ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Projet de semestre

Été 2002

Liens entre algèbre homologique et topologie algébrique

Jean-François CRISINEL

-MA- 3e année

Professeur responsable :

Kathryn HESS BELLWALD

Table des matières

1 Introduction

Le but de ce projet de semestre est d'ètudier un article de Jean-Louis Loday, "Homotopical Syzygies". Pour cela, il est nécessaire d'assimiler de nombreuses nouvelles notions algébriques et topologiques. Ce rapport présente ces différentes notions.

De nombreux résultats sont proposés sans démonstration, ou seulement avec une idée de la démonstration. Dans ce cas on peut se référer aux ouvrages cités dans la bibliographie. Par contre, les exercices faits durant le semestre sont présentés de manière plus détaillée, généralement sous la forme d'exemples pour illustrer la matière.

2 Présentations de groupes

Nous allons chercher dans ce chapitre à exprimer chaque groupe G comme une liste de générateurs et une liste de relations satisfaites par ces générateurs. Ceci nous permettra d'avoir une présentation simple et précise de chaque groupe, et ayant chaque fois la même structure. Nous allons d'abord étudier des groupes engendrés par des générateurs qui ne satisfont aucune relation (à part bien sûr celles impliquées par les axiomes d'un groupe, comme l'associativité). Ensuite nous verrons que l'on peut imposer des relations à de tels groupes en les quotientant par certains sous-groupes.

2.1 Groupes libres

Definition 2.1 Soit $\iota : X \hookrightarrow G$ une injection d'un ensemble quelconque dans un groupe. Le groupe G est dit *libre de base* X si pour toute application ensembliste $f : X \to H$, où H est un groupe, il existe un unique homomorphisme $\hat{f} : G \to H$ tel que $f = \hat{f}\iota$, c'est-à-dire tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[dr, "f"] & G \arrow[d, dotted] \\ & H \end{tikzcd}$$

Proposition 2.2 Le groupe libre d'une base X donnée est unique à isomorphisme près.

Preuve: Soient G, G' deux groupes libres de base X. Alors le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[d, "\hat{\iota'}"] \\ X \arrow[ur, "\iota"] \arrow[r, "\iota'"] \arrow[dr, "\iota"] & G' \arrow[d, "\hat{\iota}"] \\ & G. \end{tikzcd}$$

D'où l'on tire que $\hat{\iota}\hat{\iota'} = id_G$. De même, on peut montrer que $\hat{\iota'}\hat{\iota} = id_{G'}$. Donc G et G' sont isomorphes. □

Notation On note $\mathcal{F}(X)$ pour le *groupe libre de base* X.

Cette terminologie de groupe *libre* se justifie par le fait que ce groupe peut être construit comme l'ensemble des produits d'éléments de sa base, ne satisfaisant aucune relation. Voyons plus en détails cette construction.

Soit X un ensemble de symboles, noté $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. On définit un *mot* dans X comme une chaîne finie de symboles de X. Par exemple x_1x_2, $x_3x_3x_1$ sont des mots dans X. Pour obtenir une structure de groupe, nous avons encore besoin d'un mot vide, noté $\emptyset$, et d'inverses. Nous définissons alors

$$\bar{X} = X \cup \{x_i^{-1} | i \in \mathbb{N}\},$$

appelé *l'alphabet* du groupe libre, et nous notons $\mathcal{M}(X)$ l'ensemble des mots dans $\bar{X}$, auxquels nous ajoutons encore le mot vide. Deux mots peuvent donner lieu à un nouveau mot par simple concaténation, ce qui munit $\mathcal{M}(X)$ d'une loi de composition associative. Comme les x_i ne sont que des symboles, leurs inverses x_i^{-1} ne sont pour le moment que formels. Si un mot est de la forme

$$\ldots x_i x_i^{-1} \ldots \text{ou} \ldots x_i^{-1} x_i \ldots$$

pour un certain $i \in \mathbb{N}$, nous allons donc annuler ces deux symboles x_i, x_i^{-1} et ainsi réduire la longueur du mot. Si on ne peut plus faire de telle annulation dans un mot donné, ce mot sera appelé *réduit*. Partant d'un mot $w \in \mathcal{M}(X)$, nous allons toujours obtenir un mot réduit w_0, éventuellement vide. La proposition suivante nous permettra de définir des classes d'équivalence sur $\mathcal{M}(X)$.

Proposition 2.3 Un mot $w \in \mathcal{M}(X)$ n'a qu'une seule forme réduite w_0.

On peut ainsi définir la relation d'équivalence suivante :

$$w \sim w' \Leftrightarrow w_0 = w'_0$$

Proposition 2.4 Si $w \sim w'$ et $v \sim v'$, alors $wv \sim w'v'$.

Ainsi, le produit induit sur $\mathcal{M}(X)/\sim$ par celui de $\mathcal{M}$ est bien défini. On vérifie aussi que si $y = [y_1 \ldots y_n] \in \mathcal{M}(X)/\sim$, alors $[y_n^{-1} \ldots y_1^{-1}] = y^{-1}$. On a donc une structure de groupe sur $\mathcal{M}(X)/\sim$.

Proposition 2.5 Soit $\iota : X \to \mathcal{M}(X)/\sim$ l'inclusion naturelle. Soit G un groupe quelconque et f une application ensembliste. Alors f s'étend de manière unique en un homomorphisme $\hat{f} : \mathcal{M}(X)/\sim \to G$ tel que $f = \hat{f}\iota$.

On en déduit que $\mathcal{F}(X) = \mathcal{M}(X)/\sim$, et on a ainsi une vision plus concrète de ce qu'est *le groupe libre de base X*.

2.2 Générateurs et relateurs

Nous allons maintenant considérer le cas où l'ensemble des générateurs d'un groupe n'est pas libre, c'est-à-dire que ses éléments satisfont certaines relations. En fait, on appelle relateur (ou relation) un élément du groupe libre égal à l'identité. Plus précisément, on a les définitions suivantes :

Definition 2.6 Une *présentation de groupe* est un double formé d'un ensemble $\mathbf{x}$ de *générateurs*, et d'un ensemble $\mathbf{r} \subset \mathcal{F}(\mathbf{x})$ de *relateurs*. On la note $(\mathbf{x} : \mathbf{r})$. On appelle *conséquence* de $\mathbf{r}$, que

l'on note $Q(\mathbf{r})$, le plus petit sous-groupe normal de $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ qui contient $\mathbf{r}$. Le *groupe défini par la présentation* $(\mathbf{x} : \mathbf{r})$, noté $|\mathbf{x} : \mathbf{r}|$, est le quotient $\mathcal{F}(\mathbf{x})/Q(\mathbf{r})$. On note $\gamma_{(\mathbf{x}:\mathbf{r})}$ pour la projection $\mathcal{F}(\mathbf{x}) \to \mathcal{F}(\mathbf{x})/Q(\mathbf{r})$, et $[u]$ pour la classe de $u \in \mathcal{F}(\mathbf{x})$ modulo $Q(\mathbf{r})$.
Si G est un groupe quelconque, on appelle *présentation de* G une présentation $(\mathbf{x} : \mathbf{r})$ pour laquelle il existe un isomorphisme $|\mathbf{x} : \mathbf{r}| \to G$.

Remarquons que tout groupe possède une présentation : en effet, par la propriété universelle du groupe libre, l'identité $G \to G$ s'étend de manière unique en un homomorphisme $p : \mathcal{F}(G) \to G$. On a alors $G \cong \mathcal{F}(G)/\ker p$, et donc $(G : \ker p)$ est une présentation de G.

Definition 2.7 Une présentation $(\mathbf{x} : \mathbf{r})$ est dite *finiment engendrée* si $\mathbf{x}$ est fini, *finiment relatée* si r est fini, et *finiment présentée* si à la fois $\mathbf{x}$ et $\mathbf{r}$ sont finis.

Nous sentons bien qu'un groupe peut avoir plusieurs présentations, ce qui rend nécessaire l'étude des liens entre ces présentations. Pour cela, nous allons définir des homomorphismes au niveau des présentations.

Definition 2.8 Un *morphisme de présentations* de source $(\mathbf{x} : \mathbf{r})$ et de but $(\mathbf{y} : \mathbf{s})$ consiste en une application ensembliste $\varphi : \mathbf{x} \to \mathcal{F}(\mathbf{y})$ telle que l'homomorphisme induit $\hat{\varphi} : \mathcal{F}(\mathbf{x}) \to \mathcal{F}(\mathbf{y})$ satisfait à $\hat{\varphi}(\mathbf{r}) \subseteq Q(\mathbf{s}$. On appelle φ *l'application ensembliste sous-jacente* au morphisme de présentation.

Un morphisme de présentation $\varphi : (\mathbf{x} : \mathbf{r}) \to (\mathbf{y} : \mathbf{s})$ induit un unique homomorphisme φ_*, car $\mathbf{r} \subseteq \ker(\gamma_{(\mathbf{y}:\mathbf{s})}\hat{\varphi})$ et donc $Q(\mathbf{r}) \subseteq \ker(\gamma_{(\mathbf{y}:\mathbf{s})}\hat{\varphi})$. Autrement dit, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(\mathbf{x}) \arrow[r, "\gamma_{(\mathbf{x}:\mathbf{r})}"] \arrow[d, "\hat{\varphi}"'] & {|\mathbf{x} : \mathbf{r}|} \arrow[d, "\varphi_*"] \\
\mathcal{F}(\mathbf{y}) \arrow[r, "\gamma_{(\mathbf{y}:\mathbf{s})}"'] & {|\mathbf{y} : \mathbf{s}|}
\end{tikzcd}$$

On définit donc $\varphi_*([u]) = [\hat{\varphi}(u)]$.

Definition 2.9 Deux présentations sont *du même type* s'il existe deux morphismes de présentations $\varphi : (\mathbf{x} : \mathbf{r}) \to (\mathbf{y} : \mathbf{s})$ et $\psi : (\mathbf{y} : \mathbf{s}) \to (\mathbf{x} : \mathbf{r})$ tels que $\varphi_*\psi_* = I_{|\mathbf{x}:\mathbf{r}|}$ et $\psi_*\varphi_* = I_{|\mathbf{y}:\mathbf{s}|}$. φ est alors appelée une *équivalence de présentation* et ψ son *équivalence inverse.*

On remarque facilement que cela définit des classes de présentations du même type. Et comme on le souhaiterait, ces classes d'équivalence correspondent aux classes de groupes isomorphes.

Proposition 2.10 Deux présentations sont du même type si et seulement si les groupes qu'elles définissent sont isomorphes.

Nous allons maintenant énoncer sans preuve un résultat technique qui sera utile par la suite. Commençons par deux définitions.

Definition 2.11 1) Soient $(\mathbf{x} : \mathbf{r})$ une présentation de groupe, et $s \in Q(\mathbf{r})$. Si l'on pose $\mathbf{s} = \mathbf{r} \cup \{s\}$, on a $Q(\mathbf{r}) = Q(\mathbf{s})$, et donc $|\mathbf{x} : \mathbf{r}| = |\mathbf{x} : \mathbf{s}|$. On a alors deux équivalences de présentation

$$\varphi_I : (\mathbf{x} : \mathbf{r}) \to (\mathbf{x} : \mathbf{s}),$$

appelée *équivalence de type Ia*, et

$$\varphi_I' : (\mathbf{x} : \mathbf{s}) \to (\mathbf{x} : \mathbf{r}),$$

appelée *équivalence de type Ib*, dont l'application ensembliste sous-jacente est l'inclusion $\iota : \mathbf{x} \hookrightarrow \mathcal{F}(\mathbf{x})$.

2) Soit $v \in \mathcal{F}(\mathbf{x})$. On définit la présentation $(\mathbf{y} : \mathbf{s})$ par

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} \cup \{y\} \text{ et } \mathbf{s} = \mathbf{r} \cup \{yv^{-1}\}.$$

On peut alors vérifier que $\varphi_{II} : \mathbf{x} \hookrightarrow \mathcal{F}(\mathbf{y})$ et $\varphi_{II}' : \mathbf{y} \hookrightarrow \mathcal{F}(\mathbf{x})$ définie par $\varphi_{II}'(x) = x$ si $x \in \mathbf{x}$ et $\varphi_{II}'(y) = v$ sont les applications ensemblistes sous-jacentes aux morphismes de présentation $\varphi_{II} : (\mathbf{x} : \mathbf{r}) \to (\mathbf{y} : \mathbf{s})$ et $\varphi_{II}' : (\mathbf{y} : \mathbf{s}) \to (\mathbf{x} : \mathbf{r})$, qui sont des équivalences inverses de présentation, appelées *équivalence de type IIa* et *équivalence de type IIb* respectivement.

Théorème 2.12 (Théorème de Tietze) Soient $(\mathbf{x} : \mathbf{r})$ et $(\mathbf{y} : \mathbf{s})$ deux présentations du même type finiment présentées, et l'on appelle φ et ψ les équivalences inverses de présentation. Alors il existe une suite finie de couples d'équivalences inverses de type Ia et Ib, ou IIa et IIb,

$$\mu_1, \mu_1'; \ldots ; \mu_n, \mu_n'$$

telle que

$$\varphi = \mu_1 \ldots \mu_n \text{ et } \psi = \mu_n' \ldots \mu_1'.$$

2.3 Algorithme de Todd-Coxeter

L'idée de l'algorithme de Todd-Coxeter est d'exprimer un groupe fini donné par ses générateurs et relateurs comme un sous-groupe d'un groupe de permutation. Plus précisément, si $G = (\mathbf{x} : \mathbf{r})$ est le groupe donné, on choisit un sous-groupe H engendré par une partie des générateurs de G, puis on cherche à déterminer l'action de G sur les cosets de H dans G. Cette action peut être représentée par des permutations (nous allons en fait chercher les permutations correspondant aux générateurs de G). Nous utilisons par ailleurs le fait que les relateurs fixent tous les cosets, et que les générateurs de H fixent le coset $(id)H$. Les différents cosets seront notés $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$, $\mathbf{3}$,…(nous ne savons pas a priori leur nombre). Pour expliquer l'algorithme, nous allons traiter l'exemple suivant :

$$G = (\{x, y\} : \{x^3, y^3, yxyxy\}) \text{ et } H = \langle x \rangle (\text{le sous-groupe engendré par } x).$$

On a $x\mathbf{1} = \mathbf{1}$ car $x \in H$ fixe le coset $(id)H$. Nous ne savons pas comment y agit sur $\mathbf{1}$, nous notons donc $y\mathbf{1} = \mathbf{2}$. De même nous ne savons pas comment y agit sur $\mathbf{2}$, et notons $y\mathbf{2} = \mathbf{3}$. Par contre, le fait que $y^3 = 1$ implique $y^3\mathbf{1} = y^2\mathbf{2} = y\mathbf{3} = \mathbf{1}$. Nous résumons cela dans un tableau exprimant l'action de y sur ces trois cosets (pas forcément distincts) :

	y	y	y
1	2	3	1

Utilisons maintenant la relation $yxyxy = 1$. Nous savons déjà que $y\mathbf{1} = \mathbf{2}$, mais $x\mathbf{2}$ n'est pas connu. Posons $x\mathbf{2} = \mathbf{4}$. Puis $y\mathbf{4} = \mathbf{5}$. Ensuite, le fait que $y\mathbf{3} = \mathbf{1}$ et $yxyxy\mathbf{1} = \mathbf{1}$ implique $x\mathbf{5} = \mathbf{3}$, selon le tableau ci-dessous :

	y	x	y	x	y
1	2	4	5	*3*	1

A ce stade, nous pouvons remplir ainsi le tableau suivant :

	x	x	x	y	y	y	y	x	y	x	y
1	1	1	1	2	3	1	2	4	5	3	1
2	4		2	3	1	2	3	*3*	1	1	2

Comme $y\mathbf{3} = \mathbf{1}$, nous obtenons $x\mathbf{3} = \mathbf{3}$, mais nous avions déjà $x\mathbf{5} = \mathbf{3}$; comme x est une permutation, on a $\mathbf{3} = \mathbf{5}$. Nous réutilisons alors l'indice $\mathbf{5}$ pour $x\mathbf{4}$. Cela détermine le tableau suivant :

	x	x	x	y	y	y	y	x	y	x	y
1	1	1	1	2	3	1	2	4	3	3	1
2	4	5	2	3	1	2	3	3	1	1	2

Mais on a $y\mathbf{2} = \mathbf{3}$ et $y\mathbf{4} = \mathbf{3}$, donc $\mathbf{2} = \mathbf{4}$. Alors $x\mathbf{2} = \mathbf{2}$ et $x^2\mathbf{2} = \mathbf{2}$. Donc $\mathbf{2} = \mathbf{5}$. Nous obtenons finalement un tableau complet :

	x	x	x	y	y	y	y	x	y	x	y
1	1	1	1	2	3	1	2	2	3	3	1
2	2	2	2	3	1	2	3	3	1	1	2
3	3	3	3	1	2	3	1	1	2	2	3

Alors $x = (id)$ et $y = (123)$.
Comme il y a trois cosets, on a $(G : H) = 3$, et $H =< x >$ est le groupe trivial. Donc $|G| = (G : H) \cdot |H| = 3$. La permutation (123) génère le groupe alternant A_3, et donc cette représentation induit un isomorphisme entre G et A_3.

3 Deux notions algébriques utiles

3.1 L'abéliénisation d'un groupe

Definition 3.1 Une *abéliénisation* d'un groupe G consiste en un groupe abélien G_{ab} et un homomorphisme $q : G \to G_{ab}$, tel que pour tout homomorphisme $f : G \to H$, où H est abélien, il existe un homomorphisme $f_{ab} : G_{ab} \to H$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "f"'] & G_{ab} \arrow[d, dotted, "f_{ab}"] \\ & H \end{tikzcd}$$

Nous vérifions que tout groupe possède une unique abéliénisation.

Proposition 3.2 Tout groupe G possède une abéliénisation. De plus, celle-ci est unique.

Preuve:

- Existence : Soit C le sous-groupe des commutateurs de G. Alors G/C est abélien. Soit H un groupe abélien et $f : G \to H$ un homomorphisme . Soient x et y deux éléments quelconques de G. Alors
$$\begin{aligned} f(xyx^{-1}y^{-1}) &= f(x)f(y)f(x)^{-1}f(y)^{-1} && \text{car } f \text{ est un homomorphisme} \\ &= f(x)f(x)^{-1}f(y)f(y)^{-1} && \text{car } H \text{ est abélien} \\ &= 1_H \end{aligned}$$
Donc tout commutateur est dans le noyau de f, et comme C est le plus petit sous-groupe normal contenant tous les commutateurs, on a $C \subseteq \ker f$, ce qui entraîne qu'il existe un unique homomorphisme f_{ab} tel que le diagramme suivant commute :
$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "f"'] & G/C \arrow[d, dotted, "f_{ab}"] \\ & H \end{tikzcd}$$
Donc G/C est une abéliénisation de G.
- Unicité : Soient $q : G \to G_{ab}$ et $q' : G \to G'_{ab}$ deux abéliénisations de G. Alors le diagramme suivant commute :
$$\begin{tikzcd} & G_{ab} \arrow[d, "f_{ab}"] \\ G \arrow[ur, "q"] \arrow[r, "q'"] \arrow[dr, "q"'] & G'_{ab} \arrow[d, "f'_{ab}"] \\ & G_{ab} \end{tikzcd}$$
Donc $f'_{ab}f_{ab} = Id_{G_{ab}}$. De même, on peut voir que $f_{ab}f'_{ab} = Id_{G'_{ab}}$, d'où l'on tire que f_{ab} et f'_{ab} sont des isomorphismes, donc G et G' sont isomorphes.

□

Remarque 3.3 L'abéliénisation d'un groupe libre sur n générateurs est isomorphe à n copies de $\mathbb{Z}$:

$$\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n)_{ab} \cong \underbrace{\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}}_{n \text{ fois}}$$

3.2 Somme amalgamée de deux groupes

Nous présentons ici une construction qui permet d'obtenir un nouveau groupe à partir de deux homomorphismes de groupes de même source. Cette construction sera utilisée dans un autre chapitre.

Definition 3.4 Soient $f_1 : G_0 \to G_1$ et $f_2 : G_0 \to G_2$ deux homomorphismes de groupe. La *somme amalgamée* de f_1 et f_2 consiste en un groupe G et deux homomorphismes $g_1 : G_1 \to G$ et $g_2 : G_2 \to G$ tels que :

(i) $g_1 f_1 = g_2 f_2$

(ii) S'il existe des homomorphismes $h_1 : G_1 \to H$ et $h_2 : G_2 \to H$ tels que $h_1 f_1 = h_2 f_2$, alors il existe un unique homomorphisme $h : G \to H$ tel que $hg_1 = h_1$ et $hg_2 = h_2$.

$$\begin{tikzcd}
G_0 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & G_1 \arrow[d, "g_1"'] \arrow[ddr, bend left, "h_1"] & \\
G_2 \arrow[r, "g_2"'] \arrow[drr, bend right, "h_2"'] & G \arrow[dr, dotted, "h"] & \\
& & H
\end{tikzcd}$$

Cette définition sous forme de propriété universelle implique l'unicité de la somme amalgamée :

Proposition 3.5 La somme amalgamée de deux homomorphismes est unique à isomorphisme près (si elle existe).

Preuve: Soient G et G' deux sommes amalgamées de f_1 et f_2, c'est-à-dire il existe des homomorphismes g_1, g_2, g_1' et g_2' faisant commuter les carrés dans le diagramme suivant. Par la propriété universelle, il existe h, h' faisant commuter les triangles dans le diagramme

$$\begin{tikzcd}
G_0 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & G_1 \arrow[d, "g_1"'] \arrow[ddr, bend left, "g_1'"] & \\
G_2 \arrow[r, "g_2"'] \arrow[drr, bend right, "g_2'"'] & G \arrow[dr, dotted, bend left, "h"] & \\
& & H' \arrow[ul, dotted, bend left, "h'"]
\end{tikzcd} .$$

On a ainsi :

$$h'hg_1 = g_1, \; h'hg_2 = g_2, \; hh'g_1' = g_1' \; \text{ et } hh'g_2' = g_2'$$

D'où par unicité $h'h = 1_G$ et $hh' = 1_{G'}$, donc G et G' sont isomorphes.

On a donc montré l'unicité de la somme amalgamée. Cela n'était pas totalement inutile, car on peut également prouver son existence !

Théorème 3.6 La somme amalgamée de tout couple d'homomorphismes $f_1 : G_0 \to G_1$ et $f_2 : G_0 \to G_2$ existe.

Preuve: (idée) On commence par montrer l'existence du *produit libre* de G_1 et G_2, noté $G_1 * G_2$, et défini par la somme amalgamée des homomorphismes triviaux :

$$\begin{tikzcd} \{e\} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & G_1 \arrow[d] \\ G_2 \arrow[r] & G_1 * G_2 \end{tikzcd}$$

On utilise pour cela les présentations de groupes.
En suite on montre qu'une somme amalgamée quelconque est le produit libre quotienté par un certain sous-groupe normal. En fait, plus le groupe de départ G_0 est grand, plus le nombre d'éléments à identifier est grand, donc plus ce sous-groupe normal doit être grand (il est trivial dans le cas du produit libre). □

Proposition 3.7 Soit N un sous-groupe normal d'un groupe G. Alors la somme amalgamée de $f_1 : N \hookrightarrow G$ et $f_2 : N \to \{e\}$ est G/N.

Preuve: Avec la notation du diagramme ci-dessous, on a $\pi f_1(n) = \iota f_2(n) = 1_{G/N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
De plus, s'il existe $h_1 : G \to H$ et $h_2 : \{e\} \to H$ tels que $h_1 f_1 = h_2 f_2$, on doit avoir $h_2 f_2(N) = \{1_H\}$, car $f_2(N) = \{e\}$. Donc $h_1 f_1(N) = \{1_H\}$, et comme f_1 n'est qu'une inclusion, on a $N \subset \ker h_1$. Ainsi h_1 induit un unique homomorphisme

$$h : G/N \to H$$

$$\overline{g} \mapsto 1_H$$

qui fait bien commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, hook, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & G \arrow[d, "\pi"'] \arrow[ddr, bend left, "h_1"] & \\ \{e\} \arrow[r, "\iota"'] \arrow[drr, bend right, "h_2"'] & G/N \arrow[dr, dotted, "h"] & \\ & & H \end{tikzcd} .$$

Remarquons que si le sous-groupe N n'est pas normal, on doit alors quotienter par le plus petit sous-groupe normal contenant N. □

Exemple 3.8 Cette proposition nous permet de calculer la somme amalgamée de

$$\mathcal{F}(a) \to \mathcal{F}(b,c)$$

$$a \mapsto bcb^{-1}c^{-1}$$

et de l'homomorphisme trivial $\mathcal{F}(a) \to \{e\}$.
En effet, on peut considérer $\mathcal{F}(a)$ comme l'ensemble des commutateurs de $\mathcal{F}(b,c)$. Donc si on note C le sous-groupe des commutateurs, la somme amalgamée cherchée est $\mathcal{F}(b,c)/C = \mathcal{F}(b,c)_{ab} \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

4 Dérivées de groupes et idéaux élémentaires

De la même manière qu'en analyse, calculer la dŕivée d'une fonction peut nous apprendre quelque chose d'intéressant sur cette fonction, on peut définir pour chaque présentation de groupe une *jacobienne*, qui se montre également utile lors de l'étude d'une telle présentation. Nous avons tout d'abord besoin de la notion d'anneau de groupe.

4.1 Les anneaux de groupes

Lors de calculs de dérivées dans un groupe G (ces calculs seront explicités par la suite), la loi de composition du groupe (notée multiplicativement) ne sera pas suffisante : nous aurons également besoin d'une loi additive ; autrement dit, d'une structure d'anneau. Pour cela, nous allons agrandir G suffisamment pour pouvoir définir cette addition.

Definition 4.1 Soient G un groupe, A un anneau unitaire, et $\iota : G \hookrightarrow A$ une injection qui préserve les produits. On dit que A est un *anneau de groupe de* G si pour tout anneau unitaire B, et pour toute application $f : G \to B$ qui préserve les produits, il existe un unique homomorphisme d'anneau $\hat{f} : A \to B$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & A \arrow[d, dashed, "\hat{f}"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Cette définition sous forme de propriété universelle garantit l'unicité de l'anneau de groupe d'un groupe donné (s'il existe). Comme dans le cas du groupe libre, nous allons voir maintenant comment le construire. Notons

$$H = \underbrace{\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}}_{|G| \text{ copies}} = \{\sum_{w \in G} m_w \cdot w \mid m_w \in \mathbb{Z}, m_w \neq 0 \text{pour un nombre fini de } w\}.$$

H est appelé le *groupe abélien libre de base* G. On peut maintenant définir de manière tout à fait naturelle une addition et une multiplication sur H :

$$\sum_{w \in G} m_w \cdot w + \sum_{w \in G} m'_w \cdot w = \sum_{w \in G} (m_w + m'_w) \cdot w$$

$$(\sum_{w \in G} m_w \cdot w)(\sum_{w \in G} m'_w \cdot w) = \sum_{w \in G} (\sum_{v \in G} m_v m'_{v^{-1}w}) \cdot w,$$

d'où l'on vérifie facilement que H est un anneau, et que l'inclusion naturelle

$$\iota : G \to H$$

$$w \mapsto 1 \cdot w$$

préserve le produit. Soit maintenant B un anneau unitaire et $f : G \to B$ une application qui préserve les produits. On définit :

$$\hat{f} : H \to B \sum_{w \in G} m_w \cdot w \mapsto \sum_{w \in G} m_w \cdot f(w).$$

Clairement $\hat{f}$ préserve l'addition. De plus, la suite d'égalités suivantes montre que $\hat{f}$ préserve aussi la multiplication :

$$\begin{aligned}
\hat{f}((\sum_{w\in G} m_w \cdot w)(\sum_{w\in G} m'_w \cdot w)) &= \hat{f}(\sum_{w\in G}(\sum_{v\in G} m_v m'_{v^{-1}w}) \cdot w) \\
&= \sum_{w\in G}(\sum_{v\in G} m_v m'_{v^{-1}w}) \cdot f(w) \\
&= \sum_{w\in G}\sum_{v\in G} m_v m'_{v^{-1}w} \cdot f(v) f(v^{-1}w) \\
&= (\sum_{w\in G} m_w \cdot f(w))(\sum_{w\in G} m'_w \cdot f(w)) \\
&= \hat{f}(\sum_{w\in G} m_w \cdot w)\hat{f}(\sum_{w\in G} m'_w \cdot w)
\end{aligned}$$

On a donc trouvé un homomorphisme d'anneaux $\hat{f}$ qui clairement fait commuter ce diagramme :

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & A \arrow[d, dotted, "\hat{f}"] \\
& B
\end{tikzcd}$$

Il reste à voir que cette extension est unique. Soit $g : H \to B$ un homomorphisme d'anneaux tel que $g\iota = f$. Alors

$$\begin{aligned}
g(\sum_{w\in G} m_w \cdot w) &= \sum_{w\in G} m_w \cdot g(w) \\
&= \sum_{w\in G} m_w \cdot f(w) \quad \text{car } g\iota = f \\
&= \hat{f}(\sum_{w\in G} m_w \cdot w)
\end{aligned}$$

Et comme tout élément de H s'écrit sous cette forme, on a que $g = \hat{f}$. On a donc montré que $\mathbb{Z} = H$.

Remarque 4.2 Un homomorphisme de groupes $g : G \to G'$ induit un homorphisme d'anneaux $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}'$. En effet, si l'on note $\iota : G \hookrightarrow \mathbb{Z}[G]$ et $\iota' : G' \hookrightarrow \mathbb{Z}[G']$ les inclusions canoniques, la propriété universelle de $\mathbb{Z}[G]$ nous assure l'existence d'un $\widehat{\iota' g} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}'$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "g"'] & \mathbb{Z}[G] \arrow[d, dotted, "\widehat{\iota' g}=\mathbb{Z}[g]"] \\
G' \arrow[r, hook, "\iota'"] & \mathbb{Z}[G']
\end{tikzcd}$$

Cet homomorphisme sera noté $\mathbb{Z}[g]$.

Exemples 4.3 1. Soit $\epsilon : G \to \{e\}$ l'homomorphisme trivial. Alors $\mathbb{Z}[\epsilon]$ s'appelle *l'augmentation de G* et se note $\mathfrak{e}$.

2. Soit $q : G \to G_{ab}$ l'abéliénisation d'un groupe. Alors $\mathbb{Z}[q]$ s'appelle *l'abéliénisateur* et se note $\mathfrak{a}$.

4.2 Les dérivées de groupes

Maintenant que nous avons suffisamment agrandi G pour pouvoir y additionner deux éléments, il est possible de définir les dérivées.

Definition 4.4 On appelle *dérivée* dans l'anneau $\mathbb{Z}[G]$ toute application ensembliste $D : G \to \mathbb{Z}[G]$ satisfaisant la relation

$$D(w_1 w_2) = D(w_1) + w_1 D(w_2),\ \forall w_1,\ w_2 \in G.$$

L'extension unique de D à un homomorphisme de groupes abéliens

$$\hat{D} : \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}[G]$$

s'appelle la *dérivée étendue* de D.

Proposition 4.5 Une dérivée $D : G \to \mathbb{Z}[G]$ satisfait les quatre propriétés suivantes :

1. $\hat{D}(\sum_{w \in G} m_w \cdot w) = \sum_{w \in G} m_w \cdot D(w)$
2. $\hat{D}(\sigma\sigma') = \hat{D}(\sigma)\mathfrak{e}(\sigma') + \sigma\hat{D}(\sigma'),\ \forall \sigma,\ \sigma' \in \mathbb{Z}[G]$
3. $\hat{D}(m \cdot e) = 0),\ \forall m \in \mathbb{Z}$
4. $D(w^{-1}) = -w^{-1}D(w),\ \forall w \in G$

La preuve n'est pas faite ici ; elle est calculatoire mais pas difficile.

Exemple 4.6 Soit $D : G \to \mathbb{Z}[G]$ une dérivée, et $\sigma \in \mathbb{Z}[g]$. Alors

$$D \circ \sigma : G \to \mathbb{Z}[G]$$

$$w \mapsto D(w) \cdot \sigma$$

est une dérivée.

Proposition 4.7 Soit $w \in G$ et $n \in \mathbb{Z}$. On écrit

$$\frac{w^n - e}{w - e} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ \sum_{i=0}^{n-1} w^i & \text{si } n > 0 \\ -\sum_{i=n}^{-1} w^i & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

Alors

$$D(w^n) = \frac{w^n - e}{w - e} D(w)$$

Preuve:

- Si $n = 0$, la formule est claire car $D(e) = 0$.
- Si $n > 0$: Supposons la formule vraie pour $n-1$, et montrons qu'elle l'est encore pour n :

$$\begin{aligned} D(w^n) &= D(w^{n-1}w) \\ &= D(w^{n-1}) + w^{n-1}D(w) \\ &= \tfrac{w^{n-1}-e}{w-e}D(w) + w^{n-1}D(w) \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \tfrac{(w^{n-1}-e)+(w^n-w^{n-1})}{w-e}D(w) \\ &= \tfrac{w^n-e}{w-e}D(w) \end{aligned}$$

- Si $n < 0$: Supposons la formule vraie pour $n+1$, et montrons qu'elle l'est encore pour n :

$$\begin{aligned} D(w^n) &= D(w^{n+1}w^{-1}) \\ &= D(w^{n+1}) + w^{n+1}D(w^{-1}) \\ &= \tfrac{w^{n+1}-e}{w-e}D(w) - w^{n+1}w^{-1}D(w) \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \tfrac{(w^{n+1}-e)-(w^{n+1}-w^n)}{w-e}D(w) \\ &= \tfrac{w^n-e}{w-e}D(w) \end{aligned}$$

□

4.3 Les dérivées d'un groupe libre

Ce cas particulier mérite d'être étudié plus en détail, car nous verrons plus tard que l'étude des dérivées des relateurs d'une présentation s'avère utile. Or ces relateurs sont des éléments d'un groupe libre.
On note à nouveau $\mathbf{x}$ pour l'ensemble des générateurs, et $j : \mathbf{x} \hookrightarrow \mathcal{F}(\mathbf{x})$ l'inclusion canonique.

Proposition 4.8 Soit $d : \mathbf{x} \to \mathbb{Z}[\mathcal{F}(\mathbf{x})]$ une application ensembliste. Alors il existe une unique dérivée $D : \mathcal{F}(\mathbf{x}) \to \mathbb{Z}[\mathcal{F}(\mathbf{x})]$ telle que $Dj = d$.

Preuve: (idée)
On définit une application $\tilde{D} : \mathcal{M}(\mathbf{x}) \to \mathbb{Z}[\mathcal{F}(\mathbf{x})]$ par :

$$\tilde{D}(x^{-1}) = -[x^{-1}]d(x), \ \forall x \in \mathbf{x}$$

$$\tilde{D}(s_1 \dots s_n) = \sum_{i=1}^{n} [s_1 \dots s_{i-1}]\tilde{D}(s_i), \ \forall s_1 \dots s_n \in \mathcal{M}(\mathbf{x}).$$

On peut alors montrer que pour tout $x \in \mathbf{x}$, $v, w \in \mathcal{F}(\mathbf{x})$, on a :

$$\tilde{D}(x) = d(x)$$

$$\tilde{D}(v * w) = \tilde{D}(v) + [v]\tilde{D}(w)$$

$$v \ \ w \Rightarrow \tilde{D}(v) = \tilde{D}(w)$$

D'où l'on peut tirer que $\tilde{D}$ induit une application $D : \mathcal{F}(\mathbf{x}) \to \mathbb{Z}[\mathcal{F}(\mathbf{x})]$ qui est une dérivée bien définie de $\mathbb{Z}[\mathcal{F}(\mathbf{x})]$:

$$[s_1 \dots s_n] \mapsto \sum_{i=1}^{n} [s_1 \dots s_{i-1}]\tilde{D}(s_i).$$

□

Cette proposition nous permet de trouver une sorte de base de l'ensemble des dérivées de $\mathcal{F}(\mathbf{x})$, puisqu'il suffit de déterminer l'effet d'une dérivée sur chaque générateur.

Notation Par analogie avec l'analyse, on note $\frac{\partial}{\partial x_i}$ la dérivée de $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ déterminée par

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(x_j) = \delta_{ij}, \ \forall x_i, x_j \in \mathbf{x}.$$

Proposition 4.9 Soit D une dérivée de $\mathcal{F}(\mathbf{x})$. Alors

$$D = \sum_{x_i \in \mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x_i} \circ D(x_i).$$

Preuve: Par la proposition précédente, il suffit de vérifier que les deux applications ont les mêmes valeurs sur les générateurs. Or

$$\begin{aligned}
\sum_{x_i \in \mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x_i} \circ D(x_i)(x_j) &= \sum_{x_i \in \mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x_i}(x_j) \circ D(x_i) && \text{par définition de } \circ \\
&= \sum_{x_i \in \mathbf{x}} \delta_{ij} D(x_i) && \text{par définition de } \tfrac{\partial}{\partial x_i} \\
&= D(x_j)
\end{aligned}$$

□

Théorème 4.10 (Le théorème fondamental du calcul libre) Pour tout $\sigma \in \mathbb{Z}[\mathcal{F}(\mathbf{x})]$, on a :

$$\sigma - \mathfrak{e}(\sigma) = \sum_{x_i \in \mathbf{x}} \widehat{(\frac{\partial}{\partial x_i})}(\sigma) \circ ([x_i] - e)$$

Preuve: Notons D la dérivée déterminée par $D(w) = w - e$ pour tout $w \in \mathcal{F}(\mathbf{x})$. On peut alors calculer que $\hat{D}(\sigma) = \sigma - \mathfrak{e}(\sigma)$. Et par la proposition précédente on a :

$$D = \sum_{x_i \in \mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x_i} \circ D([x_i]) = \sum_{x_i \in \mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x_i} \circ ([x_i] - e)$$

Ainsi

$$\sigma - \mathfrak{e}(\sigma) = \sum_{x_i \in \mathbf{x}} \widehat{(\frac{\partial}{\partial x_i})}(\sigma) \circ ([x_i] - e)$$

□

4.4 La jacobienne d'un groupe

Maintenant que nous avons pu construire des dérivées partielles dans un groupe, nous allons pouvoir définir la jacobienne d'une présentation finie en dérivant les relateurs par rapport aux générateurs. Bien sûr, deux présentations équivalentes peuvent ne pas être associées à la même matrice, mais il est possible de définir une relation d'équivalence sur les matrices telle que deux présentations équivalentes donnent lieu à deux jacobiennes dans la même classe d'équivalence. On pourra ainsi dire que la jacobienne d'un groupe G est la classe d'équivalence de la jacobienne d'une présentation de G.

Definition 4.11 Soit $(\mathbf{x} : \mathbf{r})$ une présentation finie, où $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $\mathbf{r} = \{r_1, \ldots, r_m\}$. On note $A = |\mathbf{x} : \mathbf{r}|_{ab}$. La *jacobienne* de $(\mathbf{x} : \mathbf{r})$ est la matrice $\mathcal{J}_{(\mathbf{x}:\mathbf{r})}$ de taille $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{Z}[A]$ telle que :

$$(\mathcal{J}_{(\mathbf{x}:\mathbf{r})})_{ij} = \mathfrak{a} \circ \mathbb{Z}[\gamma_{(\mathbf{x}:\mathbf{r})}] \circ \frac{\partial}{\partial x_j}(r_i)$$

Voyons maintenant comment définir la relation d'équivalence annoncée. Notons tout d'abord que deux présentations différentes peuvent avoir un nombre de relateurs et de générateurs différent, et donc donner lieu à des jacobiennes de taille différente.

Notation On note $\mathfrak{M}(R)$ pour l'ensemble des matrices à coefficients dans R, un anneau unitaire.

Definition 4.12 On dit que deux matrices $M, M' \in \mathfrak{M}(R)$ sont *équivalentes*, et l'on note $M\ M'$, s'il existe une suite finie de matrices $M = M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}, M_n = M'$ telle que pour tout $1 < i \leq n$, on obtient M_i à partir de M_{i-1} par l'une des quatre opérations ci-dessous :

(i) adjonction ou suppression d'une ligne de zéros

(ii) addition d'une combinaison linéaire de lignes à une autre ligne

(iii) addition d'une combinaison linéaire de colonnes à une autre colonne

(iv) adjonction ou suppression d'une ligne en bas et d'une colonne à droite dont le coefficient dans l'angle est 1, et tous les autres 0 :

$$M \leftrightarrow \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il est clair qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence.

Dans le cas qui nous intéresse, R est l'anneau de groupe de l'abéliénisation d'un groupe quelconque. On cherche à traduire la notion d'équivalence de présentation au niveau des matrices à coefficients dans cet anneau.

Soit $\varphi : (\mathbf{x} : \mathbf{r}) \to (\mathbf{y} : \mathbf{s})$ un morphisme de présentation. On sait que φ induit $\varphi_* : |\mathbf{x} : \mathbf{r}| \to |\mathbf{y} : \mathbf{s}|$ ainsi qu'un homomorphisme de groupes $\varphi_{**} : A \to B$ (où $A = |\mathbf{x} : \mathbf{r}|_{ab}$ et $B = |\mathbf{y} : \mathbf{s}|_{ab}$) dont l'existence est garantie par la propriété universelle de l'abéliénisation. Finalement, ce φ_{**} induit un homomorphisme d'anneaux entre les anneaux e groupe correspondants. Tout cela devient très clair en observant le diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{x} \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathcal{F}(\mathbf{x}) \arrow[r, "\gamma_{(\mathbf{x}:\mathbf{r})}"] \arrow[d, "\hat{\varphi}"] & {|\mathbf{x}:\mathbf{r}|} \arrow[r, "q_1"] \arrow[d, "\varphi_*"] & A \arrow[r, hook, "\iota_1"] \arrow[d, "\varphi_{**}"] & \mathbb{Z}[A] \arrow[d, "\mathbb{Z}[\varphi_{**}]"] \\
 & \mathcal{F}(\mathbf{y}) \arrow[r, "\gamma_{(\mathbf{y}:\mathbf{s})}"'] & {|\mathbf{y}:\mathbf{s}|} \arrow[r, "q_2"'] & B \arrow[r, hook, "\iota_2"'] & \mathbb{Z}[B]
\end{tikzcd}$$

On peut alors définir une application $\mathfrak{M}(\varphi) : \mathfrak{M}(\mathbb{Z}[A]) \to \mathfrak{M}(\mathbb{Z}[B])$ par

$$(\mathfrak{M}(\varphi)(M))_{ij} = \mathbb{Z}[\varphi_{**}]((M)_{ij})$$

Théorème 4.13 Si $\varphi : (\mathbf{x} : \mathbf{r}) \to (\mathbf{y} : \mathbf{s})$ est une équivalence de présentations finies, alors

1. $\mathfrak{M}(\varphi)$ est une bijection
2. $\mathfrak{M}(\varphi)(\mathcal{J}_{(\mathbf{x}:\mathbf{r})})\ \mathcal{J}_{(\mathbf{y}:\mathbf{s})}$

Preuve: Pour la première affirmation, il suffit d'observer que

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ est une équivalence de présentations } &\Rightarrow \varphi_* \text{ est un isomorphisme}\\
&\Rightarrow \varphi_{**} \text{ est un isomorphisme}\\
&\Rightarrow \mathbb{Z}[\varphi_{**}] \text{ est un isomorphisme}\\
&\Rightarrow \mathfrak{M}(\varphi) \text{ est une bijection}
\end{aligned}$$

La démonstration de la deuxième affirmation est beaucoup plus technique et ne sera pas faite ici ; notons tout de même que le théorème de Tietze est ici très utile : en effet, il suffit de montrer que les jacobiennes seront équivalentes lorsque φ est une équivalence de type I ou de type II. □

Ainsi comme annoncé, on peut définir la jacobienne d'un groupe G comme la classe d'équivalence de la jacobienne d'une certaine présentation de G. Mais il n'est pas toujours facile de déterminer si deux matrices appartiennent à la même classe d'équivalence. Nous allons construire un outil supplémentaire.

4.5 Les idéaux élémentaires

Nous allons associer à chaque matrice à coefficients dans un anneau unitaire R une suite d'idéaux de R. Nous verrons que cette construction est effectivement utile en montrant que deux matrices de la même classe d'équivalence donnent lieu à la même suite d'idéaux.

Definition 4.14 Soit $M \in \mathfrak{M}(R)$ une matrice de taille $m \times n$. On définit pour tout $k \in \mathbb{N}$ le $k^{ème}$ *idéal élémentaire de* M par

- $0 \leq k < n - m \Rightarrow E_k(M) = \{0\}$
- $n - m \leq k < n \Rightarrow E_k(M) =$ l'idéal de R engendré par les déterminants de toutes les sous-matrices de M de taille $(n-k) \times (n-k)$
- $n \leq k < \infty \Rightarrow E_k(M) = R$

Remarque 4.15 Comme le déterminant d'une sous-matrice de M de taille $(n-k)\times(n-k)$ est une combinaison linéaire de déterminants de taille $(n-(k+1))\times(n-(k+1))$, on a que $E_k(M)\subseteq E_{k+1}(M)$ pour tout k.

Montrons maintenant que cette suite d'idéaux ne dépend que de la classe de la matrice.

Théorème 4.16 Soient $M, M' \in \mathfrak{M}(R)$. Si M M', alors $E_k(M) = E_k(M')$ pour tout k.

Preuve: Il suffit de vérifier que l'affirmation est vraie pour les quatre équivalences "de base" de la relation d'équivalence sur $\mathfrak{M}(R)$.

(i) On a une matrice M de taille $m\times n$ et M' de taille $(m+1)\times n$, avec

$$M' = \begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comme le déterminant de toute matrice avec une ligne de zéros est nul, on a tout de suite l'égalité sauf pour $k = n-(m+1)$. Or toute sous-matrice de M' de taille $(m+1)\times(m+1)$ n'a que des zéros sur la dernière ligne, donc son déterminant est nul. Ainsi $E_{n-(m+1)}(M) = E_{n-(m+1)}(M') = \{0\}$.

(ii) Le fait d'ajouter à une ligne une combinaison linéaire d'autres lignes ne change pas le déterminant de la matrice. Donc une telle équivalence donne lieu aux mêmes générateurs, et donc aux mêmes idéaux élémentaires.

(iii) Le raisonnement fait pour les lignes est valable aussi pour les colonnes.

(iv) On a une matrice M de taille $m\times n$ et M' de taille $(m+1)\times(n+1)$ avec

$$M' = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Regardons les différents cas :

– $0 \le k < n-m = (n+1)-(m+1)$: On a par définition $E_k(M) = E_k(M') = \{0\}$

– $n-m \le k < n$: Soit N une sous-matrice de M de taille $(n-k)\times(n-k)$. Alors

$$N' = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est une sous-matrice de M' de taille $((n+1)-k)\times((n+1)-k)$, de même déterminant que N. Alors

$$E_k(M) \subseteq E_k(M')$$

Soit N' une sous-matrice de M' de taille $((n+1)-k)\times((n+1)-k)$. Alors soit N' n'a aucun coefficient provenant de la dernière ligne ou dernière colonne, soit la dernière ligne ou dernière colonne contient des zéros et éventuellement 1.

Si N' n'a aucun coefficient provenant de la dernière ligne ou dernière colonne, alors c'est une sous-matrice de M de taille $(n-(k-1))\times(n-(k-1))$. Donc le déterminant de N' est un générateur de $E_{k-1}(M)$, qui est inclus dans $E_k(M)$.

Si la dernière ligne ou dernière colonne contient des zéros mais pas 1, alors le déterminant de N' est 0. Mais si on a le 1 dans l'angle, alors

$$N' = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec N une sous-matrice de M de taille $(n-k) \times (n-k)$. Dans ce cas $\det N' = \det N \in E_k(M)$.

On a donc montré que $E_k(M') \subseteq E_k(M)$. Comme on avait déjà l'inclusion dans l'autre sens, on obtient finalement que $E_k(M') = E_k(M)$.

- $k = n$: $E_n(M) = R$ par définition, et $E_n(M')$ est l'idéal engendré par toutes les sous-matrices de taille 1×1, donc par tous les coefficients de M'. Mais 1 est un coefficient de M', donc l'idéal engendré est R tout entier, donc $E_n(M') = R = E_n(M)$.
- $k > n$: On a $E_k(M) = E_k(M') = R$ par définition.

□

4.6 Deux exemples de calcul des idéaux élémentaires

Exemple 4.17 On cherche à calculer la chaîne d'idéaux élémentaires de chacune des présentations suivantes :

1. $(\mathbf{x} : \mathbf{r})$
2. $(\mathbf{x} : \mathbf{s})$
3. $(\mathbf{x} : \mathbf{s} \cup \mathbf{c})$

où $\mathbf{x} = \{a, b\}$, $\mathbf{r} = \{aba^{-1}b\}$, $\mathbf{s} = \{b^2\}$, $\mathbf{c} = \{aba^{-1}b^{-1}\}$.

Les calculs nous donnent :

1. $$\frac{\partial}{\partial a} aba^{-1}b = 1 - aba^{-1}, \ \frac{\partial}{\partial b} aba^{-1}b = a + aba^{-1},$$

   ce qui nous donne pour la jacobienne :

   $$\mathfrak{a} \circ \mathbb{Z}[\gamma_{|\mathbf{x}:\mathbf{r}|}](1 - aba^{-1}) = 1 - b, \ \mathfrak{a} \circ \mathbb{Z}[\gamma_{|\mathbf{x}:\mathbf{r}|}](a + aba^{-1}) = a + b,$$

   et donc $\mathcal{J}_{|\mathbf{x}:\mathbf{r}|} = \begin{pmatrix} 1-b & a+b \end{pmatrix}$. D'où l'on calcule les idéaux élémentaires :

   $$\begin{array}{ll} E_0(\mathcal{J}_{|\mathbf{x}:\mathbf{r}|}) & = \{0\} \\ E_1(\mathcal{J}_{|\mathbf{x}:\mathbf{r}|}) & = \langle 1-b, a+b \rangle \\ E_2(\mathcal{J}_{|\mathbf{x}:\mathbf{r}|}) & = \mathbb{Z}[|\mathbf{x} : \mathbf{r}|_{ab}] \end{array}$$

2. $$\frac{\partial}{\partial a} b^2 = 0, \ \frac{\partial}{\partial a} b^2 = 1 + b,$$

   ce qui nous donne pour la jacobienne :

   $$\mathfrak{a} \circ \mathbb{Z}[\gamma_{|\mathbf{x}:\mathbf{s}|}](0) = 0, \ \mathfrak{a} \circ \mathbb{Z}[\gamma_{|\mathbf{x}:\mathbf{s}|}](1 + b) = 1 + b,$$

   et donc $\mathcal{J}_{|\mathbf{x}:\mathbf{s}|} = \begin{pmatrix} 0 & 1+b \end{pmatrix}$. D'où l'on calcule les idéaux élémentaires :

$$\begin{array}{ll} E_0(\mathcal{J}_{|\mathbf{x}:\mathbf{s}|}) & = \{0\} \\ E_1(\mathcal{J}_{|\mathbf{x}:\mathbf{s}|}) & =< 1+b > \\ E_2(\mathcal{J}_{|\mathbf{x}:\mathbf{s}|}) & = \mathbb{Z}[|\mathbf{x}:\mathbf{s}|_{ab}] \end{array}$$

3.
$$\frac{\partial}{\partial a} aba^{-1}b^{-1} = 1 - aba^{-1}, \ \frac{\partial}{\partial b} aba^{-1}b^{-1} = a - aba^{-1}b^{-1},$$

ce qui nous donne pour la jacobienne :

$$\mathfrak{a} \circ \mathbb{Z}[\gamma_{|\mathbf{x}:\mathbf{s}\cup\mathbf{c}|}](1 - aba^{-1}) = 1 - b, \ \mathfrak{a} \circ \mathbb{Z}[\gamma_{|\mathbf{x}:\mathbf{s}\cup\mathbf{c}|}](a - aba^{-1}b^{-1}) = a - 1,$$

et donc

$$\mathcal{J}_{|\mathbf{x}:\mathbf{s}\cup\mathbf{c}|} = \begin{pmatrix} 0 & 1+b \\ 1-b & a-1 \end{pmatrix}$$

. D'où l'on calcule les idéaux élémentaires :

$$\begin{array}{ll} E_0(\mathcal{J}_{|\mathbf{x}:\mathbf{s}\cup\mathbf{c}|}) & = \langle b^2 - 1 \rangle = \{0\} \\ E_1(\mathcal{J}_{|\mathbf{x}:\mathbf{s}\cup\mathbf{c}|}) & = \langle 1+b, 1-b, a-1 \rangle \\ E_2(\mathcal{J}_{|\mathbf{x}:\mathbf{s}\cup\mathbf{c}|}) & = \mathbb{Z}[|\mathbf{x}:\mathbf{s}\cup\mathbf{c}|_{ab}] \end{array}$$

Mais en remarquant que $|\mathbf{x}:\mathbf{r}|_{ab} = |\mathbf{x}:\mathbf{r}\cup\mathbf{c}|$ et que $\mathbf{s} \in Q(\mathbf{r}\cup\mathbf{c})$ (de même $\mathbf{r} \in Q(\mathbf{s}\cup\mathbf{c})$), on obtient que les abéliénisations des trois présentations sont les mêmes. Par contre, on peut vérifier que les idéaux E_1 sont distincts. On en conclut que les idéaux élémentaires permettent d'identifier un groupe pas seulement à abéliénisation près.

Exemple 4.18 On considère la présentation

$$(a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n \ : \ \prod_{i=1}^{n} a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}).$$

On cherche à montrer que le groupe présenté n'est ni libre ni abélien.

La jacobienne d'un groupe libre sur n générateurs est donnée par une ligne de n zéros. Ainsi les idéaux élémentaires sont nuls jusqu'à $E_n(\mathcal{J}_{|\mathbf{x}:1|}) = \mathbb{Z}[|\mathbf{x}:1|_{ab}] \cong \mathbb{Z}[\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}]$. Par contre, des calculs montrent que $\mathcal{J}_{|\mathbf{x}:\mathbf{r}|} = \begin{pmatrix} 1-b_1 & a_1-1 & 1-b_2 & a_2-1 & \ldots \end{pmatrix}$. On en tire que les idéaux élémentaires sont nuls jusqu'à

$$E_{2n-1}(\mathcal{J}_{|\mathbf{x}:\mathbf{r}|}) = (1-b_1, a_1-1, \ldots) E_{2n}(\mathcal{J}_{|\mathbf{x}:\mathbf{r}|}) = \mathbb{Z}[|\mathbf{x}:\mathbf{r}|_{ab}]$$

On en conclut que $|\mathbf{x}:\mathbf{r}|$ n'est pas libre.

Le calcul de $\mathcal{J}_{|\mathbf{x}:\mathbf{c}|}$, où $\mathbf{c}$ est l'ensemble des commutateurs, donne

$$\mathcal{J}_{|\mathbf{x}:\mathbf{c}|} = \begin{pmatrix} 1-b_1 & a_1-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1-a_2 & 0 & a_1-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1-b_2 & 0 & 0 & a_1-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1-b_n & a_n-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

et l'on remarque que l'idéal E_{2n-2} engendré par les déterminants des sous-matrices 2×2 est non-trivial. Comme $\mathbf{r} \in Q(\mathbf{c})$, on a donc $E_{2n-2}(\mathcal{J}_{|\mathbf{x}:\mathbf{r}|_{ab}}) \neq E_{2n-2}(\mathcal{J}_{|\mathbf{x}:\mathbf{r}|})$, d'où $|\mathbf{x}:\mathbf{r}|_{ab} \neq |\mathbf{x}:\mathbf{r}|$, et ainsi $|\mathbf{x}:\mathbf{r}|$ n'est pas abélien.

5 Le groupe fondamental

Dans ce chapitre nous allons étudier le groupe fondamental, un objet très très utile qui associe un groupe à chaque espace topologique (nous nous limiterons ici à des types particuliers d'espaces topologiques). Rappelons d'abord la notion d'homotopie.

Definition 5.1 Soient X, Y deux espaces topologiques. On dit que $f : X \to Y$ et $g : X \to Y$ sont *homotopes* s'il existe une application $H : X \times [0,1] \to Y$ telle que $H(x,0) = f(x)$ et $H(x,1) = g(x)$ pour tout $x \in X$. On note alors $f \simeq g$ et on dit que H est une *homotopie de f à g*. On dit que deux espaces topologiques X et Y ont le *même type d'homotopie* s'il existe des applications continues $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ telles que $gf \simeq 1_X$ et $fg \simeq 1_Y$. On note alors $X \simeq Y$ et on dit que f et g sont des *équivalences d'homotopie*.

Comme annoncé, il est plus facile de définir le groupe fondamental pour une classe particulière d'espaces topologiques : il s'agit des espaces pointés.

Definition 5.2

1. Un couple (X, x_0), où X est un espace topologique et x_0 un point quelconque de X, est appelé *espace topologique pointé*, avec *point de base* x_0. Une *application d'espaces pointés* $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ est une application continue $f : X \to Y$ telle que $f(x_0) = f(y_0)$.
2. Deux applications d'espaces pointés $f, g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ sont *homotopes par rapport aux points de base* (on note $f \simeq_* g$ s'il existe une homotopie de f à g telle que $H(x_0, t) = y_0$ pour tout $t \in [0,1]$. L'application H est appelée *homotopie basée*, et on définit la *classe d'homotopie basée* d'une application pointée $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ par
$$[f]_* = \{g : (X, x_0) \to (Y, y_0) \mid g \simeq_* f\}$$
On peut vérifier que c'est une relation d'équivalence.
3. Un *lacet basé* sur (X, x_0) est une application pointée $(S^1, 1) \to (X, x_0)$.

Nous avons maintenant tout ce qui est nécessaire pour définir enfin le groupe fondamental.

Definition 5.3 Le *groupe fondamental de* (X, x_0) est l'ensemble de toutes les classes d'homotopie basée de lacets basés sur (X, x_0). On le note $\pi_1(X, x_0)$. On a donc :
$$\pi_1(X, x_0) = \{[f]_* \mid f : (S^1, 1) \to (X, x_0)\}.$$

Ainsi le groupe fondamental fait intervenir un espace topologique particulier : le cercle S^1.

On définit de manière similaire $\pi_n(X)$ comme l'ensemble des classes d'homotopie d'applications de S^n dans X.

5.1 Le groupe fondamental est un groupe

Nous devons vérifier que le groupe fondamental est effectivement un groupe. Pour cela, il faut définir une loi de composition et vérifier les axiomes de groupe. Seules les idées principales de cette vérification seront présentées ici.

Definition 5.4 Un chemin sur un espace topologique X est une application continue $f : [0,1] \to X$. Si f et g sont deux chemins sur X tels que $f(1) = g(0)$, on définit le chemin

$$f \star g : [0,1] \to X$$
$$t \mapsto \begin{cases} f(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ g(2t-1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Maintenant, en posant

$$q : [0,1] \to S^1$$
$$t \mapsto e^{i2\pi t}$$

on a que si α est un lacet basé sur (X, x_0), alors αq est un chemin sur X avec $\alpha q(0) = \alpha q(1) = x_0$. Réciproquement, un chemin f sur X avec $f(0) = f(1) = x_0$ induit un lacet basé

$$\hat{f} : (S^1, 1) \to (X, x_0)$$
$$e^{i\theta} \mapsto f(\theta/2\pi).$$

On peut maintenant définir le produit de deux lacets α et β par

$$\alpha \star \beta = \widehat{\alpha q \star \beta q}.$$

On peut vérifier que si $\alpha \simeq_* \alpha'$ et $\beta \simeq_* \beta'$, alors $\alpha \star \beta \simeq_* \alpha' \star \beta'$, ce qui nous permet de définir le produit de classes de lacets basés

$$[\alpha]_* \odot [\beta]_* = [\alpha \star \beta]_*$$

Cette loi de composition a alors les propriétés requises, comme l'indique la proposition suivante (sans démonstration).

Proposition 5.5 Le produit $\odot$ munit $\pi_1(X, x_0)$ d'une structure de groupe.

Remarque 5.6 L'élément neutre est donné par e_{x_0}, le chemin constant en x_0. L'inverse d'un lacet est le même lacet parcouru en sens inverse.

5.2 Quelques autres propriétés

Une propriété majeure du groupe fondamental est qu'il s'agit d'un *invariant homotopique*, autrement dit, si $(X, x_0) \simeq_* (Y, y_0)$, alors leur groupe fondamental seront isomorphes. Si l'on a une application pointée $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ et deux application α, $\beta : (Z, z_0) \to (X, x_0)$ telles que

$\alpha \simeq_* \beta$ par une homotopie H, alors clairement $f\alpha \simeq_* f\beta$ par l'homotopie fH. Donc f induit une application

$$\pi_1(f) : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$
$$[\alpha]_* \mapsto [f\alpha]_*.$$

Proposition 5.7 L'application $\pi_1(f)$ est un homomorphisme.

Preuve: On a la suite d'égalités

$$\pi_1(f)([\alpha]_* \odot [\beta]_*) = \pi_1(f)([\alpha \star \beta]_*) = [f \circ (\alpha \star \beta)]_* = [f\alpha \star f\beta]_* = [f\alpha]_* \odot [f\beta]_* = \pi_1(f)([\alpha]_*) \odot \pi_1(f)([\beta]_*)$$

De plus,

$$\pi_1(f)([e_{x_0}]_*) = [f \circ e_{x_0}]_* = [e_{y_0}]_*$$

□

Proposition 5.8

1. Pour tout espace pointé (X, x_0), $\pi_1(1_X) = 1_{\pi_1(X, x_0)}$
2. Si $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ et $g : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ sont des applications pointées, alors $\pi_1(gf) = \pi_1(g)\pi_1(f)$
3. Si $f, g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ sont des applications pointées telles que $f \simeq_* g$, alors $\pi_1(f) = \pi_1(g)$.

D'où l'on tire sans difficultés l'invariance homotopique de π_1.

Théorème 5.9 Si $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ est une équivalence d'homotopie, alors $\pi_1(f)$ est un isomorphisme.

Preuve: Si $g : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ est telle que $gf \simeq_* 1_X$ et $fg \simeq_* 1_Y$, alors

$$\pi_1(g)\pi_1(f) = \pi_1(gf) = \pi_1(1_X) = 1_{\pi_1(X, x_0)}$$

et

$$\pi_1(f)\pi_1(g) = \pi_1(fg) = \pi_1(1_Y) = 1_{\pi_1(Y, y_0)}$$

et donc $\pi_1(f)$ et $\pi_1(g)$ sont des isomorphismes.

Voyons encore deux propriétés importantes, sous la forme des deux théorèmes suivants.

Théorème 5.10 Si X est un espace topologique connexe par arcs, alors $\pi_1(X, x_0)$ et $\pi_1(X, x_1)$ sont isomorphes pour tout $x_0, x_1 \in X$.

Autrement dit, le choix du point de base n'a aucune importance dans le cas des espaces connexes par arcs.

Théorème 5.11 (Théorème de Seifert-van Kampen) Soient U et V des ouverts connexes par arcs d'un espace X tels que $X = U \cup V$, et que $U \cap V$ est non vide et connexe par arcs. Alors pour tout $x_0 \in U \cap V$, le groupe fondamental $\pi_1(X, x_0)$ est la somme amalgamée de

$$\begin{tikzcd} \pi_1(U \cap V, x_0) \arrow[r, "\pi_1(\iota_1)"] \arrow[d, "\pi_1(\iota_2)"'] & \pi_1(U, x_0) \\ \pi_1(V, x_0) & \end{tikzcd}$$

où $\iota_1 : U \cap V \hookrightarrow U$ et $\iota_2 : U \cap V \hookrightarrow V$ sont les inclusions évidentes.

5.3 Exemples de groupes fondamentaux

Exemple 5.12 (Espaces contractiles) Puisqu'un espace contractile est homotope au point et que le groupe fondamental est un invariant homotopique, il est clair que

$$X \text{ contractile} \Rightarrow \pi_1(X, x_0) = \{e\}.$$

Proposition 5.13 Si (X, x_0) et (Y, y_0) sont des espaces pointés, alors $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.

Preuve: Si $\alpha : (S^1, 1) \to (X \times Y, (x_0, y_0)$ est un lacet basé, on remarque que ses composantes α_1 et α_2 dans X et Y sont également des lacets basés. En effet, on sait que α continue $\Leftrightarrow \alpha_1$ et α_2 continues. De plus, il est clair que $\alpha(1) = (x_0, y_0) \Leftrightarrow (\alpha_1(1) = x_0$ et $\alpha_2(1) = y_0)$. De même, si α_1 et α_2 sont des lacets basés respectivement de (X, x_0) et (Y, y_0), alors $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ est un lacet basé de $(X \times Y, (x_0, y_0))$. Il reste à voir que pour deux lacets basés α, β de $(X \times Y, (x_0, y_0))$, on a

$$[\alpha]_* = [\beta]_* \Leftrightarrow ([\alpha_1]_* = [\beta_1]_* \text{ et } [\alpha_2]_* = [\beta_2]_*) \Leftrightarrow ([\alpha_1]_*, [\alpha_2]_*) = ([\beta_1]_*, [\beta_2]_*)$$

En effet, si $H : (S^1, 1) \times [0, 1] \to (X \times Y, (x_0, y_0))$ est une homotopie basée de α à β, ses composantes H_1 et H_2 sont des homotopies basées de α_1 à β_1 et de α_2 à β_2. La réciproque est également claire. On a donc bien établi que $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$. $\square$

Nous ne verrons pas ici la démonstration (qui est assez longue), mais on peut montrer que le groupe fondamental du cercle est $\mathbb{Z}$:

Théorème 5.14 $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$

Exemple 5.15 (Bouquet de cercles) On appelle *bouquet* de n cercles l'espace consistant en n cercles identifiés en un point x_0, et on le note $S^1 \vee \ldots \vee S^1$. A l'aide du théorème de Seifert-van Kampen, on peut montrer que $\pi_1(S^1 \vee \ldots \vee S^1, x_0)$ est un groupe libre sur n générateurs.

Exemple 5.16 (Sphère de dimension 2) Le groupe fondamental de $S^2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in (R)^3 | < x, x >= 1\}$ est le groupe trivial. En effet, posons $U = \{x \in S^2 | x_3 < 1/2\}$ et $V = \{x \in$

$S^2|x_3 > -1/2\}$. Ce sont des ouverts connexes par arcs de S^2. De plus, $U \cap V$ est non-vide et connexe par arc, et contient S^1. En fait, $U \cap V$ et S^1 ont même type d'homotopie : on peut voir que $f : S^1 \hookrightarrow U \cap V$ et $g : U \cap V \to S^1$ ("projection" sur S^1) sont des équivalences homotopiques. On remarque en outre que U et V sont tous deux homéomorphes à $\mathbb{D}^2$, qui est convexe, donc contractile. En choisissant $x_1 = (1, 0, 0)$ on a donc $\pi_1(U, x_0) = \pi_1(V, x_0) \cong \{e\}$, et $\pi_1(U \cap V, x_0) \cong \mathbb{Z}$. Par le théorème de Seifert-van Kampen, $\pi_1(S^2, x_0)$ est la somme amalgamée de $\mathbb{Z} \to \{e\}$ et $\mathbb{Z} \to \{e\}$, c'est-à-dire $\{e\}$. Donc $\pi_1(S^2, x_0) \cong \{e\}$.

Exemple 5.17 (Sphère privée de n points) Si $p_0, \ldots, p_n$ sont des points distincts de S^2, alors $\pi_1(S^2 \backslash \{p_1, \ldots, p_n\}, p_0)$ est un groupe libre sur $(n-1)$ générateurs. Appelons q la projection de S^2 sur le plan euclidien depuis p_1 : c'est clairement un homéomorphisme. On a donc $q(S^2 \backslash \{p_1, \ldots, p_n\}) = \mathbb{R}^2 \backslash \{q(p_2), \ldots, q(p_n)\}$. On peut maintenant construire des polygones $P_i (i = 2, \ldots, n)$ dont $q(p_0)$ est un sommet, et tels que $q(p_i) \in \dot{P}_i,\ \forall i = 2, \ldots, n$. Ces $n-1$ polygones sont homéomorphes à S^1. Par un argument similaire à celui utilisé dans l'exemple précédent, on a que $\mathbb{R}^2 \backslash \{q(p_2), \ldots, q(p_n)\}$ a le même type d'homotopie que $\underbrace{S^1 \vee \ldots \vee S^1}_{(n-1)\ fois}$. Donc $\pi_1(S^2 \backslash \{p_1, \ldots, p_n\}, p_0)$ est bien un groupe libre sur $(n-1)$ générateurs.

6 Modules

Definition 6.1 Soit R un anneau. On appelle *module à gauche sur* R, ou R*-module à gauche*, un groupe abélien M muni d'une action à gauche de R : $R \times M \to M$ satisfaisant les quatre conditions suivantes pour tout a, $a' \in R$, m, $m' \in M$:

(i) $1_R m = m$

(ii) $a(m+m') = am + am'$

(iii) $(a+a')m = am + a'm$

(iv) $(aa')m = a(a'm)$

On définit de manière similaire un R*-module à droite.*

La notion de module généralise à la fois la notion d'espace vectoriel et de groupe abélien. En effet,

si $\mathbb{K}$ est un corps et V est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors V est un $\mathbb{K}$-module (à gauche et à droite)

si A est un groupe abèlien, alors A est un $\mathbb{Z}$-module pour l'action de $\mathbb{Z}$ suivante :

$$(n,a) \mapsto \overbrace{a + \cdots + a}^{n\ fois}\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \forall a \in A$$

Exemple 6.2 Tout idéal à gauche d'un anneau R est un R-module à gauche.

Definition 6.3 Soit M un R-module et N un sous-groupe de M. On dit que N est un *sous-module* de M si $an \in N$, pour tout $a \in R$, $n \in N$.

Definition 6.4 Soient M et M' des R-modules. On appelle *application* R*-linéaire*, ou R*-homomorphisme de modules* une application $f : M \to M'$ telle que pour tout $a \in R$, $v, w \in M$ on ait :

$$f(av) = af(v), \quad f(v+w) = f(v) + f(w).$$

L'ensemble des R-homomorphismes de M dans M' est noté $Hom_R(M, M')$.

Proposition 6.5 Si R est un anneau commutatif, et E, F sont des R-modules, alors on peut définir sur $Hom_R(E,F)$ une structure de R-module.

Preuve: Pour f, $g \in Hom(E,F)$, on définit

$$\begin{aligned} (f+g)(m) &= f(m) + g(m) & \forall m \in E \\ (af)(m) &= af(m) & \forall a \in R, \forall m \in E \end{aligned}$$

Il est clair que $f+g$ est un homomorphisme de modules. Pour af, on utilise la commutativité de R. En effet,

$$(af)(bm) = a \cdot f(bm) = a \cdot bf(m),$$

et ceci n'est pas toujours égal à $b \cdot af(m)$ si R n'est pas commutatif. Cette condition est donc nécessaire.

On vérifie alors les quatre conditions :

(i) On a pour tout $m \in E$:

$$\begin{aligned}(1_R f)(m) &= 1_R \cdot f(m) \\ &= f(m) && \text{car } F \text{ est un module}\end{aligned}$$

Donc $1_R f = f$, pour tout $f \in Hom_R(E, F)$.

(ii) On a pour tout $m \in E$:

$$\begin{aligned}[a(f + f')](m) &= a \cdot (f + f')(m) && \text{par définition de la multiplication dans } Hom_R(E, F) \\ &= a[f(m) + f'(m)] && \text{par définition de l'addition dans } Hom_R(E, F) \\ &= af(m) + af'(m) && \text{car } F \text{ est un module} \\ &= (af + af')(m)\end{aligned}$$

Donc $a(f + f') = af + af'$, pour tout $f, f' \in Hom_R(E, F)$, pour tout $a \in R$.

(iii) On a pour tout $m \in E$:

$$\begin{aligned}[(a + a')f](m) &= (a + a') \cdot f(m) && \text{par définition de la multiplication dans } Hom_R(E, F) \\ &= af(m) + a'f(m) && \text{car } F \text{ est un module} \\ &= (af + a'f)(m)\end{aligned}$$

Donc $(a + a')f = af + a'f$, pour tout $f \in Hom_R(E, F)$, pour tout $a, a' \in R$.

(iv) On a pour tout $m \in E$:

$$\begin{aligned}[(aa')f](m) &= (aa') \cdot f(m) \\ &= a(a' \cdot f(m)) \\ &= a[(a'f)(m)] \\ &= [a(a'f)](m)\end{aligned}$$

Donc $(aa')f = a(a'f)$, pour tout $f \in Hom_R(E, F)$, pour tout $a, a' \in R$.

□

Proposition 6.6 Soit R un anneau et M un R-module. Alors $Hom_R(R, M)$ et M sont isomorphes (en tant que groupes abéliens).

Preuve: Considérons l'application

$$\pi : Hom_R(R, M) \to M$$

$$f \mapsto f(1)$$

Si $f(1) = 0$, alors par linéarité $f(a) = f(a \cdot 1) = a \cdot f(1) = 0$ pour tout $a \in R$, et donc $f \equiv 0$, d'où $\ker \pi = \{0\}$, et π est injective. De plus, il est clair que pour tout $m \in M$, il existe $f_m \in Hom_R(R, M)$ tel que $f_m(1) = m$ (on peut définir f_m ainsi et l'étendre par R-linéarité). Donc π est surjective.

Ainsi π est bijective et $Hom_R(R, M)$ et M sont isomorphes.

7 Algèbre homologique

7.1 Catégories

Dans ce paragraphe nous présentons quelques notions de base concernant les catégories, qui peuvent être utiles dans le cadres de ce projet. Parlons tout d'abord de la notion de *classe*, qui généralise la notion d'ensemble. En fait, tout ensemble est une classe ; mais on ajoute encore dans les classes des collections d'objets qui sont trop grandes pour pouvoir s'appeler "ensembles". Par exemple, la collection de tous les ensembles est une classe, mais comme nous le montre le paradoxe de Russell, ce n'est pas un ensemble. On parle dans ce cas de *classe propre*. En fait, les opérations de base sur les ensembles (réunion, intersection,...) restent valables pour les classes. La différence majeure est qu'on ne peut forcer une classe à appartenir à une autre classe (à moins que la première soit en fait un ensemble).

Definition 7.1 Une *catégorie* $\mathfrak{C}$ est une classe d'objets, notée $obj\mathfrak{C}$, munie d'une fonction Mor qui à toute paire (A, B) d'éléments dans $obj\mathfrak{C}$ fait correspondre un ensemble $Mor_{\mathfrak{C}}(A, B)$, appelé l'ensemble des *morphismes de A vers B*. Pour tout A, B, $C \in obj\mathfrak{C}$, il doit exister une fonction appelée *composition* :

$$Mor(B, C) \times Mor(A, B) \to Mor(A, C)$$

$$(g, f) \mapsto gf$$

On impose encore que cette composition soit associative et que chaque ensemble $Mor(A, A)$ contienne un élément identité 1_A.

Exemple 7.2 Tout groupe G peut être vu comme une catégorie $\mathfrak{G}$ de la manière suivante : $obj\mathfrak{G}$ consiste en un seul objet $\clubsuit_G$, et l'on pose $Mor_{\mathfrak{G}}(\clubsuit_G, \clubsuit_G) = G$, où la composition de deux éléments dans $Mor_{\mathfrak{G}}(\clubsuit_G, \clubsuit_G)$ est définie par leur produit dans G, et l'identité de $Mor_{\mathfrak{G}}(\clubsuit_G, \clubsuit_G)$ par l'élément neutre de G.

Exemple 7.3 La catégorie $\mathfrak{Gr}$ est donnée par $obj\mathfrak{Gr} =$ la classe de tous les groupes, et $Mor(A, B) =$ ensemble de tous les homomorphismes de A vers B (noté $Hom(A, B)$).

Exemple 7.4 On définit la catégorie $\mathfrak{T}op_{pnt}$ par $obj\mathfrak{T}op_{pnt} =$ la classe des espaces topologiques pointés, et $Mor((A, a_0), (B, b_0)) =$ l'ensemble des applications d'espaces pointés de A vers B.

Exemple 7.5 Etant donné une catégorie $\mathfrak{C}$, on définit la *catégorie opposée* $\mathfrak{C}^{op}$ par $obj\mathfrak{C}^{op} = obj\mathfrak{C}$, et $Mor_{\mathfrak{C}^{op}}(A, B) = Mor_{\mathfrak{C}}(B, A)$. La composition est donc inversée.

Voyons maintenant deux objets que l'on peut construire dans n'importe quelle catégorie : le produit et le coproduit d'une collection d'objets.

Definition 7.6 Soit $\mathfrak{C}$ une catégorie, et soient A, $B \in obj\mathfrak{C}$.

1. On dit que l'élément $A \times B \in obj\mathfrak{C}$ muni de deux morphismes $\pi_1 \in Mor(A \times B, A)$, $\pi_2 \in Mor(A \times B, B)$ est un *produit de A et B* si pour tout $C \in \mathfrak{C}$, et pour tout $f_1 \in Mor(C, A)$,

$f_2 \in Mor(C, B)$ il existe un unique $(f_1, f_2) \in Mor(C, A \times B)$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, dotted, "{(f_1,f_2)}"] \arrow[drr, bend left, "f_2"] \arrow[ddr, bend right, "f_1"'] & & \\
& A \times B \arrow[r, "\pi_2"'] \arrow[d, "\pi_1"] & B \\
& A &
\end{tikzcd}$$

2. On dit que l'élément $A \oplus B \in obj\mathfrak{C}$ muni de deux morphismes $\iota_1 \in Mor(A, A \oplus B)$, $\iota_2 \in Mor(B, A \oplus B)$ est un *coproduit de A et B* (ou une *somme de A et B*) si pour tout $C \in \mathfrak{C}$, et pour tout $g_1 \in Mor(A, C)$, $g_2 \in Mor(B, C)$ il existe un unique $g_1 \oplus g_2 \in Mor(A \oplus B, C)$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[d, "\iota_2"'] \arrow[ddr, bend left, "g_2"] & \\
A \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[drr, bend right, "g_1"'] & A \oplus B \arrow[dr, dotted, "g_1 \oplus g_2"] & \\
& & C
\end{tikzcd}$$

On peut généraliser cela pour un produit et un coproduit d'un nombre quelconque d'objets. La seule restriction est qu'un élément d'une somme doit comprendre un nombre fini de termes non nuls.

Exemple 7.7 (Sommes et produits dans $\mathfrak{Top}$ et $\mathfrak{Ab}$) Le produit de deux espaces topologiques E et F est leur produit cartésien muni de la topologie produit. En effet, considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, dotted, "f"] \arrow[drr, bend left, "f_2"] \arrow[ddr, bend right, "f_1"'] & & \\
& E \times F \arrow[r, "\pi_2"'] \arrow[d, "\pi_1"] & F \\
& E &
\end{tikzcd}$$

Pour que ce diagramme soit commutatif, on est obligé de définir $f(c) = (f_1(c), f_2(c))$. Vérifions que ce f est bien continu. Soit W un ouvert de $E \times F$. Alors $W = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \times V_i$, où les U_i et les V_i sont des ouverts de E et F respectivement. Mais alors $f^{-1}(W) = f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \times V_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(U_i \times V_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty}(f_1^{-1}(U_i) \cap f_2^{-1}(V_i))$. Comme f_1 et f_2 sont continues, les $f_1^{-1}(U_i)$ et les $f_2^{-1}(V_i)$ sont ouverts, donc $f^{-1}(W)$ est ouvert, et f est continue.

Le coproduit de deux espaces topologiques E et F est leur réunion disjointe $E \sqcup F$, où un sous-ensemble T est ouvert si et seulement si $T \cap E$ et $T \cap F$ sont ouverts dans E et F respectivement.

En effet, dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
& F \arrow[d, "\iota_2"] \arrow[ddr, "g_2"] & \\
E \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[drr, "g_1"'] & E \sqcup F \arrow[dr, dotted, "g"] & \\
& & C
\end{tikzcd}$$

on est obligé de définir $g|_E = g_1$ et $g|_F = g_2$, donc il n'y a qu'un seul g qui rend ce diagramme commutatif. Cette application est bien continue, car si O est ouvert dans C, alors $g_1^{-1}(O)$ est ouvert dans E, et $g_2^{-1}(O)$ est ouvert dans F, et donc $g^{-1}(O) = g|_E^{-1}(O) \sqcup g|_F^{-1}(O)$ est ouvert dans $E \sqcup F$.

Le produit de deux groupes abéliens (tout comme leur coproduit) est leur produit cartésien. En effet,

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[dr, dotted, "f"] \arrow[drr, bend left, "f_2"] \arrow[ddr, bend right, "f_1"'] & & \\
& G_1 \times G_2 \arrow[r, "\pi_2"'] \arrow[d, "\pi_1"] & G_2 \\
& G_1 &
\end{tikzcd}$$

on vérifie facilement l'unicité de ce f (on doit poser $f(g) = (f_1(g), f_2(g))$), et le fait que c'est un homomorphisme. De même pour le coproduit :

$$\begin{tikzcd}
& G_1 \arrow[d, "\iota_2"] \arrow[ddr, bend left, "g_2"] & \\
G_1 \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[drr, bend right, "g_1"'] & G_2 \times G_2 \arrow[dr, dotted, "g"] & \\
& & G
\end{tikzcd}$$

Ayant défini les catégories, il paraît naturel de s'intéresser aux liens que l'on peut faire entre elles. Pour cela, nous introduisons la notion de foncteur.

Definition 7.8 Soient $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{D}$ deux catégories. Un *foncteur covariant* $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ est une fonction (aussi notée F) de $obj\mathfrak{C}$ vers $obj\mathfrak{D}$, ainsi que des fonctions (toujours notées F) de $Mor_{\mathfrak{C}}(A, B)$ vers $Mor_{\mathfrak{D}}(F(A), F(B))$ définies pour tout A, $B \in obj\mathfrak{C}$, qui satisfont les propriétés suivantes :

1. $F(1_A) = 1_{F(A)}$
2. $F(\varphi\psi) = F(\varphi)F(\psi)$, $\forall \varphi \in Mor_{\mathfrak{C}}(B, C), \psi \in Mor_{\mathfrak{C}}(A, B)$

Un *foncteur contravariant* $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ est un foncteur covariant de $\mathfrak{C}$ vers $\mathfrak{D}^{op}$.

Exemple 7.9 L'application $\pi_1 : \mathfrak{Top}_{\mathfrak{pnt}} \to \mathfrak{Gr}$ qui associe à chaque espace pointé son groupe fondamental est un foncteur covariant. En effet, on a vu au chapitre précédent que si f est une application pointée, alors $\pi_1(f)$ est un homomorphisme. On a vu également que $\pi_1(1_A) = 1_{\pi_1(A, a_0)}$ et que $\pi_1(fg) = \pi_1(f)\pi_1(g)$, donc π_1 est bien un foncteur.

7.2 Produits tensoriels

On ne considérera dans ce paragraphe que des anneaux unitaires, et on notera :
${}_R\mathfrak{M}$ = catégorie des R-modules à gauche
$\mathfrak{M}_R$ = catégorie des R-modules à droite

Definition 7.10 Une *application bilinéaire* $\varphi : A \times B \to G$, (où $A \in \mathfrak{M}_R$, $B \in_R \mathfrak{M}$ et $G \in \mathfrak{Ab}$) est une application qui satisfait pour tout $a, a' \in A$, $b, b' \in B$, $r \in R$ les trois égalités suivantes :

1. $\varphi(a, b + b') = \varphi(a, b) + \varphi(a, b')$
2. $\varphi(a + a', b) = \varphi(a, b) + \varphi(a', b)$
3. $\varphi(ar, b) = \varphi(a, rb)$

Definition 7.11 Soient $A \in \mathfrak{M}_R$, $B \in_R \mathfrak{M}$. Un couple (G, φ) est un *produit tensoriel* de A et B si pour tout $H \in \mathfrak{Ab}$, et pour toute application bilinéaire $\psi : A \times B \to H$, il existe un unique $\theta \in Hom(G, H)$ tel que $\theta\varphi = \psi$, c'est-à-dire tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & G \arrow[d, dotted, "\theta"] \\ & H \end{tikzcd}$$

commute.

A nouveau, cette définition implique l'unicité du produit tensoriel à isomorphisme près. On peut montrer que le produit tensoriel peut être construit comme le $\mathbb{Z}$-module engendré par $\{a \otimes b \mid a \in A, b \in B\}$ avec les conditions suivantes vérifiées pour tout $a, a' \in A$, $b, b' \in B$, $r \in R$:

1. $(a + a') \otimes b = a \otimes b + a' \otimes b$
2. $a \otimes (b + b') = a \otimes b + a \otimes b'$
3. $(ar) \otimes b = a \otimes (rb)$

Exemple 7.12 Dans le cas où R est un corps(alors noté $\mathbb{K}$), c'est-à-dire A et B sont des espaces vectoriels, on peut considérer des bases $\{a_i \mid i \in I\}$ de A et $\{b_j \mid j \in J\}$ de B. Une base de $A \otimes B$ est alors donnée par $\{a_i \otimes b_j \mid i \in I, j \in J\}$. En effet, soit $a \otimes b \in A \otimes B$. On peut écrire a et b de manière unique sous la forme $a = \sum_{i \in I} x_i a_i$, $b = \sum_{j \in J} y_j b_j$ (où les $x_i, y_j \in \mathbb{K}$). Ainsi, par les trois conditions ci-dessus, on a

$$a \otimes b = \sum_{i \in I} x_i a_i \otimes \sum_{j \in J} y_j b_j = \sum_{i \in I, j \in J} x_i y_j a_i \otimes b_j$$

Ainsi, tout générateur de $A \otimes B$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des éléments de $\{a_i \otimes b_j \mid i \in I, j \in J\}$. Cet ensemble est donc bien une base de $A \otimes B$.

Proposition 7.13 Soit $M \in \mathfrak{M}_R$, $N_i \in_R \mathfrak{M}$, $i \in \mathcal{I}$. Alors

$$M \otimes_R (\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} N_i) \cong \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} (M \otimes_R N_i)$$

Preuve: Nous faisons la preuve dans le cas où $|\mathcal{I}| = 2$. On veut montrer que $M \otimes (N_1 \oplus N_2)$ est un coproduit de $M \otimes N_1$ et $M \otimes N_2$. Notons $N = N_1 \oplus N_2$ et soient i_1 et i_2 les applications définissant ce coproduit. Celles-ci induisent des applications $i_{1*} \in Hom(M \otimes N_1, M \otimes (N_1 \oplus N_2))$ et $i_{2*} \in Hom(M \otimes N_2, M \otimes (N_1 \oplus N_2))$. Soient φ, φ_1 et φ_2 les applications définissant les produits tensoriels $M \otimes N$, $M \otimes N_1$ et $M \otimes N_2$ respectivement. On a alors une application $\psi = f_1\varphi_1 + f_2\varphi_2 : M \times N \to P$. Donc il existe un unique θ tel que

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & M \otimes N \arrow[d, dotted, "\theta"] \\
& P
\end{tikzcd}$$

commute. On peut alors voir que ce θ fait également commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
& & M \times N_1 \arrow[dl, "id \times i_1"] \arrow[d, "\varphi_1"] & \\
& M \times N \arrow[dr, "\varphi"] & M \otimes N_1 \arrow[d, "i_{1*}"] \arrow[ddr, bend left, "f_1"] & \\
M \times N_2 \arrow[ur, "id \times i_2"] \arrow[r, "\varphi_2"] & M \otimes N_2 \arrow[r, "i_{2*}"] \arrow[drr, bend right, "f_2"'] & M \otimes N \arrow[dr, dotted, "\theta"] & \\
& & & P
\end{tikzcd}$$

□

7.3 Foncteurs exacts

Definition 7.14 Soit $\varphi \in Hom(A, B)$ et $\psi \in Hom(B, C)$. La suite

$$A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$$

est dite *exacte en* B si $\ker \psi = \mathrm{im}\varphi$.

Notons que l'exactitude consiste en deux parties :

(i) La partie $\mathrm{im}\varphi \subset \ker \psi$, pour laquelle il suffit de vérifier que $\psi\varphi = 0$.

(ii) La partie $\ker \psi \subset \mathrm{im}\varphi$, plus difficile à vérifier.

Definition 7.15 Les suites exactes les plus importantes sont les *suites exactes courtes* :

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\pi} C \longrightarrow 0.$$

Dans ce cas, on doit avoir φ injective, π surjective, et $\ker \pi = \mathrm{im}\phi$.

Soit F un foncteur covariant de ${}_R\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{Ab}$ tel que $F(0) = 0$. Alors la suite

$$F(A) \xrightarrow{F(\varphi)} F(B) \xrightarrow{F(\psi)} F(C)$$

satisfait la partie (i), mais il se peut que la partie (ii) ne soit pas vérifiée, ce qui justifie la définition suivante :

Definition 7.16 Soit F un foncteur covariant de ${}_R\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{Ab}$.

(i) F est dit *exact* si pour toute suite exacte courte

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0.$$

on a que

$$0 \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow 0.$$

est aussi exacte.

(ii) Si cette même suite implique l'exactitude de

$$0 \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C),$$

alors F est dit *exact à gauche.*

(iii) Si cette même suite implique l'exactitude de

$$F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow 0,$$

on dit que F est *exact à droite.*

(iv) Si cette même suite implique l'exactitude de

$$F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C),$$

on dit que F est *semi-exact.*

Lemme 7.17 (Lemme des cinq) Supposons que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\varphi_1"] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\varphi_2"] & A_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\varphi_3"] & A_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "\varphi_4"] & A_5 \arrow[d, "\varphi_5"] \\
B_1 \arrow[r, "g_1"] & B_2 \arrow[r, "g_2"] & B_3 \arrow[r, "g_3"] & B_4 \arrow[r, "g_4"] & B_5
\end{tikzcd}$$

est commutatif avec des lignes exactes, et supposons que :

1. φ_2 et φ_4 sont des isomorphismes
2. φ_1 est surjective
3. φ_5 est injective

Alors φ_3 est un isomorphisme.

Lemme 7.18 (Petit lemme des cinq) Supposons que le diagramme

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\eta"] & B \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\psi"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "j'"] & B' \arrow[r, "\pi'"] & C' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

commute. Alors

(i) Si η et φ sont injectives, alors ψ est aussi injective.

(ii) Si η et φ sont surjectives, alors ψ est aussi surjective.

Proposition 7.19 (i) Si $A \in {}_R\mathfrak{M}$, alors $Hom(A, -)$ est exact à gauche.

(ii) Si $A \in {}_R\mathfrak{M}$, alors $Hom(-, A)$ est exact à gauche.

(iii) Si $A \in \mathfrak{M}_R$, alors $A\otimes$ est exact à droite.

Pour certains modules, ces foncteurs sont en fait exacts. Nous verrons dans le paragraphe suivant que ces modules ont des propriétés particulières.

7.4 Modules projectifs, injectifs et plats

Definition 7.20 1. On dit que $A \in_R \mathfrak{M}$ est *projectif* si $Hom(A, -)$ est un foncteur exact.

2. On dit que $A \in_R \mathfrak{M}$ est *injectif* si $Hom(-, A)$ est un foncteur exact.

3. On dit que $A \in \mathfrak{M}_R$ est *plat* si $A\otimes$ est un foncteur exact.

Remarque 7.21 Comme on sait déjà que $Hom(A, -)$ est exact à gauche, il suffit de vérifier, pour voir que A est projectif, que tout diagramme de ce type

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "g"'] \arrow[d, "f"] & \\ B \arrow[r, "\rho"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

avec une ligne exacte peut être complété par un certain homomorphisme g. En effet, complétons le diagramme :

$$\begin{tikzcd} & & & P \arrow[d, "f"] & \\ 0 \arrow[r] & \ker\rho \arrow[r, hook] & B \arrow[r, "\rho"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Comme $Hom(P, -)$ est exact et $\rho : B \to C$ est surjective, $Hom(P, \rho) : Hom(P, B) \to Hom(P, C)$ est surjective. En particulier, il existe un $g \in Hom(P, B)$ tel que $Hom(P, \rho)(g) = f$, donc tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} & & & P \arrow[dl, dotted, "g"'] \arrow[d, "f"] & \\ 0 \arrow[r] & \ker\rho \arrow[r, hook] & B \arrow[r, "\rho"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

La réciproque est vraie également.

Par un argument similaire, E est injectif si et seulement si tout diagramme

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[dl, dotted, "g"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

avec une ligne exacte peut être complété par un certain homomorphisme g.

L'algèbre homologique consiste principalement à regarder à quel point un module donné "s'éloigne" d'être injectif, projectif ou plat.

Proposition 7.22 (i) Soit $A_i \in_R \mathfrak{M}$. Alors $\bigoplus_{i\in\mathcal{I}} A_i$ est projectif si et seulement si chaque A_i est projectif.

(ii) Soit $A_i \in_R \mathfrak{M}$. Alors $\prod_{i\in\mathcal{I}} A_i$ est injectif si et seulement si chaque A_i est injectif.

(iii) Soit $A_i \in \mathfrak{M}_R$. Alors $\bigoplus_{i\in\mathcal{I}} A_i$ est plat si et seulement si chaque A_i est plat.

Proposition 7.23 Soit $A \in {_R\mathfrak{M}}$. Alors

(i) Il existe un module projectif P tel que A est son image par un homomorphisme $P \to A$.

(ii) Il existe un module injectif E tel qu'on ait un homomorphisme injectif $A \to E$.

Lemme 7.24 (Test injectif) Soit $E \in {_R\mathfrak{M}}$. Alors E est injectif si et seulement s'il existe un g faisant commuter n'importe quel diagramme du type

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[dl, dotted, "g"] \\ & E & \end{tikzcd},$$

où I est un idéal à gauche de R.

Lemme 7.25 (Test projectif) Soit $P \in {_R\mathfrak{M}}$. Alors s'il existe un g faisant commuter tout diagramme

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "g"'] & \\ E \arrow[r, "\pi"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd},$$

où E est injectif, alors P est projectif.

7.5 Résolutions projectives

Definition 7.26 On appelle *complexe* une suite

$$A \xrightarrow{d} B \xrightarrow{\partial} C$$

telle que $\partial d = 0$, c'est-à-dire im$d \subset \ker \partial$. On définit alors l'*homologie* du complexe comme le quotient $\ker \partial / \mathrm{im} d$.

Si ce quotient est trivial, alors la suite est exacte. Ainsi l'homologie mesure à quel point une suite diffère d'une suite exacte.

Definition 7.27 Un *complexe de chaînes*, noté (C, d) est une suite

$$\cdots \longrightarrow C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \longrightarrow C_0$$

telle que $d_n d_{n+1} = 0$ pour tout $n \geq 0$. Sa *n-ième homologie* H_n est $kerd_n/imd_{n+1}$.

Exemple 7.28 (Calcul d'homologies) Considérons le complexe de chaînes $\mathcal{C}$ suivant :

$$\cdots \longrightarrow 0 \xrightarrow{d_4} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow[\times 6]{d_3} \mathbb{Z}_{12} \xrightarrow[\times 8]{d_2} \mathbb{Z}_{24} \xrightarrow{d_1} 0.$$

D'où l'on calcule les homologies :

$$H_1\mathcal{C} \cong \frac{\ker d_1}{\mathrm{im} d_2} \cong \mathbb{Z}_8$$
$$H_2\mathcal{C} \cong \frac{\ker d_2}{\mathrm{im} d_3} \cong \mathbb{Z}_2$$
$$H_n\mathcal{C} \cong \frac{\ker d_n}{\mathrm{im} d_(n+1)} \cong \{0\},\ \forall n > 2$$

Supposons que le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\psi"'] & C \arrow[d, "\eta"'] \\ A' \arrow[r, "d'"] & B' \arrow[r, "\partial'"] & C' \end{tikzcd}$$

commute, où les lignes sont des complexes. Soient H et H' les homologies en B et B' respectivement. Alors ψ induit un homomorphisme

$$\psi_* : H \to H'$$

$$(x + \mathrm{im} d) \mapsto \psi(x) + \mathrm{im} d'$$

Nous devons vérifier que ψ_* est bien défini et prend effectivement des valeurs dans H'.

(i) ψ_* est bien défini : Si $x + \mathrm{im} d = y + imd$ alors $x - y \in \mathrm{im} d$, donc $x - y = d(z)$ pour un certain $z \in A$. Alors $\psi(x - y) = \psi d(z) = d'\varphi(z)$, et donc $\psi(x) - \psi(y)\mathrm{im} d'$, c'est-à-dire $\psi(x) + \mathrm{im} d' = \psi(y) + imd'$.

(ii) ψ_* est à valeurs dans H' : Si $x \in \ker \partial$, alors $\partial'(\psi(x)) = \eta\partial(x) = 0$, donc $\psi(x) \in \ker \partial'$ et $\psi(x) + \mathrm{im} d' \in H'$.

Definition 7.29 Soit $B \in {}_R\mathfrak{M}$. Une *résolution projective* (respectivement *libre*) de B, notée (P_n, d_n) est une suite exacte

$$\cdots \longrightarrow P_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\pi} B \longrightarrow 0$$

où tous les P_n sont projectifs (respectivement libres).

Notons que tout module à gauche possède une résolution projective, grâce à la proposition 7.23.

Definition 7.30 Soit $A \in \mathfrak{M}_R$. On applique le foncteur $A\otimes$ à une résolution projective de $B \in_R \mathfrak{M}$, en supprimant le terme $A \otimes B$:

$$\cdots \longrightarrow A \otimes P_{n+1} \xrightarrow{A\otimes d_{n+1}} A \otimes P_n \xrightarrow{A\otimes d_n} \cdots \longrightarrow A \otimes P_1 \xrightarrow{A\otimes d_1} A \otimes P_0 \xrightarrow{A\otimes d_0} 0$$

On définit alors $Tor_n^R(A,B) = \ker(A \otimes d_n)/\mathrm{im}(A \otimes d_{n+1})$ (la n-ième homologie de ce complexe). On peut montrer que Tor est indépendant de la résolution projective choisie.

Exemple 7.31 **($Tor_n^{\mathbb{Z}_8}(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_4)$)** On trouve une résolution projective de $\mathbb{Z}_4$:

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}_8 \xrightarrow{\times 4} \mathbb{Z}_8 \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}_8 \xrightarrow{\times 4} \mathbb{Z}_8 \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_4 \longrightarrow 0.$$

On tensorise avec $\mathbb{Z}_4$ et laisse tomber le dernier terme :

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_4 \longrightarrow 0.$$

On obtient donc :

$$\begin{array}{l} Tor_0^{\mathbb{Z}_8}(\mathbb{Z}_4,\mathbb{Z}_4) \cong \mathbb{Z}_4/\{0\} \cong \mathbb{Z}_4 \\ Tor_1^{\mathbb{Z}_8}(\mathbb{Z}_4,\mathbb{Z}_4) \cong \mathbb{Z}_4/\mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2 \\ Tor_2^{\mathbb{Z}_8}(\mathbb{Z}_4,\mathbb{Z}_4) \cong \mathbb{Z}_2/\{0\} \cong \mathbb{Z}_2 \\ Tor_3^{\mathbb{Z}_8}(\mathbb{Z}_4,\mathbb{Z}_4) \cong \mathbb{Z}_4/\mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2 \\ \vdots \\ Tor_n^{\mathbb{Z}_8}(\mathbb{Z}_4,\mathbb{Z}_4) \cong \mathbb{Z}_2,\ \forall n \geq 1. \\ \vdots \end{array}$$

Definition 7.32 Soit $C \in_R \mathfrak{M}$. On applique le foncteur contravariant $Hom_R(-,C)$ à une résolution projective de B, en supprimant $Hom(B,C)$:

$$\cdots \longleftarrow Hom(P_n,C) \xleftarrow[Hom(d_n,C)]{} \cdots \longleftarrow Hom(P_1,C) \xleftarrow[Hom(d_1,C)]{} Hom(P_0,C) \xleftarrow[Hom(d_0,C)]{} 0$$

Alors $Ext_R^n(B,C)$ est défini comme la n-ième homologie de ce complexe.

Voyons pour conclure ce paragraphe quelques propriétés de Tor et Ext.

Proposition 7.33 Soient $A \in \mathfrak{M}_R, B, C \in_R \mathfrak{M}$. Alors

1. $Tor_0(A,B) \cong A \otimes B$
2. $Ext^0(B,C) \cong Hom(B,C)$
3. $Tor_n(A,B) = 0$ si A est plat ou B est projectif, et $n \geq 1$
4. $Ext^n(B,C) = 0$ si B est projectif ou C est injectif, et $n \geq 1$

7.6 Suites exactes longues

Nous avons vu au paragraphe précédent ce qu'est un complexe de chaînes. En fait, nous pouvons parler de la *catégorie des complexes de chaînes*, que nous noterons $\mathfrak{Ch}$. Pour cela, nous devons définir des morphismes dans cette catégorie.

Definition 7.34 Soient (C, d), (C', d') des complexes de chaînes. On appelle *homomorphisme de complexes de chaînes* une famille φ d'homomorphismes $\varphi_i : C_i \to C'_i$ tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & C_i \arrow[r, "d_i"] \arrow[d, "\varphi_i"] & C_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{i-1}"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & C'_i \arrow[r, "d'_i"] & C'_{i-1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

commute.

Definition 7.35 Une *suite exacte courte* de complexes de chaînes

$$0 \longrightarrow \mathcal{C} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{C}' \xrightarrow{\psi} \mathcal{C}'' \longrightarrow 0$$

est un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & C_i \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "d_i"] & C'_i \arrow[r, "\psi_i"] \arrow[d, "d'_i"] & C''_i \arrow[r] \arrow[d, "d''_i"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C_{i-1} \arrow[r, "\varphi_{i-1}"] \arrow[d] & C'_{i-1} \arrow[r, "\psi_{i-1}"] \arrow[d] & C''_{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \end{tikzcd}$$

avec des lignes exactes.

Théorème 7.36 Soit

$$0 \longrightarrow \mathcal{C} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{C}' \xrightarrow{\psi} \mathcal{C}'' \longrightarrow 0$$

une suite exacte courte de complexes de chaînes. Alors il existe une suite d'applications $\delta_n : H_n(\mathcal{C}'') \to H_{n-1}(\mathcal{C})$ telles que

$$\begin{tikzcd} & \cdots \arrow[r] & H_{n+1}(\mathcal{C}'') \arrow[dll, bend left, "\delta_{n+1}"] \\ H_n(\mathcal{C}) \arrow[r, "H_n(\varphi)"] & H_n(\mathcal{C}') \arrow[r, "H_n(\psi)"] & H_n(\mathcal{C}'') \arrow[dll, "\delta_n"] \\ \cdots & & \end{tikzcd}$$

est exact. Les δ_n sont appelés *connectants*.

Preuve: Revenons au diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C_n \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[d, "d_n"] & C'_n \arrow[r, "\psi_n"] \arrow[d, "d'_n"] & C''_n \arrow[r] \arrow[d, "d''_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_{n-1} \arrow[r, "\varphi_{n-1}"] \arrow[d] & C'_{n-1} \arrow[r, "\psi_{n-1}"] \arrow[d] & C''_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

et soit $x \in \ker d''_n$. Comme ψ_n est surjectif, il existe $y \in C'_n$ avec $\psi_n(y) = x$. On a donc $d''_n\psi_n(y) = \psi_{n-1}d'_n(y) = 0$, alors $d'_n(y) \in \ker\psi_{n-1} = \mathrm{im}\varphi_{n-1}$. Comme φ_{n-1} est injectif, il existe un unique $z \in C_{n-1}$ tel que $\varphi_{n-1}(z) = d'_n(y)$. Voyons encore que $\varphi_{n-2}d_{n-1}(z) = d'_{n-1}\varphi_{n-1}(z) = d'_{n-1}d'_n(y) = 0$, donc $d_{n-1} = 0$ (φ_{n-2} est injectif). Ainsi $z \in \ker d_{n-1}$, c'est-à-dire $z + \mathrm{im}d_n \in H_{n-1}(\mathcal{C})$. On définit alors $\delta_n(x + \mathrm{im}d''_{n+1}) =$ la classe de ce z.
On peut montrer que cette définition est indépendante du choix de y, et que si $x \in \mathrm{im}d''_{n+1}$, alors $z \in \mathrm{im}d_n$, d'où l'on tire finalement que δ_n est un homomorphisme, et qu'il est bien défini.
La vérification du fait que la suite est exacte n'est pas faite ici.

Les deux théorèmes suivants sont des corollaires importants de ce théorème.

Théorème 7.37 (Première suite exacte longue pour Tor) Soit

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow A' \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

une suite exacte courte dans $\mathfrak{M}_R$. Alors pour tout $B \in {}_R\mathfrak{M}$, il existe une suite exacte longue :

$$\begin{tikzcd}
 & \cdots \arrow[r] & Tor_{n+1}(A'', B) \arrow[dll, "\delta_{n+1}"'] \\
Tor_n(A, B) \arrow[r] & Tor_n(A', B) \arrow[r] & Tor_n(A'', B) \arrow[dll, "\delta_n"'] \\
\cdots & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & Tor_1(A', B) \arrow[r] & Tor_1(A'', B) \arrow[dll, "\delta_1"'] & \\
A \otimes B \arrow[r] & A' \otimes B \arrow[r] & A'' \otimes B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Théorème 7.38 (Première suite exacte longue pour Ext) Soit

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow C' \longrightarrow C'' \longrightarrow 0$$

une suite exacte courte dans ${}_R\mathfrak{M}$. Alors pour tout $B \in {}_R\mathfrak{M}$, il existe une suite exacte longue :

$$
\begin{tikzcd}
 & Ext^{n+1}(B,C) \arrow[r] & \cdots & \\
 & Ext^{n}(B,C) \arrow[r] & Ext^{n}(B,C') \arrow[r] & Ext^{n}(B,C'') \arrow[ull] \\
 & & \cdots & {} \arrow[ull] \\
 & Ext^{1}(B,C) \arrow[r] & Ext^{1}(B,C') \arrow[r] & \cdots \\
0 \arrow[r] & Hom(B,C) \arrow[r] & Hom(B,C') \arrow[r] & Hom(B,C'') \arrow[ull]
\end{tikzcd}
$$

8 Complexes cellulaires

Ce chapitre est consacré à des objets purement topologiques : les complexes cellulaires et CW-complexes. Mais nous verrons par la suite des liens avec ce qui a été fait précédemment. Par exemple, pour une présentation de groupe donnée, on peut construire un complexe cellulaire dont le groupe fondamental est le groupe correspondant à cette présentation.

Definition 8.1 (i) Une *n-cellule euclidienne fermée*, notée E^n, est l'image par un homéomorphisme du n-cube euclidien I^n, où $I = \{t \in \mathbb{R} | 0 \leq t \leq 1\}$. Généralement, on parlera simplement de *n-cellule fermée*.

(ii) Le *bord* ∂E^n d'une n-cellule euclidienne fermée est sa frontière topologique en tant que convexe de $\mathbb{R}^n$. On note qu'il est homéomorphe à la $(n-1)$-sphère $\mathbb{S}^{n-1}$.

(iii) L'*intérieur* d'une n-cellule est $\dot{E}^n = E^n - \partial E^n$.

(iv) Une *n-cellule ouverte* est l'image par un homéomorphisme de $\dot{E}^n$ (et est donc homéomorphe à $\mathbb{R}^n$).

Nous utiliserons par exemple comme n-cellule le n-disque $\mathbb{D}^n$.

Definition 8.2 Soit X un ensemble. Une *structure cellulaire* sur X est une paire (X, Φ), où Φ est une collection d'applications de cellules euclidiennes fermées dans X, avec les trois conditions suivantes :

(i) Si $\varphi \in \Phi$ est de domaine E^n, alors φ est injective sur $\dot{E}^n$.

(ii) L'ensemble $\{\varphi(\dot{E}^n) | \varphi \in \Phi\}$ partitionne X.

(iii) Si $\varphi \in \Phi$ a E^n comme domaine, alors $\varphi(\partial E^n) \subset \bigsqcup\{\psi(\dot{E}^k) | \psi \in \Phi$ est de domaine E^k avec $k \leq n-1\}$.

Les images $\varphi(E^n)$ seront notées σ^n et on parlera aussi de *n-cellules fermées* ou simplement de *n-cellules*. On dira que φ est une *application caracatéristique* pour la cellule σ^n. On parlera aussi du *bord* $\partial\sigma$ et de l'*intérieur* $\dot{\sigma}$ pour $\varphi(\partial E^n)$ et $\varphi(\dot{E}^n)$ respectivement. Et si $n > 0$, on dire que $\varphi(\dot{E}^n)$ est une *n-cellule ouverte*. Cette terminologie est usuelle, mais pas forcément adaptée si l'on veut munir X d'une topologie.

Definition 8.3 La réunion disjointe $\bigsqcup\{\psi(\dot{E}^k) | \psi \in \Phi$ est de domaineE^k avec $k \leq n\}$ des cellules de dimension $\leq n$ est appelée le *n-skeleton* de la structure cellulaire.

Le lemme suivant permettra d'éclaircir un peu la situation :

Lemme 8.4 Soit (X, Φ) une structure cellulaire. Alors

(i) Pour toute cellule σ^n, on a $\dot{\sigma}^n = \sigma^n - \partial\sigma^n$.

(ii) Chaque n-cellule est un sous-ensemble du n-skeleton X^n.

(iii) Pour tout n, $X^n = \bigcup\{\sigma^k | \sigma^k$ est une k-cellule de (X, Φ) et $k \leq n\}$. Autrement dit, le n-skeleton est la réunion de toutes les cellules de dimension $\leq n$.

On peut voir maintenant, de manière plus intuitive,qu'une structure cellulaire est construite en ajoutant à chaque étape k des cellules de dimension k, de telle sorte que leur bord soit "collé" aux cellules déjà mises en place, autrement dit au $(k-1)$-skeleton.

Definition 8.5 On dit que deux structures cellulaires (X, Φ) et (X, Φ') sont *strictement équivalentes* si à chaque application caractéristique de Φ de domaine E^n correspond une application caractéristique de Φ' de domaine E^n, telles que l'on puisse passer de l'une à l'autre par une reparamétrisation de leur domaine.
On peut vérifier qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence.

Notation Si (X, Φ) est une structure cellulaire, on note $[\varphi]$ pour la classe d'équivalence stricte d'une application caractéristique d'image σ^n, et $\mathcal{S}_\Phi$ pour l'ensemble des paires $(\sigma^n, [\varphi])$. Notons que si (X, Φ) et (X, Φ') sont strictement équivalentes, alors $\mathcal{S}_\Phi = \mathcal{S}_{\Phi'}$.

Definition 8.6 Un *complexe cellulaire* sur X est une classe d'équivalence stricte de structures cellulaires. Il sera noté par $(X, \mathcal{S})$, où $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\Phi$ pour un certain représentant (X, Φ) de la classe. L'ensemble $\mathcal{S}$ est appelé ensemble des *cellules* de $(X, \mathcal{S})$.

Definition 8.7 Un *sous-complexe* $(A, \mathcal{J})$ d'un complexe cellulaire $(X, \mathcal{S})$, noté $(A, \mathcal{J}) \subset (X, \mathcal{S})$, est un complexe cellulaire tel que $A \subset X$ et $\mathcal{J} \subset \mathcal{S}$.

Par exemple, si $(X, \mathcal{S})$ est un complexe cellulaire, et $\mathcal{S}^n = \{\sigma^p \in \mathcal{S} \mid p \leq n\}$, alors $(X^n, \mathcal{S}^n)$ est un sous-complexe de $(X, \mathcal{S})$ appelé le *n-skeleton* de $(X, \mathcal{S})$.

Lemme 8.8 Soit $(X, \mathcal{S})$ un complexe cellulaire, et $\{(X_\gamma, \mathcal{S}_\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\}$ une famille de sous-complexes. Alors $(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma, \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{S}_\gamma)$ et $(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma, \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{S}_\gamma)$ sont aussi des sous-complexes.

Proposition 8.9 Soit $(A, \mathcal{J})$ un sous-complexe d'un complexe cellulaire $(X, \mathcal{S})$, et σ une cellule dans $\mathcal{S}$. Alors σ est une cellule dans $\mathcal{J}$ si et seulement si $\dot{\sigma} \cap A \neq \emptyset$.

Definition 8.10 Un complexe cellulaire $(X, \mathcal{S})$ est *fini* si $\mathcal{S}$ est un ensemble fini. Il est *localement fini* si chaque cellule fermée rencontre un nombre fini de cellules, et d'*adhérence finie* si chaque n-cellule rencontre un nombre fini de cellules ouvertes $\dot{\sigma^p}$ avec $p < n$.

8.1 Exemple : Les espaces projectifs

Considérons un corps $\mathbb{F}$, avec $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$ (cas des nombres réels et complexes). Notons $d = d_\mathbb{F}$ la dimension de $\mathbb{F}$ comme algèbre sur $\mathbb{R}$ (donc $d_\mathbb{C} = 2$ et $d_\mathbb{R} = 1$). Soit $\mathbb{F}^n$ l'espace vectoriel constitué de n-uples de $\mathbb{F}$, avec le produit scalaire usuel $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y}_i$. Notons $G_\mathbb{F}$ le groupe multiplicatif défini par

$$G_\mathbb{F} = \{u \in \mathbb{F} | u\overline{u} = 1\},$$

que l'on peut clairement identifier à $\mathbb{S}^{d-1}$. On remarque aussi que

$$\mathbb{S}^{dn-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{F}^n | \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 1\},$$

et que l'on peut définir une action π de $G_{\mathbb{F}}$ sur $\mathbb{S}^{dn-1}$:

$$\pi : G_{\mathbb{F}} \times \mathbb{S}^{dn-1} \to \mathbb{S}^{dn-1},$$

avec $\pi(u, \mathbf{x}) = u\mathbf{x}$ (multiplication par un scalaire). On a bien $u\mathbf{x} \in \mathbb{S}^{dn-1}$ car $\sum_{i=1}^{n} ux_i\overline{ux_i} = u\overline{u}\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{x_i} = 1$. Cette action définit donc des orbites $G_{\mathbb{F}}\mathbf{x}$ dans $\mathbb{S}^{dn-1}$, qui sont des classes d'équivalence. L'ensemble de ces classes d'équivalence est appelé *espace projectif réel* (si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$) ou *espace projectif complexe* (si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$), et on le note $\mathbb{F}P^{n-1}$. La classe de $\mathbf{x}$ est notée $[\mathbf{x}]$ ou $[x_1, \dots, x_n]$, et l'application quotient $\pi_{\mathbb{F}}$. Pour deux éléments $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ de $\mathbb{S}^{dn-1}$, on a $[x_1, \dots, x_n] = [y_1, \dots, y_n]$ si et seulement s'il existe un $u \in G_{\mathbb{F}}$ tel que $ux_k = uy_k$ pour tout k entre 1 et n.

L'inclusion

$$\iota_n : \mathbb{F}^n \hookrightarrow \mathbb{F}^{n+1}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0)$$

induit l'inclusion $\iota_n(\mathbb{S}^{dn-1}) \subset \mathbb{S}^{(d+1)n-1}$ (il est clair que si $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = 1$, alors $\langle \iota_n(\mathbf{x}), \iota_n(\mathbf{x})\rangle = 1$), et par passage au quotient $\iota_n(\mathbb{F}P^{n-1}) \subset \mathbb{F}P^n$. Finalement, on définit $\mathbb{F}P^\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{F}P^n$, qui est appelé *espace projectif de dimension infinie* (réel ou complexe).

On peut maintenant définir une structure cellulaire $(\mathbb{F}P^{n-1}, \Phi_{\mathbb{F}}^{n-1})$ sur les espaces projectifs en posant $\Phi_{\mathbb{F}}^{n-1} = \{\varphi_{\mathbb{F}}^0, \varphi_{\mathbb{F}}^d, \dots, \varphi_{\mathbb{F}}^{(n-1)d}\}$, où $\varphi_{\mathbb{F}}^{kd} : \mathbb{D}^{kd} \to \mathbb{F}P^{n-1}$ est donné par :

$$\varphi_{\mathbb{F}}^{kd}(x_1, \dots, x_k) = [x_1, \dots, x_k, \sqrt{1 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}, \overbrace{0, \dots, 0}^{n-(k+1)}].$$

Vérifions que $(\mathbb{F}P^{n-1}, \Phi_{\mathbb{F}}^{n-1})$ est bien une structure cellulaire :

1. Supposons que $\varphi_{\mathbb{F}}^{kd}(\mathbf{x}) = \varphi_{\mathbb{F}}^{kd}(\mathbf{y})$, c'est-à-dire
$$[x_1, \dots, x_k, \sqrt{1 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}, 0, \dots, 0] = [y_1, \dots, y_k, \sqrt{1 - \langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle}, 0, \dots, 0]$$
. Alors il existe $u \in G_{\mathbb{F}}$ tel que
$$(y_1, \dots, y_k, \sqrt{1 - \langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle}, 0, \dots, 0) = (ux_1, \dots, ux_k, u\sqrt{1 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}, 0, \dots, 0)$$
. Mais $\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle = \langle u\mathbf{x}, u\mathbf{x}\rangle = u\overline{u}\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle$, et alors $u = 1$, donc $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ et $\varphi_{\mathbb{F}}^{kd}$ est injective.
2. Si $\mathbf{x} \in \dot{\mathbb{D}}^{kd}$, alors $\sqrt{1 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle} \neq 0$, et donc la $(k + 1)^e$ composante de $\varphi_{\mathbb{F}}^{kd}(\mathbf{x})$ est la dernière non nulle, ceci pour tout k. Donc les images $\varphi_{\mathbb{F}}^{kd}(\dot{\mathbb{D}}^{kd})$ pour $k = 0, 1, \dots, n - 1$ sont disjointes. De plus, il est clair que tous les éléments de $\mathbb{F}P^{n-1}$ possèdent une préimage dans l'un des $\dot{\mathbb{D}}^{kd}$: plus précisément, la classe d'un point dont la $(k + 1)^e$ composante est la dernière non nulle a une préimage dans $\dot{\mathbb{D}}^{kd}$. Donc les $\varphi_{\mathbb{F}}^{kd}(\dot{\mathbb{D}}^{kd})$ partitionnent $\mathbb{F}P^{n-1}$.
3. Si $\mathbf{x} \in \partial\mathbb{D}^{kd}$, alors $\sqrt{1 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle} = 0$, et donc $\varphi_{\mathbb{F}}^{kd}(\mathbf{x}) \in \varphi_{\mathbb{F}}^{kd}(\dot{\mathbb{D}}^{(k-1)d})$. Donc $\varphi_{\mathbb{F}}^{kd}(\partial\mathbb{D}^{kd}) \subset \varphi_{\mathbb{F}}^{kd}(\dot{\mathbb{D}}^{(k-1)d})$.

Ainsi $(\mathbb{F}P^{n-1}, \Phi_{\mathbb{F}}^{n-1})$ est une structure cellulaire, et si $\mathcal{S}^{n-1}$ est l'ensemble des cellules, alors $(\mathbb{F}P^{n-1}, \mathcal{S}^{n-1})$ est un complexe cellulaire. Et comme $\mathbb{F}P^{n-1} \subset \mathbb{F}P^n$, et $\Phi_{\mathbb{F}}^n = \Phi_{\mathbb{F}}^{n-1} \cup \{\varphi_{\mathbb{F}}^{nd}\}$, $(\mathbb{F}P^{n-1}, \mathcal{S}^{n-1})$ est un sous-complexe de $(\mathbb{F}P^n, \mathcal{S}^n)$. Finalement, en posant $\mathcal{S} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{S}_n$, $(\mathbb{F}P^\infty, \mathcal{S})$ est un complexe cellulaire ayant $(\mathbb{F}P^n, \mathcal{S}^n)$ comme n-skeleton.

8.2 La topologie des porteurs

Dans ce paragraphe nous munissons les complexes cellulaires d'une topologie.

Definition 8.11 La *topologie des porteurs* d'un complexe cellulaire $(X, \mathcal{S})$ est la topologie sur X pour laquelle les ensembles fermés sont les sous-complexes de $(X, \mathcal{S})$.

Le lemme 8.8 nous garantit qu'il s'agit bien d'une topologie. Il faut toutefois faire attention au fait qu'une "cellule fermée" peut ne pas être fermée dans cette topologie.

L'adhérence d'un ensemble A est le plus petit sous-complexe dont l'ensemble sous-jacent contient A. On peut décrire cela de la manière suivante.

Definition 8.12 Soit $(X, \mathcal{S})$ un complexe cellulaire. Le *porteur* de $A \subset X$ est l'intersection de tous les sous-complexes de $(X, \mathcal{S})$ dont l'ensemble sous-jacent contient A. On le note $C(A)$.

Remarquons que grâce au lemme 8.8, la topologie des porteurs a la propriété que la réunion de toute famille de fermés est fermée.

Lemme 8.13 Soit $(X, \mathcal{S})$ un complexe cellulaire et $A \subset X$. Alors

$$C(A) = \bigcup \{C(\sigma) \mid \sigma \in \mathcal{S} \text{ et } \dot{\sigma} \cap A \neq \emptyset\}.$$

Preuve: Comme les ensembles $\dot{\sigma}$ partitionnent X, on voit que

$$A \subset \bigcup \{\sigma \mid \sigma \in \mathcal{S} \text{ et } \dot{\sigma} \cap A \neq \emptyset\}.$$

Par les propriétés de l'adhérence, on en tire que

$$C(A) \subset \bigcup \{C(\sigma) \mid \sigma \in \mathcal{S} \text{ et } \dot{\sigma} \cap A \neq \emptyset\}.$$

Réciproquement, si $\sigma \in \mathcal{S}$ est telle que $\dot{\sigma} \cap A \neq \emptyset$, alors $\dot{\sigma}$ rencontre tout sous-complexe de $(X, \mathcal{S})$ qui contient A. Par la proposition 8.9, σ doit être contenu dans un tel complexe, donc $\sigma \subset C(A)$. Alors $C(\sigma) \subset C(A)$ et

$$\bigcup \{\sigma \mid \sigma \in \mathcal{S} \text{ et } \dot{\sigma} \cap A \neq \emptyset\} \subset C(A).$$

$\square$

Corollaire 8.14 Si $x \in \dot{\sigma}$, alors $C(\{x\}) = C(\dot{\sigma}) = C(\sigma)$.

Lemme 8.15 Soit $(X, \mathcal{S})$ un complexe cellulaire et $\sigma \in \mathcal{S}$. Alors

$$C(\sigma) = C(\partial\sigma) \cup \dot{\sigma}$$

Definition 8.16 Un complexe cellulaire $(X, \mathcal{S})$ est dit *connexe* s'il est connexe pour la topologie des porteurs.

On peut alors montrer le résultat suivant.

Proposition 8.17 Soit σ une cellule d'un complexe cellulaire. Alors σ et $C(\sigma)$ sont tous les deux connexes.

Definition 8.18 Soit $(X, \mathcal{S})$ un complexe cellulaire. Un *chemin combinatoire* de $(X, \mathcal{S})$ est une suite $(x_0, \cdots, x_n)$ de points de X tels qu'il existe des cellules $\sigma_i \in \mathcal{S}$ pour lesquelles $\{x_{i-1}, x_i\} \subset \sigma_i,\ i = 1, \cdots, n$. On dit alors qu'il s'agit d'un *chemin de* x_0 *à* x_n.

On peut encore montrer deux résultats intéressants.

Proposition 8.19 Soit $(X, \mathcal{S})$ un complexe cellulaire, et notons $C_x \subset X$ la composante connexe de $x \in X$ dans la topologie des porteurs. Soit $K_x = \{y \in X \mid \text{il y a un chemin de } x \text{ à } y\}$. Alors $K_x = C_x$.

Proposition 8.20 Soit $(X, \mathcal{S})$ un complexe cellulaire. Si le k-skeleton X^k est connexe pour un $k \geq 1$, alors X est connexe.

8.3 CW complexes

Nous cherchons maintenant à faire un lien entre la structure cellulaire d'un complexe $(X, \mathcal{S})$ et une topologie sur l'ensemble X. Pour cela nous allons construire les *CW complexes*. Nous ne donnons ici que quelques définitions et premières propriétés (sans démonstration). Ces résultats sont là pour justifier l'utilité de cette construction.

Definition 8.21 Choisissons un ensemble de fonctions caractéristiques $\{\varphi_\sigma \mid \sigma \in \mathcal{S}\}$ pour les cellules de $\mathcal{S}$. Alors la *topologie faible sur* X *relativement à* $\mathcal{S}$ est définie comme suit :

(a) On munit chaque cellule $\sigma \in \mathcal{S}$ de la topologie quotient par rapport à sa fonction caractéristique.

(b) On dit qu'un ensemble $F \subset X$ est fermé si et seulement si $F \cap \sigma$ est fermé dans σ pour tout $\sigma \in \mathcal{S}$.

Definition 8.22 Un espace de Hausdorff X est un *CW complexe* relativement à $\mathcal{S}$ si les trois conditions suivantes sont vřifiées :

(i) $(X, \mathcal{S})$ est un complexe cellulaire tel que chaque cellule $\sigma \in \mathcal{S}$ a une fonction caractéristique continue.

(ii) L'espace X a la topologie faible relativement à $\mathcal{S}$.

(iii) $(X, \mathcal{S})$ est d'adhérence finie.

On dira aussi que X est un *CW complexe avec cellules* $\mathcal{S}$.

Lemme 8.23 Soit X un CW complexe avec cellules $\mathcal{S}$. Alors

(i) Chaque cellule $\sigma \in \mathcal{S}$ est un sous-ensemble fermé de X.

(ii) Pour chaque cellule $\sigma \in \mathcal{S}$, la restriction de l'application caractéristique φ_σ à $\dot{E}_\sigma$ est un homéomorphisme sur $\dot{\sigma}$.

Proposition 8.24 Soit X un CW complexe avec cellules $\mathcal{S}$, Y un espace topologique, et $f : X \to Y$ une application. Alors f est continue si et seulement si sa restriction à chaque cellule $\sigma \in \mathcal{S}$ est continue.

Proposition 8.25 Soit X un CW complexe avec cellules $\mathcal{S}$, et $(A, \mathcal{J})$ un sous-complexe de $(X, \mathcal{S})$. Alors

(i) A est fermé dans X.

(ii) Pour la topologie induite A est un CW complexe avec cellules $\mathcal{J}$.

9 2-syzygies homotopiques et homologiques

Dans ce chapitre nous allons utiliser de nombreuses notions vues précédemment. A partir d'une présentation de groupe, nous allons construire un complexe cellulaire dont le groupe fondamental est le groupe correspondant à la présentation donnée. Puis à partir de ce complexe cellulaire, nous pourrons construire une résolution libre de $\mathbb{Z}$.

9.1 2-syzygies homotopiques

Soit $(\mathbf{x} : \mathbf{r})$ une présentation de groupe. On note n pour le nombre de générateurs, m pour le nombre de relateurs, et G pour le groupe correspondant. Nous commençons la construction d'un complexe cellulaire en posant $X^0 = x_0$ (un point). Puis on pose comme 1-skeleton

$$X^1 = X^0 \vee \bigvee_{x \in \mathbf{x}} e^1_x,$$

le bouquet de 1-cellules e^1. Comme espace topologique c'est le bouquet de cercles ayant X^0 comme point de base. On a vu que son groupe fondamental est un groupe libre sur n générateurs. Pour le 2-skeleton on construit

$$X^2 = X^1 \cup \bigcup_{r \in \mathbf{r}} e^2_r,$$

où les 2-cellules e^2 sont construites ainsi : pour un relateur $r = x_1 \dots x_n$, où x_i est soit un générateur soit l'inverse d'un générateur, e^2_r est un polygone à n côtés dont le bord ∂e^2_r est identifié avec les 1-cellules correspondant aux x_i, parcourues dans un sens ou dans l'autre selon qu'il s'agit d'un générateur ou de son inverse. Posons $U =$ l'ensemble des 2-cellules, $V = X^1$. Alors $U \cap V =$ les bords des 2-cellules.

Alors par le théorème de Seifert-van Kampen le groupe fondamental de X^2 est la somme amalgamée

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(\mathbf{r}) \arrow[r] \arrow[d] & \{e\} \\ \mathcal{F}(\mathbf{x}) & \end{tikzcd}$$

Ainsi, grâce à la proposition 3.7, on a $\pi_1(X^2) \cong \mathcal{F}(\mathbf{x})/Q(\mathbf{r}) \cong G$.

Par définition une 2-*syzygie homotopique* est une décomposition cellulaire de S^2 avec des applications caractéristiques $\varphi : S^2 \to X^2$. Les bords orientés des cellules sont envoyés sur les générateurs, et les faces vers les relateurs (ou leurs inverses). Une famille $\{\varphi_p\}_{p \in \mathcal{P}}$ de 2-syzygies homotopiques est dite *complète* si les classes d'homotopie $\{[\varphi_p]\}_{p \in \mathcal{P}}$ génèrent $\pi_2(X^2)$. Dans ce cas on peut former le 3-skeleton

$$X^3 = X^2 \cup \bigcup_{p \in \mathcal{P}} e^3_p$$

en attachant des 3-cellules à X^2 avec les φ_p pour tout $p \in \mathcal{P}$. Alors on peut voir que

$$\pi_1(X^3) = G, \ \pi_2(X^3) = 0.$$

9.2 2-syzygies homologiques

On considère à nouveau la présentation $(\mathbf{x} : \mathbf{r})$ d'un groupe G. Soient les modules libres sur $\mathbb{Z}[G]$ suivants (où les valeurs entre crochets servent à identifier les différentes copies de $\mathbb{Z}[G]$) :

$$\begin{aligned} C_0(G) &= \mathbb{Z}[G][1] \\ C_1(G) &= \textstyle\bigoplus_{x\in\mathbf{x}} \mathbb{Z}[G][x] \\ C_2(G) &= \textstyle\bigoplus_{r\in\mathbf{r}} \mathbb{Z}[G][r]\ . \end{aligned}$$

On définit des homomorphismes $d_0 : C_0(G) \to \mathbb{Z}$, $d_1 : C_1(G) \to C_0(G)$, $d_2 : C_2(G) \to C_1(G)$ par

$$\begin{aligned} d_0([1]) &= 1 \\ d_1([x]) &= (1-x)[1] \\ d_2(x_1 \dots x_k) &= [x_1] + x_1[x_2] + \dots + x_1x_2\dots x_{k-1}[x_k] \end{aligned}$$

avec les conventions suivantes : $[x^{-1}] = -x^{-1}[x]$, et $[1] = 0$ dans $C_1(G)$. Alors on peut vérifier que

$$C_2(G) \xrightarrow{d_2} C_1(G) \xrightarrow{d_1} C_0(G) \xrightarrow{d_0} \mathbb{Z}$$

est le début d'une résolution libre de $\mathbb{Z}$.

Un élément de $\ker d_2$ est appelé *une 2-syzygie homologique.*

10 Conclusion

Le temps a malheureusement manqué pour étudier de manière très aprofondie l'article de Loday, et il a fallu se limiter à la lecture de quelques paragraphes. Mais cela a été suffisant pour comprendre que les différentes notions étudiées préalablement possédaient des liens étroits.

J'ai eu l'occasion de me familiariser tout au long du semestre avec de nombreux sujets, tant algébriques que topologiques, et cela a été très enrichissant.

Références

[1] Michael ARTIN, Algebra, 1991

[2] Kathryn HESS BELLWALD, Cours de Théorie des noeuds

[3] Serge LANG, Undergraduate Algebra, 1990

[4] Jean-Louis LODAY, Homotopical Syzygies, article de l'American Mathematical Society

[5] Albert T. LUNDELL, Stephen WEINGRAM, Topology of CW complexes, 1969

[6] M. Scott OSBORNE, Basic Homological Algebra, 2000