ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Projet de Semestre

Les nombres transfinis

Simona Cereghetti

-MA- 3 ème année

Responsables :

Professeur : Peter Buser
Assistante : Cristina Costoya

Chaire de Géométrie

Printemps 2001-2002

Table des matières

Sempre caro mi fu quest'ermo colle,
e questa siepe, che da tanta parte
dell'ultimo orizzonte il guardo esclude.
Ma sedendo e mirando, interminati
spazi di là da quella, e sovrumani
silenzi, e profondissima quiete
io nel pensier mi fingo; ove per poco
il cor non si spaura. E come il vento
odo stormir tra queste piante, io quello
infinito silenzio a questa voce
vo comparando: e mi sovvien l'eterno,
e le morte stagioni, e la presente
e viva, e il suon di lei. Così tra questa
immensità s'annega il pensier mio:
e il naufragar m'è dolce in questo mare.

Giacomo Leopardi, *L'infinito*, 1819

Toujours elle me fut chère cette colline solitaire
et cette haie qui dérobe au regard
tant de pans de l'extrême horizon.
Mais demeurant assis et contemplant,
au-delà d'elle, dans ma pensée j'invente
des espaces illimités, des silences surhumains
et une quiétude profonde ; où peu s'en faut
que le coeur ne s'épouvante.
Et comme j'entends le vent
bruire dans ces feuillages, je vais comparant
ce silence infini à cette voix :
en moi reviennent l'éternel,
et les saisons mortes et la présente
qui vit, et le son d'elle. Ainsi,
dans cette immensité, se noie ma pensée :
et le naufrage m'est doux dans cette mer.

Giacomo Leopardi, *L'infini*, 1819

Introduction

Bien que beaucoup de gens aient spéculé pendant des milliers d'années sur l'infini, que des chanteurs lui aient dédié leurs chansons et les poètes leurs poésies, le mathématicien allemand Georg Cantor (1845-1918) fut le premier à réaliser qu'il existe des infinis qui sont " plus ou moins infinis " que d'autres.
En effet Cantor fut le premier à construire vers 1870 une théorie cohérente du comptage de collections qui peuvent tendre vers l'infini. Pour ce faire, il étendit la suite ordinaire des nombres utilisés pour compter de la façon que nous verrons dans les chapitres suivants. Il inventa ainsi une nouvelle notion de nombre : celle de *nombre ordinal.* La notion importante concernant son raisonnement est que quel que soit le nombre ordinal que nous choisissions, il en existe toujours un dont nous ne nous sommes pas encore servi. Les nombres ordinaux repoussent désespérement les limites : il y en a toujours un qui est plus grand qu'un autre ! Cette situation fut démontrée à l'aide de l'axiome du choix en 1904 par Zermelo, élève de Cantor : il y a assez de nombres ordinaux pour compter les éléments de n'importe quel ensemble d'objets et ce, quelle que soit sa taille. Une fois dressée la " liste " des ordinaux, nous pouvons les diviser en classes. Les nombres d'éléments de chaque classe correspondent aux *nombres cardinaux de Cantor* : tout nombre cardinal apparaît dans la liste suivante :

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \aleph_0,\ \aleph_1,\ \aleph_2,\ \ldots,\ \aleph_\omega,\ \aleph_{\omega+1},\ \ldots,\ \aleph_{\omega^\omega},\ \ldots,\ \aleph_{\aleph_1},\ \ldots,\ \aleph_{\aleph_\omega},\ \ldots$$

et ainsi de suite, où :

$\omega = \aleph_0$	est le nombre de nombres ordinaux finis (donc $\mathbb{N} = \aleph_0$) ;
$\aleph_1$	est le nombre de nombres ordinaux qui sont finis ou qui appartiennent à la classe $\aleph_0$;
$\aleph_2$	est le nombre de nombres ordinaux qui sont finis ou qui appartiennent soit à la classe $\aleph_0$ soit à la classe $\aleph_1$;
$\vdots$	
$\aleph_\omega$	est le nombre de nombres ordinaux qui sont finis ou qui appartiennent à l'une des classes $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, ...
$\vdots$	

En général le terme $\aleph_\alpha$ désigne le $\alpha^{\text{ième}}$ cardinal.

Considérons maintenant un nombre fini ou infini S. Nous avons alors que 2^S est la taille de la collection de toutes les façons possibles de disposer 0 et 1 en une séquence de longueur S. Par

exemple si $S = 2$, alors $2^S = 4$ est la taille de l'ensemble { 00 01 10 11}.
Considérons une séquence infinie de 0 et de 1 comme représentation binaire d'un nombre. Alors nous pouvons exprimer chaque nombre réel dans l'intervalle]0,1[comme " 0. " suivi par une liste de 0 et de 1 (par exemple 0.3 = 0.1100000...). Alors il est clair que $2^{\omega} = 2^{\aleph_0}$ mesure le nombre de points sur le segment]0,1[de la droite réelle. Le nombre $2^{\aleph_0}$ est souvent appelé C. En 1873 Cantor démontra que C est plus grand que $\aleph_0$ en montrant qu'il n'est pas possible de trouver une fonction bijective entre C et $\aleph_0$.
Étant donné que $\aleph_1$ est le plus petit nombre infini plus grand que $\aleph_0$, Cantor supposera que le nombre de nombres réels est

$$C = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

Le problème de décider comment C est lié à $\aleph_1$ est appelé *problème du continu*, et l'hypothèse de Cantor est appelée *hypothèse du continu.*

En 1940, le mathématicien autrichien Kurt Gödel démontra que la supposition de Cantor ne pouvait pas être réfutée à partir des autres axiomes. Malheureusement en 1963 le mathématicien Paul Cohen montra que cette supposition ne pouvait pas non plus être prouvée. Par conséquent le problème du continu reste non résolu, et il est prouvé que l'hypothèse du continu ne peut ni être prouvée ni être réfutée avec les outils mathématiques disponibles à nos jours.
L'opinion prépondérante à ce sujet considère l'hypothèse du continu comme fausse.
Des remarques similaires tiennent pour *l'hypothèse du continu généralisée*, qui s'exprime par :

$$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$$

A Louis

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce premier chapitre nous définirons quelques notions utiles pour la suite.

Définition 1.0.1 Soient x et y deux ensembles. On dit que x est *subpotent* à y s'il existe une injection de x dans y.

Définition 1.0.2 Soient x et y deux ensembles. On dit que x et y sont *équipotents* s'il existe une bijection de x sur y.

Définition 1.0.3 Une *relation* r sur A et B est un sous-ensemble $r \subset A \times B$.
Une relation sur W, $r \subset W \times W$, est dite:

1. *réflexive* si, $\forall x \; (x \in W \quad \Rightarrow \quad < x,x > \in r)$;
2. *transitive* si, $\forall x \forall y \forall z \; (< x,y > \in r \wedge \; < y,z > \in r \quad \Rightarrow \quad < x,z > \in r)$;
3. *symétrique* si, $\forall x \forall y \; (< x,y > \in r \quad \Rightarrow \quad < y,x > \in r)$;
4. *antiréflexive* si, $\forall x \; (x \in W \quad \Rightarrow \quad < x,x > \notin r)$;
5. *antisymétrique* si, $\forall x \forall y \; (< x,y > \in r \; \wedge \; x \neq y \quad \Rightarrow \quad < y,x > \notin r)$.

Définition 1.0.4 Une relation r sur W est un *ordre partiel* si :

1. r est réflexive ;
2. r est transitive ;
3. r est antisymétrique.

Définition 1.0.5 Une relation r sur W est un *ordre partiel strict* si :

1. r est antiréflexive ;
2. r est transitive ;
3. r est antisymétrique.

Définition 1.0.6 Une relation r sur W est un *ordre linéaire* si :

1. r est un ordre partiel strict sur W ;

2. $\forall\, x, y \in W$ on a soit $< x,y > \in r$, soit $< y,x > \in r$, soit $x = y$.

Définition 1.0.7 Soit $\leq$ un ordre partiel sur W et $a \subseteq W$, $a \neq \emptyset$.
On dit que $m \in a$ est un *minimum* de a si $m \leq x\ \forall x \in a$.

Définition 1.0.8 Un ordre partiel $\leq$ sur W est un *bon ordre* (et W est *bien ordonné*) si :

1. $\leq$ est un ordre linéaire ;
2. chaque sous-ensemble $a \subset W$, $a \neq \emptyset$ possède un minimum.

Chapitre 2

Les nombres naturels

Dans ce chapitre nous traiterons deux différentes approches de définition de nombre naturel. La première est plutôt théorique alors que la deuxième est une approche plutot intuitive de construction de nombre naturel. Nous donnerons la définition d'ensemble de tous les naturels ainsi que quelques propriétés.

2.1 Ensembles naturels et théorème d'induction

En général nous pouvons définir un ensemble naturel comme suit :

Définition 2.1.1 Un ensemble n est appelé *naturel*, et il est noté $\mathrm{nat}(n)$, si $\forall x, y, z \in n$ on a :

1. $x \in n \;\Rightarrow\; x \subseteq n$;
2. $x \in y \;\vee\; x = y \;\vee\; y \in x$;
3. $x \in y \;\Rightarrow\; y \notin x$;
4. $x \in y \;\wedge\; y \in z \;\Rightarrow\; x \in y$;
5. $\forall\, a \subseteq n\,,\, a \neq \emptyset\,,\, \exists\, m \in a$ et $M \in a$ tels que $\forall\, x \in a : x \notin m \;\wedge\; M \notin x$.

Une autre façon de voir les nombres naturels est celle de les créer en comptant les éléments d'ensembles particuliers comme suit : quand nous avons 0 éléments nous n'avons rien. En termes mathématiques " rien " est représenté par l'ensemble vide $\emptyset$. Le nombre naturel 0 peut donc être identifié à $\emptyset$.
À partir de ce premier ensemble nous pouvons créer un deuxieme ensemble qui contient le vide : $\{\emptyset\}$. Cet ensemble contient 1 seul élément, donc 1 pourra être identifié à $\{\emptyset\}$.
De la même façon nous pouvons créer le troisième ensemble $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$ c'est-à-dire celui qui contient les premiers deux ensembles, et l'identifier à 2. Nous pouvons réiterer cette même méthode et

obtenir ainsi l'ensemble des naturels. On remarque que :

$$\begin{aligned}&0 = \emptyset\\&1 = 0 \cup \{0\}\\&2 = 1 \cup \{1\}\\&3 = 2 \cup \{2\}\\&\textit{etc...}\end{aligned}$$

En général nous pourrons exprimer le nombre naturel $n+1$ par $n \cup \{n\}$.

Nous considérons l'ensemble qui contient tous les naturels $\mathbb{N}$ comme le plus petit (au sens de l'inclusion) ensemble X tel que :

1. $\emptyset \in X$
2. $x \in X \Rightarrow x \cup \{x\} \in X$

Cette dernière définition est celle d'un ensemble inductif et elle justifie ce que nous appelons des " *preuves par induction* ". Celles-ci consistent en la méthode suivante : pour montrer que chaque élément de $\mathbb{N}$ a une certaine propriété $\mathcal{P}$, nous vérifions que 0 a cette propriété $\mathcal{P}$ (ce que l'on note $\mathcal{P}_0$), et que si $n \in \mathbb{N}$ a la propriété $\mathcal{P}$ (ce que l'on note $\mathcal{P}_n$) alors $n \cup \{n\}$ aussi. Ceci se formalise par le théorème suivant :

Théorème 2.1.2 (Induction)

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad ((\mathcal{P}_0 \ \wedge \ (\mathcal{P}_n \ \Rightarrow \ \mathcal{P}_{n+1})) \ \Rightarrow \ \mathcal{P}_n)$$

Démonstration :
Considérons l'ensemble $N = \{n > 0 \mid \mathcal{P}_n \text{ est fausse }\}$.
Si $N = \emptyset$ il n'y a rien à prouver.
Supposons que $N \neq \emptyset$. Alors il existe un $n_i \leq N$ minimal tel que $\mathcal{P}_{n_i}$ est fausse et $\mathcal{P}_n$ est vraie $\forall\ n < n_i$.
En particulier $\mathcal{P}_{n_i - 1}$ est vrai et par hypothèse $\mathcal{P}_{n_i-1+1} = \mathcal{P}_{n_i}$ est vraie. Nous aboutissons donc à une contradiction. Par conséquent N est forcement vide, ce qui démontre le théorème.

$\square$

Comme nous pouvons le voir de ces deux contructions d'ensemble naturel, la relation $<$ sur les nombres naturels peut être définie par $\in$. Nous appelerons la fonction $s(n) = n \cup \{n\}$ *fonction successeur*, et avec cette définition n possède exactement n éléments, c.à.d. $n = \{0, 1, 2, 3, ..., n-1\}$. L'ensemble n contient donc n objets mais si nous les comptons à partir de 0 le nombre d'objets contenus dans cet ensemble est " le premier nombre que nous n'avons pas prononcé ".
Il y a une petite anecdote, sans doute apocryphe, concernant le mathématicien Waclaw Sierpinski qui avait consacré une bonne partie de sa carrière à l'étude des nombres transfinis. L'histoire relate que, comme il voyageait, il fut pris de panique à l'idée qu'il manquait un bagage. " Mais non, tes six bagages sont là " lui assura sa femme. " Ce n'est pas vrai : je les ai comptés plusieurs fois : zéro, un, deux, trois, quatre, cinq ! " .

On donne souvent à la théorie des nombres une fondation axiomatique, basée sur les axiomes de Péano.

Définition 2.1.3 Un triplet $(\Omega, \mathcal{O}, \sigma)$ est une *structure de Péano* si $\forall\ x,y \in \Omega$ et $\forall\ W \subset \Omega$:

1. $\sigma\ : \Omega \longrightarrow \Omega$ est une application injective, autrement dit $\sigma(x) = \sigma(y) \Rightarrow x = y$;
2. $\mathcal{O} \in \Omega$ est tel que $\sigma(x) \neq \mathcal{O}$; donc $\mathcal{O}$ n'a pas de prédécesseur, il s'agit de l'élément minimal ;
3. si $\Omega \in W$ et $\forall\ t\ (\ t \in W \Rightarrow \sigma(t) \in W\ )$, alors $W = \Omega$.

Il est facile de voir que ($\mathbb{N}$, $\emptyset$, $s(n) = n + 1$) est une structure de Péano

2.2 Opérations sur les naturels

Nous pouvons donc procéder par les méthodes usuelles pour définir l'addition, la multiplication et l'exponentiation d'entiers. Celles-ci se formalisent comme suit :

Définition 2.2.1 Addition d'entiers :

$$\begin{aligned}
&s_m : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\
&s_m(0) = m \\
&s_m(n+1) = s_m(s(n)) = s(s_m(n)) = s(m+n) = s_m(n) + 1
\end{aligned}$$

Définition 2.2.2 Multiplication d'entiers :

$$\begin{aligned}
&p_m : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\
&p_m(0) = 0 \\
&p_m(n+1) = p_m(n) + m = s_m(p_m(n))
\end{aligned}$$

Définition 2.2.3 Exponentiation d'entiers :

$$\begin{aligned}
&e_m : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\
&e_m(0) = 1 \\
&e_m(n+1) = e_m(n) \cdot m = p_m(e_m(n))
\end{aligned}$$

Par la suite nous donnerons deux théorèmes qui décrivent quelques propriétés des nombres naturels et de $\mathbb{N}$ tout entier.

Définition 2.2.4 x est $\in$-*transitif* si ($y \in z\ \wedge\ z \in x\ \ \Rightarrow\ \ y \in x$).

Théorème 2.2.5 *Tout $n \in \mathbb{N}$ est $\in$-transitif et donc $\mathbb{N}$ est $\in$-transitif.*

Démonstration :
Montrons que $n \in \mathbb{N}$ est $\in$-transitif:
$n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathrm{nat}(n)$. Par définition de naturel n est $\in$-transitif.

Montrons que $\mathbb{N}$ est $\in$-transitif:
pour ce faire considérons l'ensemble $K = \{x \in \mathbb{N} \mid y \in x \Rightarrow y \in \mathbb{N}\}$ et montrons par récurrence que $K = \mathbb{N}$.
i) $0 \in K$;
ii) Supposons $x \in K$;
iii) Soit $\xi = x \cup \{x\}$ et $\eta \in \xi$. Montrons que $\eta \in \mathbb{N}$, ainsi nous aurons montré $\xi \in K$.
Nous avons ou bien $\eta \in x$, ou bien $y = x$.
Si $\eta = x$ alors il n'y a rien à montrer: $\eta \in \mathbb{N}$.
Si $\eta \in x$ et soit $z \in \eta$ alors $z \in \eta \ \vee \ \eta \in x$ alors par le fait que x est $\in$-transitif on a $z \in x$. Dans ce cas aussi $\eta \in \mathbb{N}$
En conclusion $\xi \in K$. Ainsi par la définition de $\mathbb{N}$, $K = \mathbb{N}$.

$\square$

Théorème 2.2.6 *Tout $n \in \mathbb{N}$ est bien ordonné par $\in$ et donc $\mathbb{N}$ est bien ordonné.*

Démonstration :
Montrons que $n \in \mathbb{N}$ est bien ordonné par $\in$:
Les points 2, 3, 4 de la définition d'ensemble naturel $\mathrm{nat}(n)$ nous disent que $\in$ est un ordre linéaire. De plus le point 5 nous assure que tout $a \subseteq \mathrm{nat}(n)$ possède un unique minimum et un unique maximum. $\in$ est donc un bon ordre pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrons que $\mathbb{N}$ est bien ordonné par $\in$:
pour ce faire, il faut montrer que $\forall\, x, y, z \in \mathbb{N}$ nous avons :

1. $x \notin x$;
2. $x \in y \ \Rightarrow \ y \notin x$;
3. $x \in y \ \wedge \ y \in z \ \Rightarrow \ x \in z$;
4. $x \in y \ \vee \ y \in x \ \vee \ x = y$;
5. si $X \subset \mathbb{N}$ et $X \neq \emptyset \ \Rightarrow X$ a un élément minimal.

Les premieres trois conditions sont évidemment vérifiées car $x, y, z \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ \mathrm{nat}(x), \mathrm{nat}(y), \mathrm{nat}(z)$ et nous savons par le théorème précedent que $\mathrm{nat}(n)$ est bien ordonné.

Montrons que $x \in y \ \vee \ y \in x \ \vee \ x = y$:
Si $x = \emptyset$ ou $y = \emptyset$ alors ceci est clair car $\emptyset$ est l'élément minimal de $\mathbb{N}$.
Supposons que $x \neq \emptyset$ et $y \neq \emptyset$.
Dans ce cas nous savons que $\emptyset \in x$ et $\emptyset \in y$. De plus il existe $m = max(x \cap y) \in x \cap y$.
Alors on a d'une part que $s(m) = x \cap y$ et donc que $s(m) \notin x \cap y$

D'autre part $\left\{ \begin{array}{l} m \in x \ \Rightarrow \ s(m) \in s(x) = x \cup \{x\} \\ m \in y \ \Rightarrow \ s(m) \in s(y) = y \cup \{y\} \end{array} \right.$

Nous avons donc les cas suivants :
- $s(m) \in x$ et $s(m) \in y$, ce qui est exclu car $s(m) \notin x \cap y$;
- $s(m) \in x$ et $s(m) = y$, ce qui implique que $y \in x$;
- $s(m) = x$ et $s(m) \in y$, ce qui implique que $x \in y$;
- $s(m) = x$ et $s(m) = y$, ce qui implique que $x = y$.

Montrons que si $X \subset \mathbb{N}$ et $X \neq \emptyset \ \Rightarrow X$ a un élément minimal :
Soit $b \subset \mathbb{N}$ et soit $n \in b$. Alors $\{x \in b \mid x \in n\} = \{x \in s(n) \mid x \in b\}$. L'ensemble à droite a un minimum (car $s(n)$ est un naturel) et ce minimum est le minimum de b.

$\square$

Chapitre 3

Les nombres transfinis

“ *Dieu a créé les nombres naturels, le reste c'est le travail de l'homme* ” (Kronecker).

3.1 Les nombres ordinaux

Essayons donc de créer ce “ reste ” en étendant la séquence $1, 2, 3, ...$ et en incluant les “ nombres infinis ” !
Puisque $n = \{0,1,...,n-1\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, un candidat raisonnable pour le premier nombre plus grand que chaque “ nombre fini ” est $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ lui-même. Nous pourrions par extension du raisonnement précédent, considérer $\mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\}$ comme le successeur immédiat de $\mathbb{N}$. Appelons ce nouveaux nombre $\mathbb{N}+1$. De la même façon il est possible de définir le successeur de $\mathbb{N}+1$ comme $\mathbb{N}+2 = \mathbb{N}+1 \cup \{\mathbb{N}+1\}$.
Nous pouvons ainsi créer une première suite de "nombres infinis" $\mathbb{N}, \mathbb{N}+1, \mathbb{N}+2, \mathbb{N}+3, ...$

Continuant avec le même raisonnement, nous pouvons nous demander quel sera le successeur immédiat de $\mathbb{N}, \mathbb{N}+1, \mathbb{N}+2, \mathbb{N}+3, ...$ Comme nous l'avons vu pour $\mathbb{N}$, le choix le plus raisonnable pour ce successeur est celui du nombre suivant: $\{0, 1, 2, ... \mathbb{N}, \mathbb{N}+1, \mathbb{N}+2, \mathbb{N}+3, ...\}$. Nous noterons ce nombre $\mathbb{N} \cdot 2$.

En réitérant ce procédé, nous pouvons imaginer le successeur de $\mathbb{N}\cdot 2$ comme $\mathbb{N}\cdot 2+1 = \mathbb{N}\cdot 2 \cup \{\mathbb{N}\cdot 2\}$, et ainsi de suite.

Cette méthode itérative permet de créer la séquence des nombres ordinaux, que nous définissons explicitement ci-dessous :

Définition 3.1.1 Les *nombres ordinaux* sont les membres du dernier ensemble X tel que :

1. $0 \in X$
2. $x \in X \Rightarrow x \cup \{x\} \in X$
3. $x \subseteq X \Rightarrow \cup x \in X$

Malheureusement un tel ensemble X ne peut pas exister, ce que nous montrerons après la définition suivante.
Même si cette approche échoue, plutôt que d'essayer de définir l'ensemble des ordinaux, nous pouvons toujours définir la propriété d'être ordinal en s'appuyant sur les théorèmes 2.2.5 et 2.2.5.

Définition 3.1.2 Un nombre α est un *nombre ordinal* si :

1. α est $\in$-transitif
2. α est bien ordonné par $\in$

Nous utiliserons les symboles α, β, γ et δ pour noter des nombres ordinaux et nous écrirons $\mathrm{Ord}\alpha$ à la place d'écrire l'expression complète "α est un nombre ordinal".
Nous écrirons aussi $\alpha < \beta$ à la place de $\alpha \in \beta$.

Proposition 3.1.3 *La classe des ordinaux n'est pas un ensemble.*

Démonstration :
Supposons que l'ensemble des ordinaux existe et appelons-le β.
Montrons alors que β est un ordinal et aboutissons à une contradiction.
- β est $\in$-transitif : en effet soient δ et γ deux ordinaux tels que $\delta \in \gamma$ et $\gamma \in \beta$. Alors $\delta \in \beta$ car $\mathrm{Ord}\delta$, et β est l'ensemble de tous les ordinaux.
- β est bien ordonné : en effet nous verrons bientôt (avec le théorème du bon ordre) qu' il existe un bon ordre sur les ordinaux.

Considérons maintenant le successeur de β. Alors $\beta \cup \{\beta\}$ est un ordinal. Par définition de β (ensemble de tous les ordinaux), $\beta \cup \{\beta\} \in \beta$. Par définition de successeur, nous avons que $\beta \in \beta \cup \{\beta\}$, d'où $\beta \in \beta \cup \{\beta\} \in \beta$. Or β est $\in$-transitif, et donc $\beta \in \beta$, ce qui est absurde car $\in$ est une relation d'ordre stricte sur les ordinaux.

□

Théorème 3.1.4 *Nous avons les propriétés suivantes :*

i) $nat(n) \Rightarrow Ord n$;
ii) $Ord\mathbb{N}$;
iii) $Ord\alpha \Rightarrow Ord(\alpha \cup \{\alpha\})$;
iv) *Si* $\alpha \in \beta$ *et* $Ord\beta \Rightarrow Ord\alpha$.

Démonstration :

i) Découle du théorème 2.2.5 et du théorème 2.2.6.
ii) Idem
iii) Soit α un ordinal.
Montrons que $\alpha \cup \{\alpha\}$ est $\in$-transitif :
Soit $z \in \alpha \cup \{\alpha\}$ et soit $y \in z$. Nous voulons voir que $y \in \alpha \cup \{\alpha\}$. Nous avons soit $z = \alpha$

soit $z \in \alpha$.
Or $z = \alpha \ \wedge \ y \in z \ \Rightarrow y \in \alpha$ car α est $\in$-transitif,
et $z \in \alpha \ \wedge \ y \in z \ \Rightarrow y \in \alpha$.
Dans les deux cas $y \in \alpha \cup \{\alpha\}$, ce qui montre que $\alpha \cup \{\alpha\}$ est $\in$-transitif.
Montrons que $\alpha \cup \{\alpha\}$ est bien ordonné par $\in$:
Soit $\beta \in \alpha \cup \{\alpha\}$. Alors $\beta \in \alpha$ ou bien $\beta = \alpha$. Dans les deux cas β est bien ordonné par $\in$ car α l'est. Donc $\alpha \cup \{\alpha\}$ est bien ordonné par $\in$.
Nous avons montré que $\alpha \cup \{\alpha\}$ est $\in$-transitif et bien ordonné par $\in$, donc $\alpha \cup \{\alpha\}$ est un ordinal.

iv) Soit $\alpha \in \beta$ et Ordβ.
Montrons que α est $\in$-transitif :
Soit $x \in y$ et $y \in \alpha$.
Puisque β est $\in$-transitif et $y \in \alpha \wedge \alpha \in \beta$ alors $y \in \beta$, et pour la même raison $x \in y \wedge y \in \beta$ alors $x \in \beta$. Or β est linéairement ordonné par $\in$ et donc α est $\in$-transitif.
Montrons que α est bien ordonné par $\in$:
Par la $\in$-transitivité de β nous avons $\alpha \subseteq \beta$. Il s'en suit donc que puisque β est bien ordonné par $\in$, α l'est aussi. Nous avons montré que α est $\in$-transitif et bien ordonné par $\in$, donc α est un ordinal.

□

Corollaire 3.1.5 *Ord*$\alpha \Rightarrow \alpha = \{ \beta \mid \beta \in \alpha$ *et Ord*$\beta \}$

Démonstration :
Immédiate par le théorème 3.1.4.iv.

□

Nous allons maintenant discuter des résultats un peu techniques, et dont les corollaires seront extrêmement importants (cf. théorème 3.1.11 et théorème 3.1.16). Commençons par introduire quelques définitions :

Définition 3.1.6 Un *segment initial* d'un ensemble A muni d'un ordre linéaire $<$, est un sous-ensemble $X \subseteq A$ tel que $\forall x \in X$ et $\forall a \in A$, si $a < x$ alors $a \in X$.

Définition 3.1.7 Nous disons que deux ordre partiels $(A, <_A)$ et $(B, <_B)$ sont *isomorphes* s'il existe une fonction bijective $f : A \to B$ telle que $\forall a, a' \in A$, nous avons $a <_A a' \Leftrightarrow f(a) <_B f(a')$. Nous appelons une telle fonction un *isomorphisme* et nous écrivons $(A, <_A) \simeq (B, <_B)$ si $(A, <_A)$ est isomorphe a $(B, <_B)$.

Théorème 3.1.8 *Soient A et B deux ensembles muni de deux bons ordres respectifs $<_A$ et $<_B$. Alors au moins un des deux cas suivants se produit :*

i) il existe un et un seul segment initial B_1 de B et un et un seul isomorphisme f de $(A, <_A)$ sur $(B_1, <_{B_1})$ où $<_{B_1}$ représente la restriction de $<_B$ sur B_1 ;

ii) il existe un et un seul segment initial A_1 de A et un et un seul isomorphisme g de $(B, <_B)$ sur $(A_1, <_{A_1})$ où $<_{A_1}$ représente la restriction de $<_A$ sur A_1.

De plus, si i) et ii) ont lieu simultanément, alors $A_1 = A$, $B_1 = B$ et les applications f et g sont inverses l'une de l'autre.

Démonstration :
Dans cette preuve, nous allons considérer des ségments initiaux de A et B. Nous les considérons toujours comme des ensembles ordonnés par la restriction de $<_A$ ou de $<_B$.
Montrons tout d'abord l'unicité de B_1 et de f (l'unicité de A_1 et de g se démontre de la même façon). Supposons que B_1 et B_2 soient deux segments initiaux de B et que f_1 et f_2 soient des isomorphismes de A sur B_1 et B_2 respectivement.
Considérons l'ensemble $Z = \{x \in A \mid f_1(x) \neq f_2(x)\}$. Nous allons montrer que Z est l'ensemble vide. Supposons par l'absurde que Z n'est pas vide, alors il existe un élément minimal x_0 pour $<_A$ dans Z. Supposons par exemple que $f_1(x_0) <_B f_2(x_0)$. Comme B_2 est un segment initial de B, $f_1(x_0) \in B_2$ et il existe $x_1 \in A$ tel que $f_2(x_1) = f_1(x_0) <_B f_2(x_0)$.
Puisque f_2 est un isomorphisme $x_1 <_A x_0$. Or x_0 est le minimum de Z, donc $f_1(x_1) = f_2(x_1)$ d'où il découle que $f_1(x_1) = f_1(x_0)$, ce qui contredit le fait que f_1 est injective.

Supposons maintenant que i) et ii) aient lieu simultanément. Il est facile de voir que $g(B_1)$ est un segment initial de A et donc $g \circ f$ est un isomorphisme de A sur un des ses segments initiaux (à savoir A lui-même), et en appliquant l'unicité déja démontrée, $g \circ f$ est l'identité sur A. Comme f est injective, on en déduit que f et g sont inverses l'une de l'autre.

Il reste à montrer l'existence.
Considérons les ensembles

$$\begin{aligned} C &= \{(x,y) \in A \times B \mid \text{il existe un isomorphisme de } S_x \text{ sur } S_y\} \\ C^* &= \{(y,x) \in B \times A \mid \text{il existe un isomorphisme de } S_x \text{ sur } S_y\}, \\ &\text{où} \quad S_x = \{a \in A \mid a <_A x\} \\ &\phantom{\text{où}} \quad S_y = \{b \in B \mid b <_B y\} \end{aligned}$$

Supposons que (x,y) et (x,z) appartiennent tous les deux à C. Alors il existe deux isomorphismes allant de S_x sur S_y et S_z respectivement, qui sont des segments initiaux de B. On vient de voir que cela implique : $S_y = S_z$, donc $y = z$. Autrement dit C est une application dont le domaine, que nous appellerons C_1, est inclus dans A et dont l'image, que nous appellerons C_2 est inclue dans B.
De la même façon il est possible de montrer que C^* est une application.
Comme $(x,y) \in C$ si et seulement si $(y,x) \in C^*$, on en conclut que le domaine de C^* est C_2, que son image est C_1 et que C et C^* sont des applications réciproques l'une de l'autre. Ce sont donc toutes les deux des bijections.
Remarque : supposons que h soit un isomorphisme d'un ensemble linéairement ordonné U sur un ensemble linéairement ordonné V. Alors pour tout $u \in U$, l'image par h de l'ensemble

$\{t \in U \mid t < u\}$ est égale à $\{v \in V \mid v < h(u)\}$.
Ceci montre que C_1 est un segment initial de A : si $x \in C_1$ et $z <_A x$, alors il existe $y \in B$ et un isomorphisme f de S_x sur S_y ; la restriction de f à $S_z$est un isomorphisme de S_z sur un segment initial de S_y, qui est aussi un segment initial de B.
De même C_2 est un segment initial de B.
On voit aussi que A est un isomorphisme : supposons en effet que (x,y) et (z,t) appartiennent à C et que $z <_A x$; il existe donc un isomorphisme de S_z sur un segment initial de B qui ne peut être que S_t (par unicité) : donc $t <_B y$.
Si $C_1 = A$, la conclusion du théorème est vraie car a) est vrai. Si $C_2 = B$, alors b) est vrai.
Montrons par l'absurde qu'il n'est pas possible que $C_1 \neq A$, $C_2 \neq B$.

Pour cela montrons que si C_1 est un segment initial de A et $C_1 \neq A$ alors il existe $x \in X$ tel que $C_1 = S_x$: supposons $C_1 \subset A$, $C_1 \neq A$. Si l'on considère $x = min\{A - C_1\}$, il est clair que $C_1 = S_x$.
D'après ce que nous venons de montrer, il existerait $x \in A$ et $y \in B$ tels que $C_1 = S_x$ et $C_2 = S_y$.
Mais alors C est un isomorphisme de S_x sur S_y, ce qui prouve que $(x,y) \in C$ et que $x \in C_1 = S_x$, ce qui est absurde.

□

Théorème 3.1.9 *Soit $\mathcal{K}$ un ensemble d'ordres linéaires (respectivement de bons ordres) tel que pour tout $<_B \in \mathcal{K}$ et pour tout $<_C \in \mathcal{K}$ soit $<_B$ est un segment initial de $<_C$, soit $<_C$ est un segment initial de $<_B$.*
Alors $\cup\mathcal{K}$ est un ordre linéaire (respectivement un bon ordre) et tout $<_B \in \mathcal{K}$ est un segment initial de $\cup\mathcal{K}$.

Démonstration : La preuve découle directement des définitions d'ordre linéaire (respectivement bon ordre) et de segment initial.

□

Théorème 3.1.10 *Soient α et β des ordinaux et soit f un isomorphisme de α sur β. Alors $\alpha = \beta$ et f est l'identité sur α.*

Démonstration :
Supposons que f ne soit pas l'identité et aboutissons à une contradiction :
Considérons l'ensemble $L = \{\delta \in \alpha \mid \delta \neq f(\delta)\}$ et supposons qu'il est non vide. En ce cas L admet un minimum γ.
Examinons $f(\gamma)$:
- si $y \in \gamma$, alors $y \in \alpha$ (à cause de la $\in$-transitivité de α) et $f(y) \in f(\gamma)$ (car f est un isomorphisme). Or γ étant le minimum de L, $y \in \gamma \;\Rightarrow\; y \notin L$ et donc $y = f(y)$.
Nous en déduisons que $\gamma \subseteq f(\gamma)$;
- réciproquement si $y \in f(\gamma)$ alors $y \in \beta$ (à cause de la $\in$-transitivité de α) et il existe $z \in \alpha$ tel que $y = f(z)$ (car f est surjective sur β). Puisque f est un isomorphisme, $z \in \gamma$ et par minimalité de γ, $z = f(z) = y$.
Donc $f(\gamma) \subseteq \gamma$.

Finalement $\gamma = f(\gamma)$, ce qui est en contradiction avec le fait que $\gamma \in L = \{\delta \in \alpha \mid \delta \neq f(\delta)\}$. Donc L est vide. Ainsi f est l'identité. De plus f est bijective et donc $\alpha = \beta$.

$\square$

Comme nous l'avons déjà mentionné il n'est pas possible de parler de l'ensemble de tous les ordinaux. Donc la relation $\in$ restreinte aux ordinaux ne peut pas être considérée non plus comme un ensemble, car le domaine de $\in$ restreint aux ordinaux serait un ensemble qui est de fait la collection de tous les ordinaux. Toutefois $\in$ est essentiellement un bon ordre sur les ordinaux :

Théorème 3.1.11 (Bon ordre) *$\in$ est un bon ordre sur les ordinaux.*

Démonstration :
Soient α β et γ des ordinaux.
Il faut montrer :

1. $\alpha \notin \alpha$;
2. $\alpha \in \beta \;\Rightarrow\; \beta \notin \alpha$;
3. $\alpha \in \beta \wedge \beta \in \gamma \;\Rightarrow\; \alpha \in \gamma$;
4. $\alpha \in \beta \;\vee\; \beta \in \alpha \;\vee\; \alpha = \beta$;
5. si X est un ensemble d'ordinaux et $X \neq \emptyset \Rightarrow X$ a un élément minimal.

Une fois les quatre premières conditions montrées nous aurons que $\in$ est un ordre linéaire, ce qui avec la cinquième condition nous donnera que $\in$ est un bon ordre sur les ordinaux.

1. Supposons $\alpha \in \alpha$. Alors α n'est pas le sous-ensemble vide de α. Donc α ne possède pas d'élément minimal, ce qui est en contradiction avec le fait que α est un ordinal. Donc nous avons bien que $\alpha \notin \alpha$.
2. Supposons $\alpha \in \beta \wedge \beta \in \alpha$. Alors nous pouvons construire la suite suivante :

   $$... \; \alpha \in \beta \in \alpha \in \beta \in \alpha \in \beta \in \alpha \; ...$$

   Cette suite est infinie des deux cotés, ce qui implique que ni α ni β ont un élément minimal. Ceci est en contradiction avec le fait que α et β sont des ordinaux. Donc $\alpha \in \beta \Rightarrow \beta \notin \alpha$.
3. La transitivité de γ est évidente car γ est un ordinal.
4. Par le théorème 3.1.8 nous pouvons supposer qu'il existe un ordre qui préserve la fonction $f : \alpha \longrightarrow \Gamma$ où Γ est un segment initial de β (ou bien f va d'un segment initial de α dans β).
   Par le théorème 3.1.10 nous savons que f est l'identité.
   Si $\mathrm{Im}f = \beta$ alors $\alpha = \beta$.
   Sinon soit γ le plus petit élément de $\beta -$ Imf. Dans ce cas, montrons que $\gamma = \Gamma$:
   Soit donc $\gamma = \min\{\beta - \mathrm{Im}f\}$. Il faut montrer que $\gamma = \mathrm{Im}f$.
   Supposons que $\gamma \neq \mathrm{Im}f$. Dans ce cas, nous avons l'une des deux situations suivantes :
   - Il existe δ tel que $\delta \in \gamma$ et $\delta \notin \mathrm{Im}f$. Or $\gamma \in \beta$, donc $\delta \in \gamma \in \beta \;\Rightarrow\; \delta \in \beta$.
   De $\delta \in \beta$ et $\delta \notin \mathrm{Im}f$ nous pouvons déduire que $\delta \in \{\beta - \mathrm{Im}f\}$, ce qui est en contradiction

avec l'hypothèse de minimalité de γ et le fait que $\delta \in \gamma$.
- Il existe δ tel que $\delta \notin \gamma$ et $\delta \in \mathrm{Im}f$. Par le même raisonnement que dans le cas précédent, on arrive à une contradiction.
Ainsi $\gamma = \mathrm{Im}f = \Gamma$.
Mais puisque f est l'identité de α sur α, alors $\gamma = \alpha$. Ainsi $\alpha \in \beta$.

5. Soit X un ensemble d'ordinaux tel que $X \neq \emptyset$. Soit $\alpha \in X$.
Si $\alpha \cap X \neq \emptyset$, alors α possède un minimum β ; en effet α, étant un ordinal, est bien ordonné par $\in$. Dans ce cas β est aussi le minimum de X.
Si $\alpha \cap X \neq \emptyset$, alors α est le minimum de X.

□

Remarque 3.1.12 Nous pouvons écrire $\alpha + 1$ à la place de $\alpha \cup \{\alpha\}$. Cette notation est sugérée par le fait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n + 1 = n \cup \{n\}$ (avec "+" l'addition usuelle) et par ce qui suit :

Corollaire 3.1.13 *$\alpha + 1$ est le successeur immédiat de α, c'est-à-dire $\alpha + 1$ est le plus petit ordinal β tel que $\alpha \in \beta$.*

Démonstration :
$\beta = \alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$. Il est donc évident que $\alpha \in \beta$.
Par le théorème 3.1.4.3 nous avons que $\mathrm{Ord}\alpha \Rightarrow \mathrm{Ord}(\alpha \cup \{\alpha\})$. Donc $\beta = \alpha \cup \{\alpha\}$ est un ordinal. Supposons par l'absurde que β ne soit pas le plus petit ordinal contenant α. Alors il existe $\gamma \neq \alpha$ tel que $\alpha \in \gamma \in \beta = \alpha \cup \{\alpha\}$. Donc soit $\gamma = \alpha$, soit $\gamma \in \alpha$. Le premier cas est impossible par hypothèse ; le deuxième est en contradiction avec $\alpha \in \gamma$ et le fait que $\in$ est un bon ordre.

□

Proposition 3.1.14 *Si X est un ensemble d'ordinaux, alors $\cup X = \cup_{\alpha \in X} \alpha$ est un ordinal.*

Démonstration :
Posons $\cup X = z$.
Montrons que z est $\in$-transitif :
Supposons $x \in v \wedge y \in z$. Alors il existe au moins un $\alpha \in X$ tel que $y \in \alpha$. Puisque α est $\in$-transitif, $x \in \alpha$, et donc $x \in X$. Ainsi $x \in \cup X = z$. Donc $\in x \vee y \in z \Rightarrow x \in z$, ce qui montre que z est $\in$-transitif.
Montrons que z est bien ordonné :
Supposons $s, t, u \in z$. Alors il existe au moins un α, un β et un γ dans X tels que $s \in \alpha$, $t \in \beta$ et $u \in \gamma$. Considérons δ le plus grand ordinal entre α, β, γ.
Puisque les ordinaux sont $\in$-transitifs et linéairement ordonnés par $\in$, nous avons que $s, t, u \in \delta$. Comme δ est un ordinal (et donc est linéairement ordonné par $\in$), il s'en suit que :

$$\begin{array}{l} s \notin s \\ s \in t \;\Rightarrow\; t \notin s \\ s \in t \;\wedge\; t \in u \;\Rightarrow\; s \in u \\ s \in t \;\vee\; t \in s \;\vee\; s = t \end{array}$$

Donc z est linéairement ordonné par $\in$.
Il reste à montrer que tout sous-ensemble non vide de z possède un élément minimal. Soit w un tel sous-ensemble. Alors il existe au moins un $\alpha \in X$ tel que $w \cap \alpha \neq \emptyset$. Il s'en suit que le minimum de $w \cap \alpha$ est le minimum de w. Donc z est bien ordonné par $\in$.
En conclusion, $\cup X$ est $\in$-transitif et bien ordonné par $\in$. Donc $\cup X$ est un ordinal.

□

Remarque 3.1.15 Si X est un ensemble d'ordinaux, alors le nombre ordinal $\cup_{\alpha \in X} \alpha$ est la borne supérieure de X.

Théorème 3.1.16 *Si A est un ensemble muni d'un bon ordre $<_A$, alors il existe un ordinal α tel que $(A, <_A) \simeq (\alpha, \in|_\alpha)$.*

Démonstration :
Supposons que X et Y sont des segments initiaux de A avec $X \subseteq Y$.
De plus, supposons que f_X est un isomorphisme de X vers un ordinal α, et f_Y un isomorphisme de Y vers un ordinal β. Alors $f_Y|_X$ est un isomorphisme de X vers un ordinal.
Par le théorème 3.1.8 nous devons avoir que $f_Y|_X = f_X$. Ainsi $f_X \subseteq f_Y$.
Soit maintenant F l'ensemble de tous les isomorphismes f tels que Dom$f$ est un segment initial de A et Imf est un ordinal. Par le théorème 3.1.9 et par la proposition 3.1.14, $\cup F$ est un isomorphisme f^* d'un segment initial X^* de A vers un ordinal α^*.
Montrons que dans ces conditions $X^* = A$: supposons que $X^* \neq A$, alors soit a^* le minimum de $A - X^*$. Etendons maintenant f^* à un isomorphisme $f^\#$ allant de $X^* \cup a^*$ vers $a^* + 1$, défini par $f^\# = f^* \cup \{(a^*,\alpha^*)\}$. Evidemment $f^\# \in F$, de sorte que $a^* \in$ Domf^* ce qui est en contradiction avec le choix de a^* comme élément minimal de $A - X^*$.
Ceci montre que $X^* = A$. Ainsi $(A, <_A)$ est isomorphe à $(\alpha, \in|_\alpha)$.

□

Corollaire 3.1.17 *Pour tout ensemble il existe un ordinal qui lui est équipotent.*

Démonstration :
Nous savons que l'une des formulation èquivalentes au lemme de Zorn est la suivante : *Tout ensemble peut être bien ordonné.*
Donc d'après le théorème 3.1.16 nous povons conclure directement que tout ensemble est équipotent à un ordinal.

□

Définition 3.1.18 Un ordinal α qui possède un élément maximal β est appelé *ordinal successeur*, car $\alpha = \beta + 1$. Dans le cas contraire, α est dit *ordinal limite.*

Remarque 3.1.19 si α est un ordinal limite alors $\alpha = \cup\alpha$. Ceci peut aussi s'écrire $\alpha = \cup_{\lambda\in\alpha}\lambda$.

Finalement nous avons trois types d'ordinaux différents :

1. le vide ;
2. les ordinaux successeurs ;
3. les ordinaux limites.

Théorème 3.1.20 *Chaque ordinal α fait partie de une et une seule de ces trois catégories.*

Démonstration :
Il est clair que le vide, étant l'élément minimal, n'est ni un ordinal successeur, ni un ordinal limite.
Nous allons montrer que si α est un ordinal successeur alors α n'est pas un ordinal limite.
Soit α un ordinal successeur, *i.e.* il existe β tel que $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$.
Alors $\alpha \neq \cup\alpha$. En effet puisque $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$, alors $\cup\alpha = \cup(\beta \cup \{\beta\})$
Montrons que $\cup(\beta \cup \{\beta\}) = \beta$:
Soit $x \in \cup(\beta \cup \{\beta\}) \iff \exists\, t \in (\beta \cup \{\beta\})$ tel que $x \in t$.
Ainsi $t \in \beta$ ou bien $t = \beta$
$\iff$ $x \in t \in \beta$ ou bien $x \in t = \beta$
$\iff$ $x \in \beta$ (car Ordβ) ou bien $x \in \beta$
$\iff$ $x \in \beta$
Donc $\cup(\beta \cup \{\beta\}) \subseteq \beta$.
D'un autre côté, si $x \in \beta$ alors $x \in \cup(\beta \cup \{\beta\})$, car $\exists\ t = \beta$ avec $x \in t$.
Donc $\beta \subseteq \cup(\beta \cup \{\beta\})$.
En conclusion $\cup(\beta \cup \{\beta\}) = \beta$. Or par définition $\beta \cup \{\beta\} = \alpha$ donc $\beta = \cup(\beta \cup \{\beta\}) = \cup\alpha$ et puisque $\alpha \neq \beta$ nous avons $\alpha \neq \cup\alpha$. Donc α n'est pas un ordinal limite.

$\square$

Les définition inductives données pour l'addition, pour la multiplication et pour l'exponentiation des nombres naturels peuvent être étendues à tous les ordinaux en définissant chacune de ces opérations pour les trois types d'ordinaux précedents, et ce, de la manière suivante :

Définition 3.1.21 Addition d'ordinaux:

$$\begin{aligned} \alpha + 0 &= \alpha \\ \alpha + s(\beta) &= s(\alpha + \beta) \\ \alpha + \lambda &= \cup_{\beta\in\lambda}(\alpha + \beta) \quad \text{si } \lambda = \cup\lambda. \end{aligned}$$

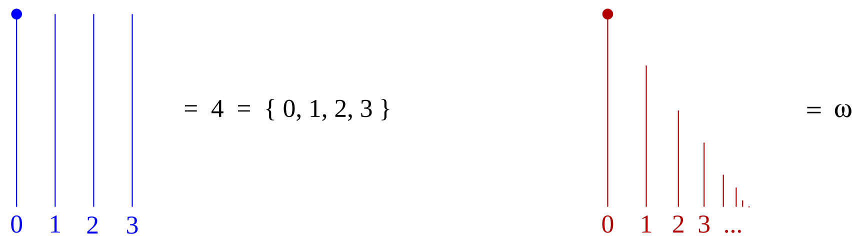
Définition 3.1.22 Multiplication d'ordinaux:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot 0 &= 0 \\ \alpha \cdot s(\beta) &= (\alpha \cdot \beta) + \alpha \\ \alpha \cdot \lambda &= \cup_{\beta\in\lambda}(\alpha \cdot \beta) \quad \text{si } \lambda = \cup\lambda. \end{aligned}$$

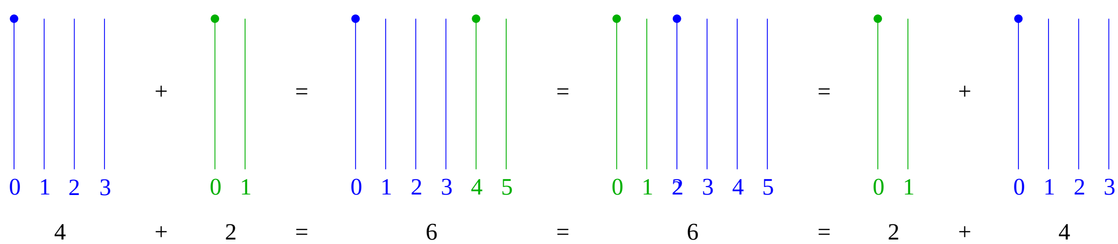
Définition 3.1.23 Exponentiation d'ordinaux:

$$\begin{array}{rcl} \alpha^0 & = & 1 \\ \alpha^{s(\beta)} & = & \alpha^\beta \cdot \alpha \\ \alpha^\lambda & = & \cup_{\beta\in\lambda}\, \alpha^\beta \quad \text{si } \lambda = \cup\lambda. \end{array}$$

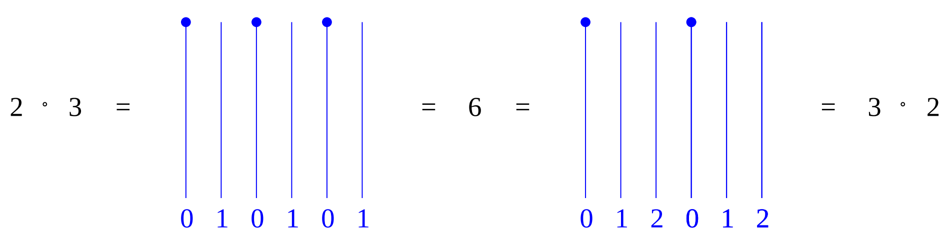
Beaucoup de propriétés usuelles des opérations aritmétiques ne peuvent être généralisées lorsqu'elles sont appliquées aux nombres finis.
Pour mieux voir ceci représentons les nombres finis par des mâts de longueur égale (en bleu) et représentons en revanche une suite infinie d'objets par des mâts de longueur décroissante (en rouge), comme dans la figure suivante:



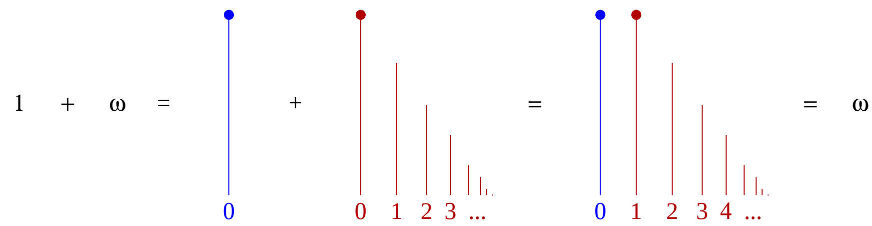
Avec cette représentation, il est facile de remarquer que pour les suites finies l'addition usuelle est commutative:



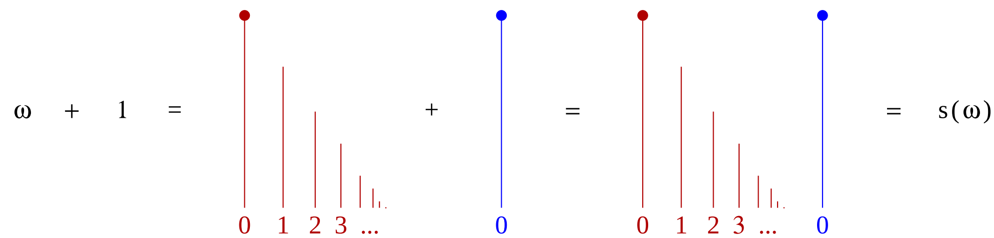
Il en va de même pour la multiplication usuelle:



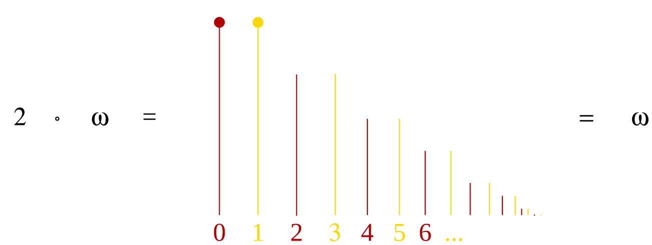
Au contraire, nous pouvons verifier que la commutativité ne vaut pas pour l'addition d'ordinaux. Représentons ci-dessous le nombre ordinal $1 + \omega$:



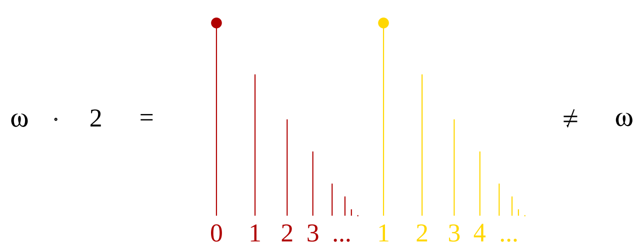
Par la figure précedente, nous pouvons voir que $1 + \omega = \omega$.
Représentons maintenant le nombre ordinal $\omega + 1$:



Par la figure précedente, nous pouvons voir que $\omega + 1 = s(\omega) \neq \omega$. Donc $1 + \omega \neq \omega + 1$.
Comme pour l'addition ordinale, nous pouvons voir que la multiplication ordinale n'est pas commutative. Représentons ci-dessous le nombre ordinal $2 \cdot \omega$:



Le nombre ordinal $\omega \cdot 2$, quant à lui, sera représenté de la façon suivante :



Par les deux figures précedentes, nous pouvons conclure que $2 \cdot \omega \neq \omega \cdot 2$.

Grâce à ce que nous venons de voir il apparaît immédiatement que la distributivité ne vaut pas pour les lois ordinales. Considérons en effet l'exemple suivant :

$$(1+1)\cdot\omega = 2\cdot\omega \neq \omega\cdot 2 = \omega+\omega \ .$$

Ainsi les opérations étendues ne sont ni commutatives ni distributives.
Nous pouvons par contre remarquer que l'associativité est vraie pour l'addition ordinale :

Proposition 3.1.24 *Soient α, β et γ des ordinaux. Alors*

$$(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$$

Démonstration :
Montrons que cette égalité est vraie par récurrence. Même si la définition de récurrence sur les nombres odinaux sera définie plus loin, nous pouvons nous contenter ici d'une approche intuitive de récurrence :

1. Montrons l'égalité vraie pour un élément minimal $\gamma = 0$:
   $(\alpha+\beta)+0 = \alpha+\beta = \alpha+(\beta) = \alpha+(\beta+0)$.
2. Supposons l'égalité vraie pour δ et montrons qu'elle est vraie pour $\gamma = s\,(\delta)$:

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)+s\,(\delta) &= s\,((\alpha+\beta)+\delta)\\ &= s\,(\alpha+(\beta+\delta))\\ &= \alpha+s\,(\beta+\delta)\\ &= \alpha+(\beta+s\,(\delta))\end{aligned}$$

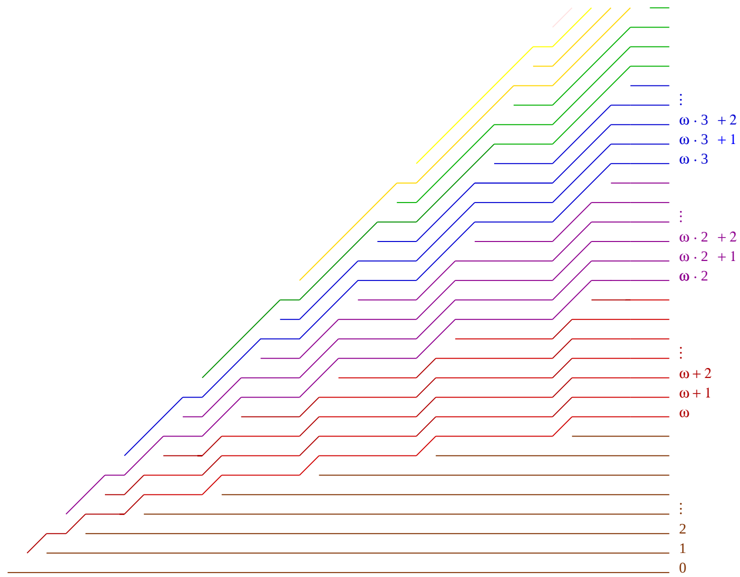
3. Supposons l'égalité vraie pour $\delta < \gamma$ et montrons qu'elle est vraie pour l'ordinal limite $\gamma = \cup_{\delta<\gamma}\delta$:

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)+\gamma &= \cup_{\delta<\gamma}\,(\alpha+\beta)+\delta\\ &= \cup_{\delta<\gamma}\,\alpha+(\beta+\delta)\\ &= \alpha+\cup_{\delta<\gamma}\,(\beta+\delta)\\ &= \alpha+(\beta+\gamma)\end{aligned}$$

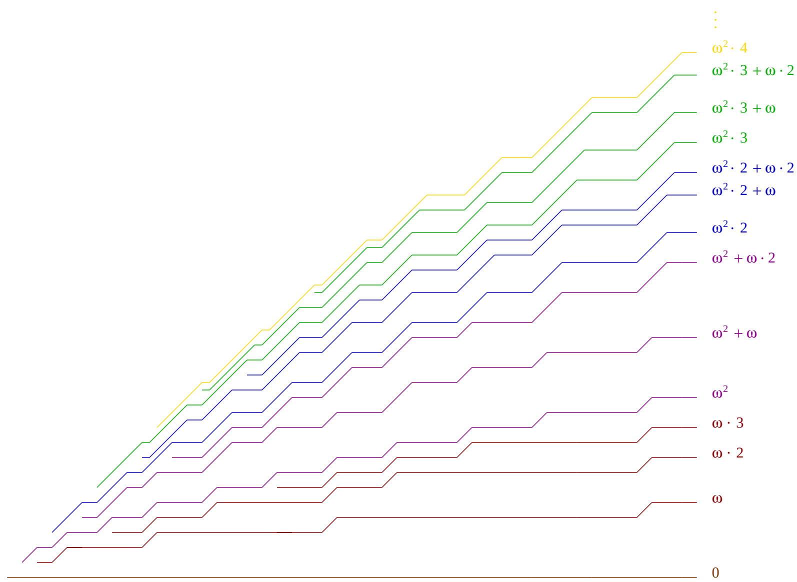
□

Remarque 3.1.25 Dans la litérature qui traite des nombres transfinis, l'*Hôtel de Hilbert* est souvent utilisé comme exemple pour mieux visualiser le fait que $1+\omega=\omega$ et $2\cdot\omega=\omega$.

La figure suivante montre une représentation possible des premiers nombres ordinaux : ici nous pouvons facilement voir que certains ordinaux ne sont pas des ordinaux successeur mais des ordinaux limites (par exemple ω, $\omega\cdot 2$, $\omega\cdot 3$, ...).



Il est possible d'étendre cette façon de représenter les ordinaux aux "ordinaux plus grands", en les représentant comme suit (par exemple ω^2 comme limite de la suite $\{\omega,\, \omega \cdot 1,\, \omega \cdot 2,\, ...\}$) :



Comme nous venons de le voir, les nombres finis ont des qualités que certains nombres ordinaux n'ont pas : les propriétés usuelles des opérations arithmétiques en sont un exemple.
De plus il n'existe pas deux nombres différents de $\mathbb{N}$ équipotents, et ainsi chaque ensemble fini a un unique nombre qui lui est associé : sa cardinalité. Cependant ceci n'est pas une propriété dont jouissent tous les ordinaux. En effet, si α est infini et β n'est pas plus grand que α, alors $\alpha \sim \alpha + \beta \sim \alpha \cdot \beta$.
Toutefois, il existe une notion de nombre plus restrictive que celle de nombre ordinal et qui n'a pas ce défaut : celle de nombre cardinal. Nous verrons cela en détail dans le prochain chapitre.

3.2 Les nombres cardinaux

Définition 3.2.1 Un *nombre cardinal* est un ordinal qui n'est pas équipotent à aucun ordinal plus petit. Nous notons Card$x$ si x est un nombre cardinal.

Nous pouvons utiliser les lettres κ, λ, μ, ν pour représenter les cardinaux.
Évidemment puisque chaque cardinal est un ordinal, $\in$ ordonne bien les cardinaux.

Théorème 3.2.2 *1. nat(n) $\Rightarrow$ n est un cardinal fini.*
2. $\mathbb{N}$ est un cardinal et de fait c'est le premier cardinal infini.
3. Si κ est un cardinal infini alors $\{\alpha \mid \text{Ord}\alpha \text{ et } \alpha \leq \kappa\}$ est un cardinal ; en fait c'est le plus petit cardinal plus grand que κ.
4. Si X est un ensemble de cardinaux $\Rightarrow$ $\cup X$ est un cardinal.

Démonstration :

1. Il est clair que pour tout nat(n) nous avons $n \in n+1$. Ainsi $n+1$ est plus grand que tout $\alpha \in n+1$. Ainsi tout n tel que nat(n) est un cardinal.
2. $\mathbb{N}$ vu comme limite de $\{0, 1, 2, ...\}$ est le premier nombre transfini qui a cardinalité infinie et donc il est plus grand que n'importe quel $n \in \mathbb{N}$.
3. Vu que $\{\alpha \mid \text{Ord}\alpha \text{ et } \alpha \leq \kappa\} = \beta$ est $\in$-transitif et bien ordonné, c'est un ordinal β. Comme $\beta \notin \beta$ nous avons $\kappa < \beta$ et $\beta \not\sim \alpha$ pour tout $\alpha \in \beta$. Donc β est un cardinal plus grand que κ.
   Si $\lambda \in \beta$ alors $\lambda \leq \kappa$, donc β est le plus petit cardinal plus grand que κ.
4. Soit X un ensemble de cardinaux. Alors par le théorème 3.1.14 $\cup X$ est un ordinal.
   Supposons par l'absurde que $\alpha \in \cup X$ et $\alpha \sim \cup X$. Alors $\alpha \in \kappa$ pour au moins un κ de X. Ainsi par la $\in$-transitivité de κ, $\alpha \subseteq \kappa$. Ainsi par le théorème de Cantor-Bernstein, nous avons que $\alpha \not\sim \kappa$ puisque κ est un cardinal. Donc $\cup X$ est un cardinal.

□

Lorsqu'il est vu comme un cardinal, $\mathbb{N} = \omega$ est habituellement noté ω_0 ou $\aleph_0$.

Proposition 3.2.3 *Si α est un ordinal successeur infini, alors α n'est pas un cardinal.*

Démonstration :
Soit α un ordinal successeur. Alors il existe β tel que $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$.
Soit $f \ : \ \alpha = \beta \cup \{\beta\} \longrightarrow \beta$ définie par

$$f(\delta) = \begin{cases} \delta + 1 & \text{si } \delta \in \omega \\ \delta & \text{si } \omega \leq \delta < \beta \\ 0 & \text{si } \delta = \beta \end{cases}$$

f est une bijection, ce qui entraîne que α et β sont équipotents. Ainsi α n'est pas un cardinal.

□

Définition 3.2.4 Associons à chaque ordinal α un cardinal ω_α tel que ω_α est le cardinal qui est le successeur immédiat de ω_β, si $\alpha = \beta + 1$ et $\omega_\alpha = \cup_{\beta \in \alpha} \omega_\beta$ si $\alpha = \cup \alpha$. $\aleph_\alpha$ est souvent utilisé à la place de ω_α.
Nous utilisons κ^+ pour représenter le cardinal qui est le successeur de κ. Si $\kappa = \lambda^+$ pour un lambda quelconque, alors κ est appelé un *cardinal successeur*, et dans le cas contraire il est appelé *cardinal limite*.

Théorème 3.2.5 *Pour tout x il existe un unique cardinal κ tel que $x \sim \kappa$.*

Démonstration :
Soit $<$ un bon ordre sur x. Par le théorème 3.1.16 nous avons que $(x, <) \sim (\alpha, \in|_\alpha)$ pour un ordinal α. Soit κ le plus petit ordinal tel que $\kappa \sim \alpha$. On remarque que κ est un cardinal. En effet, Si $\gamma < \kappa$ et $\gamma \sim \kappa$, on aurait que $\gamma \sim \kappa \sim \alpha$ se qui est en contradiction avec la définition de κ.

Supposons maintenant qu'il existe un cardinal $\lambda \neq \kappa$ tel que $x \sim \lambda$.
Nous avons alors que $\kappa \sim x$ et $x \sim \lambda$ d'où $\kappa \sim \lambda$ ce qui est en contradiction avec le fait que κ et λ sont des cardinaux.
Donc κ existe et il est unique.

□

Définition 3.2.6 Si $x \sim \kappa$ et Cardκ, nous écrivons $c(x) = \kappa$ et nous disons que κ est la *cardinalité de x.*

Théorème 3.2.7 *Pour tout cardinal α il existe un ordinal β tel que $c(\beta) > c(\alpha)$.*

Démonstration :
Soit α un cardinal. Considérons l'ordinal 2^α. En admettant l'axiome du choix nous pouvons montrer que $\alpha < 2^\alpha$:

- si 2^α est aussi un cardinal, alors $\beta = 2^\alpha$;
- si 2^α n'est pas un cardinal, alors $\cup 2^\alpha$ est un cardinal (car c'est un ordinal limite) ; dans ce cas, on considère $\beta = \cup 2^\alpha$.

□

Corollaire 3.2.8 *La classe des cardinaux n'admet pas de maximum.*

Démonstration :
Il est clair que si pour tout cardinal α il existe un cardinal β qui est plus grand que α, alors pour

la même raison il existe un cardinal γ qui est plus grand que β et ainsi de suite. Ainsi il n'est pas possible de trouver un maximum de la classe des cardinaux.

□

Proposition 3.2.9 *La borne supérieure d'un ensemble de cardinaux A, est un cardinal.*

Démonstration :
Soit $\alpha = \sup A$, et soit $\beta < \alpha$. Alors β est un ordinal.
β n'est pas un majorant de A c'est-à-dire qu'il existe $\gamma \in A$ tel que $\gamma > \beta$. Or $\gamma \in A \Rightarrow \alpha \geq \gamma$.
Ainsi $c(\alpha) \geq c(\gamma) = \gamma > \beta$. Donc α est un cardinal.

□

Théorème 3.2.10 *La classe des cardinaux n'est pas un ensemble*

Démonstration :
Supposons que la classe des cardinaux soit un ensemble. Alors par la proposition 3.2.9 sa borne supérieure β serait un cardinal, et on aurait donc que β est un maximum. Or par le corollaire 3.2.8 nous avons que la classe des ordinaux n'admet pas de maximum, donc l'hypothèse de base entraîne une contradiction. Ainsi la classe des cardinaux n'est pas un ensemble.

□

Malgré le fait que les cardinaux sont des ordinaux, l'arithmétique des ordinaux ne peut pas être utilisée comme arithmétique pour les cardinaux.
Par exemple, la somme de deux cardinaux n'est pas forcément un cardinal.
De même la multiplication ordinale de $2 : \omega \cdot 2$ n'est pas un cardinal.
Ceci suggère de définir la somme cardinale de κ et de λ par $c(\kappa + \lambda)$ où "$+$" ici est la somme ordinale. De la même façon nous définirons le produit cardinal de κ et de λ par $c(\kappa \cdot \lambda)$ où "$\cdot$" ici est la multiplication ordinale.
Ces définitions sont toutefois trop compliquées. Nous donnerons par la suite des définitions équivalentes, mais plus simples, et qui ne dépendent pas des définitions de somme et de multiplication ordinales.

Définition 3.2.11 La *somme cardinale* de κ et λ est $c(\kappa \cup \{(0,\alpha) \mid \alpha \in \lambda\})$;

Définition 3.2.12 Le *produit cardinal* de κ et λ est $c(\kappa \times \lambda)$.

Nous noterons la somme et le produit cardinaux de κ et de λ par $\kappa + \lambda$ et $\kappa \cdot \lambda$.
Même s'il s'agit de la même notation que pour la somme et le produit ordinaux, il n'y a pas d'ambiguïté, car si κ, λ, μ, ν est la convention pour les cardinaux, α, β, γ, δ est celle pour les ordinaux.

Une grande partie de l'arithmétique cardinale est extrêmement simple à cause du lemme suivant :

Lemme 3.2.13 *Si κ est infini $\Rightarrow \kappa \cdot \kappa = \kappa$.*

Démonstration :
On raisonne par induction, et on suppose que, pour tout cardinal infini μ strictement inférieur à λ, $\mu \cdot \mu$ est équipotent à μ. On va définir sur $\lambda \cdot \lambda$ une relation d'ordre $\leq_R$ de la façon suivante : si β, γ, β_1, γ_1 sont des éléments de λ, alors $(\beta, \gamma) \leq_R (\beta_1, \gamma_1)$ si et seulement si :

$$\begin{array}{ll} & \sup(\beta,\gamma) < \sup(\beta_1,\gamma_1), \\ \text{ou} & \sup(\beta,\gamma) = \sup(\beta_1,\gamma_1) \quad \text{et} \quad \beta < \beta_1, \\ \text{ou} & \sup(\beta,\gamma) = \sup(\beta_1,\gamma_1) \quad \text{et} \quad \beta = \beta_1 \quad \text{et} \quad \gamma \leq \gamma_1. \end{array}$$

On peut vérifier que $\leq_R$ est une relation d'ordre. Montrons que c'est un bon ordre : soit X un sous-ensemble non vide de $\lambda \cdot \lambda$. On considère :

$$X_1 = \{(\beta,\gamma) \in X \mid \text{pour tout } (\beta_1,\gamma_1) \in X,\ \sup(\beta,\gamma) \leq \sup(\beta_1,\gamma_1)\},$$

c'est-à-dire l'ensemble des éléments (β, γ) de X tels que $\sup(\beta, \gamma)$ soit minimum. X_1 n'est pas vide, et on considère successivement :

$$\begin{array}{ll} & X_2 = \{(\beta,\gamma) \in X_1 \mid \text{pour tout } (\beta_1,\gamma_1) \in X_1,\ \beta \leq \beta_1\}, \\ \text{et} & X_3 = \{(\beta,\gamma) \in X_2 \mid \text{pour tout } (\beta_1,\gamma_1) \in X_2,\ \gamma \leq \gamma_1\}. \end{array}$$

Par le corollaire 3.1.17, il existe un ordinal α et un isomorphisme f de $(\alpha, \in)$ sur $(\lambda \cdot \lambda, \leq_R)$. Nous verrons que cet ordinal α ne peut pas être supérieur à λ. En supposant le contraire, on voit que $\lambda \in \alpha$. Posons $f(\lambda) = (\beta_0, \gamma_0)$; β_0 et γ_0 sont donc des ordinaux appartenant à λ, et la restriction $f|_\lambda$ de f à λ est une bijection de λ sur l'ensemble

$$Y = \{(\beta,\gamma) \mid (\beta,\gamma) <_R (\beta_0,\gamma_0)\}.$$

Posons maintenant $\delta_0 = \sup(\beta_0, \gamma_0)$. La cardinalité de δ_0 est strictement inférieure à celle de λ car λ est un cardinal, et donc, par l'hypothèse d'induction, il en est de même de la cardinalité de $\delta_0 \cdot \delta_0$. D'autre part, Y est inclus dans $\delta_0 \cdot \delta_0$, et donc $c(Y) < c(\lambda)$. On a bien une contradiction, puisque f est une bijection de λ sur Y. Cela montre que f est une bijection d'une partie de λ sur $\lambda \cdot \lambda \mid c(\lambda \cdot \lambda) \leq c(\lambda)$. L'inégalité dans l'autre sens est évidente.

□

Théorème 3.2.14 *Soient κ et λ des cardinaux avec $\omega \leq \kappa$ et $\lambda \leq \kappa$. Alors :*
1. $\kappa + \lambda = \lambda + \kappa = \kappa$;
2. si $\lambda \neq 0 \Rightarrow \kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa = \kappa$.

Démonstration :

1. Puisque $\kappa + \lambda \sim \kappa \cup \{\,(0,\alpha) \,|\, \alpha \in \lambda\,\} \sim \lambda \cup \{\,(0,\alpha) \,|\, \alpha \in \lambda\} \sim \lambda + \kappa$.
   De plus, $\kappa \leq \kappa + \lambda \leq \kappa + \kappa \leq \kappa \cdot \kappa = \kappa$, par le Lemme 3.2.13.

2. Nous avons que $\kappa \times \lambda \sim \lambda \times \kappa$. Donc $\kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa$.
   De plus $\kappa \leq \kappa \cdot \lambda \leq \kappa \cdot \kappa = \kappa$, par le même lemme.

□

Définition 3.2.15 Nous notons $\prod_\alpha X$ l'ensemble de toutes les fonctions x telles que : $x \in \prod_\alpha X$ correspond à

$$\begin{array}{rcl} f_x : \alpha & \longrightarrow & \cup X \\ \beta \in \alpha & \longmapsto & f_x(\beta) \in X \end{array}$$

Cette définition nous dit qu'un élément dans un produit cartésien est une application.

Théorème 3.2.16 (de König) *Si κ_i et λ_i ($i \in I$) sont des cardinaux et si $\kappa_i < \lambda_i$ pour tout $i \in I$, alors*

$$\sum_{i \in I} \kappa_i < \prod_{i \in I} \lambda_i$$

Démonstration :
La preuve du théorème de König se fait en deux étapes. Celles-ci consistent à montrer :

1. $\sum_{i \in I} \kappa_i \leq \prod_{i \in I} \lambda_i$ et
2. $\sum_{i \in I} \kappa_i \neq \prod_{i \in I} \lambda_i$.

1. Soient $< A_i \mid i \in I >$ et $< B_i \mid i \in I >$ deux suites d'ordinaux tel que les A_i sont disjoints deux à deux et tels que $\begin{cases} c(A_i) = \kappa_i & \forall i \in I. \\ c(B_i) = \lambda_i & \forall i \in I. \end{cases}$

   Supposons que $A_i \subset B_i \ \forall i \in I$. Cherchons une application injective

$$f : \cup_{i \in I} A_i \longrightarrow \prod_{i \in I} B_i$$

   On aura ainsi que $\cup_{i \in I} A_i \preceq \prod_{i \in I} B_i$ Ce résultat entraîne que $\sum_{i \in I} \kappa_i \leq \prod_{i \in I} \lambda_i$ car

$$\begin{cases} c(\cup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} c(A_i) \\ c(\prod_{i \in I} B_i) = \prod_{i \in I} c(B_i) \end{cases}$$

   Choisissons $d_i \in B_i - A_i \ \ \forall i \in I$ et définissons donc l'application f comme suit :
   $\forall x \in (\cup_{i \in I} A_i)$ soit i_x l'unique $i \in I$ tel que $x \in A_i$ (l'unicité est due au fait que les A_i sont disjoints deux à deux) :

$$f(x) = < a_i \mid i \in I > = a_i = \begin{cases} x & \text{si } i = i_x \\ d_i & \text{si } i \neq i_x. \end{cases}$$

   Il reste à montrer que l'application f est injective, c'est-à-dire que $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$:
   Soit $x \neq y$ alors nous avons deux cas :
   Si $i_x = i_y = i$ alors $f(x) = x$ et $f(y) = y$. Comme $x \neq y$ nous avons que $f(x) \neq f(y)$.
   Si $i_x \neq i_y = i$ alors $f(x) = d_i \notin A_i$ et $f(y) = y \in A_i$. Donc $f(x) \neq f(y)$. En conclusion f est injective.

2. Soit $< B_i \mid i \in I >$ tel que $c(B_i) = \lambda_i \; \forall i \in I$ Supposons que $\sum_{i \in I} \kappa_i = \prod_{i \in I} \lambda_i$ et aboutissons à une contradiction : si $\sum_{i \in I} \kappa_i = \prod_{i \in I} \lambda_i$, alors nous pouvons trouver des $X_i \subset \prod_{i \in I} B_i$ disjoints deux à deux tels que

$$\begin{cases} c(X_i) = \kappa_i \\ \cup_{i \in I} X_i = \prod_{i \in I} B_i \end{cases}$$

   Pour tout $i \in I$ définissons A_i par $A_i = \{b_i = f(i) \mid b \in X_i\}$.
   Alors pour tout $i \in I$ nous avons que $A_i \neq B_i$ car $c(A_i) \leq c(X_i) = \kappa_i < \lambda_i = c(B_i)$.
   Ainsi il existe $b_i \in B_i$ tel que $b_i \notin A_i$.
   Soit maintenant $b =< b_i \mid i \in I >$. Alors b n'appartient à aucun des X_i, et donc par la définition de A_i nous avons aussi que $b \notin A_i$.
   Ainsi $\cup_{i \in I} X_i$ n'est pas l'ensemble $\prod_{i \in I} B_i$ tout entier, ce qui entraîne : $\cup_{i \in I} X_i \neq \prod_{i \in I} B_i$.
   Nous pouvons donc conclure que $\sum_{i \in I} \kappa_i \neq \prod_{i \in I} \lambda_i$.

□

Par analogie avec l'arithmétique finie nous pourrions conjecturer que si $1 < \kappa_i \leq \lambda_i$ alors $\sum \kappa_i < \prod \lambda_i$, mais ceci n'est pas vrai. La définition d'exponentiation cardinale ne se fait pas de la même façon que l'addition et la multiplication : en effet κ^λ dans le sens cardinal n'est pas défini comme la cardinalité de κ^λ dans le sens ordinal. À la place la définition est motivée par le fait que pour les cardinaux $m^n \sim {}^n m$

Définition 3.2.17 Si κ et λ sont des cardinaux alors $\kappa^\lambda = c\,(\,{}^\lambda \kappa)$

À nouveau notre relation est quelque peu ambiguë, puisque κ^λ maintenant a deux différentes significations suivant qu'elle est utilisée comme exponentiation ordinale ou comme exponentiation cardinale.

Lemme 3.2.18 *Soient κ, λ et ν des cardinaux. Alors nous avons les propriétés suivantes :*
1. $\nu \leq \lambda \;\Rightarrow\; \kappa^\nu \leq \kappa^\lambda$
2. $\lambda \leq \kappa \;\Rightarrow\; \lambda^\nu \leq \kappa^\nu$

Théorème 3.2.19 *Soient κ, λ et ν des cardinaux. Alors les égalités suivantes sont vraies :*
1. $\kappa^\lambda \cdot \kappa^\nu = \kappa^{\lambda+\nu}$
2. $(\kappa^\lambda)^\nu = \kappa^{\lambda \cdot \nu}$
3. $\kappa^\lambda \cdot \nu^\lambda = (\kappa \cdot \nu)^\lambda$

Démonstration :

1. Considérons uniquement le cas où $\lambda \geq \nu$, $\lambda \geq \omega$ et $\kappa \geq 2$ (Les autres cas sont analogues).

Par le lemme précédent nous avons $\begin{cases} \kappa^\lambda \geq \kappa^\nu \\ \kappa^\lambda \geq \omega. \end{cases}$

Par le point 2 du théorème 3.2.14 ($\kappa \cdot \lambda = \kappa$ si $\begin{cases} \kappa \geq \lambda \\ \kappa \geq \omega. \end{cases}$) nous avons que $\kappa^\lambda \cdot \kappa^\nu = \kappa^\lambda$.

Par le point 1 du thórème 3.2.14 ($\kappa + \lambda = \lambda + \kappa = \kappa$ si $\begin{cases} \kappa \geq \lambda \\ \kappa \geq \omega. \end{cases}$) nous avons que $\lambda + \nu = \lambda$

Ainsi $\kappa^\lambda \cdot \kappa^\nu = \kappa^\lambda = \kappa^{\lambda+\nu}$

2. Considérons $(\kappa^\lambda)^\nu$, alors par définition $(\kappa^\lambda)^\nu = c({}^\nu(\kappa^\lambda)) = c({}^\nu({}^\lambda\kappa))$.
   Soit
   $$\begin{array}{rcl} f : \nu & \longrightarrow & {}^\lambda\kappa \\ \alpha \in \nu & \longmapsto & f(\alpha) : \begin{array}{rcl} \lambda & \longrightarrow & \kappa \\ \beta & \longmapsto & (f(\alpha))(\beta) \end{array} \end{array}$$
   Définissons la fonction $H(f) = g_f$ de façon à avoir
   $$\begin{array}{rcl} g_f : \nu \times \lambda & \longrightarrow & \kappa \\ (\alpha,\beta) & \longmapsto & g_f(\alpha,\beta) = (f(\alpha))(\beta) \end{array}$$
   Ainsi $H : {}^\nu({}^\lambda\kappa) \longrightarrow {}^{\nu\cdot\lambda}\kappa$
   Si H est bijective, alors il s'en suit que $c({}^\nu({}^\lambda\kappa)) = c({}^{\nu\cdot\lambda}\kappa)$, ce qui montre le théorème.
   - Montrons que H est injective: $H(f_1) = H(f_2) \not\Rightarrow f_1 = f_2$
   $$\begin{aligned} H(f_1) = H(f_2) &\Rightarrow g_{f_1} = g_{f_2} \\ &\Rightarrow (f_1(\alpha))(\beta) = (f_2(\alpha))(\beta) \ \ \forall\, (\alpha,\beta) \in \nu \times \lambda \\ &\Rightarrow f_1(\alpha) = f_2(\alpha) \ \forall\ \alpha \in \nu \\ &\Rightarrow f_1 = f_2 \end{aligned}$$
   - Montrons que H est surjective, c'est-à-dire montrons que pour tout $l \in {}^{\nu\cdot\lambda}\kappa$ il existe $f \in {}^\nu({}^\lambda\kappa)$ tel que $H(f) := g_f = l$:
   Soit
   $$\begin{array}{rcl} l : \nu \times \lambda & \longrightarrow & \kappa \\ (\alpha,\beta) & \longmapsto & l(\alpha,\beta) \end{array}$$
   Alors à tout α fixé nous pouvons associer
   $$\begin{array}{rcl} l_\alpha : \lambda & \longrightarrow & \kappa \\ \beta & \longmapsto & l_\alpha(\beta) := l(\alpha,\beta) \end{array}$$
   Définissons encore
   $$\begin{array}{rcl} f_l : \nu & \longrightarrow & {}^\lambda\kappa \\ \alpha & \longmapsto & f_l(\alpha) := l_\alpha \end{array}$$
   et montrons que $H(f_l) = l$:
   $$\begin{array}{rcl} H(f_l) := g_{f_l} : \nu \times \lambda & \longrightarrow & \kappa \\ (\alpha,\beta) & \longmapsto & g_{f_l}(\alpha,\beta) = (f_l(\alpha))(\beta) = l_\alpha(\beta) = l(\alpha,\beta) \end{array}$$

3. Considérons le seul cas non trivial $\lambda \geq \omega$.
   Alors nous avons deux cas à étudier: $\kappa \geq \omega$ et $\kappa < \omega$.
   - Soit $\kappa \geq \omega$ et supposons sans perte de généralité que $\kappa \geq \nu$.
   Alors par théorème 3.2.14 nous avons les deux résultats suivants: $\begin{cases} \kappa \cdot \nu = \kappa \\ \kappa^\lambda \cdot \nu^\lambda = \kappa^\lambda \end{cases}$
   Ainsi $(\kappa \cdot \nu)^\lambda = \kappa^\lambda$ et donc $\kappa^\lambda \cdot \nu^\lambda = \kappa^\lambda = (\kappa \cdot \nu)^\lambda$.
   - Soit maintenant $\kappa < \omega$ et supposons sans perte de généralité que $\kappa \geq \nu$.
   Alors
   $$(\kappa \cdot \nu)^\lambda \overset{\substack{\text{lemme} \\ 3.2.18}}{\leq} (\kappa \cdot \kappa)^\lambda = (\kappa^2)^\lambda \overset{\substack{\text{thm.} \\ 3.2.19.2}}{=} \kappa^{2\cdot\lambda} \overset{\substack{\text{thm.} \\ 3.2.14.2}}{=} \kappa^\lambda$$

Puisque $(\kappa \cdot \nu)^\lambda \geq \kappa^\lambda$, nous pouvons conclure que $(\kappa \cdot \nu)^\lambda = \kappa^\lambda$. Ainsi $\kappa^\lambda \cdot \nu^\lambda = \kappa^\lambda = (\kappa \cdot \nu)^\lambda$.

$\square$

3.3 L'induction transfinie

Nous avons vu que la méthode d'induction pour les nombres naturels nous permettait de démontrer certaines propriétés de ces nombres. Pour les nombres transfinis il existe une méthode semblable, appelée *induction transfinie.*

Théorème 3.3.1 (Induction transfinie 1)

$$\forall\, \beta \in \alpha \;\; (\; \beta \subseteq X \;\Rightarrow\; \beta \in X \;) \;\Rightarrow\; \alpha \subseteq X$$

Démonstration :
Soit $\forall\, \beta \in \alpha$ ($\beta \subseteq X \;\Rightarrow\; \beta \in X$) et supposons par l'absurde que $\alpha \nsubseteq X$.
Dans ce cas $\alpha - X$ n'est pas l'ensemble vide. Considérons donc l'élément minimal de $\alpha - X$, $\gamma = min\{\alpha - X\}$ et montrons que $\gamma \subseteq X$.
Supposons $\gamma \nsubseteq X$ c'est-à-dire supposons qu'il existe δ vérifiant $\delta \in \gamma$ et $\delta \notin X$. Or $\gamma \in \alpha$ donc $\delta \in \gamma \in \alpha \;\Rightarrow\; \delta \in \alpha$ car α étant un ordinal est $\in$-transitif.
De $\delta \in \alpha$ et $\delta \notin X$ on déduit que $\delta \in \alpha - X$, ce qui est en contradiction avec le fait que $\delta \in \gamma$ et $\gamma = min\{\alpha - X\}$. Donc nous avons montré que $\gamma \subseteq X$.
Ainsi $\gamma \in X - \alpha$ ce qui est une contradiction.
Donc $\alpha \subseteq X$.

□

Il y a plusieurs façons d'énoncer ce théorème, et nous donnons par la suite deux énoncés qui sont équivalents au premier.

Théorème 3.3.2 (Induction transfinie 2) *Supposons que $X \subseteq \alpha$ et que les trois conditions suivantes sont vérifiées :*

1. $0 \in X$;
2. ($\beta \in X \;\wedge\; \beta + 1 \in \alpha$) $\Rightarrow\; \beta + 1 \in X$;
3. ($\beta \subseteq X \;\wedge\; \beta \in \alpha$) $\Rightarrow\; \cup\beta \in X$.

Alors $X = \alpha$.

Démonstration :
Soit $X \subseteq \alpha$ et supposons les trois conditions précédentes vérifiées. Supposons par l'absurde que $\alpha \nsubseteq X$ et considérons $\gamma = min\{\alpha - X\}$.

$$\text{Alors} \left\{ \begin{array}{l} \gamma \text{ n'est pas } 0 \;\; (\text{ à cause de la condition } 1 \text{ }). \\ \gamma \text{ n'est pas un ordinal succésseur } \;\; (\text{ à cause de la condition } 2 \text{ }). \\ \gamma \text{ n'est pas un ordinal limite } \;\; (\text{ à cause de la condition } 3 \text{ }). \end{array} \right.$$

Ainsi un tel gamma n'existe pas, ce qui entraîne que $\alpha \subseteq X$.
En conclusion $X \subseteq \alpha$ et $\alpha \subseteq X$ donnent que $\alpha = X$.

□

Théorème 3.3.3 (Induction transfinie 3)

$$(\forall \beta \in \alpha \ \ (\mathcal{P}(\beta) \ \Rightarrow \ \mathcal{P}(\alpha)) \ \Rightarrow \ \mathcal{P}(\alpha) \ \forall \ Ord\alpha \ )$$

Démonstration :
Supposons que $\forall \ \beta \in \alpha \ \ (\mathcal{P}(\beta) \ \Rightarrow \ \mathcal{P}(\alpha))$ et qu'il existe un α_0 tel que $\mathcal{P}(\alpha_0)$ n'est pas vrai. Posons $A_0 = \{\beta \leq \alpha_0 \mid \mathcal{P}(\beta)$ n'est pas vrai $\}$. Alors $\alpha_0 \in A_0$.
Soit β_0 l'élément minimal de A_0, donc $\mathcal{P}(\beta_0)$ n'est pas vrai. Ainsi $\forall \ \beta \in \beta_0$ nous avons que $\mathcal{P}(\beta)$ est vrai car $\beta \notin A_0$. Donc par hypothèse $\mathcal{P}(\beta_0)$ doit être vrai, ce qui est en contradiction avec le fait que $\beta_0 \in A_0$.
Donc nous avons montré que sous les conditions précédentes il n'existe pas de α_0 tel que $\mathcal{P}(\alpha_0)$ n'est pas vrai.

$\square$

Bibliographie

[1] J. Malitz, *Introduction to Mathematical Logic*, Springer-Verlag New York, 1979.

[2] R. Cori, D. Lascar, *Logique mathématique*, MASSONS, 1993.

[3] John H. Conway, Richard K. Guy, *Le livre des nombres*, Eyrollen, 1996.

[4] Rudy. Rucker, *Mind tools*, Houghton Mifflin Company, Boston, 1987.

[5] Rudy. Rucker, *Infinity and the Mind*, Princeton University Press, New Jersey, 1995.