Projet de Semestre

été 2005

Opérateurs de Fredholm

Anthony Arnold & Caroline Lassueur

Professeur Responsable:

Prof. Charles Stuart

Résumé

Les opérateurs de Fredholm sont traités au travers des notions d'analyse fonctionnelle qu'ils sous-entendent, d'exemples et de propriétés élémentaires pour finir avec l'énoncé du théorème d'Atiyah-Jänich qui lie opérateurs de Fredholm, K-théorie et topologie algébrique.

En mémoire du premier axiome
de l'arithmétique xibarienne:

 $= 1$

Table des matières

Table des notations

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long du travail:

$B(X,Y)$	Espace des opérateurs linéaires et bornés de X vers Y
$B(X)$	Algèbre des opérateurs linéaires et bornés de l'espace X
B_X	La boule unité fermée de l'espace métrique X
$\mathbb{C}$	Les nombres complexes
Coker	Conoyau
codim	Codimension
dim	Dimension
$d(.,.)$	Application de distance
$D(f)$	Domaine de définition de l'application f
$\mathbb{F}$	Corps étant soit $\mathbb{C}$, soit $\mathbb{R}$
$\mathcal{F}(X,Y)$	Ensemble des opérateurs de Fredholm de X vers Y
$\mathcal{F}(X)$	Ensemble des opérateurs de Fredholm de X dans X
$\hom(X;Y)$	Ensemble des applications linéaires de l'espace X dans l'espace Y
I_S	Application identité de l'ensemble E
im	Image d'une application
ind(.)	Indice
$\mathbb{K}$	Corps quelconque
ker	Noyau
$K(X,Y)$	Ensemble des opérateurs linéaires compacts de X dans Y
$K(X)$	Idéal des opérateurs linéaires compacts de l'espace X
$\mathbf{K}(X)$	Groupe de Grothendick
$\mathbb{N}$	Les nombres naturels, 0 compris
$\mathbb{N}_n$	$\{1,2,3,\ldots,n\}$
$\mathbb{R}$	Les nombres réels
S_X	La sphère unité de l'espace métrique X
$\mathcal{T}_E$	Topologie sur l'ensemble E
$\mathcal{T}_{\|.\|}$	Topologie engendrée par la norme $\|.\|$
U_X	La boule unité ouverte de l'espace métrique X
Vect(X)	Ensemble des classes d'isomorphie de fibrés vectoriels sur X.
$vect(v_1,v_2,\ldots)$	Espace vectoriel engendré par les vecteurs $v_1,v_2,\ldots$
X^*	Dual topologique de l'espace X
X/M	Le quotient de l'espace X par le sous-espace M
$(X,\|.\|_X)$	Espace normé
$\{x_n\}$	Suite
$\mathbb{Z}$	Les nombres entiers
$\lvert . \rvert$	Module complexe/valeur absolue
$\|.\|_X$	Application norme sur l'ensemble X
$\oplus$	La somme directe
$\sum$	Symbole de sommation
$\times$	Le produit cartésien
$\prod$	Produit/produit cartésien
$\circ$	La composition des applications
$\cap$	L'intersection
$\cup$	L'union
$\neq$	La non égalité
$\cong$	Isomorphisme de structure algébrique

$\subseteq$	L'inclusion
$\subsetneq$	L'inclusion stricte
$\not\subset$	La non inclusion
$\hookrightarrow$	Flèche injective
$\twoheadrightarrow$	Flèche surjective
$\forall$	Symbole universel "pour tout"
$\exists$	Symbole universel "il existe"
$\exists!$	Symbole universel "il existe un unique"

Introduction

Le but de ce travail dans le projet de l'index est l'étude de quelques propriétés des opérateurs de Fredholm et de l'application indice. Or les mots opérateur de Fredholm sous-entendent opérateurs linéaires et espaces de Banach, qui sous-entendent espaces vectoriel normés. Ainsi avant d'étudier les opérateurs de Fredholm à proprement parler, il est nécessaire d'acquérir de bonnes bases d'analyse fonctionnelle. Etant novices dans cette matière en début de semestre, comme la plupart de nos camarades du projet de l'index, dans un souci de lisibilité de notre travail, nous consacrons les deux premier chapitres aux bases de l'analyse fonctionnelle. Le premier constitue simplement un résumé des propriété élémentaires des espaces normés et des opérateurs linéaires. Pour plus de détails ainsi que pour les preuves des résultats présentés nous recommandons vivement la lecture du cours "analyse fonctionnelle" du Prof. Stuart ou d'un quelconque livre d'introduction à cette même matière. Le deuxième chapitre présente certaines notions plus spécifiques, commes les quotients, les sommes directes, les opérateurs adjoints, compacts et à image fermée, que nous utiliserons dans le developpement des opérateurs de Fredholm. Ces notions étant nouvelles pour nous, nous y consacrons un peu plus de temps, essentiellement dans une persepective d'élargissement de nos connaissances personnelles en analyse fonctionnelle.

Ainsi les seuls prérequis que nous supposons sont quelques notions élémentaires d'algèbre, d'algèbre linéaire et de topologie générale. Cependant le lecteur savant pourra passer directement au chapitre 3 qui traite des opérateurs de Fredholm à proprement parlé et introduit l'application indice d'un tel opérateur en développant quelques unes de leurs propriétés et caractérisations. Le chapitre 4, quant à lui, présente une généralisation de l'application indice à une famille d'opérateurs de Fredholm indexée par un ensemble compact et connexe. Il essaie finalement d'introduire un lien entre opérateur de Fredholm, K-théorie et topologie algébrique par le théorème d'Atiyah-Jänich.

Nous avons essayé d'écrire un texte cohérent et lisible, cependant nous sommes des auteurs imparfaits. C'est pourquoi nous sollicitons l'aide de nos lecteurs pour corriger nos erreurs de tous types. Deux unités de notre unité fondamentale de récompense, le [milkiwi] seront attribuées à la première personne nous mentionnant, par e-mail et en code LaTeX, une quelconque erreur.

Remerciements

We are extremely grateful to Professor Charles Stuart, who gave us one hour of his time every week to follow us personally in our work. We also wish to thank him for always welcoming us with this incredible smile of his, which transcends motivation. His enthusiasm towards the general Index Poject has been most appreciated.

Nous remercions aussi David et Peter qui ont pris le temps de mettre sur pied ce projet que constitue le projet de l'index.

CHAPITRE 1

Prolégomènes

Le présent chapitre donne une introduction aux espaces normés. Il vise essentiellement à rappeler quelques définitions et propriétés de base dont nous aurons besoin dans la suite de ce travail.
Les démonstrations des divers résultats énoncés seront omises, la raison principale étant qu'elles se trouvent de façon générale dans la grande majorité des livres d'introduction à l'analyse fonctionnelle.

Remarque liminaire : Sauf mention contraire, par espace vectoriel nous entenderons toujours espace vectoriel réel ou complexe. Nous utiliserons le symbole $\mathbb{F}$ pour signifier un corps étant soit le corps $\mathbb{C}$ soit le corps $\mathbb{R}$ et nous parlerons de $\mathbb{F}$-espaces vectoriels.

1. Espaces vectoriels topologiques

Définition 1.1. Un **espace vectoriel topologique** est une paire ordonnée $(E, \mathcal{T}_E)$ où $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une topologie $\mathcal{T}_E$ par rapport à laquelle la loi interne $+ : E \times E \to E$ et la multiplication scalaire $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$ sont continues.
Dans ce cas la topologie $\mathcal{T}_E$ est appelée **topologie vectorielle**.

Remarques.

(1) Une topologie $\mathcal{T}_E$ sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est vectorielle si et seulement si les deux assertions suivantes sont vérifiées :

- pour tout $x, y \in E$ et pour tout voisinage U de $x + y$ il existe des voisinages V de x et W de y tels que $V + W \subseteq U$;
- pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, pour tout $x \in E$ et pour tout voisinage U de λx, il existe $\varepsilon > 0$ et un voisinage V de x tel que $\{\mu v \mid |\mu - \lambda| < \varepsilon \,\&\, v \in V\} \subseteq U$.

(2) Dans tout espace vectoriel topologique E, pour tout $y \in E$ la translation $x \mapsto x + y$ est continue. En particulier les voisinages d'un point x de E sont de la forme $x + V$ où V est un zéro-voisinage.

2. Normes et espaces normés

Commençons par rappeler la définition d'une norme.

Définition 1.2. Soit X un $\mathbb{F}$-espace vectoriel. Une **norme** sur X est une fonction réelle $\|.\|_X : X \to \mathbb{R}_+$ satisfaisant les trois conditions suivantes :

(1) $\|x\|_X = 0$ si et seulement si $x = 0_X$;
(2) $\|\lambda x\|_X = |\lambda| \cdot \|x\|_X \quad \forall \lambda \in \mathbb{F} \quad \forall x \in X$;
(3) $\|x + y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X \quad \forall x, y \in X$ (inégalité triangulaire).

Si la fonction $\|.\|_X$ ne satisfait que les points (2) et (3), on l'appelle une **semi-norme** sur X.
Un **espace normé** $(X, \|.\|_X)$ est un couple constitué d'un $\mathbb{F}$-espace vectoriel X et d'une norme $\|.\|_X$ sur X.

En particulier, un espace normé est un espace métrique pour la distance décrite ci-après.

Proposition et Définition 1.3. *Pour tout espace normé $(X, \|.\|_X)$, on peut définir une distance, appellée* ***distance engendrée par la norme****, de la façon suivante :*

$$d(x; y) := \|x - y\|_X \quad \forall x, y \in X$$

Nous noterons $B_X := \{x \in X \mid \|x\|_X \leq 1\}$ la boule unité fermée,
$U_X := \{x \in X \mid \|x\|_X < 1\}$ la boule unité ouverte et $S_X := \{x \in X \mid \|x\|_X = 1\}$ la sphère unité.

Proposition 1.4. *Soit $(X, \|.\|_X)$ un espace normé.*

(1) *La loi interne $+ : X \times X \to X$ est uniformément continue.*
(2) *La multiplication scalaire $\cdot : \mathbb{F} \times X \to X$ est continue.*
(3) *Pour tout $\lambda \in \mathbb{F}$, l'application $x \mapsto \lambda x$ est uniformément continue.*
(4) *La fonction norme $\|.\|_X : X \to \mathbb{R}_+$ est uniformément continue.*

Par conséquent, les espaces normés sont des espaces vectoriels topologiques. la topologie sous-jacente étant la topologie $\mathcal{T}_{\|.\|}$ engendrée par la norme $\|.\|$, autrement dit la topologie engendrée par la distance engendrée par la norme !

Proposition 1.5. *Soit $(X, \|.\|_X)$ un espace normé. Alors, si Z est un sous-espace de X, son adhérence $\overline{Z}$ est aussi un sous-espace de X.*

Nous pouvons maintenant définir un type d'espace normé qui va nous intéresser plus particulièrement par la suite : les espaces de Banach.

Définition 1.6. Un **espace de Banach** est un espace normé $(X, \|.\|_X)$ qui est complet en regard de la métrique engendrée par la norme.

3. Opérateurs linéaires

Les espaces normés étant avant tout munis d'une structure d'espace vectoriel, les flèches entre espaces normés qui nous intéressent plus particulièremnts sont les opérateurs linéaires. Voici quelques résultats élémentaires et essentiels à la comprhéhension pour la suite de ce travail.

DÉFINITION 1.7. Soit X, Y des espaces normés.
Un opérateur linéaire $T : X \to Y$ est **borné**, si $T(B)$ est un sous-ensemble borné de Y pour tout sous-ensemble borné B de X.
On note $\mathbf{B(X,Y)}$, l'ensemble des opérateurs linéaires bornés de X vers Y (ou simplement $\mathbf{B(X)}$, si $X = Y$).

THÉORÈME 1.8. *Soit X, Y des espaces normés et $T : X \to Y$, un opérateur linéaire. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- *T est continu.*
- *T est continu en 0.*
- *T est uniformément continu sur tout X.*
- *T est borné.*
- *Il existe un voisinage V de 0 dans X tel que $T(V)$ est borné dans Y.*
- *$\exists M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\|Tx\| \leq M\|x\|$ pour tout $x \in X$.*
- *$\sup\{\|Tx\| : x \in B_x\} < \infty$.*

Nous retiendrons en particulier que pour les opérateurs linéaires, les mots continu et borné sont complétement équivalents.

DÉFINITION 1.9. Soit X, Y des espaces normés et $T \in B(X, Y)$.
On définit la **norme-opérateur** de T par :

$$\|\mathbf{T}\| := \sup\{\|\mathbf{Tx}\| : \mathbf{x} \in \mathbf{B_x}\}$$

PROPOSITION 1.10. *Soit X, Y des espaces normés et $T \in B(X, Y)$.
Alors :*

- *$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in X, \|x\| < 1\}$.*
- *$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in S_x\}$, si $X \neq 0$.*
- *$\|Tx\| \leq \|T\| \cdot \|x\|, \forall x \in X$. De plus, $\|T\|$ est le plus petit nombre réel positif $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\|Tx\| \leq M\|x\|, \forall x \in X$.*

Notons que par la suite, lorsque nous considérerons des espaces d'opérateurs, sauf mention contraire, nous les supposerons munis de la norme opérateur.

THÉORÈME 1.11. *Soit X, Y des espaces normés.
Alors :*

- *$B(X, Y)$ est un espace normé pour la norme-opérateur.*
- *Si Y est un espace de Banach, alors $B(X, Y)$ est un espace de Banach.*

Remarque 1.12. En particulier si $X = Y$ est un espace de Banach, alors $B(X;X) := B(X)$, muni de l'opération supplémentaire de compostion des opérateurs, forme une $\mathbb{F}$-algèbre.

Proposition 1.13. *Soit X, Y, Z des espaces normés, $S \in B(X,Y)$ et $T \in B(Y,Z)$.*
Alors $TS \in B(X,Z)$ et $\|TS\| \leq \|T\| \cdot \|S\|$.

Théorème 1.14. *Soit X, Y des espaces normés avec X de dimension finie.*
Alors, tout opérateur linéaire de X vers Y est borné.

Définition 1.15. Soit X, Y des espaces norm s et $T : X \to Y$, un opérateur linéaire.
On dit que l'opérateur T est un **isomorphisme** dans Y, s'il est injectif, continu et si son inverse est continu sur l'image de T.
Si de plus, $\|Tx\| = \|x\|, \forall x \in X$, on dit que T est un **isomorphisme isométrique**.

Proposition 1.16. *Soit X, Y des espaces normés et $T : X \to Y$, un opérateur linéaire. Alors :*
- *T est un isomorphisme si et seulement si il existe $s, t \in \mathbb{R}_+$ tels que $s\|x\| \leq \|Tx\| \leq t\|x\|, \forall x \in X$.*
- *Si X est un espace de Banach, et T est un isomorphisme, alors $T(X)$ est un espace de Banach.*

Théorème 1.17. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit X, Y des espaces normés de dimension n sur $\mathbb{F}$.*
Alors, tout opérateur linéaire de X vers Y est un isomorphisme.

Corollaire 1.18. *Soit X, un espace vectoriel de dimension finie.*
Deux normes différentes sur X engendrent la même topologie.

Corollaire 1.19. *Tout espace normé de dimension finie est un espace de Banach.*

Corollaire 1.20. *Tout sous-espace de dimension finie d'un espace normé est un sous-ensemble fermé de l'espace en question.*

Corollaire 1.21. *Soit X, un espace normé de dimension finie.*
Alors, tout sous-ensemble fermé et borné de X est compact.

Terminologie. On dit alors que X a la **propriété de Heine-Borel**.

Théorème 1.22 (Riesz, 1918). *Soit X, un espace normé.*
Alors les assertions suivantes sont équivalentes :
- *X est de dimension finie.*

– *X a la proprieté de Heine-Borel.*
– *S_X est compacte.*

4. Opérateurs entre espaces de Banach

DÉFINITION 1.23. Soit $(X, \|.\|_X)$ et $(Y, \|.\|_Y)$ deux espaces normés sur $\mathbb{F}$ et $T : X \to Y$ un opérateur linéaire.
Alors on dit que T est **fermé** si son graphe est fermé dans $(X \times Y, \|.\|_{X \times Y})$.

Voici un premier critère de fermeture des opérateurs linéaires.

PROPOSITION 1.24. *Soit $(X, \|.\|_X)$ et $(Y, \|.\|_Y)$ deux espaces normés sur $\mathbb{F}$ et $T : X \to Y$ un opérateur linéaire.*
Alors, T est fermé si et seulement si le domaine de T, $D(T)$, est fermé dans X.

THÉORÈME DU GRAPHE FERMÉ. *Soit $(X, \|.\|_X)$ et $(Y, \|.\|_Y)$ deux espaces de Banach sur $\mathbb{F}$ et $T : X \to Y$ un opérateur linéaire et fermé.*
Alors, T est borné si et seulemnet si $D(T)$ est fermé dans X.

COROLLAIRE 1.25. *Soit $(X, \|.\|_X)$ et $(Y, \|.\|_Y)$ deux espaces de Banach sur $\mathbb{F}$ et $T : X \to Y$, un opérateur linéaire et fermé tel que le domaine de T soit l'espace X tout entier.*
Alors T est un opérateur borné.

THÉORÈME DES APPLICATIONS OUVERTES. *Tout opérateur linéaire borné et surjectif entre deux espaces de Banach est une application ouverte.*

COROLLAIRE 1.26. *Si T est un opérateur linéaire borné et bijectif entre deux espaces de Banach, alors son inverse T^{-1} est aussi un opérateur linéaire borné. En d'autres termes tout opérateur linéaire borné et bijectif entre deux espaces de Banach est un isomorphisme.*

5. L'espace dual

Rappelons simplement la définition ainsi que quelques propriétés essentielles.

DÉFINITION 1.27. Soit $(X, \|.\|_X)$ un espace normé sur le corps $\mathbb{F}$. L'**espace dual topologique** de X est l'espace normé $(X^*, \|.\|_{X^*})$ où $X^* = B(X, \mathbb{F})$ est muni de la norme opérateur.

Etant donné un espace normé, on peut toujours créer un espace de Banach par dualisation.

Théorème 1.28. *Si* $(X, \|.\|_X)$ *est un espace normé, alors* $(X^*, \|.\|_{X^*})$ *est un espace de Banach.*

Une relation entre les dimensions d'un espace normé et de son dual.

Théorème 1.29. *La dimension d'un espace normé* $(X, \|.\|_X)$ *est finie si et seulement si la dimension de son dual est finie.*
De plus, dans le cas où X est de dimension finie, alors $X^* = B(X; \mathbb{F}) = \mathrm{Hom}(X; \mathbb{F})$. *Il en découle que la dimension de ce dernier est égale à celle de X.*

Nous remarquerons encore que l'espace dual X^* d'un espace normé X est assez grand pour séparer les points de X. Autrement dit si x et y sont deux éléments différents de X, alors il existe une forme linéaire $x^* \in X$ telle que $x^*(x) \neq x^*(y)$. C'est une conséquence du théorème de Hahn-Banach.

Théorème de Hahn-Banach. *Soit* $(X, \|.\|_X)$ *un espace normé sur le corps* $\mathbb{F}$. *Soit* $f : D(F) \subset X \longrightarrow \mathbb{F}$ *une forme linéaire bornée.*
Alors il existe une forme linéaire $\widetilde{f} \in X^*$ *telle que*

$$\widetilde{f}(x) = f(x) \text{ pour tout } x \in X\,;$$
$$\|\widetilde{f}\|_{X^*} = \sup\{|f(x) \mid x \in D(f) \,\&\, \|x\|_X = 1\}.$$

Pour finir, une caractérisation de la norme par l'espace dual.

Théorème 1.30. *Si* $(X, \|.\|_X)$ *est un espace normé, alors pour tout* $x \in X$, *il existe* $x^* \in X^*$ *tel que*

- $Xx^*(x) = \|x\|_X$
- $\|x^*\|_{X^*} \leq 1$.

En particulier,

$$\|x\|_X = \sup\{|x^*| \mid x^* \in X^* \,\&\, \|x^*\|_{X^*} \leq 1\}.$$

CHAPITRE 2

Concepts liés aux opérateurs de Fredholm

Un opérateur de Fredholm étant un opérateur borné à image fermée dont les dimensions du noyau et du conoyau sont finies, nous aurons besoin d'approfondir les quelques notions ci-dessous avant d'étudier les opérateurs de Fredholm à proprement parler.

(1) Les **espaces quotients**, liés au conoyau d'un opérateur.
(2) Les **sommes directes et projections**, qui permettent d'obtenir certains opérateurs de Fredholm.
(3) Les **opérateurs adjoints** liés à l'indice.
(4) Les **opérateurs compacts** qui serviront à caractériser les opérateurs de Fredholm.
(5) Les **opérateurs à image fermée**, car les opérateurs de Fredholm sont à image fermée.

1. Espaces quotients

Commençons par rappeler la définition algébrique d'un quotient d'espaces vectoriels.

Définition 2.1. Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et W un sous-espace de V. Alors le quotient de groupes abéliens V/W, dont l'ensemble sous-jacent est $\{v+W | v \in V\}$, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, appelé **espace quotient**, muni de la loi interne :

$$\begin{array}{rccc} + : & V/W \times V/W & \longrightarrow & V/W \\ & (v+W, \check{v}+W) & \longmapsto & (v+W)+(\check{v}+W) := (v+\check{v})+W \end{array}$$

et de la loi externe

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{K} \times V/W & \longrightarrow & V/W \\ & (\lambda, v+W) & \longmapsto & \lambda \cdot (v+W) := (\lambda v)+W. \end{array}$$

Le $\mathbb{K}$-homomorphisme

$$\begin{array}{rccc} \pi_W : & V & \longrightarrow & V/W \\ & v & \longmapsto & v+W \end{array}$$

est appelé **application quotient** ou **projection canonique**.

Nous rappelons que si W est un sous groupe d'un groupe abélien V, on peut définir une relation d'équivalence $\sim_W$ en posant $v \sim_W u$ si et seulement si $u - v \in W$. Les classes d'équivalence sont les $v + W$ tels que $v \in V$ et l'on note V/W l'ensemble de ces classes d'équivalence. C'est un groupe si $W < V$.
Il faut donc garder en mémoire que dans un espace quotient V/W deux classes $v + W$ et $u + W$ sont égales si et seulement si $u - v \in W$.

Considérons maintenant un espace normé $(X, \|.\|_X)$ et $M \subseteq X$ un sous-espace. Nous cherchons à savoir si la norme $\|.\|_X$ induit une norme sur le quotient X/M. Une façon naturelle de définir une distance entre deux classes (à gauche) consiste à utiliser la distance entre sous-ensmbles d'un espace métrique :

$$d(x + M, y + M) = \inf\{\|v - w\|_X \mid v \in x + M, w \in y + M\}.$$

Remarquons que

$$d(x + M, y + M) = d(x, y + M) = \inf\{\|x - w\|_X \mid w \in y + M\}.$$

(où le deuxième d représente la distance d'un point à un sous-ensemble d'un espace métrique), étant donné que :

$$\begin{aligned} \{v - w \mid v \in x + M, w \in y + M\} &= \{(x + m_1) - (y + m_2) \mid m_1, m_2 \in M\} \\ &= \{x - (y + m_2 - m_1) \mid m_1, m_2 \in M\} \\ &= \{x - (y + m) \mid m \in M\} = \{x - w \mid w \in y + M\} \\ &\forall x \in X. \end{aligned}$$

En outre, si l'on veut que l'application d ci-dessus définisse une métrique, il est nécessaire que le sous-espace M soit fermé car si $x \in \bar{M} \setminus M$, on obtient que

$$d(x + M, 0 + M) = d(x, 0 + M) = d(x, M) = 0.$$

Or $x \in \bar{M} \setminus M$ implique que $x \notin M$ et donc $x + M \neq 0 + M$. Ainsi M doit être fermé si d veut avoir une chance de satisfaire les axiomes de métrique.
Maintenant, si nous voulons que d soit la métrique engendrée par une norme, cette dernière norme doit nécessairement mesurer la distance entre une classe et le point zéro de X/M. Nous pouvons donc poser la définition suivante.

Définition 2.2. Soit $M \subseteq X$ un sous-espace fermé d'un espace normé $(X, \|.\|_X)$. La **norme quotient** de l'espace X/M est l'application

$$\begin{aligned} \|.\|_{X/M} : \quad X/M &\longrightarrow \mathbb{F} \\ x + M &\longmapsto \|x + M\|_{X/M} := d(x + M, 0 + M). \end{aligned}$$

Remarque 2.3. Pour tout $x \in X$ nous avons,

$$d(x + M, 0 + M) = d(x, 0 + M) = d(x, M) \quad et \quad d(x + M, 0 + M) = d(0, x + M).$$

Ainsi, $\|x + M\|_{X/M} = \inf\{\|x - m\|_X \mid m \in M\} = \inf\{\|x + m\|_X \mid m \in M\}$

Vérifions que $\|.\|_{X/M}$ est bien une norme au sens de la définition 1.2.

THÉORÈME 2.4. *Soit $M \subseteq X$ un sous-espace fermé d'un espace normé $(X, \|.\|_X)$. Alors la norme quotient $\|.\|_{X/M}$ est une norme.*

DÉMONSTRATION. Soit $x, y \in X$ et $\lambda \in \mathbb{F}$.

(1) Le sous-espace M étant fermé, on a que $0 = \|x+M\|_{X/M} = d(x+M, 0+M) = d(x, M)$ si et seulement si $x \in M$ si et seulement si $x + M = 0 + M$.

(2) Supposons $\lambda \neq 0$, alors

$$\begin{aligned}\|\lambda(x + M)\|_{X/M} &= \|(\lambda x) + M)\|_{X/M} = d(\lambda x, M)\\ &= d(\lambda x, \lambda M) \text{ puisque } M \text{ est stable par loi externe}\\ &= |\lambda| d(x, M) = |\lambda| \|x + M\|_{X/M}\end{aligned}$$

et $\|0(x + M)\|_{X/M} = \|0 + M\|_{X/M} = 0 = |0| \|x + M\|_{X/M}$.
Ainsi, $\|\lambda(x + M)\|_{X/M} = |\lambda| \|x + M\|_{X/M}$ $\forall \lambda \in \mathbb{F}$ et $\forall x \in X$.

(3) Par définition de la norme quotient et en appliquant l'inégalité triangulaire à $\|.\|_X$, on obtient les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}\|(x + M) + (y + M)\|_{X/M} &= \|(x + y) + M\|_{X/M}\\ &\leq \|x + y + m_1 + m_2\|_X \ \forall m_1, m_2 \in M\\ &\leq \|x + m_1\|_X + \|x + m_2\|_X\end{aligned}$$

Ainsi en prenant l'infimum sur les $m_1, m_2 \in M$ de ces deux dernières normes, on obtient que

$$\|(x + M) + (y + M)\|_{X/M} \leq \|x + M\|_{X/M} + \|x + M\|_{X/M}.$$

De ce fait, $\|.\|_{X/M}$ satisfait l'inégalité triangulaire et il s'agit donc bien d'une norme.

□

PROPOSITION 2.5. *Soit $M \subseteq X$ un sous-espace fermé d'un espace normé $(X, \|.\|_X)$. Alors,*

(1) $\|x + M\|_{X/M} \leq \|x\|_X$ *pour tout $x \in X$;*

(2) *Pour tout $x \in X$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\bar{x} \in X$ tel que $\bar{x} + M = x + M$ et $\|\bar{x}\|_X < \|x + M\|_{X/M} + \varepsilon$.*

DÉMONSTRATION.

(1) Nous avons $\|x+M\|_{X/M} = d(x, M) = \inf\{\|x-m\|_X \mid m \in M\} \leq \|x-0\|_X = \|x\|_X$.

(2) Soit $x \in X$ et $\varepsilon > 0$. Par définition de l'infimum, il existe $m \in M$ tel que $\|x - m\|_X < \inf\{\|x - v\|_X \mid v \in M\} + \varepsilon = d(x, M) + \varepsilon = \|x + M\|_{X/M} + \varepsilon$.
Posons $\bar{x} := x - m$. Alors $\|\bar{x}\|_X < \|x + M\|_{X/M} + \varepsilon$. De plus, $m \in M$ entraîne que $m + M = 0 + M$ et $\bar{x} + M = (x - m) + M = (x - 0) + M = x + M$.

□

Nous pouvons maintenant montrer que les quotients par des sous-espaces fermés des espaces de Banach ont le bon goût d'être complets eux aussi.

Théorème 2.6. *Soit $M \subseteq X$ un sous-espace fermé d'un espace de Banach $(X, \|.\|_X)$. Alors, $(X/M, \|.\|_{X/M})$ est aussi un espace de Banach.*

Démonstration. Soit $\{x_n + M\}$ une suite de Cauchy dans X/M. Il suffit de prouver que $\{x_n + M\}$ admet une sous-suite convergente, ce qui implique que la suite elle-même converge vers la même limite.
Essayons donc d'extraire une sous-suite convergente.
Remarquons d'abord que si $x, y \in X$ sont tels que $\|(x-y)+M\|_{X/M} < \delta > 0$, alors le point (2) de la proposition 2.5 il existe $\bar{y} \in X$ tel que $(x-\bar{y})+M = (x-y)+M$ et $\|x-\bar{y}\|_X < \delta$.
Par définition d'une suite de Cauchy, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que quelque soit $n \geq n_1$, $\|(x_{n_1}-x_n)+M\|_{X/M} < 2^{-1}$. De même, il existe $n_2 \in \mathbb{N}$, $n_2 \geq n_1$ tel que quelque soit $n \geq n_2$, $\|(x_{n_2}-x_n)+M\|_{X/M} < 2^{-2}$. Et ainsi de suite, il existe pour tout $m > 0$ un $n_m \in \mathbb{N}$, $n_m \geq n_{m-1}$ tel que quelque soit $n \geq n_m$, $\|(x_{n_m}-x_n)+M\|_{X/M} < 2^{-m}$. Autrement dit, la sous-suite $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n+M\}$ définie ci-dessus est telle que $\|(x_{n_k}-x_{n_k+1})+M\|_{X/M} < 2^{-k}$ pour tout $k > 0$.
Ainsi par la remarque susmentionée, il existe $\bar{x}_{n_2} \in X$ tel que $(x_{n_1}-\bar{x}_{n_2})+M = (x_{n_1}-x_{n_2})+M$ et $\|(x_{n_1}-\bar{x}_{n_2})\|_X < 2^{-1}$. Alors comme $\bar{x}_{n_2}+M = x_{n_2}+M$ on peut poser, sans perte de généralité, $\bar{x}_{n_2} := x_{n_2}$.
De même, il existe $\bar{x}_{n_3} \in X$ tel que $(x_{n_2}-\bar{x}_{n_3})+M = (x_{n_2}-x_{n_3})+M$ et $\|(x_{n_2}-\bar{x}_{n_3})\|_X < 2^{-2}$. Alors comme $\bar{x}_{n_3}+M = x_{n_3}+M$ on peut poser, sans perte de généralité, $\bar{x}_{n_3} := x_{n_3}$.
Ainsi par une induction sur k, on obtient que $\|x_{n_k}-x_{n_{k+1}}\|_X < 2^{-k}$. Il en découle que $\{x_{n_k}\}$ est une suite de Cauchy dans X. En effet, soit $\varepsilon > 0$, alors pour $p > 1 - \log_2 \varepsilon$ et pour tout $m > q \geq p$, on a :

$$\begin{aligned}\|x_{n_m}-x_{n_q}\|_X &\leq \|x_{n_m}-x_{n_{m-1}}\|_X + \cdots + \|x_{n_{q+1}}-x_{n_q}\|_X \\ &\leq \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^{m-2}} + \cdots + \frac{1}{2^q} < \frac{1}{2^{q-1}} < \frac{1}{2^{(1-\log_2 \varepsilon)+1}} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Ainsi par complétude de X, la suite $\{x_{n_k}\}$ converge vers un certain $x \in X$ lorsque $k \to \infty$. Par conséquent,

$$\|(x_{n_k}+M)-(x+M)\|_{X/M} = \|(x_{n_k}-x)+M\|_{X/M} \leq \|x_{n_k}-x\|_X \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty.$$

Donc la sous-suite $\{x_{n_k}+M\}$ converge vers $x+M$ et de ce fait la suite totale $\{x_n+M\}$ converge vers la même limite. □

Proposition 2.7. *Soit $M \subseteq X$ un sous-espace fermé d'un espace normé $(X, \|.\|_X)$. Alors, si deux des trois espaces X, M et X/M sont complets, alors le troisième est aussi complet.*

Démonstration. Tout d'abord, supposons que X est complet, alors X/M est complet par le théorème précédent et M est en particulier complet en tant que sous-espace fermé de X.
Il reste à voir que si M et X/M sont complets, cela implique que X est aussi complet. Soit $\{x_n\}$ une suite de Cauchy dans X. Alors par le point (1) de la proposition 2.5, $\|(x_n-x_m)+M\|_{X/M} \leq \|x_n-x_m\|_X$ pour tout $m, n \in \mathbb{N}$. Ainsi $\{x_n+M\}$ est une suite de Cauchy dans X/M, qui est complet, et de ce fait converge vers un certain $y+M \in X/M$. Le point (2) de la proposition 2.5 entraine alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $y_n \in X$ tel que $y_n+M = (x_n-y)+M$ (autrement dit $x_n-y-y_n \in M$) et

$\|y_n\|_X < \|(x_n - y) + M\|_{X/M} + 2^{-n} \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Ainsi $\{y_n\}$ converge vers 0.
Soit $\varepsilon > 0$. Les suites $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ étant convergentes, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m, n \geq n_1$, $\|x_n - x_m\|_X < \frac{\varepsilon}{2}$ et il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m, n \geq n_1$, $\|y_n - y_m\|_X < \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, pour tout $m, n \geq \max\{n_1, n_2\}$

$$\|(x_n - y - y_n) - (x_m - y - y_m)\|_X \leq \|x_n - x_m\|_X + \|y_n - y_m\|_X < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Donc $\{x_n - y - y_n\}$ est une suite de Cauchy dans M et par complétude de M, elle admet une limite $z \in M$.
Finalement,

$$x_n = \underbrace{x_n - y - y_n}_{\underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow z}} + \underbrace{y_n}_{\underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow 0}} + y \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} z + y\,,$$

autrement dit X est complet. □

Lemme 2.8. *Soit $M \subseteq X$ un sous-espace fermé d'un espace normé $(X, \|.\|_X)$ et $\pi : X \to X/M$ l'application quotient associée.*
Alors $\pi(U_X) = U_{X/M}$.

Démonstration.

"$\subseteq$" Soit $x \in U_X$, alors d'après la proposition 2.5 $\|\pi(x)\|_{X/M} = \|x + M\|_{X/M} \leq \|x\|_X \leq 1$, donc $\pi(x) \in_{X/M}$ et $\pi(U_X) \subseteq U_{X/M}$.

"$\supseteq$" Soit $x + M \in U_{X/M}$, alors par le point (2) de la proposition 2.5, il existe $\bar{x} \in X$ tel que $\pi(\bar{x}) = \bar{x} + M = x + M$ et $\|\bar{x}\|_X < \|x + M\|_{X/M} + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. En d'autres termes, il existe $\hat{x} \in U_X$ tel que $\pi(\hat{x}) = \hat{x} + M = x + M$. Par conséquent, $U_{X/M} \subseteq \pi(U_X)$.

□

Proposition 2.9. *Soit X et M comme dans le lemme ci-dessus. Alors, l'application quotient $\pi : X \to X/M$ est un opérateur linéaire borné et ouvert. De plus, si $M \neq X$, alors $\|\pi\| = 1$.*

Démonstration.

- L'application π est linéaire par définition des lois interne et externe sur X/M.
- D'après le lemme précédent l'image par π de U_X est un sous-ensemble borné de X/M, ce qui implique, par linéarité, que π est borné.
- Pour voir que π est ouvert, il faut voir que l'image par π de tout sous-ensemble ouvert de X est un sous-ensemble ouvert de X/M.
  Soit U un ouvert de X et $x \in U$, alors il existe $r > 0$ tel que $U \supseteq x + rU_X$. Ainsi, $\pi(U) \supseteq \pi(x + rU_X) = \pi(x) + rU_{X/M}$ d'après le lemme 2.8.
  Autrement dit $\pi(U)$ est ouvert dans X/M et π est une application ouverte.
- Si $M \subsetneq X$, alors X/M est différent de l'espace vectoriel trivial. Ainsi, π étant borné, par la proposition 1.10, $\|\pi\| = \sup\{\|\pi(x)\| \mid x \in S_X\} = 1$ par le lemme 2.8.

□

Nous allons maintenant voir que sous certaines hypothèses supplémentaires, on peut obtenir deux propriétés qui sont les analogues pour les espaces normés de la propriété universelle du quotient et du premier théorème d'isomorphie algébriques.

Propriété universelle de l'espace quotient. *Soit X et Y des espaces normés et $T : X \to Y$ un opérateur linéaire. Soit encore $M \subseteq \ker(T)$ un sous-espace fermé de X et $\pi : X \to X/M$ l'application quotient.*
Alors, il existe un unique opérateur linéaire $S : X/M \to Y$ tel que $T = S \circ \pi$. Autrement dit le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, two heads, "\pi"'] & Y \\ X/M \arrow[ur, dashed, "\exists! S"'] & \end{tikzcd}$$

De plus, $\operatorname{im}(S) = \operatorname{im}(T)$; S est une application ouverte si et seulement si T est une application ouverte ; S est borné si et seulement si T est borné et si T est borné, alors $\|S\| = \|T\|$.

Démonstration.

- L'existence et l'unicité d'une application linéaire $S : X/M \to Y$ tel que $T = S \circ \pi$ et de même image que T constitue la propriété universelle algébrique du quotient.
- Montrons que S est une application ouverte si et seulement si T est une application ouverte.
  Supposons d'abord que S soit une application ouverte. π est aussi une application ouverte par la proposition 2.9. Par conséquent, $T = S \circ \pi$ est aussi une application ouverte en tant que composition de deux applications ouvertes.
  Réciproquement, supposons que T soit une application ouverte et soit U un ouvert de X/M. Alors, $S(U) = S(\pi(\pi^{-1}(U))) = T(\pi^{-1}(U))$. $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert de X puisque π est continu et donc $S(U) = T(\pi^{-1}(U))$ est un ouvert de Y puisque T est ouverte. Par conséquent S est une application ouverte.
- Montrons que S est borné si et seulement si T est borné.
  Par le lemme 2.8 $\pi(U_X) = U_{X/M}$. Par conséquent :

  $$\begin{aligned} \sup\{\|S(x+M)\| \mid x+M \in U_{X/M}\} &= \sup\{\|S(\pi(x))\| \mid x \in U_X\} \\ &= \sup\{\|Tx\| \mid x \in U_X\}. \end{aligned}$$

  Ainsi S est borné si et seulement si T est borné et si T est borné, alors $\|S\| = \|T\|$

□

Premier théorème d'isomorphie. *Soit X et Y des espaces de Banach et $T : X \to Y$ un opérateur linéaire borné. Supposons de plus que* $\mathrm{im}(T)$ *soit un fermé de Y.*
Alors :

$$X/\ker(T) \cong T(X)$$

Démonstration. Le noyau de T est fermé en tant que pré-image par une application continue du fermé $\{0_Y\}$ de Y. Nous pouvons donc considérer l'espace quotient $X/\ker(T)$ ainsi que l'unique opérateur induit $S : X/\ker(T) \to Y$ tel que $T = S \circ \pi$, fourni par la propriété universelle du quotient. Il vient,

$$\begin{aligned}\ker(S) &= \{x + \ker(T) \mid x \in X \, et \, S \circ \pi(x) = 0\} \\ &= \{x + \ker(T) \mid x \in \ker(T)\} \\ &= \{0 + \ker(T)\}\end{aligned}$$

L'opérateur S est donc un opérateur linéaire borné et injectif de l'espace de Banach $X/\ker(T)$ dans l'espace de Banach $T(X)$. Il s'agit donc d'un isomorphisme, d'après le corollaire1.26. D'où l'assertion. □

Finalement, en application de la propriété universelle du quotient, nous obtenons un test de continuité des opérateurs linéaires de rang fini entre deux espaces normés.

Proposition 2.10. *Soit $T : X \to Y$ un opérateur linéaire de rang fini entre deux espaces normés. Alors, T est continu si et seulement si* $\ker(T)$ *est un fermé de X.*

Démonstration. Il suffit de montrer que T est borné si et seulement si $\ker(T)$ est un fermé de X.
Si T est borné, alors son noyau est fermé en tant que pré-image par T du sous-ensemble fermé $\{0_Y\}$ de Y.
Réciproquement, supposons que $\ker(T)$ est fermé. Alors nous pouvons prendre le quotient $X/\ker(T)$ et considérons l'application $S : X/\ker(T) \to Y$ fournie par la propriété universelle de $X/\ker(T)$. Alors, $S(x + \ker(T)) = 0$ si et seulement si $T(x) = 0$ si et seulement si $x \in \ker(T)$. Ainsi $\ker(S) = \{\ker(T)\} = \{0_{X/\ker(T)}\}$ et S est de ce fait injectif. Par hypothèse, $\mathrm{im}(T)$ est de dimension finie, par conséquent, l'injectivité de l'opérateur linéaire S implique que $X/\ker(T)$ est aussi de dimension finie. Donc, par la proposition 1.14 S est borné, ce qui implique, toujours d'après la propriété universelle du quotient, que T est borné aussi. □

2. Sommes directes et projections

Comme nous le verrons par la suite, certains opérateurs de Fredholm peuvent être obtenus à partir de projections. C'est pourquoi nous y consacrons ce chapitre.

2.1. Sommes directes.

Commençons donc par quelques considérations sur les sommes directes.

Définition 2.11 (Somme directe extérieure d'espaces normés). Supposons que $X_1, \ldots, X_n$ soient des espaces vectoriels.
Nous rappelons que la somme directe de $X_1, \ldots, X_n$ est l'espace vectoriel obtenu par le produit cartésien $X_1 \times \ldots \times X_n$ et muni des des deux opérations suivantes :
- $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$
- $\alpha \cdot (x_1, \ldots, x_n) := (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$

Supposons maintenant que $X_1, \ldots, X_n$ sont des espaces vectoriels normés munis des normes $\|.\|_{X_1}, \ldots, \|.\|_{X_n}$. Leur **somme directe (extérieure)** est l'espace vectoriel produit $X_1 \times \ldots \times X_n$ muni de la norme suivante :

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\| := (\Sigma_{j=1}^n \|x_j\|_{X_j}^2)^{1/2}$$

On obtient alors un espace vectoriel normé noté $X_1 \oplus \ldots \oplus X_n$.

Proposition 2.12. *Soient $X_1, \ldots, X_n$, des espaces vectoriels normés.*
Posons :

$$X'_j := \{(x_1, \ldots, x_n) | (x_1, \ldots, x_n) \in X_1 \oplus \ldots \oplus X_n, x_k = 0 \forall k \neq j\}.$$

Alors, X'_j est un sous-espace fermé de $X_1 \oplus \ldots \oplus X_n$ isométriquement isomorphe à X_j.

Démonstration. L'application qui envoie x sur $(x, 0, \ldots, 0)$ est clairement un isomorphisme isométrique de X_1 vers X'_1 et de manière analogue, on obtient que $X_1 \oplus \ldots \oplus X_n$ est isométriquement isomorphe à X_j.
Pour voir que $X'1$ est fermé, on considère une suite convergente $(x_1^{(k)}, 0, \ldots, 0)$ de X'_1.
On a $\|(x_1^{(k)}, 0, \ldots, 0) - (a_1, a_2, \ldots, a_n)\| \to 0$, si $(a_0, \ldots, a_n)$ est la limite de notre suite.
Clairement, $a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0$ et donc $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in X'_1$ d'où X'_1 est un sous-espace fermé de $X_1 \oplus \ldots \oplus X_n$. Le même argument est utilisé pour X'_j. □

Proposition 2.13. *Soient $X_1, \ldots, X_n$, des espaces vectoriels normés.*
Deux sommes directes obtenues par permutation et association des termes de $X_1 \oplus \ldots \oplus X_n$ sont isométriquement isomorphes.

Démonstration. Comme

$$\begin{aligned} \|(x_1, \ldots, x_n)\| &= (\Sigma_{j=1}^n \|x_j\|^2)^{1/2} \\ &= [\Sigma_{j=1}^{k-1} \|x_j\|^2 + ((\Sigma_{j=k}^{k+l} \|x_j\|^2)^{1/2})^2 + \Sigma_{j=k+1}^n \|x_j\|^2]^{1/2} \\ &= \|(x_1, \ldots, \|(x_k, \ldots, x_{k+l})\|, \ldots, x_n)\|, \end{aligned}$$

le fait d'associer des termes dans une somme directe ne change donc pas celle-ci (on a un isomorphisme isométrique).
Il reste à considérer $X_{\sigma(1)} \oplus \ldots \oplus X_{\sigma(n)}$, une somme obtenue par permutation des termes.
Clairement, l'application qui envoie $(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ sur $(x_1, \ldots, x_n)$ est un isomorphisme.
De plus,

$$\begin{aligned}\|(x_1,\dots,x_n)\| &= (\Sigma_{j=1}^n \|x_j\|^2)^{1/2}\\ &= (\Sigma_{j=1}^n \|x_{\sigma(j)}\|^2)^{1/2}\\ &= (x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)}).\end{aligned}$$

Cet isomorphisme est donc un isomorphisme isométrique. □

Théorème 2.14. *Soient $X_1,\dots,X_n$, des espaces vectoriels normés. Alors, $X_1\oplus\dots\oplus X_n$ est un espace de Banach si et seulement si chaque X_j est un espace de Banach.*

Démonstration. Soient $X_1,\dots,X_n$, des espaces vectoriels normés.

$\Leftarrow$: Supposons que $X_1,\dots,X_n$ sont des espaces de Banach et considérons une suite de Cauchy $(x_1^{(k)},\dots,x_n^{(k)})$ de $X_1\oplus\dots\oplus X_n$.
Vu la définition de la norme sur $X_1\oplus\dots\oplus X_n$, nous avons que chacune des suites $x_n^{(k)}$ est de Cauchy dans X_j. Ainsi, chacune de ces suites convergent vers un élément $a_j\in X_j$.
Ainsi, $(x_1^{(k)},\dots,x_n^{(k)})$ converge vers $(a_1,\dots,a_n)$ dans $X_1\oplus\dots\oplus X_n$.

$\Rightarrow$: Reciproquement, par la proposition 2.12, on sait que chaque X_j de la somme directe $X_1\oplus\dots\oplus X_n$ est isométriquement isomorphe à un sous-espace fermé, donc complet X_j' de $X_1\oplus\dots\oplus X_n$. Ainsi, $X_1,\dots,X_n$ sont tous des espaces de Banach.

□

Définition 2.15 (Somme directe intérieure d'espaces normés). Si $M_1,\dots,M_n$ sont des sous-espaces fermés d'un espace normé X tel que $\Sigma_k M_k = X$ et $M_j\bigcap\Sigma_{k\neq j}M_k = \{0\}$, alors on dit que X est la **somme directe (intérieure)** de $M_1,\dots,M_n$.

Proposition 2.16. *Grâce à cette proposition, une somme directe intérieures peut être considérée comme une somme directe extérieure.*

- *Si $X_1,\dots,X_n$ sont des espaces normés et $X = X_1\oplus\dots\oplus X_n$, alors X admet des sous-espaces fermés $X_1',\dots,X_n'$ tels que X soit leur somme directe interne et chaque X_j' soit isométriquement isomorphe à X_j.*
- *Soit X, un espace de Banach sur $\mathbb{F}$. Si X est la somme directe interne de $M_1,\dots,M_n$, alors $X\cong M_1\oplus\dots\oplus M_n$.*

Démonstration. Procédons dans l'ordre :

- Pour la première partie, reprenons

$$X_j' := \{(x_1,\dots,x_n)|(x_1,\dots,x_n)\in X_1\oplus\dots\oplus X_n, x_k = 0\forall k\neq j\}$$

comme dans la proposition 2.12. Par cette dernière, $X_1',\dots,X_n'$ sont des sous-espaces fermés isométriquement isomorphes à $X_1,\dots,X_n$ (respectivement). Il ne reste qu'à appliquer la définition d'une somme directe interne pour vérifier que X est la somme directe interne de $X_1',\dots,X_n'$.

– Pour la deuxième partie, supposons que X soit un espace de Banach, somme directe interne de $M_1, \ldots, M_n$.
  En tant que sous-espaces fermés dans un Banach, $M_1, \ldots, M_n$ sont des espaces de Banach.
  Par théorème 2.14, $M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ est aussi un espace de Banach.
  Soit $T : M_1 \oplus \ldots \oplus M_n \to X$ définie par $T(m_1, \ldots, m_n) = m_1 + \ldots + m_n$. T est clairement linéaire.
  Par le théorème 1.17, T est un isomorphisme entre X et $M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$.

□

Définition 2.17 (Somme directe d'opérateurs). Soit $X_1, \ldots, X_n$ et $Y_1, \ldots, Y_n$, des expaces normés et $T_j : X_j \to Y_j$, des opérateurs linéaires.
La **somme directe** de $T_1, \ldots, T_n$ est l'opérateur :

$$T_1 \oplus \ldots \oplus T_n : X_1 \oplus \ldots \oplus X_n \to Y_1 \oplus \ldots \oplus Y_n$$

définie par :

$$T_1 \oplus \ldots \oplus T_n(x_1, \ldots, x_n) := (T_1(x_1), \ldots, T_n(x_n))$$

avec $(x_1, \ldots, x_n) \in X_1 \oplus \ldots \oplus X_n$.

Théorème 2.18. *Soit $X_1, \ldots, X_n$ et $Y_1, \ldots, Y_n$, des expaces normés et $T_j : X_j \to Y_j$, des opérateurs linéaires.*
Alors :

– *$T_1 \oplus \ldots \oplus T_n$ est borné si et seulement si tous les T_j sont bornés.*
  On aura alors $\|T_1 \oplus \ldots \oplus T_n\| = \max\{\|T_1\|, \ldots, \|T_n\|\}$.
– *$T_1 \oplus \ldots \oplus T_n$ est injectif si et seulement si tous les T_j sont injectifs.*
– *$T_1 \oplus \ldots \oplus T_n$ est surjectif si et seulement si tous les T_j sont surjectifs.*
– *$T_1 \oplus \ldots \oplus T_n$ est un isomorphisme si et seulement si tous les T_j sont des isomorphismes.*
– *$T_1 \oplus \ldots \oplus T_n$ est un isomorphisme isométrique si et seulement si tous les T_j des isomorphismes isométriques.*

Démonstration. La preuve de ce théorème étant longue et essentiellement technique, nous ne la donnons pas ici. Le premier point est demontré par exemple dans [**1**] pp.66-67. □

Corollaire 2.19. *Soit $X_1, \ldots, X_n$ et $Y_1, \ldots, Y_n$, des espaces normés.*

(1) *Si $X_j \cong Y_j, \forall j = 1, \ldots, n$, alors $X_1 \oplus \ldots \oplus X_n \cong Y_1 \oplus \ldots \oplus Y_n$.*
(2) *Si X_j est isométriquement isomorphe à Y_j pour tout $j = 1, \ldots, n$, alors $X_1 \oplus \ldots \oplus X_n$ est isométriquement isomorphe à $Y_1 \oplus \ldots \oplus Y_n$.*

2.2. Projections.

Définition 2.20. On dit qu'un sous-espace fermé M d'un espace normé X **admet un supplémentaire topologique** s'il existe un sous-espace fermé N de X tel que X est la somme directe interne de M et N.

Définition 2.21. Soit X, un espace vectoriel. On dit qu'un opérateur $P : X \to X$ est une **projection** si $P(P(x)) = P(x), \forall x \in X$ (c-à-d si $P^2 = P$).

Proposition 2.22. *Soit X, un espace vectoriel.*
Un opérateur linéaire $P : X \to X$ est une projection si et seulement si $(I - P)$ est une projection.
De plus, si X est un espace vectoriel topologique, P est une projection continue si et seulement si $(I - P)$ est une projection continue.

Démonstration. Soit P, une projection. Alors :

$$(I-P)^2(x) = x - 2P(x) + P^2(x) = x - 2P(x) + P(x) = x - P(x) = (I-P)(x)$$

Réciproquement, si $(I-P)$ est une projection, $(I-(I-P)) = P$ est aussi une projection.
Pour le cadre topologique, comme l'identité est une application continue et que la somme de deux applications continues reste continue, nous avons que P est continue si et seulement si $(I - P)$ est continue. □

Proposition 2.23. *Soit P, une projection dans X.*
Alors $\ker P = (I - P)(X)$ *et* $P(X) = \ker(I - P)$.

Démonstration. Comme dans la preuve précédente, il suffit de démontrer que $\ker P = (I - P)(X)$. L'autre résultat est un corollaire immédiat, en remplaçant P par $(I - P)$.
Si $x \in \ker P$, $(I - P)(x) = x - 0 = x$. Donc $(I - P)(X) \subseteq \ker P$.
Réciproquement, si $P((I - P)(X)) = P(X) - P^2(X) = P(X) - P(X) = \{0\}$. Donc $\ker P \subseteq (I - P)(X)$. □

Corollaire 2.24. *Toute projection continue dans un espace de Hausdorff est à image fermée.*

En particulier, les projections continues des espces de Banach sont à image fermée.

Théorème 2.25. *Si P est une projection continue dans un espace vectoriel topologique de Hausdorff X, alors X est la somme directe interne de* $\operatorname{im} P$ *et de* $\ker P$.

Démonstration. Par le corollaire précédent, $\ker P$ et $\operatorname{im} P$ sont fermés dans X.
Par la proposition 2.23, $X = P(X) + (I - P)X = \operatorname{im} P + \ker P$.
De plus, $\operatorname{im} P \bigcap \ker P = \ker(I - P) \bigcap \ker P = \{0\}$. D'où le résultat. □

Théorème 2.26. *Si M et N sont des espaces supplémentaires (au sens algébrique) dans un espace vectiriel X, alors il existe une unique projection P d'image M et de noyau N.*

Démonstration. La preuve se base sur la proposition (algébrique) suivante que nous ne démontrons pas ici.

Rappel. Soit X, un espace vectoriel et $M_1, \ldots, M_n$, des sous-espaces de X.
Les propositions suivantes sont alors équivalentes :

(1) X est la somme directe (algébrique) interne de $M_1, \ldots, M_n$.
(2) Tout $x \in X$ se décompose de manière unique $x = m_1 + \ldots + m_n$ avec $m_i \in M_i$.

Vu ce résultat, tout $x \in X$ s'écrit de manière unique $x = m(x) + n(x)$ avec $m(x) \in M, n(x) \in N$.
Ainsi, l'application qui envoie x sur $m(x)$ est une projection d'image M et de noyau N.
Pour l'unicité, si P_0 est une projection d'image M et de noyau N, alors

$$P_0(x) = P_o(m(x) + n(x)) = P_0(m(x)) = m(x), \forall x \in X.$$

□

Théorème 2.27. *Si M et N sont des espaces supplémentaires dans un espace de Banach X, alors la projection d'image M et de noyau N est bornée.*

Démonstration. Soit P, la projection d'image M et de noyau N. Considérons une suite $(x_n) \to x$ convergente telle que $(P(x_n)) \to y$.
Alors $(I-P)(x_n) \to x-y$. Nous avons donc $y \in M$ et $x-y \in N$, car $\ker P = (I-P)(X)$.
Ainsi, $y = P(y) = P(x)$ et donc, par le théorème du graphe fermé, l'opérateur P est borné. □

Corollaire 2.28. *Un sous-espace M d'un Banach X admet un supplémentaire si et seulement si M est l'image d'une projection bornée dans X.*

Corollaire 2.29. *Si M et N sont des espaces supplémentaires dans X, alors $M \cong X/N$.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du premier théorème d'isomorphie appliqué à la projection d'image M et de noyau N. □

3. Opérateurs adjoints

Tout comme les quotients et les sommes directes, les opérateurs adjoints sont des objets que nous connaissons déjà d'un point de vue purement algébrique. Nous voulons maintenant étudier quelques unes de leurs propriétés lorsque les espaces vectoriels considérés sont des espaces normés, donc muni d'une topologie.

Définition 2.30. Soit $(X, \|.\|_X)$ et $(Y, \|.\|_Y)$ deux espaces normés et $T \in B(X, Y)$ un opérateur borné. Alors, on appelle **adjoint de** T, au sens des espaces normés, l'opérateur

$$\begin{array}{rccl} T^* : & Y^* & \longrightarrow & X^* \\ & y^* & \longmapsto & T^*(y^*) := y^* \circ T \end{array}$$

En utilisant la notation $< x, f >:= f(x)$, l'action de l'adjoint sur X est caractérisée par

$$< x, T^* y^* >=< Tx, y^* > .$$

Pour tout $x \in X$ et pour tout $y^* \in Y^*$.

Propriétés 2.31. Soit S et T des opérateurs linéaires bornés entre deux espaces normés $(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ et $(Y, \|.\|_Y)$, $(Z, \|.\|_Z)$ respectivement. Alors,

(1) l'application $T \longmapsto T^*$ est une isométrie linéaire ;
(2) la composition est contravariante : $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$;
(3) $(I_X)^* = I_{X^*}$.

Démonstration.

(1) Soit $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{F}$, $R \in B(X, Y)$ et $y^* \in Y^*$.

$$\begin{aligned} < x, (\alpha T + R)^* y^* > &=< (\alpha T + R)x, y^* > \\ &= \alpha < Tx, y^* > + < Rx, y^* > \\ &= \alpha < x, T^* y^* > + < x, R^* y^* > \end{aligned}$$

Par conséquent l'application $T \longmapsto T^*$ est linéaire. En outre, en utilisant la caractérisation de la norme du théorème 1.30 il vient :

$$\begin{aligned} \|T^*\| &= \sup_{\|y^*\|_{Y^*} \leq 1} \|T^* y^*\|_{X^*} \\ &= \sup_{\|y^*\|_{Y^*} \leq 1} (\sup_{\|x\|_X \leq 1} |T^* y^*(x)|) \\ &= \sup_{\|x\|_X \leq 1} (\sup_{\|y^*\|_{Y^*} \leq 1} |y^*(Tx)|) \\ &= \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\| \\ &= \|T\| \end{aligned}$$

Il s'agit donc aussi d'une isométrie.

(2) Soit $z^* \in Z^*$ et $x \in X$, alors

$$\begin{aligned} < x, (T \circ S)^* z^* > &=< (T \circ S)x, z^* >=< T(Sx), z^* > \\ &=< Sx, T^* z^* >=< x, (S^* \circ T^*) z^* > . \end{aligned}$$

(3) Soit $x \in X$ et $x^* \in X^*$, alors

$$\begin{aligned} < x, (I_X)^* x^* > &= < I_X x, x^* > = < x, x^* > \\ &= < x, I_{X^*} x^* > \end{aligned}$$

□

Nous allons maintenant nous intéresser aux relations entre les noyaux $\ker T$, $\ker T^*$ et les images $\operatorname{im} T$, $\operatorname{im} T^*$ d'un opérateur linéaire borné T et de son adjoint T^* ; en particulier à l'aide de leurs ensembles polaires. Ces derniers nous permetterons par la suite d'exprimer la dimension du conoyau d'un opérateur linéaire en fonction de son adjoint.

Définition 2.32. Soit $(X, \|.\|_X)$ un espace normé, $A \subset X$ un sous-ensemble de X et $B \subset X^*$ un sous-ensemble de X^*. Définissons

$$A^\circ = \{x^* \in X^* \mid x^*(x) = 0 \text{ pour tout } x \in A\} ;$$

$$^\circ B = \{x \in X \mid x^*(x) = 0 \text{ pour tout } x^* \in B\}.$$

On dit que A° et $^\circ B$ sont les **ensembles polaires** de A et B dans X et X^* respectivement.

Proposition 2.33. *Les ensembles A° et $^\circ B$ de la définition sont fermés.*

Démonstration.

- L'ensemble $^\circ B = \bigcap_{x^* \in X^*} \ker x^*$ est fermé en tant qu'intersection de fermés.
- Soit $\{z_n^*\}$ une suite dans A° qui converge vers un certain $z^* \in X$. Alors en particulier, $z_n^*(x) \longrightarrow z^*(x)$ pour tout $x \in X$. Or $z_n^*|_A = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui entraîne que $z^*|_A = 0$. Par conséquent, $z^* \in A^\circ$ et ce dernier et de ce fait fermé.

□

Théorème bipolaire. *Si A est un sous-espace d'un espace normé $(X, \|.\|_X)$, alors :*

$$^\circ(A^\circ) = \overline{A}$$

Démonstration. Omise.
Se réferrer par exemple à **[3]**. □

Nous pouvons lier les ensembles polaires par isomorphismes à l'espace normé X et à son dual X^*.

Théorème 2.34. *Soit M un sous-ensemble fermé d'un espace normé $(X, \|.\|_X)$. Alors, sont isomorphes :*

(1) $M^\circ \cong (X/M)^*$;
(2) $M^* \cong X^*/M^\circ$.

Démonstration.

(1) Soit $\pi : X \longrightarrow X/M$ l'application quotient et soit $T : y^* \longmapsto y^*\pi$.
Clairement T est un opérateur linéaire de $(X/M)^*$ dans M°. Si $x^* \in M^\circ$ alors $M \subset \ker x^*$. Alors la propriété universelle du quotient garanti qu'il existe un unique $y^* \in (X/M)^*$ tel que $x^* = y^*\pi$ et de plus $\|y^*\|_{(X/M)^*} = \|x^*\|_{X^*}$.
Autrement dit, T est bijectif et $\|y^*\|_{(X/M)^*} = \|Ty^*\|_{X^*}$.
En conséquence, T est même un isomorphisme isométrique de $(X/M)^*$ dans M°.

(2) Soit $T : X^*/M^\circ \longrightarrow M^*$ l'application qui envoie un élément de $x^* + M^\circ \in X^*/M^\circ$ sur la restriction de x^* à M. Puisque deux éléments $x_1^* + M^\circ$ et $x_2^* + M^\circ$ de X^*/M° sont égaux si et seulement si $x_1^*|M = x_2^*|M$, T est bien-défini. Il est aussi injectif par définition et clairement linéaire. Maintenant, si $m^* \in M^*$ et $x_{m^*}^*$ est une extension de Hahn-Banach de m^* à X, alors $T(x_{m^*}^* + M^\circ) = m^*$, ainsi T est surjectif. Il s'agit donc d'un isomorphisme.

□

Lemme 2.35. *Soit* $(X, \|.\|_X)$ *et* $(Y, \|.\|_Y)$ *deux espaces normés et* $T \in B(X, Y)$ *un opérateur borné. Alors*

(1) $\ker T^* = (\operatorname{im} T)^\circ$;

(2) $\ker T = {}^\circ(\operatorname{im} T^*)$.

Démonstration.

(1)
$$\begin{aligned}
\ker T^* &= \{y^* \in Y^* \mid 0 = T^*y^* = y^* \circ T\} \\
&= \{y^* \in Y^* \mid y^*|_{\operatorname{im} T} = 0\} \\
&= \{y^* \in Y^* \mid y^*(y) = 0 \ \text{ pour tout } y \in \operatorname{im} T\} \\
&= (\operatorname{im} T)^\circ
\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}
{}^\circ(\operatorname{im} T^*) &= \{x \in X \mid x^*(x) = 0 \ \text{ pour tout } x^* \in \operatorname{im} T^*\} \\
&= \{x \in X \mid 0 = (T^*y^*)x \ \text{ pour tout } y^* \in Y^*\} \\
&= \{x \in X \mid 0 = y^*(Tx) \ \text{ pour tout } y^* \in Y^*\} \\
&= \{x \in X \mid 0 = Tx\} \\
&= \ker T
\end{aligned}$$

L'avant-dernière égalité découlant du fait que l'espace dual a la propriété de distinguer les éléments de l'espace de base.

□

Remarque 2.36. Il découle du théorème bipolaire ainsi que du lemme ci-dessus que

$$\overline{\operatorname{im} T} = {}^\circ((\operatorname{im} T)^\circ) = {}^\circ(\ker T^*).$$

Théorème de l'image fermée. *Soit X et Y deux espaces de Banach, alors pour tout $T \in B(X;Y)$ les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) $\operatorname{im} T$ *est fermée ;*
(2) $\operatorname{im} T = {}^{\circ}(\ker T^*)$ *;*
(3) $\operatorname{im} T^*$ *est fermée ;*
(4) $\operatorname{im} T^* = (\ker T)^{\circ}$ *;*

Démonstration.

(1) $\Leftrightarrow$ (2) Valide, d'après la remarque précédente.

(1) $\Rightarrow$ (4) D'après 2.35, $(\ker T)^{\circ} = {}^{\circ}((\operatorname{im} T^*)^{\circ}) \supset \operatorname{im} T^*$.
En vertu du premier théorème d'isomorphisme, nous avons que l'application

$$\begin{array}{rccc} S: & X/\ker T & \longrightarrow & \operatorname{im} T \\ & x + \ker T & \longmapsto & T(x) \end{array}$$

est un isomorphisme. Maintenant, si $x^* \in (\ker T)^{\circ}$, alors l'unique application $\overline{x} : (x + \ker T) \mapsto x^*(x)$ définie par la proriété universelle du quotient est un élément de $(X/\ker T)^*$. Par conséquent, $\overline{x} \circ S^{-1} \in (\operatorname{im} T)^*$. Donc il existe $y^* \in Y^*$ tel que $y^*|_{\operatorname{im} T} = \overline{x} \circ S^{-1}$. Ainsi, pour tout $x \in X$

$$\begin{aligned} (T^* y^*)x = y^*(Tx) &= (\overline{y} \circ S^{-1})(Tx) \\ &= (\overline{x} \circ S^{-1})(S(x + \ker T)) \\ &= \overline{x}(x + \ker T) = x^*(x). \end{aligned}$$

C'est-à-dire $T^* y^* = x*$. Par conséquent $(\ker T)^{\circ} \subset \operatorname{im} T^*$.
Et donc $(\ker T)^{\circ} = \operatorname{im} T^*$.

(4) $\Rightarrow$ (3) D'après la proposition 2.33 les ensembles polaires sont des fermés.

(3) $\Rightarrow$ (1) Cette partie est longue et technique. Nous l'omettons.

□

4. Opérateurs compacts

Nous abordons maintenant une catégorie plus particulière d'opérateurs linéaires, les opérateurs compacts. Nous baserons toute notre discussion sur des espaces de Banach, cependant, en parcourant la littérature, on s'aperçoit qu'une grande partie des propriétés que nous allons présenter se généralise aisément aux espaces normés en toute généralité.

Définition 2.37. Soit X et Y des espaces de Banach. Un opérateur linéaire $T : X \to Y$ est dit **compact** si pour tout sous-ensemble borné $B \subseteq X$, son image $T(B)$ est un sous-ensemble relativement compact de Y, c'est-à-dire que l'adhérence de $T(B)$ est compact dans Y.
L'ensemble des opérateurs compacts de X vers Y est noté $K(X, Y)$. Si $X = Y$, on note simplement $K(X)$.

On remarque qu'étant donné la linéarité d'un opérateur $T : X \to Y$ pour vérifier qu'il est compact, il suffit de s'assurer que $T(U_X)$ est un sous-ensemble relativement compact de Y.

Du fait que tout sous-ensemble relativement compact de $T(X)$ est borné, découle directement la proposition suivante.

Proposition 2.38. *Tout opérateur linéaire compact entre deux espaces de Banach est borné.*

Pour les opérateurs de rang fini, la réciproque de cette dernière propriété est aussi vraie.

Proposition 2.39. *Un opérateur linéaire de rang fini entre deux espaces de Banach est compact si et seulement s'il est borné.*

Démonstration. Il reste a démontrer la condition suffisante.
Soit T en opérateur linéaire de rang fini entre deux espaces de Banach.Le caractère fini de la dimension de $\mathrm{im}(T)$ implique que la boule unité fermée $B_{\mathrm{im}(T)}$ est compact. Donc par linéarité, toute boule fermée est compact. Ainsi puisque T est borné, il envoie des sous-ensembles bornés sur des sous-ensemebles bornés, l'adhérence de ces derniers est donc compacte puisqu'elle est fermée et bornée dans un compact. □

La définition ci-dessus d'un opérateur compact n'est pas toujours la plus simple à utiliser, voici donc une caractériastion des opérateurs compacts qui va s'avérer utile par la suite.

Proposition 2.40. *Soit $T : Y \to Y$, un opérateur linéaire entre deux espaces de Banach X, Y. Alors sont équivalents :*

(1) *T est compact.*
(2) *$T(U_X)$ est un sous-ensemble relativement compact de Y.*
(3) *$T(B)$ est un sous-ensemble totalement borné de Y quand B est un sous-ensemble borné de X.*
(4) *Toute suite bornée $\{x_n\}$ de X admet une sous-suite $\{x_{n_k}\}$ telle que $T\{x_{n_k}\}$ converge dans Y.*

Démonstration.

(1)⇔(2) Le cas (1)⇒(2) est un cas particulier de la définition d'opérateur compact. Inversément, si B est un sous-ensemble borné de X, alors il existe $K > 0$ tel que $B \subset B_X(0, K)$. Alors $\overline{T(B)} \subset \overline{T(U_X(0,K))} = \overline{T(KU_X(0,1))} = \overline{KT(U_X(0,1))}$ par linéarité. L'adhérence $\overline{KT(U_X(0,1))} = \overline{T(U_X(0,K))}$ est compact par hypothèse puisque $U_X(0,K)$ est bornée dans X. Par conséquent l'adhérence $\overline{T(B)} \subset \overline{KT(U_X(0,1))}$ est aussi compacte.

(1)⇔(3) Découle du fait que dans un espace métrique M, un sous-ensemble $A \subset X$ est compact si et seulement si il est complet et totalement borné. Ainsi si B est un sous-ensemble borné de X, il suffit d'appliquer cette dernière propriété à l'adhérence de son image.

(1)⇔(4) Par définition, un sous-espace A d'un espace métrique M est compact si et seulement si toute suite dans A admet une sous-suite qui converge dans A. Ainsi dire que l'image par T d'un sous-ensemble borné est relativement compact, c'est dire que l'image par T d'une suite bornée admet une sous-suite qui converge dans son adhérence. Et inversément dire que l'image par T d'une suite bornée admet une sous-suite qui converge dans Y, c'est dire que toute suite dans l'image par T d'un sous-ensemble borné admet une sous-suite qui converge dans son adhérence, i.e que l'image par T d'un sous-ensemble borné est relativement compact.

□

Nous pouvons maintenant montrer que pour des espaces de Banach X et Y, l'ensemble $K(X, Y)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $B(X, Y)$, stable pour la compostion avec des opérateurs linéaires bornés.

Proposition 2.41. *. Soit X, Y, Z, W des espaces de Banach et des opérateurs bornés*

$$X \xrightarrow[S]{} Y \xrightarrow[T]{} Z \xrightarrow[R]{} W$$

tel que T soit compact. Alors

(1) *$K(X, Y)$ est un sous-espace fermé de $B(X, Y)$;*

(2) *la composition $R \circ T \circ S$ est un élément de $K(X, Y)$.*

Remarque 2.42. Si nous posons $X = Y$, le théorème ci-dessus peut se reformuler en disant que l'algèbre $K(X)$ est un idéal bilatère de l'algèbre $B(X)$ des opérateurs bornés.

Démonstration.

(1) Montrons que $K(X, Y)$ est stable par loi interne et par loi externe. Soit $T, U \in K(X, Y)$ et $\lambda \in \mathbb{F}$. Soit donc $\{x_n\}$ une suite bornée de X, par le point (4) de la propostion précédente, il existe une sous-suite $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ telle que $T\{x_{n_k}\}$ converge et il existe une sous-sous-suite $\{x_{n_{k_j}}\}$ de $\{x_{n_k}\}$ telle que $U\{x_{n_{k_j}}\}$ converge. (Il est clair que $T\{x_{n_{k_j}}\}$ converge aussi.) Par conséquent, $\{(T + U)(x_{n_{k_j}})\}$ converge à son tour et $\{(\lambda T)(x_{n_k})\}$ converge aussi. Ainsi en vertu du point (4) de la propostion précédente les opérateurs $T + U$ et λT sont compact et $K(X, Y)$ est de ce fait un sous-espace de $B(X, Y)$.

Il faut encore voir que $K(X, Y)$ est fermé dans $B(X, Y)$. Soit $\{T_n\} \subset K(X, Y)$ une suite qui converge vers un certain $T \in B(X, Y)$. Pour voir que T est compact, il suffit de voir qu'il satisfait le point (3) de propostion précédente. Soit donc B un sous-ensemble borné de X et $\varepsilon > 0$. Comme $Tn \to T$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|T_n x - Tx\| < \frac{\varepsilon}{3}$ pour tout $x \in B$. De plus T_n étant compact, il existe, $T_n(B)$ est totalement borné dans Y, donc il existe $F(n, \frac{\varepsilon}{3})$ un sous-ensemble fini de B tel que pour tout $T_n b \in T_n(B)$, $\|T_n b - T_n f(n, \frac{\varepsilon}{3})\| < \frac{\varepsilon}{3}$ pour un certain $f(n, \frac{\varepsilon}{3}) \in F(n, \frac{\varepsilon}{3})$. Soit $b \in B$, alors par une double application de l'inéaglité triangulaire, on obtient :

$$\begin{aligned}\|Tb - Tf(n,\frac{\varepsilon}{3})\| &\leq \|Tb - T_n b\| + \|T_n b - T_n f(n,\frac{\varepsilon}{3})\| + \|T_n f(n,\frac{\varepsilon}{3}) - Tf(n,\frac{\varepsilon}{3})\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$

Ainsi T est totalement borné et donc compact et donc $K(X,Y)$ est fermé.

(2) Par définition, un opérateur borné envoie des sous-ensembles bornés sur des sous-ensembles bornés et envoie des sous-ensembles relativement compacts sur des sous-ensembles relativement compacts en raison de sa continuité. Ainsi l'image d'un sous-ensemble borné de X par S est un sous-ensemble borné de Y, dont l'image par T est un sous-ensemble relativement compact de Z (T étant compact), dont l'image par R est un sous-ensemble relativement compact de Z. La composition $R \circ T \circ S$ est donc un élément de $K(X,Y)$.

□

Scholie 2.43. *Si X, Y et Z sont des espaces de Banach, alors la compostion $K' \circ K$ de deux opérateurs compacts $K : X \to Y$ et $K' : Y \to Z$ est un encore un opérateur compact.*

Démonstration. Immédiat du fait que $K(X,Y)$ est un idéal de $B(X,Y)$. □

Lemme 2.44. *Soit X un espace de Banach, $T \in K(X)$, alors $I - T$ est à image fermée et*

$$\dim(\ker(I-T)) = \operatorname{codim}(\operatorname{im}(I-T)) < \infty.$$

Démonstration. Nous divisons cette preuve en 2 parties :

– Vérifions d'abord que $(I-T)(B)$ est fermé dans X pour tout sous-ensemble fermé et borné $B \subseteq X$.
  Soit B, un sous-ensemble fermé et borné de X et considérons une suite (x_n) d'éléments de B telle que
  $$\lim_{n\to\infty}(I-T)(x_n) = y.$$
  Comme T est compact, la suite $T(x_n)$ admet une sous-suite convergente $T(x_{n_i})$.
  Ainsi, il existe $x_0 \in B$ avec :
  $$x_0 = \lim_{n\to\infty} x_{n_i} = \lim_{n\to\infty}((I-T)(x_{n_i}) + T(x_{n_i}))$$
  Et donc $y = (I-T)(x_0) \in (I-T)(B)$. Ainsi, $(I-T)(B)$ est fermé dans X.
– Vu que nous venons de vérifier que $(I-T)$ satisfait les hypothèses du théorème précédent, par celui-ci, nous pourrons conclure que $\operatorname{im}(I-T)$ est fermée. Il reste à vérifier que $n(I-T) < \infty$ et $d(I-T) < \infty$.
  – La première assertion est facile à montrer :
    Comme $x = K(x), \forall x \in \ker(I-K)$, l'opérateur identité est compact sur $\ker(I-K)$.
    Ainsi, $n(I_K) < \infty$.
  – Nous omettons la preuve de ce deuxième résultat ici. On peut la trouver dans [**1**].

□

Remarque 2.45. Le lemme précédent peut se généraliser pour obtenir les mêmes résultats pour $(\alpha I - T)$, avec $\alpha \in \mathbb{F}$ quelconque.

5. Opérateurs à image fermée

Théorème 2.46. *Soit X, Y des $\mathbb{C}$-espaces de Banach et $T \in B(X, Y)$.*
Alors T est d'image fermée si et seulement s'il existe $c > 0$ tel que

$$\|Tx\| \geq c \cdot d(x, \ker T) \forall x \in X$$

Démonstration. Soit $\hat{X} := X/\ker T$. Comme X est un espace de Banach, $\hat{X}$ reste un espace de Banach, muni de la norme définie par : $\|\hat{x}\| := d(x, \ker A)$.
Ainsi, nous pouvons définir $\hat{T} : \hat{X} \to Y$ par $\hat{T}(\hat{x}) := T(x)$.
Comme $T \in B(X, Y), \hat{T} \in B(\hat{X}, Y)$. De plus, $\hat{T}$ est injective et $\operatorname{im} \hat{T} = \operatorname{im} T$.

$\Rightarrow$ Supposons que T soit un opérateur à image fermée.
Alors, par linéarité (et donc continuité) de $\hat{T}$, nous pouvons affirmer que $\hat{T}^{-1} : \operatorname{im} T \to \hat{X}$ est un opérateur fermé entre espaces de Banach.
Ainsi, par le théorème du graphe fermé, $\hat{T}^{-1}$ est un opérateur borné et

$$\|T(x)\| = \|\hat{T}(\hat{x})\| \geq \|\hat{T}^{-1}\|^{-1}\|\hat{x}\|^{-1} = \|\hat{T}^{-1}\|^{-1} d(x, \ker T)$$

ce qui est la relation cherchée si l'on pose $c = \|\hat{T}^{-1}\|^{-1}$

$\Leftarrow$ Réciproquement, supposons qu'il existe c tel que :

$$\|Tx\| \geq c \cdot d(x, \ker T) \forall x \in X.$$

Soit (x_n), une suite telle que $T(x_n) \to Tx = y$. Ainsi, $(\hat{x}_n)$ est une suite de Cauchy.
Comme nous venons d'affirmer que $\hat{X}$ est un espace de Banach, $(\hat{x}_n)$ converge vers un $\hat{x} \in \hat{X}$.
Par conséquent,

$$T(x_n) = \hat{T}(\hat{x}_n) \to \hat{T}(\hat{x}) = Tx = y.$$

Ainsi, T est un opérateur à image fermée.

□

Théorème 2.47. *Soit $T \in B(X, Y)$, comme précédemment.*
Si il existe un sous-espace fermé Y_0 tel que $\operatorname{im} T \oplus Y_0$ *est fermé, alors T est un opérateur à image fermée.*

Démonstration. Posons $T_0 : X \times Y_0 \to Y$, l'opérateur défini par $T_0(x, y_0) := Ax + y_0$.
Muni de la norme donnée par $\|(x, y)\| := \|x\| + \|y\|$, $X \times Y_0$ est un espace de Banach.
Comme $T \in B(X, Y)$, T_0 est un opérateur linéaire borné d'image $\operatorname{im} T_0 = \operatorname{im} T + Y_0$.
Par hypothèse, $\operatorname{im} T_0 = \operatorname{im} T + Y_0$ est fermé. De plus, $\ker T_0 = \ker T \times \{0\}$, car $y_0 \notin \operatorname{im} T, \forall y_0 \in Y_0$.
On utilise le théorème précédent pour affirmer qu'il existe $c > 0$ tel que :

$$\|Tx\| = \|T_0(x, 0)\| \geq c \cdot d((x, 0), \ker T_0) = c \cdot d(x, \ker T).$$

Par le même théorème, on conclut que $\operatorname{im} T$ est fermée. □

Corollaire 2.48. *Soit $T \in B(X, Y)$, comme avant.*
Si $\operatorname{im} T$ *admet un supplémentaire, alors T est un opérateur à image fermée.*

Ce corollaire s'applique en particulier lorsque la codimension de l'image est finie.

Démonstration. Il s'agit d'un résultat immédiat du théorème précédent, vu que si $\operatorname{im} T$ admet un supplémentaire, il existe Y_0 tel que $\operatorname{im} T \oplus Y_0 = Y$ qui est fermé. Par le théorème, $\operatorname{im} T$ doit donc être fermée. □

Théorème 2.49. *Soit $T \in B(X, Y)$, comme avant.*
Si $T(B)$ est fermé dans Y pour tout sous-ensemble fermé et borné $B \subseteq X$, alors T est d'image fermée.

Démonstration. *Ab absurdo*, supposons que $\operatorname{im}(T)$ ne soit pas fermée.
Par la preuve du théorème 2.46, on peut construire une suite (x_n) telle que $T(x_n)$ converge vers 0 avec $d(x_n, \ker T) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.
Soit (z_n), une suite de $\ker T$ telle que $\|x_n - z_n\| < 2, \forall n \in \mathbb{N}$.
Posons à présent V, la cloture de l'ensemble $\{x_n - z_n | n \in \mathbb{N}\}$.
Comme V est un sous-ensemble fermé et borné de X, $T(V)$ est fermé dans Y par hypothèse du théorème.
Remarquons également que $T(x_n) = T(x_n - z_n)$, ainsi $0 \in T(V)$.
Nous avons donc l'existence d'un $u \in V \cap \ker T$ tel que

$$\|u - (x_{n_0} - z_{n_0})\| < 1/2,$$

pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}$.
Cela implique $d(x_n, \ker T) < 1/2$, ce qui contredit $d(x_n, \ker T) = 1$. Ainsi, $\operatorname{im} T$ est fermée. □

CHAPITRE 3

Opérateurs de Fredholm

1. Définitions

Nous arrivons finalement aux définitions des deux objets qui sont au centre de nos intérêts et qui vont nous occuper jusqu'à la fin de ce travail : les opérateurs de Fredholm et la fonction indice.

DÉFINITION 3.1. Soit X et Y deux espaces de Banach. Un opérateur linéaire borné $T : X \to Y$ est appelé un **opérateur de Fredholm** si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

(1) $\operatorname{im} T$ est fermé dans Y ;
(2) $\dim(\ker T)$ est finie.
(3) $\dim(Y/\operatorname{im} T) = \dim(\operatorname{Coker} T)$[1].

Nous noterons $n(T) := \dim(\ker T)$, $d(T) := \dim(\operatorname{Coker} T)$ ainsi que $\mathcal{F}(X, Y)$ l'ensemble de tous les opérateurs de Fredholm de X dans Y.

DÉFINITION 3.2. L'**indice** d'un opérateur de Fredholm est la fonction à valeurs entières suivante :

$$\begin{array}{rccl} ind : & \mathcal{F}(X,Y) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & T & \longmapsto & ind(T) := \dim(\ker T) - \dim(\operatorname{Coker} T) \end{array}$$

2. Exemples

Pour un premier contact avec les opérateurs de Fredholm et l'indice, prenons un exemple intuitif[2] en dimension finie.

EXEMPLE 3.3. Considérons deux espaces de Banach X et Y de dimension finie. (Par exemple $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne.) Soit $T : X \to Y$ un opérateur linéaire continu.
Banalement, $\dim(\ker T)$ et $\dim(\operatorname{Coker} T)$ sont finies et $\operatorname{im} T$ est fermée, étant de

[1] C'est une conséquence algébrique du premier théorème d'isomorphie que $\dim(Y/\operatorname{im} T) = \operatorname{codim}(\operatorname{im} T)$

[2] Pour ne pas dire concret !

dimension finie.
Alors,

$$\begin{aligned} ind(T) &= \dim(\ker T) - \dim(\operatorname{Coker} T) = \dim(\ker T) - \dim(Y/\operatorname{im} T) \\ &= \dim(\ker T) - (\dim(Y) - \dim(\operatorname{im} T)) \\ &= \dim(\ker T) - \dim(Y) + \dim(\operatorname{im} T) \\ &= \dim(X) - \dim(Y) \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Remarque 3.4. Tout opérateur borné $T : X \to Y$ entre deux espace de Banach qui est bijectif est un opérateur de Fedholm d'indice nul. En effet, il découle de la bijectivité que $\ker T = \{0_X\}$, dont la dimension est nulle, et $\operatorname{im} T = Y$ qui est fermée et sa codimension est nulle, ainsi :

$$\operatorname{ind}(T) = \dim(\ker T) - \operatorname{codim}(T) = 0 - 0 = 0$$

Contre-exemple 3.5. L'opérateur nul $T : X \to Y$, défini par $T(x) = 0_Y$ pour tout $x \in X$, entre deux espace de Banach n'est pas un opérateur de Fredholm si la dimension de X ou de Y est infinie.
En effet, si X est de dimension infinie, alors $\ker T = X$ est de dimension infinie et si Y est de dimension infinie $\operatorname{im} T = \{0_Y\}$ dont la codimension, qui est la dimension de Y, est infinie.

Exemple 3.6. **Translations dans $l^2_{\mathbb{F}}$**

Considérons le $\mathbb{F}$-espace vectoriel $l^2_{\mathbb{F}}$, l'espace des suites $\xi = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ à coefficient dans $\mathbb{F}$ telles que $\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$. Muni de la norme

$$\begin{array}{rccl} \|.\|_2 : & l^2_{\mathbb{F}} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & \{x_n\} & \longmapsto & \|\{x_n\}\|_2 := \{\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^2\}^{\frac{1}{2}} \end{array}$$

il s'agit d'un espace de Banach.
Nous allons montrer que cet espace possède deux familles infinies dénombrables d'opérateurs de Fredholm, les translations à droite et les translations à gauche.

Translation à droite.
Posons

$$\begin{array}{rccl} T^1_d : & l^2_{\mathbb{F}} & \longrightarrow & l^2_{\mathbb{F}} \\ & (x_0, x_1, x_2, \ldots) & \longmapsto & (0, x_0, x_1, x_2, \ldots) \end{array}$$ la translation d'un cran à droite.

Il s'agit d'un opérateur de Fredholm d'indice -1. En effet, T^1_d est clairement linéaire et les trois conditions de la définition 3.1 sont vérifiées :

- Le noyau de T^1_d est constitué uniquement de la suite identiquement nulle. Ainsi $\dim(\ker T^1_d) = 0 < \infty$.
- Le conoyau $\operatorname{Coker}(T^1_d) = l^2_{\mathbb{F}}/\operatorname{im}(T^1_d)$ où une classe d'équivalence contient toutes les suites de $l^2_{\mathbb{F}}$ de même premier coefficient $x_0 \in \mathbb{F}$. La suite $(1, x_1, x_2, \ldots)$ constitue donc une base de $\operatorname{Coker}(T^1_d)$.
  Ainsi $\dim(\operatorname{Coker}(T^1_d)) = 1 < \infty$.

· Il reste à voir que $\mathrm{im}(T_d^1)$ est un fermé de $l^2_{\mathbb{F}}$.
Soit donc $\{x_n\} \subset l^2_{\mathbb{F}}$ une suite qui converge vers un certain $\xi = \{\xi_n\} \in l^2_{\mathbb{F}}$. Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq m$ on ait $\|x_n - \xi\| = \{\sum_{i=0}^{\infty} |x_{n_i} - \xi_i|^2\}^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$. Par conséquent, pour tout $n \geq m$ et pour tout i fixé, on a $|x_{n_i} - \xi_i|^2 \leq \|x_n - \xi\| < \varepsilon$ et donc $x_{n_i} \to \xi_i$ pour tout i et en particulier $0 = x_{n_0} \to \xi_0$. Or la suite identiquement nulle converge vers 0. Donc par unicité de la limite nous obtenons $\xi_1 = 0$ et $\xi \in \mathrm{im}(T_d^1)$ qui est de ce fait fermé dans $l^2_{\mathbb{F}}$.

Nous obtenons en outre que l'indice de T_d^1 est :

$$\mathrm{ind}(T_d^1) = \dim(\ker T_d^1) - \dim(\mathrm{Coker}\, T_d^1) = 0 - 1 = -1$$

Translation à gauche.
Posons

$$T_g^1 : \begin{array}{ccc} l^2_{\mathbb{F}} & \longrightarrow & l^2_{\mathbb{F}} \\ (x_0, x_1, x_2, \ldots) & \longmapsto & (x_1, x_2, \ldots) \end{array}$$ la translation d'un cran à droite.

Il s'agit d'un opérateur de Fredholm d'indice 1. En effet, T_g^1 est clairement linéaire et les trois conditions de la définition 3.1 sont vérifiées :

· Le noyau est $\ker(T_g^1) = \{\{x_n\} \in l^2_{\mathbb{F}} \mid x_0 \in \mathbb{F}\, \textit{arbitraire}\,, x_i = 0\, \forall i \geq 1\}$. Ainsi $\dim(\ker T_g^1) = 1 < \infty$.

· Le conoyau est $\mathrm{Coker}(T_g^1) = l^2_{\mathbb{F}} / \mathrm{im}(T_g^1) = l^2_{\mathbb{F}}/l^2_{\mathbb{F}} = \{0_{l^2_{\mathbb{F}}}\}$. Ainsi $\dim(\mathrm{Coker}(T_d^1)) = 0 < \infty$.

· L'image de T_g^1 est $l^2_{\mathbb{F}}$ tout entier qui est fermé en tant qu'espace topologique.

Nous obtenons en outre que l'indice de T_d^1 est :

$$\mathrm{ind}(T_g^1) = \dim(\ker T_g^1) - \dim(\mathrm{Coker}\, T_g^1) = 1 - 0 = 1$$

Contre-exemple 3.7. L'espace $\mathrm{Hom}(l^2_{\mathbb{F}})$ compte bien sûr aussi des opérateurs linéaires qui ne sont pas de Fredholm. Les p-ièmes projection sur $\mathbb{F}$, par exemple, ne le sont pas.
Soit $i \in \mathbb{N}$ et considérons

$$P_i : \begin{array}{ccc} l^2_{\mathbb{F}} & \longrightarrow & \mathbb{F} \\ \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} & \longmapsto & x_i \end{array}$$

Il s'agit d'opérateurs linéaires bornés mais

$$\ker P_i = \{\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in l^2_{\mathbb{F}} \mid x_i = 0\}.$$

Sa dimension est donc infinie quelque soit $i \in \mathbb{N}$.
Les projections canoniques de $l^2_{\mathbb{F}}$ ne sont donc pas des opérateurs de Fredholm.

Exemple 3.8. **Adjoint d'un opérateur de Fredholm.**
Soit X, Y deux espaces de Banach ainsi que $T \in \mathcal{F}(X, Y)$ un opérateur de Fredholm. Considérons alors son adjoint

$$\begin{array}{rccc} T^* : & Y^* & \longrightarrow & X^* \\ & y^* & \longmapsto & y^* \circ T. \end{array}$$

Nous allons montrer que T^* est aussi un opérateur de Fredholm et que son indice est l'opposé de celui de T.
Nous savons d'après la section 5 du chapitre 1 que X^* et Y^* sont des espsces de Banach puisque X et Y sont des espaces normés. Nous savons aussi que $T^* \in B(Y^*, X^*)$. Il reste donc à voir que

· $\operatorname{im} T^*$ est fermée ;
· $\dim(\ker T^*) < \infty$;
· $\dim(X^*/\operatorname{im} T^*) < \infty$.

(1) Etant donné que T est Fredholm, son image $\operatorname{im} T$ est fermée, ce qui équivaut à dire que $\operatorname{im} T^*$ est fermée, d'après le théorème de l'image fermée.
(2) En appliquant le théorème 2.34 au sous-espace $\ker T$ de X, il vient :
$$(\ker T)^* \cong X^*/(\ker T)^\circ$$
Or le théorème de l'image fermée fournit $(\ker T)^\circ = \operatorname{im} T^*$. Ainsi :
$$(\ker T)^* \cong X^*/(\ker T)^\circ = X^*/\operatorname{im} T^*$$
Donc
$$\dim(X^*/\operatorname{im} T^*) = \dim((\ker T)^*) = \dim(\ker T) < \infty$$
par hypothèse.
(3) En appliquant le théorème 2.34 au sous-espace $\operatorname{im} T$ de Y, il vient :
$$(Y/\operatorname{im} T)^* \cong (\operatorname{im} T)^\circ$$
En outre la proposition 2.35 fournit $(\operatorname{im} T)^\circ = \ker T^*$. Par conséquent :
$$(Y/\operatorname{im} T)^* \cong (\operatorname{im} T)^\circ = \ker T^*$$
Ainsi
$$\dim(\ker T^*) = \dim((Y/\operatorname{im} T)^*) = \dim(Y/\operatorname{im} T)) < \infty$$
par hypothèse.

L'opérateur adjoint T^* est donc bien Fredholm. Calculons son indice :
$$\begin{aligned} \operatorname{ind}(T^*) &= \dim(\ker T^*) - \dim(X^*/\operatorname{im} T^*) \\ &= \dim(Y/\operatorname{im} T) - \dim(\ker T) \\ &= -\operatorname{ind}(T) \end{aligned}$$

Scholie 3.9. *Pour tout opérateur de Fredholm $T : X \longrightarrow Y$, nous pouvons reformuler l'indice sous la forme suivante :*
$$\operatorname{ind}(T) = \dim(\ker T) - \dim(\ker T^*)$$

Démonstration. Découle du point (3) où nous avons montré que
$$\dim(\operatorname{Coker} T) = \dim(Y/\operatorname{im} T)) = \dim(\ker T^*).$$
□

3. Produits d'opérateurs de Fredholm

Une propriété intéressante de l'indice est que l'indice d'une composition d'opérateurs de Fredholm est simplement la somme des indices des composants.

Lemme 3.10. *Soit X, Y des $\mathbb{F}$-espaces de Banach et $T \in B(X, Y)$.*
Soit M, un sous-espace de X de co-dimension finie n.
Alors T est de Fredholm si et seulement si la restriction $T_0 : M \to Y$ est de Fredholm.
De plus,

$$\operatorname{ind} A = \operatorname{ind} A_0 + n.$$

Démonstration. Si le résultat est vrai pour $n = 1$, il se généralise par récurrence.
Posons : $X = M \oplus \operatorname{vect}\{x_1\}$ Considérons les 2 cas possibles suivants :

- Si $T(x_1) \notin \operatorname{im} T_0$, alors $T(X) = T_0(M) \oplus \operatorname{vect}\{A(x_1)\}$ et $\ker T_0 = \ker T$.
  Ainsi, $d(T_0) = d(T) + 1$ et $n(T_0) = n(T)$, d'où $\operatorname{ind}(T) = \operatorname{ind}(T_0) + 1$.
- Si $T(x_1) \in \operatorname{im} T_0$, alors $\operatorname{im} T = \operatorname{im} T_0$ et il existe $u \in M$ tel que $T(x_0) = T_0(u)$.
  De plus, $\ker T = \ker T_0 \oplus \operatorname{vect}\{x_1 - u\}$.
  Ainsi, $d(T_0) = d(T)$ et $n(T_0) = n(T) - 1$, d'où $\operatorname{ind}(T) = \operatorname{ind}(T_0) + 1$.

□

Notation 3.11. Soit $T : X \to Y$, un opérateur de Fredholm.
Alors $\ker T$ et $\operatorname{im} T$ admettent des supplémentaires. ($\ker T$ est fermé en tant que pré-image du fermé $\{0_Y\}$ par une application continue et sa dimension est finie, $\operatorname{im} T$ par le corollaire 2.48 puisque sa codimension est finie.)
On peut écrire $X = \ker T \oplus X_0$ et $Y = \operatorname{im} T \oplus Y_0$. Comme $X_0 \cong \operatorname{im} T$, on peut définir une application bijective $\widetilde{T} : X_0 \times Y_0 \to Y$ par :

$$\widetilde{T}(x_0, y_0) := T(x_0) + y_0$$

On appelle $\widetilde{T}$ la **bijection associée à** T.

Théorème 3.12. *Soit X, Y, Z des $\mathbb{F}$-espaces de Banach.*
Si $A : X \to Y$ et $B : Y \to Z$ sont des opérateurs de Fredholm, alors BA est un opérateur de Fredholm.
De plus,

$$\operatorname{ind} BA = \operatorname{ind} A + \operatorname{ind} B.$$

Démonstration. Soit $\widetilde{A}$ la bijection associée à A et posons A_0, la restriction de A à X_0 (Notons que A_0 est aussi la restriction de $\widetilde{A}$ à X_0).
Comme $\widetilde{A}$ est un isomorphisme et que B est Fredholm, l'opérateur $B\widetilde{A}$ est un opérateur de Fredholm avec $\operatorname{ind} B\widetilde{A} = \operatorname{ind} B$.
En identifiant X_0 et $X_0 \times \{0\}$, on obtient que BA_0 est la restriction commune de BA et $B\widetilde{A}$ à X_0.
Par le lemme précédent $B\widetilde{A}$ est Fredholm $\Leftrightarrow$ BA_0 est Fredholm $\Leftrightarrow$ BA est Fredholm.
De plus,

$$\begin{aligned} \operatorname{ind} BA &= \operatorname{ind} BA_0 + \dim(X/X_0) \\ &= \operatorname{ind} B\widetilde{A} - \dim(X_0 \times Y_0 / X_0 \times \{0\}) + n(A) \\ &= \operatorname{ind} B + \operatorname{ind} A. \end{aligned}$$

□

EXEMPLE 3.13. **Opérateurs de Fredholm d'indice $n \in \mathbb{Z}$ dans $l^2_{\mathbb{F}}$.**
Sachant que la composition de deux opérateurs de Fredholm est encore un opérateur de Fredholm dont l'indice est obtenu en sommant les indices des deux opérateurs que l'on compose. En reprenant les deux opérateurs T^1_d et T^1_g, nous pouvons ainsi construire un opérateur de Fredholm dans $l^2_{\mathbb{F}}$ d'indice $n \in \mathbb{Z}$ pour tout entier n par le processus suivant :

Soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Posons $T^m_d = \underbrace{T^1_d \circ \cdots \circ T^1_d}_{m fois}$. Il s'agit d'un opérateur de Fredholm en tant que composition d'opérateurs de Fredholm et son indice est

$$\operatorname{ind}(T^m_d) = m \cdot \operatorname{ind}(T^1_d) = m \cdot (-1) = -m < 0.$$

Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Posons $T^p_g = \underbrace{T^1_d \circ \cdots \circ T^1_d}_{p fois}$. Il s'agit d'un opérateur de Fredholm en tant que composition d'opérateurs de Fredholm et son indice est

$$\operatorname{ind}(T^p_g) = p \cdot \operatorname{ind}(T^1_g) = p \cdot 1 = p > 0.$$

Cela nous apprend que pour obtenir un opérateur de Fredholm d'indice 0 dans $l^2_{\mathbb{F}}$, il suffit de composer T^1_g avec T^1_d ce qui nous donne l'identité.

4. Perturbations

4.1. Ouverture de $GL(X;Y)$ dans $B(X,Y)$.

Notons par $GL(X;Y)$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés inversibles d'un espace de Banach X dans un espace de Banach Y. Nous savons d'après le théorème des applications ouvertes que si $T \in GL(X;Y)$, alors $T^{-1} \in B(X;Y)$.

Nous voulons montrer que $GL(X;Y)$ est un ouvert de $B(X,Y)$ pour la topologie engendrée par la norme opérateur. Il s'agit donc de trouver un $\delta > 0$ tel que pour tout $T \in GL(X;Y)$, on ait $B_{B(X,Y)}(T,\delta) \subset GL(X;Y)$. Autrement dit, on cherche une condition sur les $S \in B(X,Y)$ tels que $\|T + S - T\| = \|S\| < \delta$. Il faut donc savoir sous quelles conditions sur la norme d'un opérateur linéaire $S \in B(X,Y)$, l'opérateur $T + S \in GL(X;Y)$ pour tout $T \in GL(X;Y)$.

Injectivité. Soit $x \in \ker(T+S)$. Remarquons que si $Tx = y$ alors $x = T^{-1}y$ et

$$\|x\| = \|T^{-1}y\| \leq \|T^{-1}\| \cdot \|y\| = \|T^{-1}\| \cdot \|Tx\|$$

donc

$$\|Tx\| \geq \|T^{-1}\|^{-1}\|x\|.$$

Alors, $(T+S)(x) = 0$ si et seulement si $Sx = -Tx$, implique que

$$\|S\| \cdot \|x\| \geq \|Sx\| = \| - Tx\| = \|Tx\| \geq \|T^{-1}\|^{-1}\|x\|.$$

Ainsi

$$(\|S\| - \|T^{-1}\|^{-1})\|x\| \geq 0.$$

Alors si $(\|S\| - \|T^{-1}\|^{-1}) < 0$, on a nécessairement que $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$.

En résumé, nous avons obtenu que si $\|S\| < \|T^{-1}\|^{-1}$ alors $T+S$ est un opérateur injectif.

Surjectivité. Soit $y \in Y$. Alors,

$$\begin{aligned}
\text{L'opérateur } T+S \text{ est surjectif} &\Leftrightarrow \exists x \in X \text{tel que} (T+S)x = y \\
&\Leftrightarrow \exists x \in X \text{ tel que } x + T^{-1}Sx = T^{-1}y \\
&\Leftrightarrow \exists x \in X \text{ tel que } x = T^{-1}y - T^{-1}Sx \\
&\Leftrightarrow \exists x \in X \text{ tel que } x = f(x) \\
&\quad \text{où } f(x) = T^{-1}y - T^{-1}Sx.
\end{aligned}$$

Donc d'après le théorème du point fixe de Banach, il suffit de voir que f est une application contractante.

$\|f(x) - f(z)\| = \|T^{-1}Sx - T^{-1}Sz\| \leq \|T^{-1}S| \cdot \|x - z\| \leq \|T^{-1}\| \cdot \|S\| \cdot \|x - z\|$.

L'application f est donc contractante si et seulement si $\|T^{-1}\| \cdot \|S\| < 1$ si et seulement si $\|S\| < \|T^{-1}\|^{-1}$.

En résumé, on peut prendre $\delta = \|T^{-1}\|^{-1}$, alors pour tout opérateur S de norme inférieure ou égale à $\|T^{-1}\|^{-1}$, l'opérateur $T+S$ est encore un élément de $GL(X;Y)$.

4.2. Petites perturbations sur les opérateurs de Fredholm .

Le théorème suivant nous apprend que non seulement l'ensemble des opérateurs de Fredholm entre deux espaces de Banach est ouvert dans l'ensemble des opérateur bornés, mais aussi que l'indice se trouve être une application continue.

Théorème de Dieudonné. *Soit X, Y des $\mathbb{F}$-espaces de Banach. Soit $T : X \to Y$ un opérateur de Fredholm et la $\widetilde{T}$ bijection associée à T. Si $B \in B(X;Y)$ est tel que $\|B\| < \|\widetilde{T}^{-1}\|^{-1}$, alors :*

1. *$T+B$ est un opérateur de Fredholm ;*
2. *$n(T+B) \leq n(T)$;*
3. *$d(T+B) \leq d(T)$;*
4. $\mathrm{ind}(T+B) = \mathrm{ind}(T)$

En d'autres termes, l'indice est une application continue, alors que la dimension n du noyau et la dimension d du conoyau sont des applications seulement semi-continues.

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{F}(X;Y)$ et $B \in B(X;Y)$ tel que $\|B\| < \|\widetilde{T}^{-1}\|^{-1}$. Soit X_0 et Y_0 les sous-espaces associés à la bijection $\widetilde{T}$ (rappelons que $\widetilde{T}(x_0 + y_0) = Tx_0 + y_0$). Posons C :=T+B et définissons :

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{C}: & X_0 \times Y_0 & \longrightarrow & Y \\ & (x_0, y_0) & \longmapsto & Cx_0 + y_0 \end{array}$$

Nous avons alors que $\|\widetilde{T} - \widetilde{C}\| \leq \|T - C\| = \|B\| < \|\widetilde{T}^{-1}\|^{-1}$. Puisque $\widetilde{C}$ est borné et $\widetilde{T} \in GL(X;Y)$, d'après la section précédente, nous obtenons que $\widetilde{C}$ est aussi un élément de $GL(X;Y)$.
Alors, l'opérateur

$$\begin{array}{rccc} C_0: & X_0 \times \{0\} & \longrightarrow & Y \\ & (x_0, 0) & \longmapsto & Cx_0 \end{array}$$

est une restriction commune de C et $\widetilde{C}$. Ainsi, par le lemme 3.10 l'opérateur C est Fredholm puisque C_0 est Fredholm, de plus,

$$\operatorname{ind}(C) = \operatorname{ind}(C_0) + \operatorname{codim}(\ker X_0) = \operatorname{ind}(C_0) + n(T).$$

Or $\operatorname{ind}(C_0) = \operatorname{ind}(\widetilde{C}) - \dim(Y_0) = -\dim(Y_0) = 0 - d(T)$ puisque $\operatorname{im}(\widetilde{C}) = C(X_0) \oplus Y_0$ et que $\widetilde{C}$ est bijectif . Donc finalement :

$$\operatorname{ind}(C) = \operatorname{ind}(C_0) + n(T) = -d(T) + n(T) = \operatorname{ind}(T)$$

Ce qui prouve (1) et (2).
De plus, $\widetilde{C}$ étant inversible, on a nécessairement que $X_0 \cap \ker(C) = \{0\}$ et donc :

$$n(C) = \dim(\ker(C)) \leq \dim(X/X_0) = \dim(\ker T) = n(T)$$

puisque $X = X_0 \oplus \ker(T)$. Ce qui prouve (3).
Finalement on utilise (2) et (3) pour prouver (4) :

$$d(C) = -\operatorname{ind}(C) + n(C) \underset{(2)}{=} -\operatorname{ind}(T) + n(C) \underset{(3)}{\leq} -\operatorname{ind}(T) + n(T) = d(T)$$

□

Corollaire 3.14. *Si X et Y sont des espaces de Banach. Alors l'indice*

$$\operatorname{ind} : \mathcal{F}(X,Y) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

est une application constante sur les composantes connexes de $\mathcal{F}(X,Y)$.

Démonstration. L'espace $\mathbb{Z}$ étant discret et l'indice une application continue, l'indice de deux opérateurs de Fredholm F_1 et F_2 est nécessairement égal s'il existe un chemin reliant F_1 et F_2. Autrement dit, l'indice est une application constante sur les composantes connexes de $\mathcal{F}(X,Y)$. □

La reciproque de ce théorème est aussi vraie : si les indices de deux opérateurs de Fredholm F_1 et F_2 sont égaux, alors F_1 et F_2 appartiennent à la même composante connexe de $\mathcal{F}(X,Y)$. C'est une conséquence du théorème d'Atiyah-Jänich que nous exposons dans le chapitre 4.

Les perturbations par des opérateurs compacts n'ont pas non plus d'influence sur les opérateur de Fedholm, dans le sens que si l'on somme un opérateur de Fredholm et un opérateur compact, le résultat reste Fredholm.

Commençons par reformuler le lemme 2.44 dans le langage des opérateurs de Fredholm.

Lemme 3.15. *Soit X, Y des $\mathbb{F}$-espaces de Banach et $K \in K(X,Y)$.*
Alors $I - K$ est un opérateur de Fredholm d'indice nul.

Démonstration. Le lemme 2.44 nous assure que $I-K$ est un opérateur à image fermée, dont la dimension finie du noyau égale la dimension du conoyau. Il s'agit donc d'un opérateur de Fredholm d'indice nul. □

Théorème 3.16. *Soit X un $\mathbb{F}$-espace de Banach.*
Si $T \in B(X)$ est un opérateur de Fredholm et $K \in K(X)$ est un opérateur compact, alors $T + K$ est un opérateur de Fredholm.
En outre,

$$\operatorname{ind}(T + K) = \operatorname{ind} T$$

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{F}(X;Y)$ et $K \in K(X;Y)$.
Soit X_0 et Y_0 les sous-espaces associés à la bijection $\widetilde{T}$ telle que $\widetilde{T}(x_0 + y_0) = Tx_0 + y_0$ et posons $\widetilde{K}(x_0 + y_0) = Kx_0 + y_0$. Comme K est compact et $\dim(Y_0) < \infty$, l'opérateur $\widetilde{K}$ est compact. De plus, l'opérateur $(\widetilde{T}+\widetilde{K})|_{X_0}$ est une restriction commune de $\widetilde{T}+\widetilde{K}$ et $T + K$, ainsi par le lemmme 3.10, $T + K$ est Fedholm si et seulement si $\widetilde{T} + \widetilde{K}$.
Or $\widetilde{T}$ est bijectif, donc $\widetilde{T} + \widetilde{K} = \widetilde{T}(I + \widetilde{T}^{-1}\widetilde{K})$ et $T^{-1}\widetilde{K}$ est compact d'après la proposition 2.41. Ainsi part le lemme 3.15 $I + \widetilde{T}^{-1}\widetilde{K}$ est Fredholm et $\widetilde{T} + \widetilde{K} = \widetilde{T}(I + \widetilde{T}^{-1}\widetilde{K})$ est aussi Fredholm, donc $T + K$ l'est à son tour.
Il reste à montrer que $\operatorname{ind}(T + K) = \operatorname{ind}(T)$. L'opérateur K étant compact, λK l'est aussi pour tout $\lambda \in [0,1]$, il est ainsi borné. Il suffit alors d'appliquer le théorème 4.2 à $T + \lambda K$ pour obtenir que la fontion $f(\lambda) := \operatorname{ind}(T + \lambda K)$ est constante de valeur $\operatorname{ind}(T)$ sur l'intervalle $[0,1]$. Par conséquent,

$$\operatorname{ind}(T + K) = f(1) = f(0) = \operatorname{ind}(T).$$

□

5. Algèbre de Calkin

Dans ce paragraphe nous obtenons une caractérisation importante des opérateurs de Fredholm utilisant les opérateurs compacts.

Théorème 3.17. *Soit X, Y des $\mathbb{C}$-espaces de Banach et $T \in B(X, Y)$.*
Alors T est de Fredholm si et seulement s'il existe $A \in B(Y, X)$ tel que $I_Y - TA$ et $I_X - AT$ sont des opérateurs de rang fini.

Démonstration. Supposons d'abord que T est Fredholm. Soit X_0 et Y_0 les sous-espaces associés à la bijection $\widetilde{T}$ telle que $\widetilde{T}(x_0 + y_0) = Tx_0 + y_0$ et T_0 la restriction de T à $X_0 \times \{0\}$. Comme X_0 est un supplémentaire du noyau, le seulement de X_0 dont l'image par T est 0_Y est 0_X, ainsi T_0 est injective, de plus $\mathrm{im}(T_0) = TX_0 = T_X = \mathrm{im}(T)$ qui est fermé par hypothèse. Par conséquent, le théorème du graphe fermé entraîne que la bijection $T_0^{-1} : \mathrm{im}\, T \longrightarrow X_0$ est un opérateur linéaire borné.
Soit $P : Y \longrightarrow Y$ la projection sur $\mathrm{im}\, T$ le long de Y_0 et posons $A := T_0^{-1}P$. Alors $\ker(A) = Y_0$ et $\mathrm{im}(A) = X_0$.
Il vient $\ker(AT) = \ker(T)$ et $\mathrm{im}(AT) = X_0$ puisque pour tout $x \in X$ on a

$$AT(x) = T_0^{-1}PT(x) = T_0^{-1}(T(x)) \in X_0).$$

De plus,

$$(AT)^2 = T_0^{-1}PTT_0^{-1}PT = T_0^{-1}PPT = T_0^{-1}PT = AT.$$

Ainsi AT est la projection de X sur X_0 le long de $\ker(T)$ et donc, en vertu des théorèmes 2.22 et 2.23, on obtient que $I_X - AT$ est la projection de X sur $\ker(T)$ le long de X_0. Il s'agit ainsi d'un opérateur de rang fini puisque son image est $\ker(T)$, de dimension finie par hypothèse.
De façon similaire, on obtient que $\ker(TA) = \ker(TT_0^{-1}P) = Y_0$ et

$$\mathrm{im}(TA) = \mathrm{im}(TT_0^{-1}P) = TT_0^{-1}(\mathrm{im}(T)) = T(X_0) = \mathrm{im}(T).$$

De plus,

$$(TA)^2 = TT_0^{-1}PTT_0^{-1}P = TT_0^{-1}PP = TT_0^{-1}P = TA.$$

Par conséquent, TA est la projection de Y sur $\mathrm{im}(T)$ le long de Y_0, ce qui entraîne que $I_Y - TA$ est la projection de Y sur Y_0 le long de $\mathrm{im}(T)$. Son image étant Y_0, de dimension finie par hypothèse, l'opérateur $I_Y - TA$ est de rang fini.

Réciproquement, supputons qu'il existe un opérateur $A \in B(Y, X)$ ainsi que des opérateurs $F_1 \in B(X)$ et $F_2 \in B(Y)$ de rang fini tels que $I_X - F_1 = AT$ et $I_Y - F_2 = TA$. Alors

$$\ker(T) \subset \ker(AT) = \ker(I_X - F_1).$$

Or

$$\ker(I_X - F_1) = \{x \in X \mid x = F_1(x)\} \subset \mathrm{im}(F_1).$$

Ainsi,

$$n(T) \leq n(I_X - F_1) \leq \dim(\mathrm{im}(F_1)) < \infty.$$

En outre, ğ

$$\mathrm{im}(TA) \subset \mathrm{im}(T) = \mathrm{im}(I_Y - F_2),$$

ainsi

$$d(T) \leq d(TA) = d(I_Y - F_2) < \infty$$

puisque F_2 est de rang fini. En outre, la codimension finie $\mathrm{im}\, T$ entraîne qu'il est fermé (c.f. corollaire 2.48). Ainsi, T est un opérateur de Fredholm. ◻

Remarque 3.18. On peut remplacer l'affirmation : "$I - TA$ et $I - AT$ sont des opérateurs de rang fini" par "$I - TA$ et $I - AT$ sont des opérateurs compacts".
En effet, si T est de Fredholm, alors par le théorème il existe $A \in B(Y, X)$ tel que $I_Y - TA$ et $I_X - AT$ sont des opérateurs de rang fini. Comme ils sont bornés, ils sont aussi compacts (proposition 2.39). Réciproquement, s'il existe un opérateur $A \in B(Y, X)$ ainsi que des opérateurs F_1,F_2 des opérateurs compacts tels que $I_X - F_1 = AT$ et $I_Y - F_2 = TA$, alors AT et TA sont Fredholm d'indice nul d'après le corollaire **??**. Donc comme dans la preuve on obtient que $n(T) < \infty$ et $d(T) < \infty$, T est donc Fredholm.
Cela revient à dire qu'un opérateur T est Fredholm si et seulement s'il est inversible modulo les opérateurs compacts.

Définition 3.19 (Algèbre de Calkin). Soit X un espace de Banach. Comme nous l'avons vu au chapitre 2, l'ensemble $K(X)$ constitue un idéal fermé de l'algèbre $B(X)$ des opérateurs bornés. Le quotient $B(X)/K(X)$ est par conséquent une algbère à laquelle on donne le nom **d'algèbre de Calkin**. Ses éléments sont les classes $L + K(X)$ avec $L \in B(X)$.

Nous pouvons dès lors utiliser la remarque précédente pour reformuler le théorème 3.17 dans le cas particulier où $X = Y$ est un unique espace de Banach.

Théorème d'Atkinson. *Soit X un $\mathbb{C}$-espace de Banach et $T \in B(X)$.*
Alors T est un opérateur de Fredholm si et seulement si $[T]$ est inversible dans l'algèbre de Calkin.

Démonstration. Supposons que T est Fredholm, alors d'après le théorème 3.17, il existe $A \in B(X)$ tel que $I - TA$ et $I - AT$ soit compacts. Ainsi,$[I - TA] = [I - AT] = [0]$ et donc $[I] = [T][A] = [A][T]$. Autrement dit $[A]$ est un inverse de $[T]$ dans l'algèbre de Calkin.
Réciproquement, s' il existe $[A] \in B(X)/K(X)$ tel que $[I] = [T][A] = [A][T]$ alors il existe $K_1, K_2 \in K(X)$ tels que $I = TA + K_1$ et $I = AT + K_2$. Il découle alors du théorème 3.17 et de la remarque 3.18 que T est un opérateur de Fredholm . □

Nous pouvons aussi caractériser les opérateurs de Fredholm d'indice nul selon la propostion suivante.

Proposition 3.20. *Soit X, Y des $\mathbb{C}$-espaces de Banach et $A \in B(X, Y)$.*
Un opérateur de Fredholm $T \in \mathcal{F}(X, Y)$ est d'indice nul si et seulement s'il existe un opérateur $A \in B(X, Y)$ de rang fini tel que $T + A$ soit inversible.

Démonstration. Supposons que $T + A$ soit inversible avec A de rang fini. L'inversibilité de $T + A$ entraîne que A est borné (sinon $T + A$ ne le serait pas) et donc A est compact par la proposition 2.39. Alors par le théorème 3.16 $T + A$ est Fredholm et son indice est, premièrement, égal à l'indice de T, est deuxièmement nul puisqu'il s'agit d'une bijection. D'où $\operatorname{ind}(T) = 0$.
Réciproquement, supposons que $T \in B(X, Y)$ est Fredholm d'indice nul et comme

précédemment reprenons $X = \ker T \oplus X_0$ et $Y = \operatorname{im} T \oplus Y_0$. L'indice de T étant nul, la dimension du noyau est égale à la codimension de l'image, autrement dit $\dim(\ker(T)) = \dim(Y_0)$. Par conséquent, il existe un opérateur inversible $A_0 : \ker(T) \longrightarrow Y_0$. (Il suffit d'établir une bijection entre deux bases respectives de ces deux espaces et de l'étendre par linéarité.)
Soit $P : X \longrightarrow X$ la projection de X sur X_0 le long de $\ker(T)$. Définissons alors $A := A_0(I_X - P)$, alors $\operatorname{im}(A) = Y_0$ dont la dimension est finie, i.e A est de rang fini. Alors $T + A$ est inversible. En effet, $T + A$ est injectif car

$$\begin{aligned}
& 0 = (T + A)(x) = (T + A_0(I_X - P))(x) = T(x) + (A_0(I_X - P))(x) \\
\Leftrightarrow\ & T(x) = 0 \text{ et } (A_0(I_X - P))(x) = 0 \\
& (\text{ comme } T(x) \in \operatorname{im}(T), (A_0(I_X - P))(x) \in Y_0 \text{ et } Y = \operatorname{im} T \oplus Y_0) \\
\Leftrightarrow\ & x \in \ker(T) \text{ et } x = P(x) \\
\Leftrightarrow\ & x \in \ker(T) \text{ et } x \in X_0 \\
\Leftrightarrow\ & x \in \ker(T) \cap X_0 = \{0_X\}
\end{aligned}$$

donc le noyau de $T + A$ est trivial. La surjectivité vient du fait que tout $y \in Y$ peut sécrire comme $y = T(z) + y_0$ avec $z \in X$ et $y_0 \in Y_0$. Remarquons encore que

$$A(A_0^{-1}(Az)) = A_0(I_X - P)A_0^{-1}(Az) = A_0A_0^{-1}(Az) = Az$$

et

$$A(A_0^{-1}(y_0)) = A_0(I_X - P)A_0^{-1}(y_0) = A_0A_0^{-1}(y_0) = y_0.$$

Il vient

$$\begin{aligned}
y = T(z) + y_0 &= (T(z) - 0 + 0) + (A(z) - A(z) + y_0) \\
&= T[z - A_0^{-1}(Az) + A_0^{-1}(y_0)] + A[z - A_0^{-1}(Az) + A_0^{-1}(y_0)].
\end{aligned}$$

□

CHAPITRE 4

Vers le théorème d'Atiyah-Jänich.

Le but de ce chapitre est de définir une nouvelle application "indice" sur une famille d'opérateurs de Fredholm indexée par un ensemble d'indices compact et connexe et de voir qu'il s'agit d'une généralisation de la notion d'indice que nous avons développée jusqu'à présent lorsque l'ensemble d'indices est réduit à un point.
Fixons X, Y deux espaces de Banach, ainsi C un espace topologique compact et connexe. L'ensemble $\mathcal{F}(X, Y)$ est aussi un sous-espace topologique de $B(X; Y)$ pour la norme-opérateur. Nous pouvons donc poser la définition suivante.

Définition 4.1. Une **famille de Fredholm** indexée par C, est un couple (C, F), où C est un espace topologique compact et connexe et $F : C \longrightarrow \mathcal{F}(X, Y)$ est une application continue.

Remarque 4.2. Etant donné la continuité de F et le théorème de Dieudonné, $\mathrm{ind}(F(\lambda)) = \text{constante}\ \text{ pour tout } \lambda \in C$ puisque C est un ensemble connexe.

C'est le théorème suivant qui va motiver la nouvelle définition de l'indice que nous allons introduire

Théorème 4.3. *Soit $F : C \longrightarrow \mathcal{F}(X, Y)$ une famille de Fredholm.*
Alors, il existe un sous-espace $E \subset Y$ tel que $\dim(E) < \infty$ et un sous-espace $Z \subset Y$ tel que $Y = E \oplus Z$. De plus, E et Z sont tel que, si $P : Y \longrightarrow Y$ est la projection sur Z le long de E, alors $\mathrm{im}(PF(\lambda)) = Z$ pour tout $\lambda \in C$.

Remarque 4.4.
(1) La projection P est un opérateur de Fredholm.
En effet, $\mathrm{im}(P) = Z$ est fermé en tant que facteur direct et sa codimension est $\dim(E) < \infty$ et $\ker(P) = E$ de dimension finie.
En outre $\mathrm{ind}(P) = n(P) - d(P) = \dim(E) - \dim(E) = 0$. Ainsi,
$\mathrm{ind}(PF(\lambda) = \mathrm{ind}(P) + \mathrm{ind}(F(\lambda)) = 0 + \mathrm{ind}(F(\lambda)) = \text{constante}\ \text{ pour tout } \lambda \in C$.
(2) Nous avons $\mathrm{im}(PF(\lambda)) = PF(\lambda)(C) = P(\mathrm{im}(F(\lambda))) = P(Z) = Z$, ce qui entraîne que $\mathrm{codim}(\mathrm{im}(PF(\lambda))) = \dim(E)$ pour tout $\lambda \in C$.

Démonstration du Théorème 4.3. La preuve procède en deux étapes :
(1) la première étape consiste à montrer que le théorème est vérifié localement ;

(2) la deuxième étape consiste à utiliser la propriété locale ainsi que la compacité de C pour étendre le résultat à l'ensemble C tout entier.

Etape 1.
Soit $F : C \longrightarrow \mathcal{F}(X, Y)$ une famille de Fredholm et $\lambda_0 \in C$.
Soit $E_0 \subset Y$ un sous-espace tel que $\dim(E_0) < \infty$ et $E_0 + \mathrm{im}(F(\lambda_0)) = Y$. (Cela est possible ; $F(\lambda_0)$ étant Fredholm, $\mathrm{im}(F(\lambda_0))$ est fermé et sa codimension est finie, donc au pire des cas on peu prendre pour E_0 un supplémentaire topologique de $\mathrm{im}(F(\lambda_0))$.)
Soit encore Z_0 un supplémentaire topologique de E_0 dans Y. ($\dim(E_0) < \infty$ implique qu'il existe au moins un tel Z_0.)
Finalement, considérons $P_0 : Y \longrightarrow Y$ la projection de Y sur Z_0 le long de E_0. Ainsi $\mathrm{im}(P_0) = Z_0$ et $\ker(P_0) = E_0$.

Lemme 4.5. $P_0(\mathrm{im}(F(\lambda_0))) = Z_0$.

Démonstration.

"$\subseteq$". On a $\mathrm{im}(F(\lambda_0)) \subseteq Y$, donc $P_0(\mathrm{im}(F(\lambda_0))) \subseteq P_0(Y) = Z_0$.

"$\supseteq$". Soit $z \in Z_0$. Comme $E_0 + \mathrm{im}(F(\lambda_0)) = Y$, z peut s'écrire comme $z = e + F(\lambda_0)(x)$ pour un certain $e \in E_0$ et un certain $x \in X$. Alors

$$\begin{aligned} z = P_0(z) &= P_0(e + F(\lambda_0)(x)) = P_0(e) + P_0(F(\lambda_0)(x)) \\ &= 0 + P_0(F(\lambda_0)(x)) \in P_0(\mathrm{im}(F(\lambda_0))). \end{aligned}$$

D'où $Z_0 \subseteq P_0(\mathrm{im}(F(\lambda_0)))$.

□

Considérons $P_0F : C \longrightarrow \mathcal{F}(X, Y)$. Il s'agit d'une application continue en tant que composition de deux application continues. Par conséquent, c'est une famille de Fredholm avec

$$\mathrm{ind}(P_0F(\lambda)) = \mathrm{ind}(P_0) + \mathrm{ind}(F(\lambda)) = 0 + \mathrm{ind}(F(\lambda)) = \mathrm{ind}(F(\lambda)) = \text{ constante}$$

pour tout $\lambda \in C$. De plus

$$\mathrm{im}(P_0F(\lambda_0)) = P_0F(\lambda_0)(C) = P_0(\mathrm{im}(F(\lambda_0))) = Z_0.$$

Nous voulons maintenant étendre ces propriétés à un voisinage ouvert V_{λ_0} de λ_0.

Dans le chapitre précédent, nous avons introduit la notion de *bijection associée* à un opérateur de Fredholm $F : X \to Y$, permettant d'exhiber un isomorphisme entre l'espace d'arrivée Y et l'espace produit $X_0 \times Y_0$.
De manière similaire, nous voulons écrire X comme le produit de deux espaces connus pour notre opérateur $P_0F(\lambda_0)$.

Notation 4.6. Considérons $W_0 \subset X$ tel que $X = \ker P_0F(\lambda_0) \oplus W_0$.
Soit π_0, la projection sur $\ker(P_0F(\lambda_0))$ le long de W_0.
Pour tout $\lambda \in C$, définissons

$$\begin{array}{rccl} G_0(\lambda) : & X & \longrightarrow & Z_0 \times \ker(P_0F(\lambda_0)) \\ & u & \longmapsto & G_0(\lambda)(u) := (P_0F(\lambda)(u), \pi_0(u)) \end{array}$$

Remarque 4.7. Nous remarquons que $G_0(\lambda_0) : X \to Z_0 \times \ker(P_0F(\lambda_0))$ est un isomorphisme algébrique, car nous venons de voir que $Z_0 = \ker(P_0F(\lambda_0))$. Il est aussi claire que $G_0(\lambda_0)$ est borné, donc par le théorème du graphe fermé, il s'agit aussi d'un isomorphisme topologique.

Comme

$$\|G_0(\lambda) - G_0(\lambda_0)\| = \|P_0[F(\lambda) - F(\lambda_0)]\| \to 0, \text{ quand } \lambda \to \lambda_0,$$

$G_0(\lambda)$ est donc continue en λ_0. De plus, par la remarque précédente, il existe voisinage ouvert V_{λ_0} de λ_0 tel que $G_0(\lambda)$ soit un isomorphisme pour tout $\lambda \in V_{\lambda_0}$, puique l'ensemble des opérateurs inversibles entre deux espaces de Banach est ouvert. Plus particulièrement, cela implique que $\mathrm{im}(P_0F(\lambda)) = Z_0 = \mathrm{im}(P_0F(\lambda_0)), \forall \lambda \in V_{\lambda_0}$.

En résumé, à l'étape 1, nous avons vérifié le théorème pour un λ_0 quelconque, à savoir, nous avons montré l'existence de E_0, Z_0 avec $\dim(E_0) < \infty$ tels que $Y = E_0 \oplus Z_0$ avec $\mathrm{im}(P_0F(\lambda_0) = Z_0$.
Nous venons de voir que dans un voisinage ouvert V_{λ_0} de λ_0, le théorème restait vrai sans changer E_0, Z_0.

Etape 2.
Considérons à présent le recouvrement ouvert

$$C = \bigcup_{\lambda \in C} V_\lambda.$$

Par la compacité de C, on peut en tirer un sous-recouvrement fini

$$C = \bigcup_{k=1}^{n} V_{\lambda_k}.$$

Pour chaque k, le théorème est vérifié.

Nous pouvons donc choisir $E \subset Y$ de dimension finie avec $E_k \subset E$ pour tout $k = 1, \dots, n$. (Par exemple, $E = E_1 + \ldots + E_n$ reste de dimension finie en tant que somme finie d'espaces de dimension finie.)
Soit Z, tel que $Y = E \oplus Z$; la dimension finie de E implique qu'il existe au moins un tel Z. (Alors nous avons clairement $Z \subset Z_k, \forall k = 1, \ldots n$.).
Soit $P : Y \longrightarrow Y$ est la projection sur Z le long de E. pour tout $\lambda \in C$.

Lemme 4.8. *Pour tout $\lambda \in C$, $\mathrm{im}(PF(\lambda)) = Z$.*

Démonstration.

"$\subseteq$". Clairement, $\mathrm{im}(PF(\lambda)) \subseteq Z$, car P est une projection sur Z.

"$\supseteq$". Réciproquement, si $\lambda \in J_{\lambda_k}, Y = E_k \oplus Z_k$ et $\mathrm{im}(P_kF(\lambda)) = Z_k \supseteq Z$.
Donc, si $z \in Z$, nous avons $z = e_k + P_kF(\lambda)(u)$, avec $e_k \in E_k \subset E$, et $u \in X$.
Ainsi,

$$\begin{array}{rcll} z & = & Pz, & \text{par vu la définition de } P, \\ & = & Pe_k + PP_kF(\lambda)(u), & \text{vu que } z \in Z, \\ & = & 0 + PP_kF(\lambda)(u), & \text{car } e_k \in E_k \subset E, \\ & = & PF(\lambda)(u), & \text{car } PP_k = P. \\ & & & \text{(En effet, si } u = P_k(u) + Q_k(u) \in Y, \\ & & & \text{nous avons } Q_k(u) \in E_k \subset E \text{ et donc,} \\ & & & P(u) = PP_k(u) + PQ_k(u) = PP_k(u) + 0). \end{array}$$

Ce qui montre que $\mathrm{im}(PF(\lambda)) \supseteq Z$.

Nous pouvons donc conclure que $\mathrm{im}(PF(\lambda)) = Z$. □

Ce qui termine la démonstration du théorème.

□

Corollaire 4.9. *La dimension du noyau de $PF(\lambda)$ est une constante pour tout $\lambda \in C$.*

Démonstration. En utilisant la remarque 4.4 il vient :

$$\begin{aligned} \dim(\ker(PF(\lambda))) &= \mathrm{ind}((PF(\lambda))) + \mathrm{codim}(\mathrm{im}(PF(\lambda))) \\ &= \mathrm{ind}(F(\lambda)) + \dim E \\ &= \text{constante} \qquad \forall \lambda \in C \end{aligned}$$

□

Nous pouvons maintenant utiliser le théorème pour construire des fibrés vectoriels qui nous serviront à definir l'indice d'une famille de Fredholm. Un fibré vectoriel ξ consiste en un espace topologique E appliqué continûment par une application p sur un espace toplogique compact X telle que pour tout élément $x \in X$ la fibre $\xi(x) := p^{-1}(x)$ ait une structure d'espace vectoriel et telle que cette dernière famille d'espaces vectoriels indexée par X soit locallement triviale. Nous laissons le lecteur se réferrer à la partie *Fibrés Vectoriels* rédigée par Oliver Prosperi pour plus de détails concernant les fibrés vectoriels.

Corollaire 4.10. *L'espace*

$$\ker F := \bigcup_{\lambda \in C} \ker PF(\lambda)$$

est un fibré vectoriel sur C et l'espace

$$\widetilde{E} := \bigcup_{\lambda \in C} E$$

est un fibré vectoriel trivial sur C.
Les unions considérées sont disjointes.

Démonstration. Commençons par la deuxième assertion. Il est claire qu'il s'agit d'un fibré trivial, puisqu'on peut écrire

$$\bigcup_{\lambda \in C} E = C \times E.$$

Pour la première assertion, nous avons une application continue $p : \ker F \longrightarrow C$ qui envoie un élément de $\ker F$, donc (puisque l'union est disjointe) de $\ker PF(\lambda_i)$ pour

un certain $\lambda_i \in C$, sur λ_i, qui est telle que pour tout $\lambda \in C$, $p^{-1}(\lambda) = \ker PF(\lambda)$ est muni d'une structure d'espace vectoriel puisqu'il s'agit de noyaux d'applications linéaires.
Pour la condition de trivialité locale, il suffit[1] en fait de voir que, locallement, nous pouvons trouver des bases continues de $\ker PF(\lambda)$. Pour ce faire revenons revenons à la preuve du théorème. A l'étape 1, nous avons obtenu un isomorphisme $G_0(\lambda)$ sur un voisinage V_{λ_0} de λ_0. de façon similaire, pour un $\lambda_k \in C$ fixé, on peut trouver un voisinage ouvert U_{λ_k} de λ_k tel que l'application

$$\begin{array}{rccl} G(\lambda): & X & \longrightarrow & Z \times \ker(PF(\lambda_k)) \\ & u & \longmapsto & G(\lambda)(u) := (PF(\lambda)(u), \pi_k(u)) \end{array}$$

où π_k est la projection sur $\ker(PF(\lambda_k))$, soit un isomorphisme pour tout $\lambda \in U_{\lambda_k}$.
Alors

$$\begin{aligned} u \in \ker(PF(\lambda)) &\Leftrightarrow G(\lambda)(u) = (0, \pi_k(u)) \\ &\Leftrightarrow u = G(\lambda)^{-1}(0, \pi_k(u)) \end{aligned}$$

Donc $\ker(PF(\lambda)) = G(\lambda)^{-1}(\{0\} \times \ker(PF(\lambda_k)))$. Ainsi si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\ker(PF(\lambda_k))$ alors pour tout $\lambda \in U_{\lambda_k}$ nous avons une base $(s_1(\lambda), \ldots, s_n(\lambda))$ de $\ker(PF(\lambda))$, où :

$$\begin{array}{rccl} s_i: & V_{\lambda_0} & \longrightarrow & \bigcup_{\lambda \in C} \ker PF(\lambda) \\ & \lambda & \longmapsto & G(\lambda)^{-1}(0, e_i) \end{array}$$

sont continues. □

Il existe une notion naturelle d'isomorphisme de fibrés vectoriels sur un espace topologique X. Notons par $Vect(X)$ l'ensemble des classes d'isomorphie de fibrés vectoriels sur X.

Remarque 4.11. Dans le cas où X est un ensemble réduit à un unique point, alors un fibré vectoriel sur X est simplement un espace vectoriel et $Vect(X)$ est en correspondance bijective avec $\mathbb{Z}^+$, puisqu'alors une classe d'isomorphie de fibrés contient tout les espaces vectoriels sur le même corps de même dimension $n \in \mathbb{Z}$.

Etant donné deux fibrés vectoriels ξ et ζ sur le même espace topologique X, on peut former leur somme directe $\xi \oplus \zeta$, qui est encore un fibré vectoriel sur X et la fibre en $x \in X$ est simplement $\xi(x) \oplus \zeta(x)$. Cette opération possède un élément neutre qui est le fibré trivial. Elle induit donc une structure de monoïde abélien sur $Vect(X)$.

Revonons à notre but premier de définition de généralisation de l'indice. Etant donné

$$F : C \longrightarrow \mathcal{F}(X, Y)$$

une famille de Fredholm, nous avons construit, par le théorème 4.3, les deux fibrés vectoriels

$$\ker F = \bigcup_{\lambda \in C} \ker PF(\lambda) \qquad \& \qquad \widetilde{E} = \bigcup_{\lambda \in C} E.$$

[1] A nouveau, se réferrer au travail sur les fibrés vectoriels.

Pour coïncider avec la notion d'indice que nous connaissons déjà pour un unique opérateur de Fredholm, nous aimerions définir l'indice d'une famille de Fredholm de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\text{indice}(F) : &= [\ker F] - [\widetilde{E}]\\ &= [\ker F] - [C \times E]\end{aligned}$$

Où la notation [ ] représente les classes d'isomorphie dans $Vect(C)$.

Remarque 4.12. Lorsque $C = \{\lambda_0\}$ est réduit à un point la famille de Fredholm F associée à C est en fait un honnête opérateur de Fredholm $F(\lambda_0)$. Alors la classe d'isomorphie du fibré $\ker F = \bigcup_{\lambda \in C} \ker PF(\lambda) = \ker PF(\lambda_0)$ contient les $\mathbb{F}$-espaces vectoriels de même dimension que $\ker PF(\lambda_0)$. De manière similaire, la classe d'isomorphie du fibré $\widetilde{E} = C \times E = \{\lambda_0\} \times E$ contient les $\mathbb{F}$-espaces vectoriels de même dimension que E, qui n'est autre que la codimension de $\operatorname{im} PF(\lambda_0)$. En appliquant la correspondance bijective de la remarque 4.11, nous pouvons identifier l'indice de F avec l'indice de $F(\lambda_0)$ comme suit :

$$\begin{aligned}\text{indice}(F) &= [\ker F] - [\widetilde{E}]\\ &\approx n(\ker PF(\lambda_0)) - d(\operatorname{im} PF(\lambda_0))\\ &= \operatorname{ind}(PF(\lambda_0))\\ &= \operatorname{ind}(F(\lambda_0)) \qquad \text{vu la remarque 4.4}\end{aligned}$$

Nous sommes donc transportés de joie à la constatation que notre définition de l'indice d'une famille de Fredholm généralise l'indice d'un opérateur de Fredholm dans le sens que ces deux notions coïncident lorsque la famille ne compte qu'un unique opérateur.

Cependant cette définition n'est pas satisfaisante, puique $[\ker F]$ et $[\widetilde{E}]$ sont des éléments de $Vect(C)$, qui est seulement un monoïde et non pas un groupe. La soustraction n'a donc pas de sens dans ce contexte. Pour pallier cette imperfection, il faut appliquer la construction de Grothendieck à $Vect(C)$. Cette dernière généralise la construction qui permet de passer de $\mathbb{Z}^+$ à $\mathbb{Z}$, dans le sens où elle permet de compléter un monoïde abélien en un groupe en ajoutant des inverses. Nous laissons le lecteur se réferrer à la partie *K-Théorie Topologique* rédigée par David Kohler pour plus de détails sur cette construction. Dans notre cas elle permet d'associer $Vect(C)$ au groupe $\mathbf{K}(C)$, appelé groupe de Grothendieck des fibrés vectoriels sur C.

Ainsi nous pouvons donner une définition plus satisfaisante de l'indice d'une famille de Fredholm.

Définition de l'Indice, la Vraie. L'**indice** d'une famille de Fredholm $F : C \longrightarrow \mathcal{F}(X, Y)$ est l'application donnée par :

$$\begin{aligned}\text{indice} : \quad \{F : C \longrightarrow \mathcal{F}(X,Y)\} &\longrightarrow \mathbf{K}(C)\\ F &\longmapsto \text{indice}(F) := [[\ker F]] - [[C \times E]]\end{aligned}$$

Où les crochet extérieurs représente les classes d'éléments dans le groupe de Grothendieck, qui sont en l'occurence les classes d'isomorphie dans $Vect(C)$ ([ ] intérieurs).

Cette définition est très abstraite à première vue. Son importance s'illustre par le théorème d'Atiyah-Jänich.

THÉORÈME D'ATIYAH-JÄNICH. *Soit C un espace topologique compact et connexe et soit $[C, \mathcal{F}(X)]$ l'ensemble des classes d'homotopie de familles de Fredholm $F : C \longrightarrow \mathcal{F}(X)$. Alors l'application $F \longmapsto \operatorname{indice} F$ induit un isomorphisme de groupes*

$$\widetilde{\operatorname{indice}} : [C, \mathcal{F}(X)] \longrightarrow \boldsymbol{K}(C).$$

Ce théorème montre que l' indice que nous venons de définir est un invariant homotopique des familles de Fredholm.

Malheureusement, la fin du semestre approchant et nos connaissances mathématiques étant restreintes, nous ne sommes pas en mesure de donner la preuve de ce théorème.Pour les espaces de Banach particuliers que sont les espaces de Hilbert, l'idée est de montrer que la preuve peut se ramener à la preuve du théorème de Kuiper, qui affirme que le groupe $GL(H)$ des opérateurs linéaires inversibles d'un espace de Hilbert H est contractile dans $B(H)$. La preuve de ce dernier théorème, bien qu'ingénieuse, n'implique que des propriétés élémentaires des espaces de Hilbert. On peut la trouver par exemple dans son livre *Linear algebra and geometry*.

REMARQUE 4.13. Dans le cas où C est réduit à un point, $[C, \mathcal{F}(X, Y)]$ correspond aux composantes connexes de $\mathcal{F}(X, Y)$ et $\mathbf{K}(C)$ correspond à $\mathbb{Z}$, puisque $Vect(C)$ correspond à $\mathbb{Z}^{+}$. Alors le théorème d'Atiyah-Jänich établit une correspondance bijective entre les composantes connexes de $\mathcal{F}(X, Y)$ et $\mathbb{Z}$ qui est donnée par le nombre entier indice que nous avons étudié au chapitre 3.

Bibliographie

[1] Megginson, Robert E. *An introduction to Banach space theory*. Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1998.

[2] Gohberg, Israel and Goldberg, Seymour and Kaashoek, Marinus A. *Classes of linear operators. Vol. I*. Operator Theory : Advances and Applications, Birkhäuser Verlag, Basel, 1990.

[3] Meise, Reinhold and Vogt, Dietmar. *Introduction to functional analysis*. Oxford Graduate Texts in Mathematics, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1997.

[4] M.F. Atiyah. *Algebraic Topology and Operators in Hilbert Spaces*. Lecture series in modern analysis and applications, Oxford Univetrsity and The Institute for Advanced Study - Princeton, Session 3, March 2, 1968.

Index