{k+1}Q_{k+1}^* + Q_{k+1}\left(\sum_{j=0}^{k} Q_j^*\right) + \left(\sum_{j=0}^{k} Q_j\right) Q_{k+1}^* + R \end{aligned}$$

par les formules 3.102 et 3.103, et par le choix de τ_{k+1} le symbole de R' est d'ordre $k-2$. Il existe donc une suite de symboles $(\tau_j)_{j=0}^{\infty}$ comme annoncé, et par le théorème 3.85 il existe un symbole τ qui a $(\tau_j)_{j=0}^{\infty}$ comme expansion asymptotique. Vu le corollaire 3.100 on peut supposer que l'opérateur Q qui a τ comme symbole est proprement supporté. On a $QQ^* - P \in \Psi^{-\infty}(U)$ par construction. □

LEMME 3.151. *Soit $P \in \Psi^0(U)$ proprement supporté et soit σ le symbole de P. Supposons qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\sup_{x\in K} \limsup_{|\xi|\longrightarrow\infty} |\sigma(x,\xi)| < M$$

pour tout compact $K \subseteq U$. Alors il existe un opérateur lisse R tel que

$$(Pu, Pu) \leq M^2(u,u) + (Ru, u)$$

pour tout $u \in \mathcal{D}(U)$. De plus, si le noyeau de distribution de P est à support compact, on peut choisir R tel que le noyeau de distribution de R est aussi à support compact.

DÉMONSTRATION. Vu que $(Pu, Pu) = (P^*Pu, u)$ il suffit de construire un opérateur $B \in \Psi^0(U)$ tel que $R := P^*P + B^*B - M^2$ est lisse. L'opérateur R ainsi défini est proprement supporté si B l'est. Il faut trouver B tel que

$$B^*B = M^2 - P^*P + R$$

Si σ est le symbole de P, alors le symbole τ de $M^2 - P^*P$ est congru à $M^2 - |\sigma(x,\xi)|^2$ modulo symboles d'ordre ≤ 1, ce qui entraine que

$$\liminf_{\substack{|\xi|\longrightarrow\infty \\ x\in K}} \mathrm{Re}\,\tau(x,\xi) > 0$$

pour n'importe quelle partie compacte $K \subseteq U$. Le lemme 3.150 permet de conclure. □

THEORÈME 3.152. *Soit $P \in \Psi^0(\mathbb{R}^n)$. Si le noyeau de distribution de P est à support compact, alors on peut prolonger P en de manière unique en un opérateur opérateur continu*

$$P : \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$$

DÉMONSTRATION. Sachant que $C^\infty_{00}(\mathbb{R}^n)$ est une partie dense de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$, il faut, et il suffit de montrer que l'opérateur P est borné sur $C^\infty_{00}(\mathbb{R}^n)$ pour la norme $\|\cdot\|_2$ de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$, c'est–à–dire qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\|Pu\|_2 \leq C\|u\|_2$$

pour tout $u \in C^\infty_{00}(\mathbb{R}^n)$. Utilisant le lemme 3.151 il suffit de démontrer le théorème dans le cas où P est un opérateur lisse, et dont le noyeau de distribution est à support compact. Mais dans ce cas, le résultat est évident : Clairement

$$\|Pu\|_2^2 \leq \int_{U\times U} |K(x,y)|^2 dxdy \cdot \|u\|_2^2$$

où K est le noyeau de distribution de P. □

13. L'action sur les espaces de Sobolev

Pour cette section, fixons une fois pour toutes une variété différentiable X de dimension n, et pour chaque $s \in \mathbb{R}$ un opérateur elliptique $\Lambda_s \in \Psi^s(X)$ dont le symbole $\sigma(x,\xi)$ est positif et homogène de degré s. Des tels opérateurs existent, vu la proposition qui suit :

PROPOSITION 3.153. *Soit X une variété et $s \in \mathbb{R}$. Alors il existe un opérateur elliptique Λ_s d'ordre s sur X, dont le symbole global est representé par un symbole σ positivement homogène de degré s.*

DÉMONSTRATION. Soit $(\psi_i : U_i \longrightarrow C_i)_{i\in I}$ un atlas de X. Sur l'ouvert C_i de $\mathbb{R}^n$, considérons le symbole σ_i défini par $\sigma_i(x,\xi) = |\xi|^s$, et notons Λ_i^C l'opérateur pseudo–différentiel sur C_i de symbole σ_i. Il est clair que Λ_i^C est elliptique d'ordre s, ce qui fait que l'opérateur transporté

$$\Lambda_i^U := \psi_i^* \Lambda_i^C$$

est elliptique d'ordre s sur l'ouvert U_i de X. Reste à recoller les opérateurs $(\Lambda_i^U)_{i\in I}$ comme dans 3.134, en un opérateur Λ_s qui satisfait tout ce qui est demandé. □

DÉFINITION 3.154. Soit $s \in \mathbb{R}$. On note

$$\begin{aligned} H^s_{\text{loc}}(X) &:= \left\{u \in \mathcal{D}'(X) \,\middle|\, \Lambda_s u \in \mathcal{L}^2_{\text{loc}}(X)\right\} \\ H^s_{\text{comp}}(X) &:= \left\{u \in \mathcal{E}'(X) \,\middle|\, \Lambda_s u \in \mathcal{L}^2_{\text{loc}}(X)\right\} \end{aligned}$$

où $\mathcal{L}^2_{\text{loc}}(X)$ désigne l'espace des fonctions localement de module carré intégrables. On appelle *espace de Sobolev de degré s local* respectivement *espace de Sobolev de degré s compact* ces ensembles.

REMARQUE 3.155. Les ensembles $H^s_{\mathrm{loc}}(X)$ et $H^s_{\mathrm{comp}}(X)$ sont évidemment des $\mathbb{C}$–espaces vectoriels, et $H^s_{\mathrm{comp}}(X)$ est un sous–espace vectoriel de $H^s_{\mathrm{loc}}(X)$. Ces espaces dépendent à priori du choix de Λ_s, mais bien sûr il ne le font pas. Dans le cas où X est compact on a $H^s_{\mathrm{loc}}(X) = H^s_{\mathrm{comp}}(X)$. On note alors $H^s(X)$ cet espace, et on l'appelle *espace de Sobolev de degré s*.

THEORÈME 3.156. *Soit $s \in \mathbb{R}$ et $P \in \Psi^m(X)$. Alors P se prolongue en un opérateur*

$$P : H^s_{\mathrm{comp}}(X) \longrightarrow H^{s-m}_{\mathrm{loc}}(X)$$

Si de plus P est proprement supporté, alors P se prolongue en des opérateurs

$$\begin{aligned} P : H^s_{\mathrm{comp}}(X) &\longrightarrow H^{s-m}_{\mathrm{comp}}(X) \\ P : H^s_{\mathrm{loc}}(X) &\longrightarrow H^{s-m}_{\mathrm{loc}}(X) \end{aligned}$$

IDÉE DE DÉMONSTRATION. Si $P \in \Psi^m(X)$, alors $\Lambda_{s-m} P \Lambda_{-s}$ est d'ordre 0, et on peut prolonger P à $L^2(X)$. Or $H^s = \Lambda_{-s} L^2(X)$, on a bien un prolongement de P comme énnoncé. □

REMARQUE 3.157. L'opérateur Λ_{-s} est un quasi–inverse de Λ_s, c'est–à–dire il existe un opérateur compact R_s tel que

$$u = \Lambda_{-s} \Lambda_s u - R_s u \tag{91}$$

pour tout u.

PROPOSITION 3.158. *Soit $K \subseteq X$ compact et $A \in \Psi^m(X)$. Supposons une des deux conditions vérifiées*

I : *A est proprement supporté.*

II : *Il existe $B \in \Psi^m(X)$ et $\varphi \in C^\infty_{00}(X)$ avec $A = \varphi B$.*

Alors il existe une partie compacte $K' \subseteq X$ et un prolongement continu de A en un opérateur

$$P : H^s(K) \longrightarrow H^{s-m}(K')$$

DÉMONSTRATION. □

THEORÈME 3.159. *Soit X une variété et $P \in \Psi^m(X)$. Pour tout $s > m$ on peut prolonger par continuité l'opérateur P à*

$$P : H^s(X) \longrightarrow H^{s-m}_{\mathrm{loc}}(X) \tag{92}$$

Si P est proprement supporté, alors $P : H^s_{\mathrm{loc}} \longrightarrow H^s_{\mathrm{loc}}$.

DÉMONSTRATION. □

Le théorème suivant est une généralisation du théorème 0.2 :

THEORÈME 3.160. *Soit X une variété différentiable et soit $P \in \Psi^m(X)$ proprement supporté. Soient $s, s' \in \mathbb{R}$ tels que $s' < s - m$, et soit K une partie compacte de X, et K' une partie compacte de X telle que $P\mathcal{E}'(K) \subseteq \mathcal{E}'(K')$. Alors l'opérateur*

$$P : H^s(K) \longrightarrow H^{s'}(K') \tag{93}$$

est compact.

DÉMONSTRATION. Une partie compacte $K' \subseteq X$ telle que $P\mathcal{E}'(K) \subseteq \mathcal{E}'(K')$ existe par la proposition 3.158, et la même proposition dit que pour un tel K' on peut prolonger P en un opérateur continu

$$P : H^s(K) \longrightarrow H^{s-m}(K')$$

Le théorème 0.2 affirme que l'inclusion

$$\iota : H^{s-m}(K) \longrightarrow H^{s'}(K)$$

est un opérateur compact. L'opérateur (93) en question est alors la composition d'un opérateur continu et d'un opérateur compact, donc compact. □

14. La propriété de Fredholm

THEORÈME 3.161. *Soit X une variété fermée et $E \in \mathrm{Ell}^m(X)$. Pour $s \in \mathbb{R}$ notons E_s le prolonguement par continuité de E à $H^s(X)$. Alors*

I : *$E_s : H^s(X) \longrightarrow H^{s-m}(X)$ a la propriété de Fredholm.*

II : *$\ker E_s \subseteq C^\infty(X)$. En particulier $\ker E_s$ ne dépend pas de s.*

III : *$\operatorname{ind} E_s$ ne dépend pas de s.*

IV : *Pour tout $m' < m$ et $P \in \Psi^{m'}(X)$ on a $\operatorname{ind}(E + P) = \operatorname{ind} E$.*

DÉMONSTRATION. Comme E est elliptique, il existe un inverse modulo $\Psi^{-\infty}(X)$ de E, c'est–à–dire un opérateur $F \in \mathrm{Ell}^{-m}(X)$ tel que

$$\begin{aligned} EF - I &=: \ S \in \Psi^{-\infty}(X) \\ FE - I &=: \ T \in \Psi^{-\infty}(X) \end{aligned}$$

Soit $s \in \mathbb{R}$. En vertu du théorème 3.160 et l'hypothèse que X est compact on peut prolonger E, F, S et T en des opérateurs linéaires continus

$$\begin{aligned} E_s : &\quad H^s(X) \longrightarrow H^{s-m}(X) \\ F_s : &\quad H^{s-m}(X) \longrightarrow H^s(X) \\ S_s : &\quad H^{s-m}(X) \longrightarrow H^{s-m}(X) \\ T_s : &\quad H^s(X) \longrightarrow H^s(X) \end{aligned}$$

On a

$$E_sF_s - I = S_s \qquad \text{et} \qquad F_sE_s - I = T_s$$

Les opérateurs S_s et T_s sont compacts, vu 3.160. Comme $H^s(X)$ et $H^{s-m}(X)$ sont des espaces de Banach, on peut appliquer le théorème 0.3, et conclure que E_s et F_s ont la propriété de Fredholm. On a, vu le théorème 3.148, pour tout $u \in \ker E_s$

$$\operatorname{sing\,supp} u = \operatorname{sing\,supp} E_s u = \operatorname{sing\,supp} 0 = \varnothing$$

ce qui revient à dire que $u \in C^\infty(X)$. Remarquons que cet argument vaut également si E est supposé seulement hypo–elliptique. Pour la partie (III) considérons l'adjoint formel E^* de E. On a $E^* \in \mathrm{Hell}^m(X)$ et on sait que

$$\operatorname{ind} E_s = \dim\ker E_s - \dim\ker E_s^*$$

Comme les dimensions des noyeaux dans le terme à droite de l'equation ci dessus ne dépendent pas de s par (II), $\operatorname{ind} E_s$ ne dépend de s non plus. Finalement, le prolongement de P à

$$P_s : H^s(X) \longrightarrow H^{s-m'}(X) \longrightarrow H^{s-m}(X)$$

est un opérateur compact vu 3.160. La proposition 0.4 permet de conclure. $\square$

Définition 3.162. Soit X une variété différentiable fermée et $E \in \mathrm{Ell}(X)$. On note $\ker E := \ker E_s \subseteq C^\infty(X)$ et on appelle *indice de E* le nombre entier

$$\operatorname{ind} E = \operatorname{ind} E_s$$

où s est un nombre réel quelconque.

15. Symboles avec partie principale

Définition 3.163. Soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathrm{Symb}^m(U)$. On dit que σ admet une partie principale si la limite

$$\mathrm{ppr}_m(\sigma)(x,\xi) := \lim_{\lambda \longrightarrow \infty} \frac{\sigma(x,\lambda)}{\lambda^m}$$

existe pour tout $(x,\xi) \in U \times \mathbb{R}^n$, et si la fonction $\mathrm{ppr}_m(\sigma)$ ainsi définie est indéfiniment dérivable pour $\xi \neq 0$. On appelle $\mathrm{ppr}_m(\sigma)$ la *partie principale* de σ. On écrit $\mathrm{ppr}(\sigma)$ si m est clair du contexte.
On note $\mathrm{Symb}_+^m(U)$ le sous ensemble de $\mathrm{Symb}^m(U)$ de toutes les symboles de degré m admettant une partie principale en degré m, et

$$\mathrm{Symb}_+(U) := \bigcup_{m\in\mathbb{R}} \mathrm{Symb}_+^m(U) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Symb}_+^{-\infty}(U) := \bigcap_{m\in\mathbb{R}} \mathrm{Symb}_+^m(U)$$

REMARQUE 3.164. Si σ est un symbole admettant une partie principale $\mathrm{ppr}(\sigma)$, alors $\mathrm{ppr}(\sigma)$ est une fonction homogène de degré m en ξ. Si $\chi \in C_{00}^{\infty}$ est une fonction qui vaut 1 dans un certain voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$, alors $(1-\chi)\,\mathrm{ppr}(\sigma)$ est un symbôle d'ordre m, et clairement $\mathrm{ppr}\big((1-\chi)\,\mathrm{ppr}(\sigma)\big) = \mathrm{ppr}(\sigma)$.

PROPOSITION 3.165. *Les assertions suivantes sont vraies :*

I : $\mathrm{Symb}_+^m(U)$ *est un sous espace vectoriel de* $\mathrm{Symb}(U)$ *pour tout* $m \in \mathbb{R}$.

II : $\mathrm{Symb}_+(U)$ *est une sous–algèbre de* $\mathrm{Symb}(U)$.

III : *Soient* $m, m' \in \mathbb{R}$ *tels que* $0 < m$ *et* $m' < m$. *Alors on a* $\mathrm{Symb}^{m'}(U) \subseteq \mathrm{Symb}_+^m(U)$. *En particulier* $\mathrm{ppr}_m(\sigma) = 0$ *pour tout* $\sigma \in \mathrm{Symb}^{m'}(U)$.

DÉMONSTRATION. (III) : Soit $\sigma \in \mathrm{Symb}^{m'}(U)$. Alors il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in U$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ on ait

$$|\sigma(x,\xi)| \leq C(1+|\xi|)^{m'}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
|\mathrm{ppr}_m(\sigma)(x,\xi)| &= \left|\lim_{\lambda\longrightarrow\infty} \sigma(x,\lambda\xi)\lambda^{-m}\right| \\
&= \lim_{\lambda\longrightarrow\infty} |\sigma(x,\lambda\xi)|\lambda^{-m} \\
&\leq \lim_{\lambda\longrightarrow\infty} C(1+|\lambda\xi|)^{m'}\lambda^{-m} \\
&\leq \lim_{\lambda\longrightarrow\infty} C\lambda^{-m} + |\xi|\lambda^{m'-m} \\
&= 0
\end{aligned}$$

vu que par hypothèse $-m < 0$ et $m' - m < 0$. $\square$

Cette proposition a quelques conséquences utiles :

COROLLAIRE 3.166. *Soient* $\sigma \in \mathrm{Symb}^m(U)$, $\tau \in \mathrm{Symb}_+^m(U)$, *et supposons que* $\sigma - \tau \in \mathrm{Symb}^{m'}(U)$ *avec* $m' < m$ *et* $0 < m$. *Alors* $\sigma\,\mathrm{Symb}_+^m(U)$.

COROLLAIRE 3.167. *Soit* $\sigma \in \mathrm{Symb}^m(U)$ *un symbole d'ordre* $m > 0$, $(m_j)_{j=1}^{\infty}$ *une suite de nombres réels avec* $m_j \longrightarrow -\infty$ *pour* $j \longrightarrow \infty$, *et soient* $\sigma_j \in \mathrm{Symb}^{m_j}(U)$ *des symboles tels que*

$$\sigma \sim \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j$$

Supposons que pour tout j *avec* $m_j = m$ *on ait* $\sigma_j \in \mathrm{Symb}_+^{m_j}(U)$. *Alors on a* $\sigma \in \mathrm{Symb}_+^m(U)$, *et*

$$\mathrm{ppr}(\sigma) = \sum_{m_j = m} \mathrm{ppr}(\sigma_j)$$

Theorème 3.168. *Soient m, m' des nombres réels et soient $\sigma \in \mathrm{Symb}_+^m(U)$ et $\tau \in \mathrm{Symb}_+^{m'}(U)$. Alors $T_\sigma T_\tau$ est un opérateur pseudo–différentiel. Le symbole λ de $T_\sigma T_\tau$ est un élément de $\mathrm{Symb}_+^{m+m'}$, et a comme partie principale*

$$\mathrm{ppr}(\lambda) = \mathrm{ppr}(\sigma)\,\mathrm{ppr}(\tau)$$

Démonstration. Par le théorème 3.103 on sait que $T_\sigma T_\tau$ est un opérateur pseudo–différentiel, et que λ admet comme expansion asymptotique

$$\lambda \sim \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j \qquad \text{avec} \qquad \lambda_j := \sum_{|\mu|=j} \frac{-i^{|\mu|}}{\mu!} D_\xi^\mu \sigma D_x^\mu \tau$$

Par 3.50 et 3.52 on a $\lambda_j \in \mathrm{Symb}^{m+m'-2j}(U)$ et par 3.165 on a $\lambda_0 = \sigma\tau \in \mathrm{Symb}_+^{m+m'}$. Le corollaire 3.167 permet de conclure que $\lambda \in \mathrm{Symb}_+^{m+m'}$, et que

$$\mathrm{ppr}(\lambda) = \mathrm{ppr}(\lambda_0) = \mathrm{ppr}(\sigma\tau) = \mathrm{ppr}(\sigma)\,\mathrm{ppr}(\tau)$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Proposition 3.169. *Soient X une variété compacte et P et Q des opérateurs elliptiques sur X. Soient σ et τ des representants de leurs symboles, et supposons que σ et τ admettent des parties principales. Fixons une norme sur TX notons SX le fibré sphérique associé à TX pour cette norme. Si $\mathrm{ppr}(\sigma)|_{SX} = \mathrm{ppr}(\tau)|_{SX}$, alors $\mathrm{ind}_a P = \mathrm{ind}_a Q$.*

16. Le symbole du point de vue K–théorique

Soit X une variété, $p : E \longrightarrow X$ et $q : F \longrightarrow X$ des fibrés vectoriels sur X et soit $P : \mathcal{D}(E) \longrightarrow \mathcal{E}(F)$ un opérateur pseudo différentiel sur X. Considérons le pull–back de fibrés

$$\begin{array}{ccc} \pi^*E & \longrightarrow & E \\ {\scriptstyle \pi^*p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ TX & \xrightarrow{\pi} & X \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \pi^*F & \longrightarrow & F \\ {\scriptstyle \pi^*q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ TX & \xrightarrow{\pi} & X \end{array}$$

Je rappelle que les éléments de π^*E sont des triples (x, ξ, v) avec $x \in X, \xi \in TX$ et $v \in E$ tels que $\pi(\xi) = p(v) = x$, et idem pour π^*F. Le symbôle de P induit un morphisme de fibrés vectoriels

$$\begin{tikzcd} \pi^*E \arrow[rr, "\sigma^*"] \arrow[dr, "\pi^*p"'] & & \pi^*F \arrow[dl, "\pi^*q"] \\ & TX & \end{tikzcd}$$

donné par

$$\sigma^* : (x, \xi, v) \longmapsto (x, \xi, \sigma(x, \xi)v)$$

pour tout $(x, \xi) \in TX$ et tout $v \in p^*E$. Je rappelle que le support de σ^* est l'ensemble des éléments $(x, \xi) \in TX$ tels que $\sigma^*_{(x,\xi)} : \pi^*E_{(x,\xi)} \longrightarrow \pi^*F_{(x,\xi)}$ n'est pas un isomorphisme. Voici les observations cruciales :

I : Si P est elliptique de σ homogène, alors le support de σ^* est $s_0(X)$, où $s_0 : X \longrightarrow TX$ est la zéro–section.

II : En particulier si X est compact, le support de σ^* est compact, et le triplet

$$\sigma^* : \pi^*E \longrightarrow \pi^*F$$

represente alors un élément de $K(TX)$.

Proposition 3.170. *Soit X une variété compacte et $P : \mathcal{D}(E) \longrightarrow \mathcal{E}(F)$ un opérateur elliptique de symbole σ. Alors le morphisme de fibrés*

$$\sigma^* : \pi^*E \longrightarrow \pi^*F$$

est à support compact.

Définition 3.171. Soit X une variété compacte et $P : \mathcal{D}(E) \longrightarrow \mathcal{E}(F)$ un opérateur elliptique de symbole σ. On appelle *symbole K–théorique de P* et on note $[\sigma]$ ou encore $[\sigma(P)]$ l'élément de $K(TX)$ representé par le triple

$$\sigma^* : \pi^*E \longrightarrow \pi^*F$$

Theorème 3.172. *Soit X une variété compacte. L'application*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ell}(X) & \longrightarrow & K(TX) \\ P & \longmapsto & [\sigma(P)] \end{array}$$

est un homomorphisme de groupes surjectif, et son noyeau est

$$\{P \in \mathrm{Ell}(X) \mid \mathrm{ind}_a P = 0\}$$

Démonstration. On montre facilement que cette application est un homomorphisme de groupes. Afin de montrer la surjectivité, montrons le résultat suivant légèrement plus fort

> *Soit X une variété compacte, $a \in K(TX)$ et $m \in \mathbb{R}$. Alors il existe un opérateur $P \in \mathrm{Ell}^m(X)$ de symbole σ homogène de degré m et tel que $[\sigma] = a$.*

Soit a representé par le triple $\tilde{\alpha} : \tilde{E} \longrightarrow \tilde{F}$, où $\tilde{E}$ et $\tilde{F}$ sont des fibrés vectoriels complexes sur TX et où α est un morphisme de fibrés à support compact. Notons $\pi : TX \longrightarrow X$ la projection et $s_0 : X \longrightarrow TX$ la zéro–section. Notons encore E et

F les restrictions de $\tilde{E}$ respectivement $\tilde{F}$ à X, et $\alpha : E \longrightarrow F$ le morphisme induit par $\tilde{\alpha}$. On a un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \pi^*E & \longrightarrow & E & \longrightarrow & \tilde{E} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ TX & \xrightarrow{\pi} & X & \xrightarrow{s_0} & TX \end{array}$$

Puisque la composition $s_0 \circ \pi$ est homotope à l'identité de TX, on a $\pi^*E \cong \tilde{E}$ et de même $\pi^*F \cong \tilde{F}$. Le morphisme $\pi^*\alpha$ induit est précisement celui qui fait commuter le diagramme de fibrés sur TX suivant

$$\begin{array}{ccc} \pi^*E & \xrightarrow{\pi^*\alpha} & \pi^*F \\ \cong\downarrow & & \downarrow\cong \\ \tilde{E} & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & \tilde{F} \end{array}$$

Le triple $\pi^*\alpha : \pi^*E \longrightarrow \pi^*F$ represente alors aussi a, et le support de $\pi^*\alpha$ est le même que le support de $\tilde{\alpha}$. Choisissons une norme $\|\cdot\|$ sur TX telle que $\operatorname{supp}\pi^*\alpha$ soit contenu dans BX où

$$BX := \{v \in TX \mid \|v\| < 1\}$$
$$SX := \{v \in TX \mid \|v\| = 1\}$$

ce qui est bien possible, puisque $\operatorname{supp}\pi^*\alpha$ est compact. Définissons un morphisme de fibrés $\alpha_m : \pi^*E \longrightarrow \pi^*F$ par

$$\alpha_m(v) = \begin{cases} \|v\|^m \pi^*\alpha\left(\frac{v}{\|v\|}\right) & \text{si } v \neq 0 \\ 0 & \text{si } v = 0 \end{cases}$$

Il est clair que α_m est homogène de degré m, et que $\operatorname{supp}\alpha_m = s_0(X)$. L'opérateur P de symbôle α_m satisfait donc toutes nos demandes, pourvu que le triplet $\alpha_m : \pi^*E \longrightarrow \pi^*F$ represente aussi a. Il faut donc trouver une homotopie de $\pi^*\alpha$ vers α_m. La voici :

$$H(v,t) = \|v\|^{tm}\pi^*\alpha\left(\frac{v}{\|v\|^t}\right)$$

pour $v \in E$ et $t \in [0,1]$. □

Corollaire 3.173. *Soit X une variété compacte, $a \in K(TX)$ et $m \in \mathbb{R}$. Alors il existe un opérateur $P \in \mathrm{Ell}^m(X)$ de symbole σ homogène de degré m et tel que $[\sigma] = a$.*

CHAPITRE 4

Le théorème de l'indice de Atiyah–Singer

1. L'indice topologique

Soient X une variété différentiable de dimension n, et soit Y une sous–variété de X. On identifie le fibré tangent de Y à une sous–variété de TX. Le fibré vectoriel normal à Y dans X peut être vu comme voisinage tubulaire de Y dans X. Un tel voisinage tubulaire N est donc à la fois un fibré vectoriel de réel dimension réelle $\dim X - \dim Y$ sur Y et aussi une sous–variété ouverte de X. Le fibré tangent à N est simplement la réstriction du fibré tangent de X à N. On a donc un diagramme

$$\begin{tikzcd}
TY \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d] & TN \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d] & TX \arrow[d] \\
Y \arrow[r, "\subseteq"] & N \arrow[r, "\subseteq"] & X
\end{tikzcd}$$

En particulier TN est une sous–variété ouverte de TX. Comme on l'a vu **??**, tout élément de $K(TN)$ peut être representé par un triplet $\alpha : E \longrightarrow F$, où E et F sont des fibrés vectoriels sur TN, triviales en dehors d'une partie compacte C de TN, et où α est un morphisme de fibrés vectoriels, égal à l'identité en dehors de C. On peut prolonger les fibrés E et F en des fibrés $\overline{E}$ et $\overline{F}$ sur TX, en demandant que ces fibrés soient triviales sur le complement dans TX de C, et on peut prolonger α en un morphisme de fibrés $\overline{\alpha} : \overline{E} \longrightarrow \overline{F}$ en demandant que $\overline{\alpha}$ soit l'identité en dehors de C. Le triplet $\overline{\alpha} : \overline{E} \longrightarrow \overline{F}$ represente un élément de $K(TX)$.
Ces prolongements définissent une application $K(TN) \longrightarrow K(TX)$, qui evidemment est un homomorphisme d'anneaux. On l'appelle *homomorphisme d'extension.* Cette construction marche bien sûr pour une variété et une sous–variété ouverte quelconque. En d'autre mots, on peut voir $K(-)$ comme foncteur covariant de la catégorie dont les objets sont les variétés et dont les morphismes sont les immersions ouvertes vers la catégorie des anneaux commutatifs eventuellement sans unité.

Proposition 4.1. *Soit X une variété et soit $P : E \longrightarrow X$ un fibré vectoriel réel sur X. Notons $\pi : TX \longrightarrow X$ le fibré tangent à X. Alors on a un isomorphisme*

$$TE \cong \pi^*TX \oplus \pi^*E$$

De plus, le fibré $T(TX)$ sur TX porte une structure de fibré complexe.

Démonstration. □

Corollaire 4.2. *Soit X une variété et Y une sous–variété de X. Soit N un voisinage tubulaire de Y dans X, vu comme fibré normal à Y dans X. Alors le fibré $TN = TX|_N$ sur N a une structure de fibré complexe.*

Définition 4.3. Soit X une variété, Y une variété compacte, et $i : Y \longrightarrow X$ une immmersion fermée. Soit N un voisinage tubulaire de Y dans X, vu comme fibré normal à Y dans X. L'homomorphisme de groupes abéliens

$$i_! : K(TY) \longrightarrow K(TX)$$

est défini comme étant la composition

$$K(TY) \xrightarrow{\ \Phi\ } K(TN) \xrightarrow{\ h\ } K(TX)$$

où Φ est l'isomorphisme de Thom, et où h est l'homomorphisme d'extension.

Remarque 4.4. La définition de l'homomorphisme $i_!$ ne dépend pas du coix de N.

Exemple 4.5. Considérons comme exemple facil le cas où $X = \mathbb{R}^n$ et où Y est un point de X. On peut donc choisir $N = X$.

Remarque 4.6. Non seulement le théorème suivant est est centre et point de repère pour toute la démonstration du théorème de l'indice, il est aussi le resultat clé pour la démonstration de l'équivalence des divers formulations du théorème de l'indice.

Theorème 4.7. *Il existe une unique application B qui à toute variété compacte X associe un homomorphisme de groupes abéliens*

$$B_X \in \operatorname{Hom}\big(K(TX), \mathbb{Z}\big)$$

ayant les deux propriétés suivantes

I : *Si X est un point, alors $B_X = \dim$*

II : *Pour tout plongement $j : Y \longrightarrow X$ on a $B_X \circ j_! = B_Y$.*

Remarque 4.8. On va dans la suite construire un candidat pour l'application B dont on affirme l'existence, et ensuite démontrer que l'application B consrtuite satisfait (I) et (II), et que de plus (I) et (II) caracterisent B complètement. Remarquons que l'énnoncé de ce théorème fait un sens, même si la collection de toutes les variétés compactes n'est pas un ensemble, mais seulement une classe. Il y a deux écoles : D'une part on peut le reformuler facilement dans le langage des catégories et foncteurs, faisant donc de B un foncteur. D'autre part, la condition (II) entraine que si B existe, alors B_X ne dépend de X seulement à homéomorphisme près. Les variétés différentiables compactes à homéomorphisme près forment un ensemble.

Proposition 4.9. *L'attribution* $(-)_!$ *est fonctorielle dans le sens que* $\mathrm{id}_! = \mathrm{id}$ *et* $(i \circ j)_! = i_! \circ j_!$.

Démonstration. Dans le cas $X = Y$ et $i = \mathrm{id}$, on choisit $N = X$ comme voisinage tubulaire de X dans X. L'isomorphisme de Thom $K(TX) \longrightarrow K(TX)$ et l'homomorphisme d'extension $K(TX) \longrightarrow K(TX)$ sont, cans ce cas, les deux l'identité sur $K(TX)$, ce qui montre $\mathrm{id}_! = \mathrm{id}$.
Soient maintenant X, Y et Z des variétés avec inclusions

$$Z \xrightarrow{j} Y \xrightarrow{i} X$$

Soit N un voisinage tubulaire de Z dans Y, et soit M un voisinage tubulaire de Y dans X. Ces voisinages seront toujours aussi considérés comme fibrés normaux de Z dans Y respectivement de Y dans X. Remarquons que la réstriction $L := N|_M$ est un voisinage tubulaire de Z dans X. A notre propos, il faut montrer que le diagramme suivant commute :

(94)
$$\begin{tikzcd}
 & & K(TL) \arrow[dr, "g^N"] \arrow[drr, "g^X"] & & \\
K(TZ) \arrow[urr, "\Psi_Z"] \arrow[r, "\Phi_Z"'] & K(TM) \arrow[ur, "\Psi_M"] \arrow[r, "h^Y"'] & K(TY) \arrow[r, "\Phi_Y"'] & K(TN) \arrow[r, "h^X"'] & K(TX)
\end{tikzcd}$$

où Φ_Z,Φ_Y, Ψ_Z et Ψ_M sont les isomorphismes de Thom, et où h^Y, h^X, g^N et g^X sont les homomorphismes d'extension. La composition des quatre flèches qui forment la base du grand triangle (94) est $i_! \circ j_!$, et la composition des deux autres arrêtes est $(i \circ j)_!$. $\square$

Définition 4.10. Soit X une variété compacte et $i : X \longrightarrow \mathbb{R}^k$ un plongement. Soit $j : \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ l'immersion qui envoit 0 sur le 0 de $\mathbb{R}^k$. On appelle *indice topologique* l'homomorphisme de groupes $B_X := \dim \circ j_!^{-1} \circ i_!$.

Remarque 4.11. L'indice topologique $B_X : K(TX) \longrightarrow \mathbb{Z}$ est donc la composition de

$$K(TX) \xrightarrow{i_!} K(T\mathbb{R}^k) \xrightarrow{j_!^{-1}} K(\{0\}) \xrightarrow[\dim]{\cong} \mathbb{Z}$$

Le morphisme $j_!$ est, comme on l'a vu dans l'exemple 4.5, simplement l'isomorphisme de Thom pour le fibré $\mathbb{R}^{2k} \longrightarrow \{0\}$. Si on identifie $K(\{0\}) = \mathbb{Z}$ via la dimension, alors l'indice topologique est défini comme étant l'unique application qui fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
K(TN) \arrow[r, "h"] & K(T\mathbb{R}^k) \\
K(TX) \arrow[u, "\Phi"] \arrow[r, "B_X"] & K(\{0\}) \arrow[u, "\Psi"']
\end{tikzcd}$$

où Φ et Ψ sont les isomorphismes de Thom, et où h est l'homomorphisme d'extension. On écrit B pour B_X si X est clair du contexte.

Démonstration du théorème 4.7. Rappelons que (remarque 4.11) sous l'identification via la dimension $\mathbb{Z} = K(\{0\})$, l'indice topologique est défini à l'aide du diagramme

$$\begin{tikzcd}
K(TN) \arrow[r, "h"] & K(T\mathbb{R}^k) \\
K(TX) \arrow[u, "\Phi"] \arrow[r, "B_X"] & K(\{0\}) \arrow[u, "\Psi"']
\end{tikzcd} \tag{95}$$

Commencons par montrer que l'indice topologique B satisfait les conditions (I) et (II). Si X est un point, alors on peut plonger X dans $\mathbb{R}^0$, d'une seule façon d'ailleurs. De plus, $N := \mathbb{R}^0$ est un voisinage tubulaire de X dans $\mathbb{R}^0$, ce qui fait que $TX = TN = T\mathbb{R}^0$. Avec ces choix, les isomorphismes de Thom Φ et Ψ ainsi que l'homomorphisme d'extension h du diagramme (95) deviennent l'identité, donc aussi B_X. Ainsi $B_X = \dim$, tenant compte de l'identification $\mathbb{Z} = K(\{0\})$.
Quant à la propriété (II) de B, choisissons une immersion $i : X \longrightarrow \mathbb{R}^k$. L'application $i \circ j : Y \longrightarrow \mathbb{R}^k$ est une composition de deux immersions, donc une immersion. Le diagramme suivant commute, vu la proposition 4.9 :

$$\begin{tikzcd}
& K(TX) \arrow[dr, "i_!"] & & & \\
K(TY) \arrow[ur, "j_!"] \arrow[rr, "(i\circ j)_!"] & & T\mathbb{R}^k \arrow[r] & K(T\{0\}) \arrow[r] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

Le chemin en haut est $B_X \circ j_!$, et celui en bas est B_Y, ce qui montre que B a aussi la propriété (II). La partie existence de 4.7 est démontrée.
Supposons maintenant qu'on ait une fonction qui à toute variété compacte X attribue un homomorphisme $B'_X \in \operatorname{Hom}\big(K(TX), \mathbb{Z}\big)$ tel que (I) et (II) sont satisfaits. Fixons une variété compacte X et un plongement $i : X \longrightarrow \mathbb{R}^k$. Identifions S^k, la

sphère de dimension k, à la compactification de $\mathbb{R}^k$. En composant i avec l'inclusion $\mathbb{R}^k \longrightarrow S^k$ on obtient un plongement $j : X \longrightarrow S^k$. On a un diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & & K(T\mathbb{R}^k) \arrow[dl, "h"] \\
K(TX) \arrow[urr, "i_!"] \arrow[r, "j_!"] \arrow[drr, "B'_X"'] & K(TS^k) \arrow[dr, "B'_{S^k}"] & \\
 & & K(\{0\}) \arrow[uu, "\Phi"']
\end{tikzcd} \tag{96}$$

où h est l'homomorphisme d'extension et Φ l'isomorphisme de Thom, et où on a de nouveau identifié $K(\{0\}) = \mathbb{Z}$. Comme $B_X = \Phi^{-1} \circ i_!$ par définition, il suffit de démontrer que ce diagramme commute. Par hypothèse B' satisfait (II), on a donc en particulier $B'_X = B'_{S^k} \circ j_!$. On a aussi $j_! = h \circ i_!$: En effet, soit N un voisinage tubulaire de X dans $\mathbb{R}^k$. Comme $\mathbb{R}^k$ est une sous–variété ouverte de S^k, N est aussi un voisinage tubulaire de X dans S^k. On a

$$\begin{tikzcd}
 & & K(T\mathbb{R}^k) \arrow[dr, "h"] & \\
K(TX) \arrow[r, "\Psi"] & K(TN) \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "f"'] & & K(TS^k)
\end{tikzcd}$$

où Ψ est l'isomorphisme de Thom et où f,g et h sont les homomorphismes d'extension. On a $h \circ g = f$ par construction, et ainsi

$$j_! = f \circ \Psi = h \circ g \circ \Psi = h \circ i_!$$

Il reste à vérifier la commutativité du triangle à droite dans le diagramme (96), c'est–à–dire $B'_{S^k} \circ h = \Phi^{-1}$. Remarquons que la variété X n'intervient plus. Considérons le diagramme (96) dans cas particulier $X = \{0\}$:

$$\begin{tikzcd}
 & & K(T\mathbb{R}^k) \arrow[dl, "h"] \\
K(\{0\}) \arrow[urr, "i_!"] \arrow[r, "j_!"] \arrow[drr, "B'_{\{0\}}"'] & K(TS^k) \arrow[dr, "B'_{S^k}"] & \\
 & & K(\{0\}) \arrow[uu, "\Phi"']
\end{tikzcd} \tag{97}$$

Vu que $B'_{\{0\}} = \dim$ par hypothèse, et tenant compte de l'identification $K(\{0\}) = \mathbb{Z}$, on a $B'_{\{0\}} = \mathrm{id}$. De plus on a $i_! = \Phi$, ce qui montre que le grand triangle de (97) commute. On a déjà montre que $B'_{S^k} \circ j_! = B_{\{0\}}$ et que $h \circ i_! = j_!$, ce qui permet de conclure que $B'_{S^k} \circ h = \Phi^{-1}$. Le théorème 4.7 est démontré. $\square$

2. Ennoncé du théorème de l'indice

DÉFINITION 4.12. Soit X une variété compacte et $P \in \mathrm{Ell}(X)$. On appelle *indice topologique de* P et on note $\mathrm{ind}_t\, P$ le nombre entier

$$\mathrm{ind}_t\, P := B_X([\sigma(P)])$$

où $[\sigma(P)]$ est le symbole K–théorique de P.

THEORÈME 4.13 (Atiyah–Singer, version K–théorique). *Soit X une variété compacte. Alors*

$$\mathrm{ind}_a\, P = \mathrm{ind}_t\, P$$

pour tout $P \in \mathrm{Ell}(X)$.

THEORÈME 4.14 (Atiyah–Singer, version cohomologique). *Soit X une variété lisse et compacte de dimension n et soit P un opérateur élliptique sur X de symbole σ. Alors*

$$\mathrm{ind}_a\, P = (-1)^n \{\mathrm{ch}([\sigma])\,\mathrm{td}(TX \otimes \mathbb{C})\}[TX]$$

où ch *est le caractère de Chern,* td *la classe de Todd et $[\sigma] \in K(TX)$ la classe du symbole de P.*

REMARQUE 4.15. Quant à l'équivalemce de ces énnoncés, il suffit évidemment de montrer que

$$B(E) = (-1)^n \{\mathrm{ch}(E)\,\mathrm{td}(TX \otimes \mathbb{C})\}[TX] \tag{98}$$

pour tout $E \in K(TX)$, ce qui est un excercice purement calculatiore.

Bibliographie

[1] Atiyah, M.F. et Segal, G.B. *The index of elliptic operators II.* Ann. of math. 87 (1968) p. 531-545

[2] Atiyah, M.F. et Singer, I.M. *The index of elliptic operators I.* Ann. of math. 87 (1968) p. 484-530

[3] Atiyah, M.F. et Singer, I.M. *The index of elliptic operators III.* Ann. of math. 87 (1968) p. 546-604

[4] Booss, Bernhelm *Topologie und Analysis, eine Einführung in die Atiyah–Singer Indexformel.* Springer Verlag 1977

[5] Bott, Raoul *Lectures on $K(X)$.* W.A.Benjamin Inc. 1969

[6] Bott, Raoul et Loring, W. Tu *Differential forms in algebraic topologie, GTM 82.* Springer Verlag 1982

[7] Bourbaki, Nicolas *Algèbre, chapitres IV à VII.* Masson, 1981

[8] Bourbaki, Nicolas *Espaces vectoriels topologiques, chapitres I à V.* Masson, 1981

[9] Dupont, Johan *Fibre Bundles and Chern–Weil Theory.* Lecture notes series no. 69, Aarhus Universitet 1977

[10] Folland, Gegald B. *Lectures on partial differential equations.* Springer Verlag 1983

[11] Grothendieck, Alexander *La théorie des classes de Chern.* Bulletin de la S.M.F., tome 86 (1958) p. 137-154

[12] Hartshorne, Robin *Algebraic geometry, GTM 52.* Springer Verlag 1977

[13] Hörmander, Lars *The analysis of linear partial differential operators, vol I.* Grundlehren 256 Springer Verlag 1983

[14] Hörmander, Lars *The analysis of linear partial differential operators, vol III.* Grundlehren 274 Springer Verlag 1985

[15] Karoubi, Max *K–theory.* Grundlehren 226 Springer Verlag 1978

[16] Madsen, Ib Henning *From calculus to cohomology.* Cambridge univ. press 2000

[17] Rempel S. and Schulze B.W. *Index theory of elliptic boundary problems.* Akademie–Verlag Berlin, 1982

[18] Segal, Graeme B. *Equivariant K–theory.* Publ. math. IHES 34 (1968), p. 129-151

[19] Shanahan, Patrick *The Atiyah-Singer index theorem.* Lecture notes 638, Springer Verlag 1978

[20] Shubin, Mikhail A. *Pseudo differential operators and Spectral theory.* Springer 1987

[21] Simanca, Santiago R. *Pseudo differential operators.* Longman scientific & technical 1992

[22] Suter, Ulrich *Topologie des fibrés, cours d'été à l'université de Neuchâtel.* Notes personelles, 2004

[23] van der Waerden, B.L. *Modern Algebra, 7nd ed.* Frederick Unger 1970

[24] Werner, Dirk *Funktionalanalysis* Springer 1995

[25] Wong, Man Wah *An introduction to pseudo differential operators, 2nd ed.* World scientific, Singapore 1999