Le Théorème de Whitney

Lionel Dumartheray

Responsables :

Prof. Kathryn Hess Bellwald
Sylvestre Blanc

Février 2004

Table des matières

Introduction

Le but de ce projet est d'étudier et de comprendre un corollaire de la forme faible du théorème de Whitney, ainsi que sa démonstration. Ce résultat nous dit que toute variété différentiable de dimension n est difféomorphe à une sous-variété plongée fermée dans $\mathbb{R}^{2n+1}$. La forme forte du théorème de Whitney, qui entraîne que toute variété différentiable peut être plongée dans $\mathbb{R}^{2n}$, sera également énoncée avec une esquisse de la démonstration.

Cet exposé commencera avec des définitions et des résultats concernant les variétés, ainsi que les applications différentiables entre variétés. Puis nous passerons aux partitions de l'unité, un outil permettant de construire des applications différentiables. Ensuite, nous étudierons les sous-variétés plongées, avec un exemple dans $M(m \times n, \mathbb{R})$, ainsi que les ensembles de mesure nulle. Nous finirons avec deux théorèmes importants pour la démonstration des résultats qui nous intéressent.

Ce projet est essentiellement basé sur l'ouvrage de John Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*[1], ainsi qu'un article de Hassler Whitney[2] pour la démonstration de la forme forte de son théorème.

Je tiens également à remercier vivement Sylvestre Blanc pour son aide précieuse tout au long du semestre.

[1] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds.* Springer-Verlag, New York, 2002.

[2] Hassler Whitney. The self-intersections of a smooth n-manifold in $2n$-space. *Ann. of Math. (2)*, 45 :220-246, 1944.

Chapitre 1

Variétés différentiables

Définition 1.1 Soit X un espace topologique. On dit que X possède une *base dénombrable en x* s'il existe une collection dénombrable $\mathcal{B}$ de voisinages de x tels que chaque voisinage U de x contient au moins un élément de $\mathcal{B}$. Un espace topologique est alors dit *1-dénombrable* s'il possède une base dénombrable en tout point. On dit également que X est *2-dénombrable* s'il existe une base dénombrable pour sa topologie.

Définition 1.2 Soit $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X. On dit qu'elle *converge vers x* si pour tout voisinage U de x, il existe un entier N tel que $x_n \in U$ pour tout $n \geqslant N$.

Lemme 1.3 *Soit X un espace topologique 1-dénombrable, et A un sous-ensemble de X. Si $x \in \overline{A}$, alors il existe une suite $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ dans A convergeant vers x.*

Démonstration. Soit $x \in \overline{A}$, et soit $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ la base dénombrable en x. On va construire une suite emboîtée de voisinages pour assurer la convergence. On considère la collection $\{U_i \cap A\}_{i\in\mathbb{N}}$. Par définition du point d'adhérence, aucun de ces éléments n'est égal à l'ensemble vide. Considérons maintenant la suite décroissante $\{\bigcap_{i=1}^{n} U_i \cap A\}_{n\in\mathbb{N}}$. Par l'argument précédent, on peut choisir un élément x_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, définissant ainsi une suite dans X. Montrons qu'elle converge vers x. Soit donc U un voisinage de x, il existe alors un U_j tel que $x \in U_j \subset U$. Or U_j contient l'ouvert $\bigcap_{i=1}^{j} U_i \cap A$, qui lui-même contient tous les éléments de la suite à partir de x_j. La suite converge ainsi vers x. $\square$

Lemme 1.4 *Soit X un espace topologique 2-dénombrable. Alors tout recouvrement de X possède un sous-recouvrement dénombrable.*

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ une base dénombrable pour X, et soit $\mathcal{U}$ un recouvrement quelconque de X. Soit encore $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ la collection des ouverts de base $B \in \mathcal{B}$ tels que $B \subset U$ pour un $U \in \mathcal{U}$. Pour tout $B \in \mathcal{B}'$, on choisit un ouvert $U_B \in \mathcal{U}$ contenant B. La collection $\{U_B : B \in \mathcal{B}'\}$ est clairement dénombrable. Montrons que c'est également un recouvrement. Soit $x \in X$, il existe donc un ouvert $U_0 \in \mathcal{U}$ contenant x, et également un élément $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subset U_0$, puisque $\mathcal{B}$ est une base. En particulier, $B \in \mathcal{B}'$, et ainsi $x \in B \subset U_B$. $\square$

Définition 1.5 (Variété topologique) Soit M un espace topologique. On dit que M est une *variété topologique de dimension n* (ou *n-variété topologique*) si M est de Hausdorff, 2-dénombrable et localement euclidien de dimension n, i.e. chaque point de M possède un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.6 Soit M une variété topologique de dimension n. On appelle *carte sur M* un couple (U, φ), où U est un ouvert de M et $\varphi : U \longrightarrow \widetilde{U}$ un homéomorphisme de U dans $\widetilde{U} = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$.

Par définition de la variété topologique, chaque point $p \in M$ est contenu dans le domaine U d'une carte (U, φ). L'application φ est appelée *application coordonnée*, et les composantes $(x^1, \dots, x^n)$ de φ, définies par $\varphi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$, sont appelées *coordonnées locales* sur U. Si de plus $\varphi(U)$ est une boule ouverte dans $\mathbb{R}^n$, U est une *boule coordonnée.*

Exemple 1.7 (Plan projectif) Le *plan projectif réel* de dimension n, noté $\mathbb{RP}^n$, est défini comme l'ensemble des sous-espaces linéaires de $\mathbb{R}^{n+1}$. On le munit de la topologie quotient déterminée par l'application

$$\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{RP}^n,$$

qui envoie chaque point $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ sur le sous-espace engendré par x $\pi(x)$, noté $[x]$. Il représente la classe d'équivalence de x sur $\mathbb{RP}^n$.

Nous allons montrer en trois étapes que $\mathbb{RP}^n$ est une variété topologique de dimension n. Nous commençons par montrer que cet espace est localement euclidien, puis de Hausdorff, et nous finirons par la 2-dénombrabilité.

Première étape :

Pour tout $i = 1, \dots, n+1$, soit $\widetilde{U}_i$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ tels que $x^i \neq 0$ et soit $U_i = \pi(\widetilde{U}_i) \subset \mathbb{RP}^n$. L'ouvert $\widetilde{U}_i$ étant saturé (i.e. $\widetilde{U}_i = \pi^{-1}(\pi(\widetilde{U}_i))$, U_i est un ouvert et $\pi|_{\widetilde{U}_i} : \widetilde{U}_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une application quotient.

On définit de plus l'application $\varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$ par

$$\varphi_i[x^1, \dots, x^{n+1}] = \left(\frac{x^1}{x^i}, \dots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \dots, \frac{x^{n+1}}{x^i} \right).$$

Cette fonction est bien définie puisque $\varphi[x] = \varphi[\lambda x]$, $\forall \lambda \neq 0$. Par une propriété des applications quotients, si $\varphi_i \circ \pi$ est continue, alors φ_i est continue. En fait, φ_i est un homéomorphisme puisque son inverse

$$\varphi_i^{-1}(u^1, \ldots, u^n) = [u^1, \ldots, u^{i-1}, 1, u^i, \ldots, u^n]$$

est continu également.

Géométriquement, on peut identifier $\mathbb{R}^n$ à l'hyperplan de $\mathbb{R}^{n+1}$ d'équation $x^i = 1$, et ainsi $\varphi_i[x]$ peut être interprété comme étant l'intersection de la droite $[x]$ et le sous-espace. Les U_i recouvrant $\mathbb{RP}^n$, cela montre que $\mathbb{RP}^n$ est localement euclidien de dimension n.

Deuxième étape :

Pour montrer que $\mathbb{RP}^n$ est de Hausdorff, on considère $[x], [y] \in \mathbb{RP}^n$, avec $[x] \neq [y]$. Ceci implique que si l'on choisit x et y dans $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ tels que $\pi(x) = [x]$ et $\pi(y) = [y]$, ils ne seront pas colinéaires. Ainsi, le plan bisecteur interne divise l'espace en deux demi-espaces ouverts, que l'on nomme H_1 et H_2. Considérons alors B_1 (resp. B_2) une boule centrée en x (resp. y), entièrement inclue dans H_1 (resp. H_2). Nous définissons ensuite D_1 et D_2 les ensembles des droites engendrées par les éléments de B_1 et B_2. Il est assez clair que ces deux ensembles sont des ouverts saturés, et également disjoints dans $\mathbb{R}^{n+1}$, puisque nous ne considérons pas l'origine.

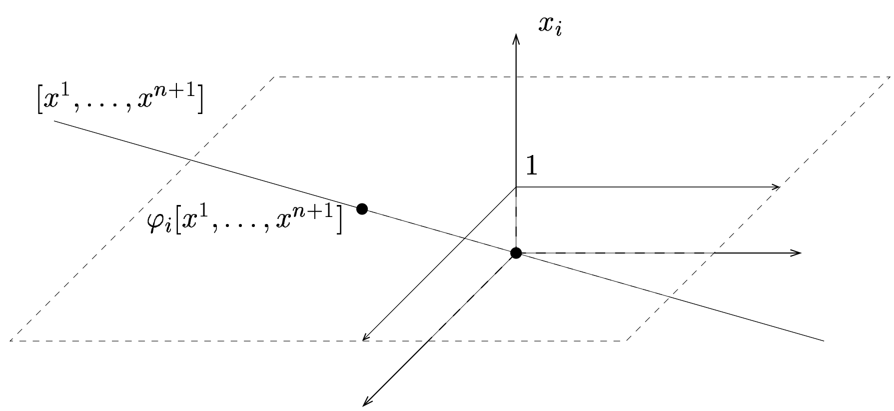

FIG. 1.1: Une carte pour $\mathbb{RP}^n$

Considérons les voisinages $\pi(D_1)$ et $\pi(D_2)$ de $[x]$ et $[y]$ dans $\mathbb{RP}^n$, et montrons qu'ils sont disjoints. Supposons alors qu'il existe $[z] \in \pi(D_1) \cap \pi(D_2)$, et considérons sa préimage par π. Le fait que D_1 soit saturé nous assure que la fibre $\pi^{-1}([z])$ est entièrement inclue dans D_1, de même pour D_2. Or ces deux ensembles sont disjoints, comme nous l'avons vu plus haut. Il y a donc contradiction et ainsi $\mathbb{RP}^n$ est de Hausdorff.

Troisième étape :

Pour la démonstration de la 2-dénombrabilité de $\mathbb{RP}^n$, considérons l'image par π des boules ouvertes de $\mathbb{R}^{n+1}$ dont les coordonnées du centre, ainsi que les rayons, sont des éléments de $\mathbb{Q}$. Nous obtenons ainsi une collection $\mathcal{B}$ d'ouverts de $\mathbb{RP}^n$. Il s'agit ensuite de montrer que c'est une base pour la topologie de $\mathbb{RP}^n$, c'est-à-dire qu'elle vérifie les conditions suivantes :

1. $\mathcal{B}$ est un recouvrement de $\mathbb{RP}^n$,
2. si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ tels que $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$, alors il existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tel que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

La première propriété est triviale, puisque tout point de $\mathbb{R}^{n+1}$ est recouvert par une de ces boules définies plus haut. Ainsi, tout point de $\mathbb{RP}^n$ est recouvert par l'image par π de ces boules.

Pour la deuxième propriété, soit D_1 et D_2 comme ci-dessus tels que $\pi(D_1) \cap \pi(D_2) \neq \emptyset$. Choisissons un $[x]$ dans l'intersection et un $x \in \pi^{-1}([x]) \subset \mathbb{R}^{n+1}$. $D_1 \cap D_2$ étant ouvert, on peut trouver un rayon $\varepsilon > 0$ suffisament petit et ainsi choisir un $y \in \mathbb{Q}^{n+1}$ et un rayon rationnel δ tel que $0 < \delta < \varepsilon$. L'image par π de la boule $B(y, \delta)$ est donc entièrement inclue dans $\pi(D_1) \cap \pi(D_2)$, ce qui achève la démonstration.

Ainsi, $\mathbb{RP}^n$ est une variété topologique de dimension n.

Définition 1.8 Soit X un espace topologique, et $K \subset X$ un sous-ensemble. On dit que K est *précompact* dans X si son adhérence est compacte dans X.

Lemme 1.9 *Toute variété topologique possède une base dénombrable de boules coordonnées précompactes.*

Démonstration. Soit M une variété topologique de dimension n. Nous commençons par prouver le lemme dans le cas où M peut être recouvert par une seule carte. Supposons $\varphi : M \longrightarrow \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$, et $\mathcal{B}$ la collection de toutes les boules ouvertes $B_r(x) \subset \mathbb{R}^n$ telles que le rayon r ainsi que les coordonnées de x soient rationnels, et que $\overline{B}_r(x) \subset \widetilde{U}$. Chaque boule de ce type est précompacte dans $\widetilde{U}$, et il est facile de voir que $\mathcal{B}$ est une base dénombrable pour la topologie de $\widetilde{U}$. Et puisque φ est un homéomorphisme, la collection composée des $\varphi^{-1}(B)$, avec $B \in \mathcal{B}$, est une base dénombrable pour la topologie de M.

Soit maintenant M une variété quelconque. Par définition, tout point de M est contenu dans le domaine d'une carte. Par le lemme 1.4, M est recouvert par une collection denombrable $\{(U_i, \varphi_i)\}$ de cartes. Et par l'argument du paragraphe précédent, chaque domaine U_i possède une base de boules coordonnées précompactes, M est ainsi munie d'une base dénombrable pour sa topologie. Si $V \subset U_i$ est une de ces boules précompactes, alors son adhérence dans U_i est compacte, et donc fermée dans M puisque M est de Hausdorff.

Ainsi, l'adhérence de V dans U_i est la même que dans M, V est donc précompact dans M. $\square$

Nous allons maintenant construire une structure sur les variétés topologiques qui nous permettra par la suite de définir la notion d'application différentiable entre ces espaces.

Définition 1.10 Soit M une variété topologique de dimension n et (U, φ) une carte sur M dont le domaine contient p. On dit que $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ est *différentiable en* p si la composition de fonctions

$$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) = \widetilde{U} \longrightarrow \mathbb{R}$$

est différentiable au sens usuel.

On dit aussi que f est *différentiable en* $D \subset M$ si f est différentiable en p pour tout $p \in D$.

Remarque La différentiabilité n'est pas un invariant topologique. Ainsi, nous devrons munir M d'une collection de cartes conservant cette propriété indépendament de la carte choisie, appelée *atlas*.

Définition 1.12 (Changement de carte) Soit M une variété topologique de dimension n, et deux cartes (U, φ) et (V, ψ) telles que $U \cap V \neq \emptyset$. La composition de fonctions

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$$

est appelée *application de changement de carte*. C'est un homéomorphisme puisque c'en est une composition.

Définition 1.13 Deux cartes (U, φ) et (V, ψ) sont dites *compatibles* si l'un des deux cas suivants se présente :

1. $U \cap V = \emptyset$,
2. $U \cap V \neq \emptyset$, et l'application changement de carte $\psi \circ \varphi^{-1}$ est un difféomorphisme.

Définition 1.14 On définit un *atlas* $\mathcal{A}$ comme étant une collection de cartes dont les domaines recouvrent M.

Il est dit *différentiable* si chaque paire de cartes dans $\mathcal{A}$ vérifie la propriété de compatibilité.

On parle également d'atlas *maximal* si $\mathcal{A}$ n'est pas contenu dans un atlas strictement plus grand. Cela signifie que toute carte compatible avec toutes les cartes de $\mathcal{A}$ est déjà dans $\mathcal{A}$.

Nous pouvons maintenant définir les concepts qui nous intéressent.

Définition 1.15 (Structure différentiable) Une *structure différentiable* sur une variété M de dimension n est un atlas différentiable maximal.

Définition 1.16 (Variété différentiable) On définit une *variété différentiable* comme étant un couple $(M, \mathcal{A})$, où M est une variété topologique et $\mathcal{A}$ une structure différentiable sur M.

Il n'est souvent pas très pratique de définir une structure différentiable en décrivant explicitement un atlas différentiable maximal en raison du nombre de cartes qu'il peut contenir. Le lemme suivant nous indique qu'un certain atlas suffit.

Lemme 1.17 *Soit M une variété topologique.*

1. *Chaque atlas différentiable sur M est contenu dans une unique structure différentiable.*
2. *Deux atlas différentiables sur M définissent la même structure différentiable si et seulement si leur union est un atlas différentiable.*

Démonstration. 1. Soit $\mathcal{A}$ un atlas différentiable sur M, et soit $\overline{\mathcal{A}}$ l'ensemble de toutes les cartes compatibles avec celles de $\mathcal{A}$. Pour montrer que $\overline{\mathcal{A}}$ est un atlas différentiable, nous devons montrer que deux cartes de $\overline{\mathcal{A}}$ sont compatibles, i.e. si $(U, \varphi), (V, \psi) \in \overline{\mathcal{A}}$, alors l'application

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$$

est différentiable.

Soit $x = \varphi(p) \in \varphi(U \cap V)$ un point quelconque. Puisque les domaines des cartes de $\mathcal{A}$ recouvrent M, il existe une carte $(W, \theta) \in \mathcal{A}$ telle que $p \in W$. Etant donné que chaque carte de $\overline{\mathcal{A}}$ est compatible avec (W, θ), les deux applications $\theta \circ \varphi^{-1}$ et $\psi \circ \theta^{-1}$ sont différentiables sur leur domaine respectif. Mais $p \in U \cap V \cap W$, et ainsi

$$\psi \circ \varphi^{-1} = (\psi \circ \theta^{-1}) \circ (\theta \circ \varphi^{-1})$$

est différentiable au voisinage de x. Donc $\psi \circ \varphi^{-1}$ est différentiable sur $\varphi(U \cap V)$. Il est trivial de monter que cette application est un difféomorphisme. $\overline{\mathcal{A}}$ est alors un atlas différentiable.

Pour montrer qu'il est maximal, il faut remarquer que n'importe quelle carte compatible avec toute carte de $\overline{\mathcal{A}}$ doit être, en particulier, compatible avec toute carte de $\mathcal{A}$; elle est donc déjà dans $\overline{\mathcal{A}}$. Cela prouve l'existence d'un atlas différentiable maximal contenant $\mathcal{A}$. Si $\mathcal{B}$ est un autre atlas différentiable maximal contenant $\mathcal{A}$, chacune de ses cartes est compatible avec celles de $\mathcal{A}$, donc $\mathcal{B} \subset \overline{\mathcal{A}}$. Et par hypothèse de maximalité de $\mathcal{B}$, $\overline{\mathcal{A}} \subset \mathcal{B}$, et ainsi $\mathcal{B} = \overline{\mathcal{A}}$.

2. Pour montrer que la réunion de deux atlas différentiables $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ contenus dans le même atlas différentiable maximal $\overline{\mathcal{A}}$ est également un atlas différentiable, il suffit de remarquer que $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ est une collection de cartes compatibles avec toutes celles de $\overline{\mathcal{A}}$, en particulier compatibles entre elles puisque $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}' \subset \overline{\mathcal{A}}$. Ainsi, $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ est un atlas différentiable.

Réciproquement, si $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ est un atlas différentiable, cela signifie par 1. qu'il existe une structure différentiable $\overline{\mathcal{A}}$ contenant cette réunion. En particulier, nous avons $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}}$ et $\mathcal{A}' \subset \overline{\mathcal{A}}$. $\square$

Exemple 1.18 (Plan projectif) Nous avons déjà vu que le plan projectif réel de dimension n est une variété topologique. Il s'agit maintenant de montrer que les cartes (U_i, φ_i) construites précédemment sont compatibles. En supposant que $i > j$, on voit facilement que

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(u^1, \ldots, u^n) = \left(\frac{u^1}{u^j}, \ldots, \frac{u^{j-1}}{u^j}, \frac{u^{j+1}}{u^j}, \ldots, \frac{u^{i-1}}{u^j}, \frac{1}{u^j}, \frac{u^i}{u^j}, \ldots, \frac{u^n}{u^j} \right),$$

qui est un difféomorphisme de $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ dans $\varphi_j(U_i \cap U_j)$. L'espace $\mathbb{RP}^n$ muni de cet atlas différentiable est donc une variété differentiable de dimension n.

Exemple 1.19 (Sous-variétés ouvertes) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Alors U est une n-variété topologique, et la seule carte (U, Id_U) définit une structure différentiable.

Plus généralement, soit M une n-variété différentiable, et $U \subset M$ un ouvert. On définit un atlas sur U par

$$\mathcal{A}_U = \{\text{cartes } (V, \varphi) \text{ telles que } V \subset U\}.$$

Chaque point $p \in U$ est contenu dans le domaine d'une carte (W, φ) de M ; si l'on pose $V = W \cap U$, alors $(V, \varphi|_V)$ est une carte de $\mathcal{A}_U$ dont le domaine contient p. Ainsi, U est recouvert par les domaines des cartes de $\mathcal{A}_U$, et c'est un atlas différentiable sur U. En effet, soient $p \in M$, et (W_1, φ), (W_2, ψ) des cartes sur M en p. Soient également $V_1 = W_1 \cap U$, $V_2 = W_2 \cap U$, et $(V_1, \varphi|_{V_1})$, $(V_2, \psi|_{V_2})$ les cartes correspondantes sur U. On sait par définition d'une structure différentiable que $\psi \circ \varphi^{-1}$ est un difféomorphisme de $\varphi(W_1 \cap W_2) \supset \varphi|_{V_1}(V_1 \cap V_2)$ dans $\psi(W_1 \cap W_2) \supset \psi|_{V_2}(V_1 \cap V_2)$, et ainsi les deux cartes sur U sont compatibles.

Nous avons donc montré que tout ouvert de M est une variété différentiable de dimension n, que l'on nomme *sous-variété ouverte de M*.

Chapitre 2

Fonctions et applications différentiables

Définition 2.1 (Fonction différentiable) Soit M une n-variété différentiable. Une fonction $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^k$ est dite *différentiable* si pour tout $p \in M$ il existe une carte (U, φ) de M dont le domaine contient p, et tel que la composition $f \circ \varphi^{-1}$ est différentiable sur $\widetilde{U} = \varphi(U)$ dans $\mathbb{R}^n$. Cette fonction est la *représentation en coordonnées* de f.

Remarque En fait, $f \circ \psi^{-1}$ est différentiable pour toute carte (V, ψ). Par définition, il existe une carte (U, φ) de M en p telle que $f \circ \varphi^{-1}$ soit différentiable en $\varphi(p)$. Soit (V, ψ) une autre carte en p. On va montrer que $f \circ \psi^{-1}$ est différentiable en $\psi(p)$.

On sait que $p \in U \cap V \neq \emptyset$, et donc $\varphi \circ \psi^{-1}$ est un difféomorphisme de $\psi(U \cap V) \ni \psi(p)$ dans $\varphi(U \cap V) \ni \varphi(p)$. Ainsi l'application

$$(f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \psi^{-1}) = f \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

est différentiable en $\psi(p)$ car c'est une composition d'applications différentiables (voir fig. 2).

La différentiabilité se généralise facilement aux applications entre variétés différentiables.

Définition 2.3 (Application différentiable) Soit M et N des variétés différentiables, et soit $F : M \longrightarrow N$ une application. On dit que F est une *application différentiable* si pour tout $p \in M$, il existe des cartes (U, φ) contenant p et (V, ψ) contenant $F(p)$ telles que $F(U) \subset V$ et que $\varphi^{-1} \circ F \circ \psi$ soit différentiable de $\varphi(U)$ dans $\psi(V)$. Si F est une application différentiable bijective, et son inverse est également différentiable, F est un *difféomorphisme*. S'il existe une telle application entre deux variétés, on dit qu'elles sont *difféomorphes*.

La remarque ci-dessus est également valable pour les applications différentiables entre variétés. Nous avons donc que $\varphi^{-1} \circ F \circ \psi$ est différentiable pour toutes cartes (U, φ) et (V, ψ) vérifiant les conditions de la définition. La démonstration est du même type que pour une fonction différentiable $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^k$.

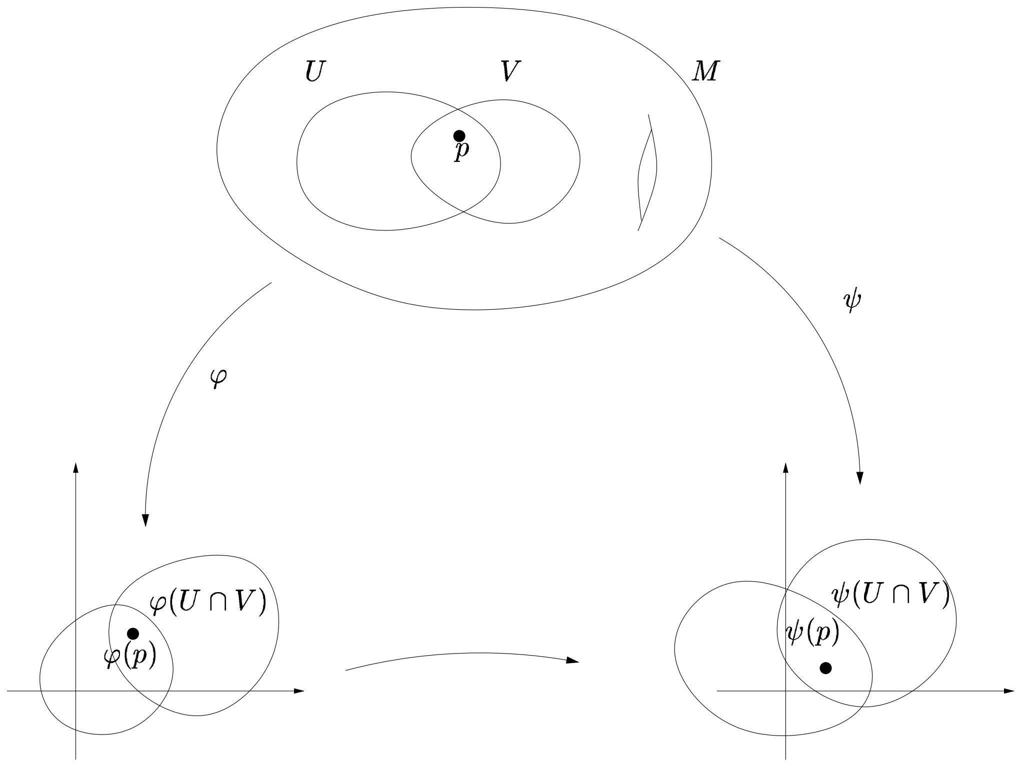

FIG. 2.1: Différentiabilité pour toute carte.

Lemme 2.4 *Soient M et N des variétés différentiables, et soit $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un recouvrement ouvert de M. Supposons que pour tout $\alpha \in A$, on se donne une application différentiable $F_\alpha : U_\alpha \longrightarrow N$ telle que ces applications coïncident sur les intersections de leur domaine, i.e. $F_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = F_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ pour tout $\alpha, \beta \in A$. Alors il existe une unique application différentiable $F : M \longrightarrow N$ telle que $F|_{U_\alpha} = F_\alpha$ pour tout $\alpha \in A$.*

Démonstration. On considère l'application $F : M \longrightarrow N$ telle que $F(x) = F_\alpha(x)$ si $x \in U_\alpha$. S'il existe $\beta \in A$ tel que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, on a $F(x) = F_\alpha(x) = F_\beta(x)$ puisque nous avons la condition $F_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = F_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$. Pour montrer que F est différentiable, remarquons que pout tout $p \in M$, il existe un voisinage U_α de p tel que $F|_{U_\alpha}$ est différentiable. Il existe donc une carte (V, φ) en p

et (W,ψ) une carte en $F|_{U_\alpha}(p) = q$ telles que $F|_{U_\alpha}(U_\alpha \cap V) \subset \; W$.Donc l'application

$$\psi \circ F|_{U_\alpha} \circ \varphi^{-1} : \varphi(U_\alpha \cap V) \longrightarrow \psi(U_\alpha \cap W)$$

est différentiable. On a donc trouvé une carte telle que F soit différentiable.

Pour démontrer l'unicité, soit $G : M \longrightarrow N$ une application telle qu'il existe $x \in M$ avec $G(x) \neq F(x)$, et $\alpha \in A$ tel que $x \in U_\alpha$. On aurait donc $G|_{U_\alpha}(x) = F_\alpha(x) = F|_{U_\alpha}(x)$, d'où la contradiction. □

Nous allons maintenant introduire la notion d'application propre, ainsi qu'un résultat important que nous utiliserons pour les démonstrations du théorème de Whitney et du corollaire auquel nous nous intéressons.

Définition 2.5 (Application propre) Soient M et N des espaces topologiques et une application $F : M \longrightarrow N$, pas forcément continue. F est dite *propre* si pour tout compact $K \subset N$, sa préimage $F^{-1}(K)$ est compacte dans M.

Proposition 2.6 *Supposons $F : M \longrightarrow N$ une application continue propre entre variétés topologiques. Alors F est fermée.*

Démonstration. On doit montrer que l'image par F d'un fermé K de M est fermé dans N. Soit y un point quelconque de $\overline{F(K)}$. Par le lemme 1.3, il existe une suite $\{y_i\}$ dans $F(K)$ telle que $y_i \longrightarrow y$. Puisque $y_i \in F(K)$, il existe $x_i \in K$ tel que $F(x_i) = y_i$.

Soit U un voisinage précompact de y dans N. Par définition de la convergence d'une suite, il existe un rang i à partir duquel tous les éléments de la suite sont contenus dans U. Ainsi, $y_i \in U \subset \overline{U}$, et donc $x_i \in F^{-1}(\overline{U})$. Le fait que F soit propre implique que $F^{-1}(\overline{U})$ est compact, et ainsi $\{x_i\}$ possède une sous-suite convergeant vers un point $x \in M$. K étant fermé, nous avons $x \in K$. Par continuité,

$$F(x) = \lim_{k \longrightarrow \infty} F(x_{i_k}) = \lim_{k \longrightarrow \infty} y_{i_k} = y,$$

ce qui implique que $y \in F(K)$. L'ensemble $F(K)$ est donc fermé, et ainsi F est une application fermée. □

Chapitre 3

Partitions de l'unité

Un des résultats les plus utiles en topologie est le lemme de recollement, qui nous permet de construire des applications continues en les "recollant" ensemble, comme son nom l'indique. Concernant les variétés différentiables, ce lemme est d'une utilité limitée, puisque l'application obtenue est rarement différentiable, bien qu'elle soit elle-même composée d'applications différentiables.

Nous allons introduire dans cette section les partitions de l'unité, qui sont des outils puissants pour combiner des objets localement différentiables et en obtenir ainsi des globaux. Elles nous permettront de construire par induction des applications différentiables définies sur des ouverts dont la taille augmente au fur et à mesure, ce qui nous sera très utile dans les démonstrations des théorèmes 6.1 et 6.3.

Toutes les constructions dans cette section sont basées sur l'existence de fonctions différentiables positives sur une partie bien précise de la variété et identiquement nulles en dehors. On commence avec une fonction différentiable sur $\mathbb{R}$.

Lemme 3.1 *La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/t}, & t > 0, \\ 0, & t \leqslant 0, \end{cases}$$

est différentiable (C^∞).

Démonstration. On peut voir le graphe de cette fonction sur la figure 3. Elle est clairement différentiable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Il faut alors montrer que ses dérivées existent et sont continues en 0. La fonction f est continue puisque $\lim\limits_{t \searrow 0} e^{-1/t} = 0$. Nous avons également que pour tout $k \geqslant 0$,

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{e^{-1/t}}{t^k} = \lim_{t \searrow 0} \frac{t^{-k}}{e^{1/t}} = 0. \tag{3.2}$$

On va montrer par récurrence que pour tout $t \geq 0$, la k^{e} dérivée de f est de la forme

$$f^{(k)}(t) = \frac{p_k(t)}{t^{2k}} e^{-1/t},$$

où $p_k(t)$ est un polynôme de degré k. Ceci est vrai pour $k = 0$, puisque $p_0(t) = 1$. Supposons que c'est également vrai pour un $k \geq 0$. En dérivant, on obtient

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(t) &= \frac{p_k'(t)}{t^{2k}} e^{-1/t} - \frac{2kp_k(t)}{t^{2k+1}} e^{-1/t} + \frac{p_k(t)}{t^{2k}} \frac{1}{t^2} e^{-1/t} \\ &= \frac{t^2 p_k'(t) - 2ktp_k(t) + p_k(t)}{t^{2k+2}} e^{-1/t}, \end{aligned}$$

et ainsi $f^{k+1}(t)$ est de la même forme que $f^k(t)$, et par 3.2, on obtient

$$\lim_{t \searrow 0} f^{(k+1)}(t) = 0.$$

Il reste à prouver que $f^{(k)}(0) = 0$, pout tout $k \geqslant 0$. Ceci est vrai pour $k = 0$ par définition de f. Supposons vrai pour un $k > 0$. On va montrer que les dérivées à droite et à gauche existent et sont égales. La dérivée à gauche est clairement égale à 0. Pour la dérivée à droite, on réutilise 3.2 :

$$f^{(k+1)}(0) = \lim_{t \searrow 0} \frac{\frac{p_k(t)}{t^{2k}} e^{-1/t} - 0}{t} = \lim_{t \searrow 0} \frac{p_k(t)}{t^{2k+1}} e^{-1/t} = 0$$

et ainsi chaque dérivée $f^{(k)}$ est continue sur $\mathbb{R}$, et donc f est C^∞. □

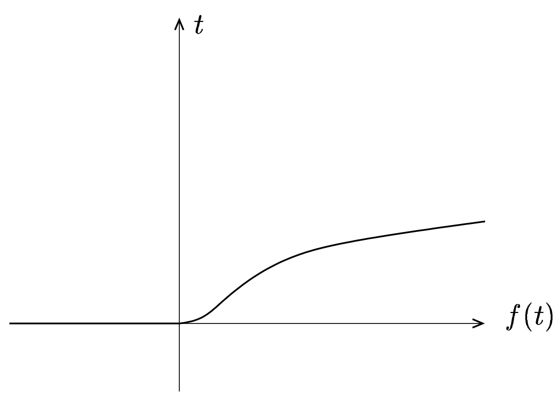

FIG. 3.1: La fonction $f(t)$.

Lemme 3.3 *Il existe une fonction $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $h(t) \equiv 1$ pour $t \leqslant 1$, $0 < h(t) < 1$ pour $1 < t < 2$, et $h(t) \equiv 0$ pour $t \geqslant 2$.*

Démonstration. Soit f la fonction du lemme précédent, et on pose

$$h(t) = \frac{f(2-t)}{f(2-t) + f(t-1)}.$$

Cette fonction se trouve sur la figure 3. Le dénominateur est toujours strictement positif, car au moins une des expressions en $(2-t)$ et $(t-1)$ l'est. En effet,

$$f(2-t) = \begin{cases} e^{-1/2-t}, & 2-t > 0 \iff t < 2, \\ 0, & 2-t \leqslant 0 \iff t \geqslant 2, \end{cases}$$

et

$$f(t-1) = \begin{cases} e^{-1/t-1}, & t-1 > 0 \iff t > 1, \\ 0, & t-1 \leqslant 0 \iff t \leqslant 1. \end{cases}$$

On voit bien que $f(2-t) + f(t-1) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Comme $f \geqslant 0$, on a bien $0 \leqslant h(t) \leqslant 1$. De plus, on vérifie aisément que $h(t) \equiv 0$ pour tout $t \geqslant 2$, et $h(t) \equiv 1$ pout tout $t \leqslant 1$. □

Une fonction avec les propriétés de h est appelée *fonction marche.*

Définition 3.4 Soit $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$. On appelle le *support de f* l'ensemble

$$\mathrm{supp} f = \overline{\{p \in M : f(p) \neq 0\}}.$$

Si $\mathrm{supp} f \subset U \subset M$, f est dite *à support dans U*, et si $\mathrm{supp} f$ est compact, f est *à support compact.*

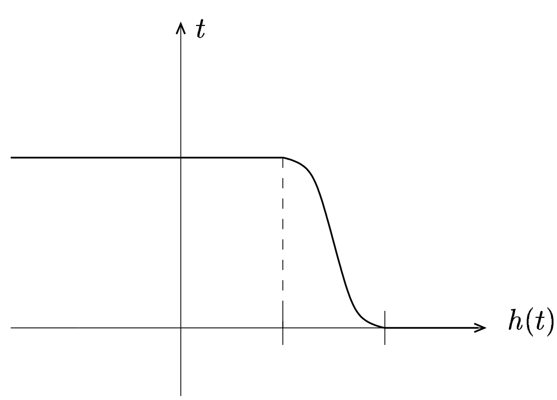

FIG. 3.2: La fonction $h(t)$.

Clairement, toute fonction sur un compact est à support compact. En effet, l'adhérence d'un ensemble est fermé, et par un résultat de topologie, un fermé contenu dans un compact est également compact.

Lemme 3.5 *Il existe une fonction $H : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $0 \leqslant H(x) \leqslant 1$ partout, $H \equiv 1$ sur $\overline{B_1(0)}$, et* $\mathrm{supp} H = \overline{B_2(0)}$.

Démonstration. Nous construisons cette fonction avec la fonction h définie ci-dessus en posant

$$H(x) = h(|x|)$$

C'est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ puisque c'est une composition de fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. De plus, $H \equiv 1$ sur $B_1(0)$ et donc C^∞ sur $B_1(0)$. Ainsi la fonction H est C^∞ sur tout $\mathbb{R}^n$. □

H est une *fonction saut C^∞*, i.e. une fonction C^∞ à valeur dans $\mathbb{R}$, égale à 1 sur un fermé et dont le support est contenu dans un ouvert.

Pour utiliser ces fonctions sur des variétés, il est indispensable de disposer de recouvrements munis de certaines propriétés bien précises.

Définition 3.6 (Paracompacité) Soit X un espace topologique. Une collection $\mathcal{U}$ de sous-ensembles de X est dite *localement finie* si chaque point de X possède un voisinage intersectant au plus un nombre fini d'éléments de $\mathcal{U}$. Pour un autre recouvrement $\mathcal{V}$, on parle de *raffinement de $\mathcal{U}$* si pour tout $U \in \mathcal{U}$, il existe $V \in \mathcal{V}$ tel que $V \subset U$.

On dit alors que X est *paracompact* si tout recouvrement de X admet un raffinement localement fini.

Nous allons maintenant démontrer en deux étapes que toute variété différentiable est paracompacte. C'est une conséquence de la 2-dénombrabilité de ces espaces, et c'est en majeure partie pour cette raison que l'on impose cette propriété dans la définition.

Lemme 3.7 *Chaque variété topologique admet un recouvrement dénombrable et localement fini par des ouverts précompacts.*

Démonstration. Soit M une variété topologique. On va construire ce recouvrement en trois étapes.

Par le lemme 1.9, il existe $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ une base dénombrable de précompacts. Nous montrons maintenant que M admet un recouvrement dénombrable $\{U_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ satisfaisant les propriétés suivantes :

(i) U_j est un ouvert précompact,

(ii) $\overline{U}_{j-1} \subset U_j,\ j \geqslant 2$,

(iii) $B_j \subset U_j$.

On commence avec $U_1 = B_1$. On considère par induction que les ouverts U_j ont été définis pour $j = 1, \dots, k$ et tels que les trois propriétés ci-dessus soient vérifiées. Puisque $\overline{U}_k$ est compact et recouvert par la famille $\{B_j\}$, il existe $m_k \geqslant 0$ tel que

$$\overline{U}_k \subset B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_{m_k}.$$

Si l'on pose $\overline{U}_{k+1} = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_{m_k}$, *(i)* et *(ii)* sont vérifiées pour $j = k+1$. Pour *(iii)*, on choisit un m_k tel que $m_k \geqslant k+1$, et ainsi $B_{k+1} \subset U_{k+1}$.

On obtient donc par induction une suite dénombrable d'ouverts $\{U_j\}$ satisfaisant les trois propriétés. Et puisque $\{B_j\}$ recouvre M, *(iii)* garantit que $\{U_j\}$ est un recouvrement de M.

Pour obtenir un recouvrement localement fini, on pose $V_j = U_j \setminus \overline{U}_{j-2}$. Puisque $\overline{V}_j$ est un fermé dans le compact $\overline{U}_j$, il est compact (et donc V_j est précompact). Si $p \in M$ est quelconque, alors $p \in V_k$, où k est le plus petit entier tel que $p \in U_k$. Clairement, V_k a une intersection non vide avec V_{k+1} et V_{k-1}, et par construction, $V_k \cap V_j = \emptyset$ pour tout $j < k-1$ et $j > k+1$. Ainsi le recouvrement $\{V_j\}$ est localement fini, ce qui achève la démonstration. □

Maintenant, en plus de montrer que toute variété différentiable est paracompacte, nous montrons également qu'elle possède un recouvrement très précis, indispensable à la démonstration du résultat final.

Définition 3.8 Soit M une variété différentiable. On dit qu'un recouvrement $\{W_i\}$ de M est *régulier* s'il vérifie ces trois propriétés :

(i) $\{W_i\}$ est dénombrable et localement fini,

(ii) chaque W_i est le domaine d'une application coordonnée différentiable $\varphi_i : W_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dont l'image est $B_3(0) \subset \mathbb{R}^n$,

(iii) si $U_i = \varphi^{-1}(B_1(0))$, la collection $\{U_i\}$ recouvre encore M.

Proposition 3.9 *Soit M une variété différentiable. Chaque recouvrement de M possède un raffinement régulier. En particulier, M est paracompacte.*

Démonstration. Soit $\mathcal{X}$ un recouvrement ouvert de M, et soit $\{V_j\}$ un recouvrement dénombrable et localement fini par des ouverts précompacts, qui existe par le lemme précédent. Pour tout $p \in M$, soit W_p un voisinage de p qui intersecte un nombre fini de V_j. Considérons

$$A_p = \bigcup_{V_k : p \in V_k} W_p \cap V_k.$$

Ainsi, si $p \in V_j$, alors A_p est également contenu dans V_j. En contractant encore plus A_p en B_p si nécessaire, on peut supposer que B_p est contenu dans un ouvert de $\mathcal{X}$, puisque cette collection est un recouvrement de M par hypothèse. En répétant l'opération, on s'arrange pour que l'image d'un

$C_p \subset B_p$ par l'application coordonnée soit une boule ouverte, et en modifiant une fois de plus cette application, on construit une nouvelle application différentiable

$$\varphi_p : C_p \longrightarrow B_3(0),$$

centrée en p, i.e. $\varphi(p) = 0$.

À présent, soit $U_p = \varphi_p^{-1}(B_1(0))$. Pour tout k, la collection $\{U_p : p \in \overline{V}_k\}$ est un recouvrement ouvert de $\overline{V}_k$. Par compacité (les V_k sont précompacts), $\overline{V}_k$ est recouvert par un nombre fini de ces ensembles. Notons $U_k^1, \dots, U_k^{m_k}$ ces ouverts et considèrons les cartes $(C_k^1, \varphi_k^1), \dots, (C_k^{m_k}, \varphi_k^{m_k})$. La collection $\{C_k^i\}$ est un recouvrement ouvert dénombrable de M lorsque i et k varient. En effet, chaque C_k^i est en correspondance biunivoque avec U_k^i, et ce dernier étant un élément d'un recouvrement fini d'un ouvert appartenant à une collection dénombrable, les C_k^i sont donc dénombrables. De plus, $\{C_k^i\}$ raffine $\mathcal{X}$, puisque par construction, si $p \in X \subset \mathcal{X}$, C_p est inclus dans X. Et les conditions *(ii)* et *(iii)* de la définition de régularité sont bien sûr vérifiées, de nouveau par construction.

Il s'agit maintenant de montrer que le recouvrement $\{C_k^i\}$ est localement fini. Pour tout k, chaque C_k^i est contenu dans un V_j, qui manifestement satisfait $\overline{V}_k \cap V_j \neq \emptyset$; le compact $\overline{V}_k$ étant recouvert par un nombre fini de V_j, lesquels en intersectent d'autres un nombre fini de fois également, C_k^i intersecte donc un nombre fini de $C_{k'}^{i'}$, et comme il n'y a qu'un nombre fini d'ouverts $C_{k''}^{i''}$ pour tout k', nous avons construit un recouvrement localement fini. Ainsi, tout recouvrement de M possède un raffinement régulier.

En particulier, M est paracompacte. $\square$

Définition 3.10 (Partition de l'unité subordonnée à $\mathcal{X}$) Soit M un espace topologique, et soit $\mathcal{X} = \{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un recouvrement arbitraire de M. Une *partition de l'unité subordonnée à* $\mathcal{X}$ est une collection d'applications continues $\{\varphi_\alpha : M \longrightarrow \mathbb{R}\}_{\alpha \in A}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $0 \leqslant \varphi_\alpha(x) \leqslant 1$ pour tout $\alpha \in A$ et pour tout $x \in M$,

(ii) $\mathrm{supp}\varphi_\alpha \subset X_\alpha$,

(iii) $\{\mathrm{supp}\varphi_\alpha\}_{\alpha \in M}$ est localement fini,

(iv) $\sum_{\alpha \in M} \varphi_\alpha(x) = 1$ pout tout $x \in M$.

De par la condition *(iii)*, la somme en *(iv)* ne contient qu'un nombre fini de termes non nuls, nous n'avons donc pas de problème de divergence éventuelle de la série.

Remarque Si M est une variété différentiable, on définit une *partition de l'unité différentiable* de la même manière, mais avec des applications φ_α différentiables.

Théorème 3.12 (Existence des partitions de l'unité) *Si M est une variété différentiable, et $\mathcal{X} = \{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un recouvrement arbitraire de M, alors il existe une partition de l'unité différentiable subordonnée à $\mathcal{X}$.*

Démonstration. Par le lemme précédent, il existe $\{W_i\}$ un raffinement régulier de $\mathcal{X}$. Pour tout i, soit $\varphi_i : W_i \longrightarrow B_3(0)$ l'application dont l'existence est assurée par la définition de la régularité d'un recouvrement. On définit également

$$U_i = \varphi^{-1}(B_1(0)),$$

et

$$V_i = \varphi^{-1}(B_2(0)).$$

Pour tout i, soit $f_i : M \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_i = \begin{cases} H \circ \varphi_i & \text{sur } W, \\ 0 & \text{sur } M \setminus \overline{V}_i, \end{cases}$$

où H est la fonction du lemme 3.5. Sur l'ensemble $W_i \setminus \overline{V}_i$, où les deux définitions coïncident, on obtient bien $f_i \equiv 0$, puisque $\operatorname{supp} H = \overline{B_2(0)}$. Ainsi, f_i est bien définie, et elle est également différentiable, puisque c'est une composition d'applications différentiables. De plus, $\operatorname{supp} f_i \subset W_i$.

On définit de nouvelles fonctions $g_i : M \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$g_i(x) = \frac{f_i(x)}{\sum_j f_j(x)}.$$

Le dénominateur possède un nombre fini de termes non nuls au voisinage de chaque point, car les supports des fonctions f_i sont contenus dans le recouvrement localement fini $\{W_i\}$. Puisque $f_i \equiv 1$ sur U_i, et que $\{U_i\}$ est un recouvrement de M, le dénominateur est toujours strictement positif. La fonction g_i est donc différentiable sur M. On remarque également les propriétés suivantes :

(i) $0 \leqslant f_i(x) \leqslant \sum_j f_j(x)$, et ainsi $0 \leqslant g_i(x) \leqslant 1$;

(ii) $\sum_i g_i(x) = \frac{\sum_i f_i(x)}{\sum_j f_j(x)} = 1$.

Finalement, on doit réindicer nos fonctions pour que la nouvelle indexation dans A corresponde à celle du recouvrement. Puisque $\{W_i\}$ est raffinement de $\mathcal{X}$, on peut choisir pour tout i un indice $a(i) \in A$ tel que $W_i \subset X_{a(i)}$. Pour tout $\alpha \in A$, on définit $\psi_\alpha : M \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\psi_\alpha = \sum_{i : a(i) = \alpha} g_i.$$

S'il n'existe pas d'indice i pour lequel $a(i) = \alpha$, la somme doit alors être interprétée comme la fonction identiquement nulle. Chaque ψ_α est différentiable et vérifie $0 \leqslant \psi_\alpha(x) \leqslant 1$, et son support est contenu dans X_α. De plus,

$\{\mathrm{supp} f\}_{\alpha\in A}$ est localement fini, et $\sum_\alpha \psi_\alpha \equiv \sum_i g_i \equiv 1$. Nous obtenons ainsi la partition de l'unité désirée. $\square$

Nous allons étendre la notion de fonction saut à un fermé d'une variété différentiable. Soit U un ouvert de M contenant un fermé A ; on définit ainsi $\psi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ comme une *fonction saut sur A à support dans U* si $0 \leqslant \psi \leqslant 1$ sur M, $\psi \equiv 1$ sur A, et $\mathrm{supp}\psi \subset U$.

Proposition 3.13 (Existence des fonctions saut) *Soit M une variété différentiable. Pour tout fermé $A \subset M$ et tout ouvert U contenant A, il existe une fonction saut différentiable sur A à support dans U.*

Démonstration. On pose $U_0 = U$ et $U_1 = M \setminus A$, et soit $\{\psi_0, \psi_1\}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\{U_0, U_1\}$. Puisque $\psi_0 \equiv 0$ sur A, et ainsi $\psi_0 = \sum_i \psi_i = 1$, la fonction ψ_0 possède les propriétés requises. $\square$

Comme deuxième application des partitions de l'unité, nous allons construire une fonction différentiable particulière, dont le résultat suivant les concernant nous sera utile pour la démonstration du théorème du plongement de Whitney.

Définition 3.14 Soit M un espace topologique. Une *fonction d'épuisement* sur M est une fonction continue $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que l'ensemble

$$M_c = \{x \in M : f(x) \leqslant c\}$$

est compact pour tout $c \in \mathbb{R}$.

Proposition 3.15 *Toute variété différentiable admet une fonction d'épuisement différentiable et positive.*

Démonstration. Soit M une variété différentiable, et soit $\{V_j\}_{j=1}^{\infty}$ un recouvrement dénombrable de M par des ouverts précompacts. Soit $\{\psi_j\}$ une partition de l'unité différentiable subordonnée à ce recouvrement. On définit $f \in C^\infty(M)$ par

$$f(p) = \sum_{j=1}^{\infty} j\psi_j(p).$$

Ainsi, f est différentiable, car seul un nombre fini de termes sont non nuls au voisinage de tout point, et elle est également positive, puisque $f(p) \geqslant \sum_j \psi_j(p) = 1$. Pour tout entier positif N, si $p \notin \bigcup_{j=1}^{N} \overline{V}_j$, alors $\varphi_j(p) = 0$ pour $1 \leqslant j \leqslant N$, et

$$f(p) = \sum_{j=N+1}^{\infty} j\psi_j(p) > \sum_{j=N+1}^{\infty} N\psi_j(p) = N\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(p) = N.$$

De même, si $f(p) \leqslant N$, alors $p \in \bigcup_{j=1}^{N} \overline{V}_j$. Ainsi, pour tout $c \leqslant N$, M_c est un sous-ensemble fermé du compact $\bigcup_{j=1}^{N} \overline{V}_j$, et donc compact. $\square$

Chapitre 4

Sous-variétés plongées

Nous commencons par quelques définitions d'applications entre variétés particulièrement importantes, dont le plongement lisse, une des notions centrales de ce projet, avec les variétés différentiables.

Définition 4.1 Soit $F : M \longrightarrow N$ une application différentiable. On définit le *rang de F en $p \in M$* comme le rang de l'application linéaire

$$F_* : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N,$$

ou plus simplement la dimension de $ImF_* \subset T_{F(p)}N$. Si F a le même rang k en tout point, on dit qu'elle est *de rang constant.*

Définition 4.2 Une application différentiable $F : M \longrightarrow N$ est appelée *submersion* si F_* est surjective en tout point (i.e. rang$F$=dim$N$), et une *immersion* si F_* est injective en tout point (i.e. rang$F$=dim$M$).

Définition 4.3 (Plongement lisse) Un *plongement lisse* est une immersion $F : M \longrightarrow N$, qui est également un plongement topologique, i.e. F est un homéomorphisme sur son image $F(M) \subset N$, cette dernière étant munie de la topologie de sous-espace.

Proposition 4.4 *Soit $F : M \longrightarrow N$ une immersion injective. Si F est une application propre, alors F est un plongement lisse et $F(M)$ est fermé.*

Démonstration. Par la proposition 2.6, on sait qu'une application propre est fermée. La variété M étant en particulier un espace topologique, elle est ouverte et fermée par définition. Ainsi, son image par F est fermée.

Nous allons à présent montrer que F est un plongement topologique. On sait que si F est injective, $F : M \longrightarrow F(M)$ est bijective, et ainsi $F^{-1} : F(M) \longrightarrow M$ existe. Nous avons donc $(F^{-1})^{-1}(K) = F(K)$, qui est un fermé de N puisque F est fermée. On a donc montré que la préimage par F^{-1} d'un fermé est un fermé, cette application est alors continue, ce qui entraîne que F est un homéomorphisme sur son image. $\square$

Nous allons à présent citer le théorème d'inversion locale, ainsi qu'une de ses conséquences, le théorème du rang. Le premier nous dit qu'une application différentiable entre ouverts de $\mathbb{R}^n$, qui en un point se comporte comme une immersion, est localement un difféomorphisme. Quant au théorème du rang, il entraîne que tout application de rang constant peut se mettre sous une forme simplifiée en coordonnées par un changement de variable. Ces résultats ne seront pas démontrés ici.

Théorème 4.5 (Théorème d'inversion locale) *Soit U et V des ouverts de $\mathbb{R}^n$, et $F : U \longrightarrow V$ une application différentiable. Si $DF(p)$ est de rang n en un point $p \in M$, alors il existe des voisinages connexes $U_0 \subset U$ de p et $V_0 \subset V$ de $F(p)$ tels que $F|_{U_0} : U_0 \longrightarrow V_0$ est un difféomorphisme.*

Théorème 4.6 (Théorème du rang) *Soit $U \subset \mathbb{R}^m$ et $V \subset \mathbb{R}^n$ des ouverts et $F : U \longrightarrow V$ une application différentiable de rang constant k. Pour tout $p \in M$, il existe des cartes (U_0, φ) de $\mathbb{R}^m$ centrée en p et (V_0, ψ) de $\mathbb{R}^n$, avec $U_0 \subset U$ et $F(U_0) \subset V_0 \subset V$, telles que*

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x^1, \ldots, x^k, x^{k+1}, \ldots, x^m) = (x^1, \ldots, x^k, 0, \ldots, 0).$$

Les sous-variétés différentiables sont modélisées localement par le plongement standard de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^n$, en identifiant $\mathbb{R}^k$ avec le sous-espace

$$\{(x^1, \ldots, x^k, x^{k+1}, \ldots, x^n) : x^{k+1} = \cdots = x^n = 0\} \subset \mathbb{R}^n.$$

D'une manière générale, si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, une *k-tranche de U* est un sous-ensemble de la forme

$$S = \left\{(x^1, \ldots, x^k, x^{k+1}, \ldots, x^n) \in U : x^{k+1} = c^{k+1}, \cdots, x^n = c^n\right\},$$

où les c^i, $k+1 \leqslant i \leqslant n$, sont des constantes. Il est assez clair que toute k-tranche est homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^k$. Il suffit de considérer l'application

$$(x^1, \ldots, x^k, c^{k+1}, \ldots, c^n) \mapsto (x^1, \ldots, x^k),$$

qui est clairement un homéomorphisme pour des constantes fixées.

Définition 4.7 (Sous-variété plongée) Soit M une variété différentiable, et soit (U, φ) une carte sur M. Si S est un sous-ensemble de U tel que $\varphi(S)$ est une k-tranche de $\varphi(U)$, on dit simplement que S est une k-tranche de U. On définit $S \subset M$ comme étant une *sous-variété plongée de dimension k* (ou *k-sous-variété plongée*), si pour tout point $p \in S$, il existe une carte (U, φ) sur M telle que $p \in U$ et $U \cap S$ est une k-tranche de U (voir fig.4).

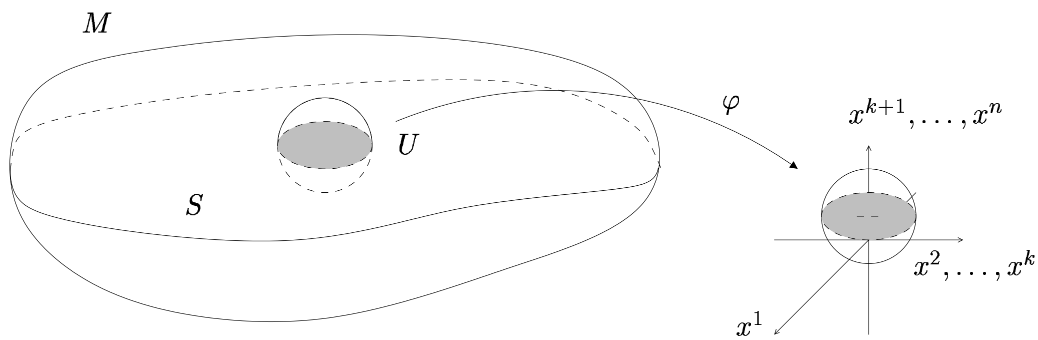

FIG. 4.1: Sous-variété plongée.

On définit également la *codimension de S dans M* comme étant l'entier $\dim M - \dim S$.

Lemme 4.8 *Soit M une variété différentiable, et S un sous-ensemble de M. Soit également k un entier, et supposons que tout point $p \in M$ possède un voisinage $U \subset M$ tel que $U \cap S$ est une k-sous-variété plongée de U. Alors S est une k-sous-variété plongée de M.*

Démonstration. On doit montrer que pour tout $p \in S$, il existe une carte (U, φ) sur M, telle que $p \in U$ et $U \cap S$ est une k-tranche de U, i.e.

$$S = \left\{(x^1, \ldots, x^k, x^{k+1}, \ldots, x^n) \in U : x^{k+1} = c^{k+1}, \cdots, x^n = c^n\right\}.$$

Soit donc $p \in S$. Cet ensemble étant une k-sous-variété de U, il existe une carte sur U en p dont le domaine U_p est tel que $U_p \cap S$ est une k-tranche de U_p. Selon l'exemple 1.19, cela signifie qu'il existe une carte (V_p, ψ) sur M en p telle que $U_p = U \cap V_p$. On obtient donc

$$\psi|_{U_p}(S) = \left\{(x^1, \ldots, x^k, x^{k+1}, \ldots, x^n) \in \psi|_{U_p}(U_p) : x^{k+1} = c^{k+1}, \cdots, x^n = c^n\right\}.$$

Or $(U_p, \psi|_{U_p})$ est précisément une carte sur M en p. Le sous-ensemble S est donc une k-sous-variété plongée de M.

□

Théorème 4.9 *L'image d'un plongement lisse est une sous-variété plongée.*

Démonstration. Soit $F : M \longrightarrow N$ un plongement lisse, où M et N sont de dimension m et n. On doit montrer que chaque point de $F(M)$ possède un voisinage $U \subset N$ dans lequel $F(M) \cap U$ est une tranche.

Soit $p \in M$ un point arbitraire. Puisqu'un plongement lisse est en particulier une immersion, cette application est de rang constant. Par le théorème du rang, il existe des cartes (U, φ) et (V, ψ) centrées en p et $F(p)$, telles que $F|_U : U \longrightarrow V$ ait comme représentation en coordonnées l'application

$$F(x^1, \ldots, x^m) = (x^1, \ldots, x^k, 0, \ldots, 0).$$

En particulier, en réduisant V si nécessaire, $F(U)$ est une tranche dans V ; il suffit en effet de prendre $c^{k+1} = \cdots = c^n = 0$ dans la définition. Et puisqu'un plongement lisse est également un homéomorphisme sur son image (munie de la topologie de sous-espace), il existe un ouvert $W \subset N$ tel que $F(U) = W \cap F(M)$. En remplaçant V par $\widetilde{V} = V \cap W$, on obtient une carte $(\widetilde{V}, \varphi|_{\widetilde{V}})$ contenant $F(p)$ telle que $\widetilde{V} \cap F(M) = \widetilde{V} \cap F(U)$ est une tranche de $\widetilde{V}$. □

Remarque Il est également vrai que les variétés plongées sont précisément l'image de plongements lisses. Mais cette affirmation ne sera pas démontrée ici.

Théorème 4.11 *Soient M et N des variétés différentiables, et $\Phi : M \longrightarrow N$ une application différentiable de rang constant k. Alors chaque fibre de Φ est une sous-variété plongée fermée dans M.*

Démonstration. Soit $c \in N$ un point quelconque, et $S = \Phi^{-1}(c) \subset M$. Une variété étant avant tout un espace topologique de Hausdorff, les singletons sont donc fermés. Ainsi, par continuité de Φ, $\Phi^{-1}(c)$ est fermé dans M.

Pour montrer que c'est une sous-variété plongée, choisissons $p \in M$. Par le théorème du rang, il existe (U, φ) une carte centrée en p, et (V, ψ) centrée en $c = \Phi(p)$ dans lesquelles l'application Φ a une représentation en coordonnée de la forme

$$\Phi(x^1, \ldots, x^k, x^{k+1}, \ldots, x^m) = (x^1, \ldots, x^k, 0, \ldots, 0),$$

et ainsi $S \cap U$ est la tranche

$$\left\{(x^1, \ldots, x^m) \in U : x^1 = \cdots = x^k = 0\right\}.$$

Ainsi, $\Phi^{-1}(c)$ est une sous-variété plongée et fermée dans M. □

Corollaire 4.12 *Si $\Phi : M \longrightarrow N$ est une submersion, alors chaque fibre est une sous-variété plongée fermée de codimension égale à la dimension de N.*

Démonstration. La démonstration est élémentaire car, par définition, une submersion est de rang égal à la dimension de l'espace d'arrivée N. On applique donc le théorème ci-dessus. □

Nous allons maintenant donner un exemple de sous-variété plongée, qui nous sera utile plus loin dans ce rapport pour démontrer d'importants résultats.

Exemple 4.13 (Matrices de rang constant) Soit $M(m \times n, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel de dimension mn des matrices $m \times n$ à coefficients réels. Pour tout

k, soit $M_k(m \times n, \mathbb{R}) \subset M(m \times n, \mathbb{R})$ le sous-ensemble contenant les matrices de rang k.

Supposons, sans perte de généralité, que $m < n$. Commençons par montrer que $M_m(m \times n, \mathbb{R})$ est une sous-variété ouverte de $M(m \times n, \mathbb{R})$. Si $A \in M_m(m \times n, \mathbb{R})$, le fait que $\mathrm{rang} A = m$ signifie qu'il existe un mineur $m \times m$ de déterminant non nul. Par continuité de la fonction déterminant, ce même mineur est de déterminant non nul dans un voisinage de A dans $M(m \times n, \mathbb{R})$, ce qui implique que $M_m(m \times n, \mathbb{R})$ est un ouvert de $M(m \times n, \mathbb{R})$. Par l'exemple 1.19, $M_m(m \times n, \mathbb{R})$ est donc une sous-variété ouverte.

Nous allons maintenant montrer que si $0 \leqslant k \leqslant \min(m, n)$, $M_k(m \times n, \mathbb{R})$ est une sous-variété plongée de codimension $(m-k)(n-k)$ dans $M(m \times n, \mathbb{R})$.

Soit E_0 une matrice quelconque $m \times n$ de rang k. Cela implique que E_0 possède un mineur $k \times k$ de déterminant non nul. Supposons que ce mineur se situe en haut à gauche de la matrice, et soit E_0 en écriture par blocs :

$$E_0 = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix},$$

où A_0 est une matrice inversible $k \times k$, et D_0 est de taille $(m-k) \times (n-k)$. On définit aussi l'ensemble

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M(m \times n, \mathbb{R}) : \det A \neq 0 \right\}.$$

Par continuité de la fonction déterminant, U est un ouvert de $M(m \times n, \mathbb{R})$ contenant E_0. On se donne $E = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in U$ et on considère la matrice inversible suivante :

$$P = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix}.$$

Puisque la multiplication par une matrice inversible ne change pas le rang, E a le même rang que la matrice

$$EP = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ CA^{-1} & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

Ainsi, EP est de rang k si et seulement si $D - CA^{-1}B$ est la matrice nulle. On définit donc $\Phi : U \longrightarrow M((m-k) \times (n-k), \mathbb{R})$ par

$$\Phi \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = D - CA^{-1}B.$$

L'application Φ est clairement différentiable. Montrons maintenant que Φ est une submersion, i.e. $D\Phi(E)$ est surjective pour tout $E \in U$. Puisque $M((m-k) \times (n-k), \mathbb{R})$ est un espace vectoriel, on identifie les vecteurs tangents en $\Phi(E)$ à des matrices $(m-k) \times (n-k)$.

Soit $E = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in U$, et soit une matrice quelconque

$$X \in M((m-k) \times (n-k), \mathbb{R}).$$

On définit aussi une courbe $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow U$ par

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D + tX \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\Phi_* \gamma'(0) = (\Phi \circ \gamma)'(t) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(D + tX - CA^{-1}B) = X.$$

Ainsi, on voit que la dimension de l'espace tangent en un point quelconque est égale à la dimension de l'espace d'arrivée. L'application Φ est donc une submersion. Par le corollaire 4.12, $M_k(m \times n, \mathbb{R}) \cap U = \Phi^{-1}(0)$ est une sous-variété fermée plongée dans U.

Maintenant, si ${E'}_0$ est une matrice quelconque de rang k, il suffit de réarranger les lignes et les colonnes pour obtenir une autre matrice appartenant à U. Cette opération est un isomorphisme $R : M_k(m \times n, \mathbb{R}) \longrightarrow M_k(m \times n, \mathbb{R})$ qui préserve le rang. On définit donc $U' = R^{-1}(U)$ qui est un voisinage de ${E'}_0$ et

$$\Phi \circ R : U' \longrightarrow M((m-k) \times (n-k), \mathbb{R})$$

est une submersion telle que

$$\Phi^{-1}(0) = M_k(m \times n, \mathbb{R}) \cap U'.$$

Ainsi, chaque point de $M_k(m \times n, \mathbb{R})$ possède un voisinage U' dans $M(m \times \ n, \mathbb{R})$ tel que $U' \cap M_k(m \times n, \mathbb{R})$ est une sous-variété plongée de U', et par le lemme 4.8, $M_k(m \times n, \mathbb{R})$ est une sous-variété plongée.

Chapitre 5

Ensembles de mesure nulle dans les variétés

Nous allons à présent étudier les ensembles de mesure nulle dans $\mathbb{R}^n$, et généraliser cette notion aux variétés.

Définition 5.1 Un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ est *de mesure nulle*, si pout tout $\delta > 0$, on peut recouvrir A avec une collection dénombrable de cubes ouverts de $\mathbb{R}^n$ dont le volume total de cette famille est inférieur à δ. On peut voir un exemple sur la figure 5.

Remarque Il est facile de voir que la définition est également valable pour un recouvrement de boules ouvertes. En effet, tout cube de côté $2r$ contient une boule de rayon r, et est contenu dans une boule de rayon $r\sqrt{n}$ (voir fig 5).

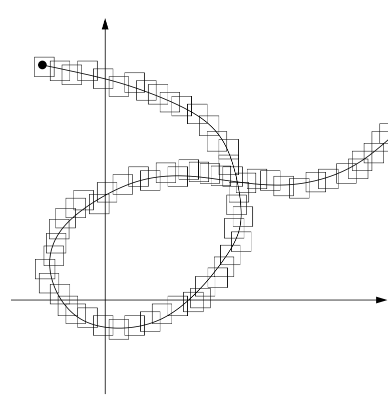

FIG. 5.1: Ensemble de mesure nulle.

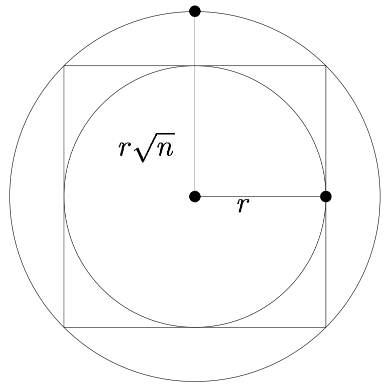

FIG. 5.2: Boules et cubes.

On souhaite étendre la notion de mesure nulle de sorte qu'elle soit invariante en terme de difféomorphisme aux sous-ensembles de variétés. On ne peut pas simplement utiliser la définition puisque les concepts de volume ou de métrique n'ont souvent pas de sens sur les variétés. Le lemme suivant résout malgré tout le problème.

Lemme 5.3 *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble de mesure nulle, et $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application différentiable. Alors $F(A)$ est de mesure nulle.*

Démonstration. Par définition, pour tout $p \in A$, F s'étend en une application différentiable sur un voisinage de p dans $\mathbb{R}^n$. En effet, on définit $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ comme étant différentiable s'il existe un ouvert $U \supset A$, et $G : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application différentiable telle que $G|_A = F$.

On conserve la notation F pour cette extension, et soit U l'ouvert ci-dessus contenant p. On peut le modifier pour obtenir une boule fermée $\overline{B}$ centrée en p, et ainsi F s'étend de manière différentiable à $\overline{B}$. Cette dernière étant compacte, il existe une constante C telle que $|DF(x)| \leqslant C$ pour tout $x \in \overline{B}$. On sait en effet que si $F : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est de classe C^1, alors F est lipschitzienne sur tout compact convexe $\overline{B}$, et on peut prendre comme constante de Lipschitz $sup_{x \in \overline{B}} |DF(x)|$. Ainsi,

$$|F(x) - F(x')| \leqslant C|x - x'| \tag{5.4}$$

pour tout $x, x' \in \overline{B}$.

Soit maintenant $\delta > 0$. Le sous-ensemble A étant de mesure nulle, on peut choisir un recouvrement ouvert dénombrable $\{B_j\}$ de $A \cap \overline{B}$ par des boules ouvertes satisfaisant

$$\sum_j Vol(B_j) < \delta.$$

Alors, par (5.4), $F(\overline{B} \cap B_j)$ est contenu dans une boule $\widetilde{B}_j$ dont le rayon ne dépasse pas C fois celui de B_j. On peut alors conclure que $F(A \cap \overline{B})$ est contenu dans la collection $\{\widetilde{B}_j\}$, dont le volume total vérifie

$$\sum_j Vol(\widetilde{B}_j) < C^n\delta.$$

La constante C étant fixée, la borne supérieure ne dépend que de δ, elle est donc aussi petite que l'on veut, et $F(A \cap \overline{B})$ est de mesure nulle. Le sous-ensemble $F(A)$ étant la réunion dénombrable de tels ensembles, il faut montrer qu'une réunion dénombrable est de mesure nulle.

Soit $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ une collection dénombrable de sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ de mesure nulle. Soit $\varepsilon > 0$, et posons $\delta_j = \varepsilon/2^j$. On sait par définition qu'il existe pour tout A_j un recouvrement dénombrable $\{B_i^j\}_{i\in\mathbb{N}}$ dont le volume total est plus petit que δ_j. Considérons $\{B_i^j\}_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ le recouvrement de $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, et ainsi

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} Vol(B_i^j) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} Vol(B_i^j) \right) < \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^j} = 2\varepsilon.$$

Le terme 2ε étant aussi petit que l'on veut, $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ est donc de mesure nulle. $\square$

Remarque Ce lemme n'est pas valable lorsque F est continue. On peut donner comme exemple la *courbe de Peano*, qui par un algorithme assez simple permet de construire une application continue qui "remplit" le carré $[0,1]^2$ avec une seule courbe (voir fig. 5). On obtient ainsi une application $F : [0,1] \times \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ continue dont l'image est le carré $[0,1]^2$, qui n'est bien sûr pas de mesure nulle dans $\mathbb{R}^2$.

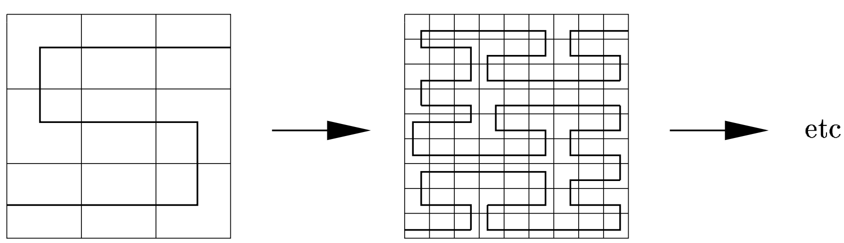

FIG. 5.3: Construction de la courbe de Péano.

Lemme 5.6 *Soit $F : U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un application différentiable, avec $m < n$. Alors $F(U)$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration. Soit $\pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ la projection sur les m premières coordonnées, et $\widetilde{U} = \pi^{-1}(U)$. On va appliquer le lemme précédent à l'application

$$\widetilde{F} := F \circ \pi : \widetilde{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

car $F(U) = \widetilde{F}(\widetilde{U} \cap \mathbb{R}^m)$. Il faut donc montrer que l'ensemble $\widetilde{U} \cap \mathbb{R}^m$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^n$.

Nous allons plus généralement démontrer que $\mathbb{R}^m$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^n$, où $m < n$. Pour cela, nous construisons un recouvrement de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$. Soit $\varepsilon > 0$, et définissons la collection $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ telle que

$$A_i = [-i, i]^m \times [-\varepsilon 2^{-i-1}, \varepsilon 2^{-i-1}]^{n-m}.$$

avec

$$Vol(A_i) = 2^m i^m \left(\frac{\varepsilon}{2^i}\right)^{n-m} = 2^m \varepsilon^{n-m} \left(\frac{i^m}{2^{i(n-m)}}\right).$$

Cette famille est bien un recouvrement de $\mathbb{R}^m$. On calcule le volume total du recouvrement :

$$Vol\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = 2^m \varepsilon^{n-m} \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{i^m}{2^{i(n-m)}}.$$

En appliquant le critère du quotient à cette série, on obtient

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \frac{(k+1)^m/2^{(k+1)(n-m)}}{i^m/2^{k(n-m)}} = \lim_{k\longrightarrow\infty} \frac{\left(\frac{k+1}{k}\right)^m}{2^{n-m}} = \frac{1}{2^{n-m}} < 1,$$

puisque $n - m > 0$. Cette série est convergente, il existe donc une constante C telle que

$$Vol\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \leqslant 2^m \varepsilon^{n-m} C.$$

La borne étant aussi petite que l'on veut, $\mathbb{R}^m$ est donc de mesure nulle dans $\mathbb{R}^n$. Ainsi, $F(U) = \widetilde{F}(\widetilde{U} \cap \mathbb{R}^m) \subset \widetilde{F}(\mathbb{R}^m)$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^n$. □

Définition 5.7 (Mesure nulle dans une variété) Soit A un sous-ensemble de M une variété différentiable. On dit que A est *de mesure nulle* si pour toute carte (U, φ) de M, l'ensemble $\varphi(A \cap U)$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^m$.

Le lemme suivant nous montre que la condition est vérifiée pour toute collection de cartes dont les domaines recouvrent M.

Lemme 5.8 *Soit A le sous-ensemble d'une n-variété différentiable. Supposons qu'il existe une collection de cartes $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ dont les domaines recouvrent A, et telle que pour tout α, $\varphi(A \cap U_\alpha)$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^n$. Alors A est de mesure nulle dans M.*

Démonstration. Soit (V, ψ) une carte quelconque. On va montrer que $\psi(A \cap V)$ est de mesure nulle. On sait qu'il existe une collection dénombrable d'ouverts U_α recouvrant $A \cap V$. Pour chacun de ces U_α, on a

$$\psi(A \cap V \cap U_\alpha) = (\psi \circ \varphi_\alpha^{-1}) \circ \varphi_\alpha(A \cap V \cap U_\alpha).$$

(Voir fig.5) Maintenant, comme $\varphi_\alpha(A \cap V \cap U_\alpha)$ est contenu dans $\varphi_\alpha(A \cap U_\alpha)$, qui est de mesure nulle, on applique le lemme 5.3 à l'application $\psi \circ \varphi_\alpha^{-1}$, et ainsi $\psi(A \cap V \cap U_\alpha)$ est de mesure nulle. Et puisque $\psi(A \cap V)$ est la réunion dénombrable de tels ensembles, il est aussi de mesure nulle. □

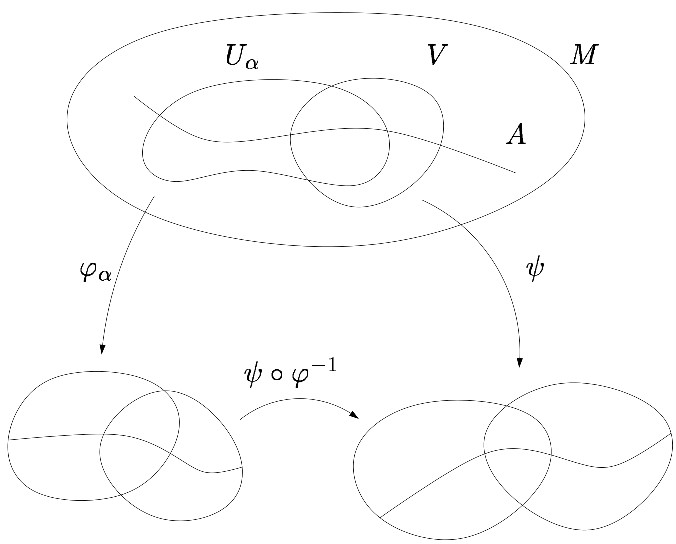

FIG. 5.4: Preuve du théorème 5.8.

Nous arrivons maintenant au résultat principal de ce chapitre, dont les conséquences nous seront utiles pour démontrer le théorème de Whitney.

Théorème 5.9 *Soient M et N des variétés différentiables telles que $\dim M < \dim N$, et $F : M \longrightarrow N$ une application différentiable. Alors $F(M)$ est de mesure nulle dans N.*

Démonstration. Considérons $m = \dim M$ et $n = \dim N$, et soit $\{(U_i, \varphi_i)\}$ un recouvrement dénombrable de M. Soit une carte quelconque (V, ψ) de N. On doit montrer que $\psi(F(M) \cap V)$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^n$. Cet ensemble est en fait la réunion dénombrable d'ensembles de la forme

$$\psi \circ \varphi_i^{-1}(\varphi_i(F^{-1} \cap U_i)),$$

qui sont de mesure nulle par lemme 5.6. Ainsi, $F(M)$ est de mesure nulle dans N. $\square$

Chapitre 6

Le théorème de Whitney

Nous avons maintenant les outils nécessaires pour montrer que toute variété différentiable de dimension n peut être plongée dans $\mathbb{R}^{2n+1}$. Nous commençons par prouver que si $m \geqslant 2n$, toute application différentiable $F : M \longrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ peut être légèrement perturbée pour devenir une immersion.

Théorème 6.1 *Soit $F : M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une application différentiable, où M est une n-variété différentiable, et $m \geqslant 2n$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une immersion $\widetilde{F} : M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ telle que*

$$\sup_M |\widetilde{F} - F| \leqslant \varepsilon.$$

Démonstration. On considère un recouvrement régulier $\{W_i\}$, qui existe par la proposition 3.9. Ainsi, chaque W_i est le domaine d'une carte $\psi_i : W_i \longrightarrow B_3(0)$, et les précompacts $U_i = \psi^{-1}(B_1(0))$ recouvrent toujours M.

Pour tout $k \geqslant 1$, on pose $M_k = \bigcup_{j=1}^{k} U_i$, avec $M_0 = \emptyset$. On va modifier F par induction sur un W_i à la fois.

Pour tout i, soit $\varphi_i \in C^\infty(M)$ une fonction saut à support dans W_i qui est égale à 1 sur $\overline{U}_i$. La proposition 3.13 nous garantit l'existence d'une telle fonction. On pose $F_0 = F$ et supposons par induction que l'on a les fonctions différentiables $F_j : M \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $j = 0, \ldots, k-1$ satisfaisant

(i) $\sup_M |F_j - F| < \varepsilon$;

(ii) Si $j \geqslant 1$, $F_j(x) = F_{j-1}(x)$ sauf si $x \in W_j$;

(iii) $(F_j)_*$ est injective en tout point de $\overline{M}_j$.

Pour toute matrice $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$, on définit $F_A : M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ telle que

- Sur $M \setminus \mathrm{supp}\varphi_k$, on a $F_A = F_{k-1}$;
- Sur W_k, $F_A(x) = F_{k-1}(x) + \varphi_k(x)Ax$.

En fait, la fonction ci-dessus s'écrit est donnée en coordonnées, mais on allège la notation. Elle s'écrirait $F_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, où

$$F_A(x) = (F_{k-1} \circ \psi_k^{-1})(x) + (\varphi_k \circ \psi_k^{-1})(x)Ax.$$

Sur $(M \setminus \mathrm{supp}\varphi_k) \cap W_k = W_k \setminus \mathrm{supp}\varphi_k$, ces deux définitions coïncident et sont égales à F_{k-1}, puisque par définition, $\varphi_k \equiv 0$ en dehors de son support. L'application F_A est donc différentiable par le lemme 2.4.

On a donc une fonction F_A qui coïncide avec F_{k-1} partout, sauf sur W_k. On posera par la suite $F_A = F_k$, et ainsi la condition *(ii)* est vérifiée.

Montrons à présent qu'elle vérifie la condition *(i)*. Puisque *(i)* est valable pour $j = k-1$ en particulier, il existe $\varepsilon_0 < \varepsilon$ tel que $|F_{k-1}(x) - F(x)| \leqslant \varepsilon_0$ pour tout $x \in \mathrm{supp}\varphi_k$. Par continuité de F_A, il existe un $\delta > 0$ tel que $|A| < \delta$ implique

$$\sup_M |F_A - F_{k-1}| = \sup_{x \in \mathrm{supp}\varphi_k} |F_A - F_{k-1}| = \sup_{x \in \mathrm{supp}\varphi_k} |\varphi_k(x)Ax| < \varepsilon - \varepsilon_0.$$

Ainsi,

$$\sup_M |F_A - F| \leqslant \sup_M |F_A - F_{k-1}| + \sup_M |F_{k-1} - F| < (\varepsilon - \varepsilon_0) + \varepsilon_0 = \varepsilon.$$

On définit à présent l'application

$$P : W_k \times M(m \times n, \mathbb{R}) \longrightarrow M(m \times n, \mathbb{R})$$

par

$$P(x, A) = DF_A(x).$$

Par hypothèse d'induction, $P(x, A)$ est de rang n lorsque $(x, A) \in (\mathrm{supp}\varphi_k \cap \overline{M}_{k-1}) \times \{0\}$, puisque $P(x, A) = DF_{k-1}$ si $A = 0$. Par l'exemple 4.13, $M_n(m \times n, \mathbb{R})$ est ouvert dans $M(m \times n, \mathbb{R})$; on peut donc trouver un $\delta > 0$, plus petit que celui posé précédement si nécessaire, tel que le rang de $P(x, A)$ soit toujours égal à n lorsque $x \in (\mathrm{supp}\varphi_k \cap \overline{M}_{k-1})$ et $|A| < \delta$. Si l'on se place maintenant en dehors de $\mathrm{supp}\varphi_k$, on obtient $P(x, A) = DF_{k-1}$, puisque $\varphi_k \equiv 0$. Ainsi, le rang de F_A est égal à n sur $\overline{M}_{k-1}$.

Il reste à montrer que le rang de $(F_A)_*$ est aussi égal à n sur $\overline{U}_k$. Par définition de φ_k, nous avons $\varphi_k \equiv 1$ pour tout $x \in \overline{U}_k$. Ainsi, $F_A(x) = F_{k-1}(x) + Ax$ et $DF_A(x) = DF_{k-1}(x) + A$. Mais $DF_A(x)$ est de rang n si et seulement si A n'est pas de la forme $B - DF_{k-1}(x)$, où B est une matrice de rang strictement inférieur à n ; on aurait alors $DF_A(x) = B$. Pour nous assurer que A ne soit pas de cette forme, on pose

$$Q : W_k \times M_j(m \times n, \mathbb{R}) \longrightarrow M(m \times n, \mathbb{R}),$$

une application différentiable définie par

$$Q(x, B) = B - DF_{k-1}(x).$$

On se réfère une nouvelle fois à l'exemple 4.13 pour affirmer que $M_j(m \times n, \mathbb{R})$ est une sous-variété plongée dans $M(m \times n, \mathbb{R})$ de codimension $(m - j)(n - j) > 0$ pour tout $j = 1, \dots, n-1$, et par le théorème 5.9, $Q(W_k \times M_j(m \times n, \mathbb{R}))$ est de mesure nulle dans $M(m \times n, \mathbb{R})$.

En effet, montrons que $\dim(W_k \times M_j(m \times n, \mathbb{R})) < \dim(M(m \times n, \mathbb{R}))$. Il faut simplement que l'inégalité

$$n + nm - (m - j)(n - j) < nm$$

soit vérifiée pour tout $j = 1, \dots, n-1$. On pose $f(j) = n - (m-j)(n-j)$ et on trouve que $f(n-1) = 2n - m - 1 < 0$, puisque nous avons la condition $m \geqslant 2n$. De plus, $f'(j) = m+n-2j \geqslant 3n-2j > 0$ pour tout $j = 1, \dots, n-1$. La fonction f est donc croissante et négative entre 0 et $n-1$, d'où l'inégalité. On peut donc choisir un nouveau $\delta > 0$ et ainsi une matrice A de rang n telle que $|A| < \delta$. Les trois conditions sont donc vérifiées et on pose $F_A = F_k$.

Soit à présent

$$\widetilde{F}(x) = \lim_{k \longrightarrow \infty} F_k(x).$$

Le recouvrement $\{W_k\}$ étant localement fini, on peut trouver pour tout k un $N(k) > k$ tel que $W_k \cap W_j = \emptyset$ pour tout $j \geqslant N(k)$. Par la condition *(ii)*, $F_{N(k)} = F_{N(k)+1} = \cdots = F_i$ pour tout $i \geqslant N(k)$. Ainsi, cette suite $\{F_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ est constante à partir d'un certain rang dans un voisinage de x, et cela est valable pour tout $x \in M$. L'application est donc différentiable, et c'est une immersion car $\widetilde{F}(x) = F_{N(k)}$ sur $\overline{M}_k$, qui est de rang n par la condition *(iii)*. $\square$

Corollaire 6.2 (Théorème de l'immersion de Whitney) *Toute variété différentiable de dimension n admet une immersion dans $\mathbb{R}^{2n}$*

Démonstration. On applique le théorème précédent. On pose $m = 2n$ et on définit $F : M \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ qui associe à tout $x \in M$ la constante $c \in \mathbb{R}^{2n}$. On choisit également $\varepsilon = 1$, et on sait qu'il existe une immersion $\widetilde{F} : M \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ telle que $\sup_M |\widetilde{F} - F| \leqslant 1$. $\square$

Nous montrons maintenant comment perturber une immersion pour qu'elle devienne injective. L'intuition de ce théorème est que, par le théorème du rang, l'image d'une immersion ressemble localement à un sous-espace affine de dimension n, après un changement de coordonnées approprié, c'est-à-dire que les intersections de $F(M) \subset \mathbb{R}^{2m}$ ressemblent localement à l'intersection de deux sous-espaces affines de dimension n. Si $m \geqslant 2n + 1$, on peut légèrement translater ces sous-espaces pour éliminer ces intersections. On peut voir le cas d'une courbe $(n = 1)$ dans $\mathbb{R}^3$ sur la figure 6.

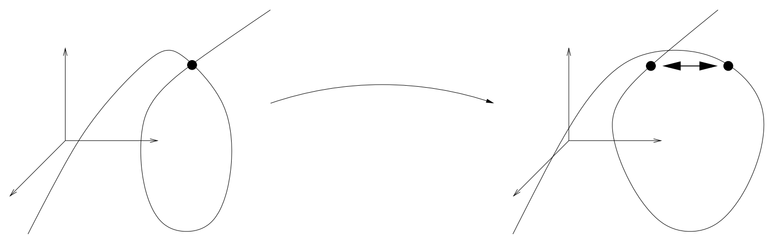

FIG. 6.1: Courbe dans $\mathbb{R}^3$.

Théorème 6.3 *Soit M une variété différentiable, et supposons $F : M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une immersion avec $m \geqslant 2n+1$. Alors, pout tout $\varepsilon > 0$, il existe une immersion injective $\widetilde{F} : M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ telle que*

$$\sup_M |\widetilde{F} - F| \leqslant \varepsilon.$$

Démonstration. Commençons par montrer qu'une immersion est localement un plongement lisse. Soit $p \in M$, ainsi que (U, φ) et (V, ψ) des cartes en p et $F(p)$ telles que $F(U) \subset V$. Passons en représentation en coordonnées, et nous obtenons l'application

$$G := \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : U' = \varphi(U) \longrightarrow V' = \psi(V).$$

Considérons la restriction $G|_{U'} : U' \longrightarrow G(U')$, et puisque F est une immersion, la matrice $DG(p)$ est de rang n. Par le théorème d'inversion locale, il existe $U_0' \subset U'$ et $V_0' \subset V'$ des voisinages connexes de $\varphi(p)$ et $G(\varphi(p))$ tels que $G|_{U_0'} : U_0' \longrightarrow V_0'$ est un difféomorphisme. Et ainsi, l'application F est localement un plongement lisse.

Par ce résultat, il existe un recouvrement ouvert $\{W_i\}$ de M tel que $F|_{W_i}$ est injective, et on passe à un raffinement régulier par la proposition 3.9. De même que dans la démonstration du théorème 6.1, on considère pour tout i l'application $\psi_i : W_i \longrightarrow B_3(0)$, le précompact $U_i = \psi^{-1}(B_1(0))$, et $\varphi_i \in C^\infty(M)$ une fonction à support dans W_i égale à 1 sur $\overline{U}_i$. Soit également $M_k = \bigcup_{i=1}^k U_i$.

On va de nouveau modifier F par induction pour la rendre injective en augmentant à chaque fois la taille du domaine. Soit $F_0 = F$, et on suppose par induction que l'on a défini les applications $F_j : M \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $j = 0, \dots, k-1$, satisfaisant les conditions suivantes :

(i) F_j est une immersion ;

(ii) $\sup_M |F_j - F| < \varepsilon$;

(iii) Si $j \geqslant 1$, $F_j(x) = F_{j-1}(x)$ sauf si $x \in W_j$;

(iv) F_j est injective sur $\overline{M}_j$;

(v) F_j est injective sur W_i pour tout i.

On définit $F_k : M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ par

$$F_k(x) = F_{k-1}(x) + \varphi_k(x)b,$$

avec $b \in \mathbb{R}^m$ à déterminer.

La condition *(iii)* est clairement vérifiée, car sur $M \setminus W_k$, $\varphi_k \equiv 0$. Quant à la condition *(ii)*, elle se montre de la même manière que dans la démonstration du théorème 6.1 : si $x \in \mathrm{supp}\varphi_k$, on choisit un $\varepsilon_0 < \varepsilon$ tel que $|F_{k-1}(x) - F(x)| \leqslant \varepsilon_0$, et par continuité de F_k, il existe un $\delta > 0$ tel que $|b| < \delta$ implique

$$\sup_{x \in \mathrm{supp}\varphi_k} |\varphi_k(x)b| < \varepsilon - \varepsilon_0.$$

Et ainsi,

$$\sup_M |F_k - F| \leqslant \sup_M |F_k - F_{k-1}| + \sup_M |F_{k-1} - F| < (\varepsilon - \varepsilon_0) + \varepsilon_0 = \varepsilon.$$

Passons à présent à la condition *(i)*. En choisissant un $\delta > 0$ plus petit si cela s'avère utile, on peut s'assurer que la matrice $DF_k(x) = DF_{k-1}(x) + bD\varphi_k(x)$ soit toujours de rang n, car $M_n(m \times n, \mathbb{R})$ est ouvert dans $M(m \times n, \mathbb{R})$, comme nous l'avons montré à l'exemple 4.13. Et en dehors du support de φ_k, on a bien sûr $DF_k(x) = DF_{k-1}(x)$ qui est de rang n par hypothèse d'induction.

Prouvons à présent les deux dernières conditions. Pour cela, on remarque que si $F_k(x) = F_k(y)$, exactement un des deux cas ci-dessous est possible :

1. $\varphi_k(x) \neq \varphi_k(y)$, et on a
$$b = -\frac{F_{k-1}(x) - F_{k-1}(y)}{\varphi_k(x) - \varphi_k(y)};$$
2. $\varphi_k(x) = \varphi_k(y)$, et ainsi $F_{k-1}(x) = F_{k-1}(y)$. On aura alors $x = y$.

Pour nous assurer que le premier cas ne se présente pas, on définit un ouvert $U \subset M \times M$ par

$$U = \{(x, y) | \varphi_k(x) \neq \varphi_k(y)\},$$

et soit l'application $R : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ telle que

$$R(x, y) = -\frac{F_{k-1}(x) - F_{k-1}(y)}{\varphi_k(x) - \varphi_k(y)}.$$

Puisque $\dim U < \dim(M \times M) = 2n < m$, le théorème 5.9 nous dit que $R(U)$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^m$. Ainsi, on peut trouver un $\delta > 0$, et un b avec $|b| < \delta$, tel que le premier cas ne se présente pas.

Maintenant supposons que $F_k(x) = F_k(y)$ pour x et y deux points distincts de $\overline{M}_k$. Par choix de b, nous avons $\varphi_k(x) = \varphi_k(y)$, et donc $F_{k-1}(x) = F_{k-1}(y)$. Si $\varphi_k(x) = \varphi_k(y) = 0$, x et y sont des éléments de

$\overline{M}_k \setminus \overline{U}_k \subset \overline{M}_{k-1}$. On aurait $F_{k-1}(x) = F_{k-1}(y)$, ce qui contredit l'hypothèse d'induction *(iv)*, et ainsi $x = y$. Si $\varphi_k(x) = \varphi_k(y) \neq 0$, on a que x et y sont cette fois des éléments de $\text{supp}\varphi_k \subset W_k$, ce qui contredit *(v)*. La condition *(iv)* est alors vérifiée pour $j = k$.

À présent, si $F_k(x) = F_k(y)$ pour x et y deux points distincts de W_i, avec i quelconque, le même argument montre que $F_{k-1}(x) = F_{k-1}(y)$, contredisant l'hypothèse d'induction *(v)*, et ainsi $x = y$. La dernière condition est donc vérifiée pour $j = k$.

Considérons, comme dans la preuve du théorème 6.1, la fonction

$$\widetilde{F}(x) = \lim_{j \longrightarrow \infty} F_j(x).$$

L'argument pour la différentiabilité de $\widetilde{F}$ est le même puisque M est toujours munie d'un recouvrement localement fini. Maintenant si $\widetilde{F}(x) = \widetilde{F}(y)$, choisissons un k tel que $x, y \in \overline{M}_k$. Définissons également N_x et N_y les rangs à partir desquels la limite ci-dessus est constante en x et y, et soit $N = \max\{N_x, N_y\}$. Alors $\widetilde{F} = F_N$ sur $\overline{M}_N$ qui contient justement $\overline{M}_k$, et par *(iv)*, F_N est injective et donc $x = y$. L'application $\widetilde{F}$ est ainsi une immersion injective. □

Théorème 6.4 (Théorème de Whitney : Forme faible) *Toute variété différentiable de dimension n admet un plongement lisse propre dans $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

Démonstration. On va construire une immersion injective propre, qui est un plongement lisse par la proposition 4.4. Soit $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction d'épuisement différentiable dont l'existence pour toute variété est assurée par la proposition 3.15. On définit également la fonction $F_0 : M \longrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ par

$$F_0(x) = (f(x), 0, \ldots, 0),$$

qui est évidemment différentiable, mais également propre. En effet, soit K un compact contenu dans $\text{Im}F_0 = \text{Im}f \times \{0\} \times \cdots \times \{0\}$. On sait que dans $\mathbb{R}^l$, l un entier, un ensemble est compact si et seulement s'il est fermé et borné. Le compact K est donc de la forme $K' \times \{0\} \times \cdots \times \{0\}$, où K' est un compact dans $\mathbb{R}$. Ainsi, $F_0^{-1}(K) = f^{-1}(K')$. Soit $N \in \mathbb{R}$ tel que $x \leqslant N$ pour tout $x \in K'$. On a donc $F_0^{-1}(K)$ qui est contenu dans $M_N = \{x \in M | f(x) \leqslant N\}$, qui est lui-même compact par définition de f, et nous savons qu'en particulier un fermé dans un compact est aussi compact.

Nous utilisons maintenant le théorème 6.1 pour modifier F_0 en une immersion F_1 telle que $\sup_M |F_1 - F_0| \leqslant 1$, puis le 6.3 pour obtenir une immersion injective F_2 telle que $\sup_M |F_2 - F_1| \leqslant 1$. Soit de nouveau K un compact contenu dans $\mathbb{R}^{2n+1}$; il est donc contenu dans une boule fermée $\overline{B}_R(0)$, et si $F_2(p) \in K$, on a

$$|F_0(p)| \leqslant |F_0(p) - F_1(p)| + |F_1(p) - F_2(p)| + |F_2(p)| \leqslant 1 + 1 + R.$$

Nous avons donc que $F_2^{-1}(K)$ est un fermé de $F_0^{-1}(\overline{B}_{2+R}(0))$ qui est compact, et par le même argument que ci-dessus, F_2 est propre. □

Corollaire 6.5 *Toute variété différentiable de dimension n est difféomorphe à une sous-variété plongée et fermée dans* $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Démonstration. Soit F un plongement lisse propre par le théorème de Whitney, et par le théorème 4.9, l'image de F est une sous-variété plongée. De plus, la proposition 2.6 nous dit qu'une application propre est une application fermée. Ainsi, l'image de la variété de dimension n est une sous-variété plongée fermée dans $\mathbb{R}^{2n+1}$. □

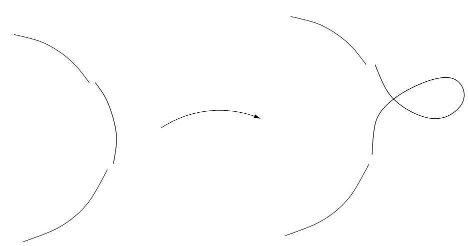

FIG. 6.2: Augmenter I_f de 1.

Avant d'énoncer la forme forte, nous allons rappeler quelques définitions, puis donner deux résultats (sans démonstration) qui nous permettront de donner une esquisse de la preuve de ce deuxième théorème de Whitney. Nous utilisons la terminologie de l'article.

Définition 6.6 Soit M une variété de dimension n, et $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une application différentiable. On dit qu'elle est *régulière* si sa matrice jacobienne est de rang n.

Définition 6.7 Soit $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ une application régulière. Alors pour tout $p \in M$, il existe un plan tangent $T_f(p)$ de dimension n à $f(M)$ en $f(p)$. Supposons $f(p_1) = f(p_2)$. On dit que ce point est une *intersection régulière* si $T_f(p_1)$ et $T_f(p_2)$ n'ont que $f(p_1)$ en commun. Si f n'a que des intersections régulières, et qu'il n'existe pas trois éléments de M envoyés sur le même point, alors f est dite *complètement régulière*.

Théorème 6.8 *Soit M une variété de dimension n compacte. Alors pour tout* I_f *le nombre algébrique des intersections, il existe une application propre complètement régulière* $f_0 : M \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$.

Théorème 6.9 *Soit $n \geqslant 3$, et $f_0 : M \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ une application propre et régulière. Si le nombre d'intersections est strictement plus grand que $|I_f|$, alors il existe une déformation de f_0 en f_1 une application propre complètement régulière, telle que le nombre d'intersections est diminué de 2.*

On peut également augmenter ou diminuer de 1 ce nombre algébrique en considérant un petit morceau de la variété ; il suffit de prélever un petit bout de variété et de le remplacer par un autre avec une intersection. On peut se l'imaginer à l'aide de la figure 6.

Théorème 6.10 (Théorème de Whitney : Forme forte) *Toute variété de dimension n peut être plongée dans $\mathbb{R}^{2n}$.*

Esquisse de la preuve. La cas $n = 1$ est trivial, et pour $n = 2$, on peut s'arranger pour plonger des variétés connues, telles la sphère ou le plan projectif, et de rajouter les anses pour obtenir la variété donnée. Soit alors $n \geqslant 3$. Un théorème qui ne sera pas cité ici nous assure l'existence d'une application propre complètement régulière $f_0 : M \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$.

Supposons tout d'abord M fermée. Par le théorème 6.8, on modifie f_0 en f_1 telle que $I_f = 0$. Puis par le théorème 6.9, on élimine toutes les intersections, et on obtient donc le plongement désiré.

À présent, soit M une variété ouverte et supposée connexe. Considérons tous les couples (p_i, q_i) tels que $f_0(p_i) = f_0(q_i)$, ainsi qu'un chemin C_i partant de p_i à l'infini. Soit également U_i un voisinage de C_i tel qu'il n'intersecte aucun autre U_j et ne contienne pas de q_j. L'idée est d' envoyer le point p_i à l'infini en déformant l'ouvert U_i, mais en laissant le bord fixe. On peut ainsi éliminer toutes les intersections. $\square$

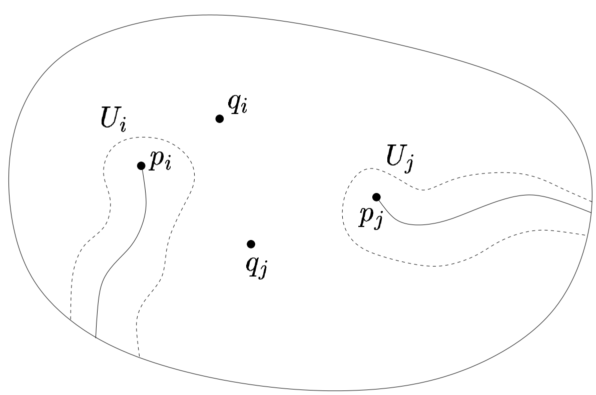

FIG. 6.3: Forme forte.

Comme exemple pour ce théorème, on peut citer la *bouteille de Klein.* Elle s'obtient en identifiant dans un carré les côtés opposés avec inversion du sens pour l'un des couples (fig. 6). C'est une variété différentiable de dimension 2. On remarque que dans $\mathbb{R}^3$, elle ne peut être plongée, car on ne peut éviter les intersections sur le bord de la bouteille (fig. 6). Par la forme forte du théorème de Whitney, on peut par contre la plonger dans $\mathbb{R}^4$.

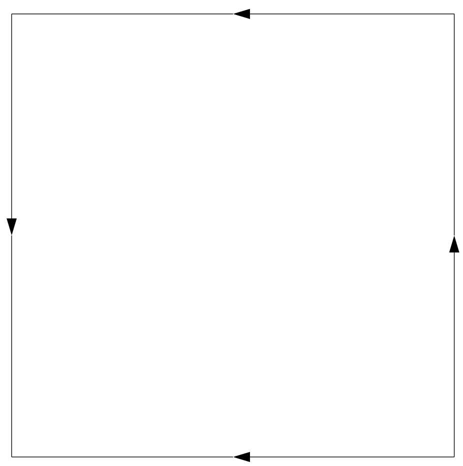

FIG. 6.4: Bouteille de Klein.

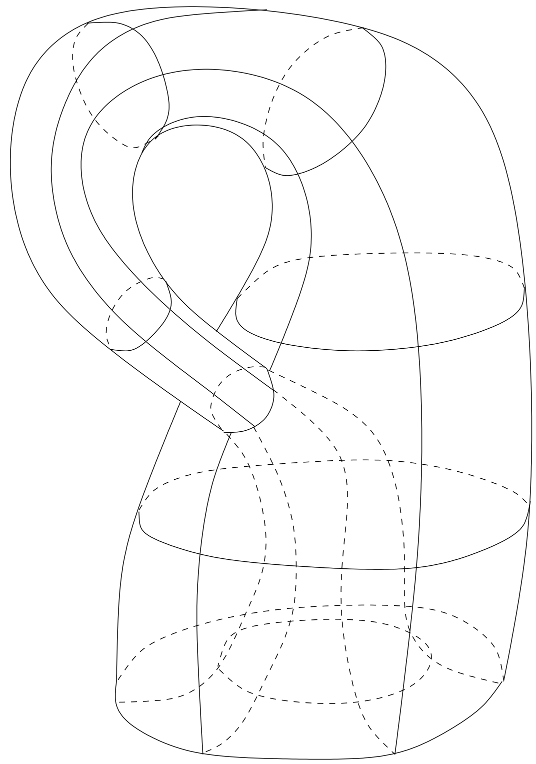

FIG. 6.5: Bouteille de Klein dans $\mathbb{R}^3$.