Projet de semestre

Hiver 2005-2006

Le théorème de Milnor-Moore

ANNA DEVIC

Sous la direction du Professeur

KATHRYN HESS BELLWALD

Assistant responsable

JONATHAN SCOTT

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
Section de mathématiques
CH-1015 Lausanne
ana.devic@epfl.ch

Table des matières

CHAPITRE 1

Introduction à l'homologie singulière

Ce chapitre est une introduction sommaire à l'homologie singulière. Son but principal est de poser les notations et de construire la preuve d'un résultat central pour la suite de ce travail, à savoir la fonctorialité des groupes d'homologie. La majeure partie des preuves intermédiaires est omise. Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer aux chapitres 7 et 9 de [11] et aux chapitres 1 et 4 de [9].

1. Complexes de chaîne

Définition 1.1.
Un *complexe de chaîne* est une famille $C = (C_q, \partial_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ de groupes abéliens C_q et d'homomorphismes $\partial_q : C_q \to C_{q-1}$ tels que $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$ pour tout $q \in \mathbb{Z}$. Par commodité, on écrit souvent ∂ au lieu de ∂_q et on représente C par le diagramme

$$C : \cdots \xrightarrow{\partial} C_{q+1} \xrightarrow{\partial} C_q \xrightarrow{\partial} C_{q-1} \xrightarrow{\partial} \cdots \qquad (\partial\partial = 0).$$

Pour $c \in C_q$ on appelle $\partial c \in C_{q-1}$ le *bord* de c et $c \in \operatorname{Ker}\partial_q \subset C_q$ un *cycle*. L'homomorphisme $\partial_q = \partial$ est appelé *opérateur de bord*.

Définition 1.2.
Soit $C = (C_q, \partial_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ un complexe de chaîne. Puisque $\partial\partial = 0$, nous avons $\operatorname{Im}\partial_{q+1} \subset \operatorname{Ker}\partial_q \subset C_q$. Alors le groupe $H_q(C) = \operatorname{Ker}\partial_q / \operatorname{Im}\partial_{q+1}$ est le *qème groupe d'homologie* du complexe de chaîne C. Les éléments de ce groupe sont les classes $[c]_C = [c] = c + \operatorname{Im}\partial_{q+1}, c \in C_q$ appelés *classes d'homologie*. On note $H(C) = (H_q(C))_{q\in\mathbb{Z}}$ le module gradué d'homologie de C.

Définition 1.3.
Soient $C = (C_q, \partial_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ et $C' = (C'_q, \partial'_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ deux complexes de chaîne. Un *morphisme de chaînes* $f : C \to C'$ est une famille $(f_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ d'homomorphismes $f_q : C_q \to C'_q$ tels que $\partial'_q \circ f_q = f_{q-1} \circ \partial_q$. Souvent on dénote f_q par f, ce qui nous permet de caractériser le morphisme de chaînes par son diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
C : \arrow[d, "f"'] & \cdots \arrow[r, "\partial"] & C_{q+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f"'] & C_q \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f"'] & C_{q-1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f"'] & \cdots \\
C' : & \cdots \arrow[r, "\partial"] & C'_{q+1} \arrow[r, "\partial"] & C'_q \arrow[r, "\partial"] & C_{q-1} \arrow[r, "\partial"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Définition 1.4.
Comme tout morphisme de chaînes $f : C \to C'$ envoie des cycles sur des cycles et des bords sur des bords, f induit un homomorphisme $f_* = H(f)$ avec $H_q(f) : H_q(C) \to H_q(C')$ donné par $[c]_C \mapsto [f(c)]_{C'}$.

Proposition 1.5.

(1) *L'application* $0 : C \to C'$ *est un morphisme de chaînes et* $0_* = 0$.

(2) *L'application identité* $\mathrm{Id} : C \to C$ *est un morphisme de chaînes. De plus* $\mathrm{Id}_* : H(C) \to H(C)$ *est encore l'identité.*

(3) *On peut composer deux morphismes de chaînes* $f : C \to C'$ *et* $g : C' \to C''$ *en un morphisme de chaînes* $gf : C \to C''$ *défini par* $(gf)_q = g_q f_q$. *On obtient ainsi l'homomorphisme* $(gf)_* = g_* f_* : H(C) \to H(C'')$.

2. Les groupes d'homologie singulière

Définition 1.6.
Soit $q \geq 0$ et considérons $\mathbb{R}^{q+1}$ avec sa base canonique associée

$$e_0 = (1, 0, 0, \ldots, 0), e_1 = (0, 1, 0, 0, \ldots, 0), \ldots, e_q = (0, 0, \ldots, 0, 1).$$

Le *q-simplexe standard* Δ_q est défini par

$$\begin{aligned}\Delta_q &= \{x \in \mathbb{R}^{q+1} \mid x = \sum_{i=0}^{q} \lambda_i e_i \text{ tel que } 0 \leq \lambda_i \leq 1, \sum_{i=0}^{q} \lambda_i = 1\} \\ &= \{(\lambda_0, \ldots, \lambda_q) \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1, \sum_{i=0}^{q} \lambda_i = 1\}.\end{aligned}$$

Il s'agit du simplexe q-dimensionnel fermé de sommets $e_0, \ldots, e_q$. La face opposée au sommet e_i est appelé la *ième face* de Δ_q et s'écrit Δ_q^i. Elle est composée des points de Δ_q avec $\lambda_i = 0$. Le *bord* de Δ_q est l'union de ses faces.

Définition 1.7.
Pour $q \geq 1$ et $0 \leq i \leq q$, l'application δ_{q-1}^i est une application affine induite par $e_0 \mapsto e_0, \ldots e_{i-1} \mapsto e_{i-1}, e_i \mapsto e_{i+1}, \ldots, e_{q-1} \mapsto e_q$. C'est une bijection qui envoie Δ_{q-1} sur Δ_q^i.

Nous avons à présent tous les outils en main pour définir les groupes d'homologie singulière rationnels d'un espace topologique.

Théorème-Définition 1.8.
*Soit X un espace topologique. Un q-*simplexe singulier *dans X est une application continue* $\sigma : \Delta_q \to X$. *Le q*ème groupe de chaîne singulier $S_q(X, \mathbb{Q}) = S_q(X)$ *est le* $\mathbb{Q}$*-espace vectoriel engendré par tous les q-simplexes singuliers dans X. Les éléments de* $S_q(X)$ *sont*

appelés q-chaînes singulières *de* X*. Pour* $q < 0$ *posons* $S_q(X) = 0$*. Pour* $q \geq 1$*, définissons l'homomorphisme suivant :*

$$\partial = \partial_q : S_q(X) \to S_{q-1}(X),\ \partial\sigma = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i (\sigma \circ \delta^i_{q-1}).$$

Pour $q \leq 0$ *on pose* $\partial_q = 0$*. La famille* $(S_q(X), \partial)_{q\in\mathbb{Z}}$ *ainsi définie est un complexe de chaîne appelé le* complexe de chaîne singulier *de* X*. Les groupes d'homologie correspondants* $H_q(S(X))$ *sont les* groupes d'homologie singulière *de* X *et on les note* $H_q(X) = H_q(S(X))$*. Le module gradué d'homologie singulière de* X *est notée* $H_*(X) = H_*(X, \mathbb{Q}) = H(S(X))$*.*

Notation 1.9.
Soit $\partial_q : S_q(X) \to S_{q-1}(X)$ l'opérateur de bord. Alors on note $Z_q(X) = \operatorname{Ker} \partial_q$ et $B_q(X) = \operatorname{Im} \partial_{q+1}$ sont appelés respectivement le $q$ème *groupe de cycles* et $q$ème *groupe de bords* de X. On peut donc écrire le $q$ème groupe d'homologie comme $H_q(X) = Z_q(X)/B_q(X)$.

Théorème-Définition 1.10.
Soient X *et* Y *deux espaces topologiques. Une application continue* $f : X \to Y$ *induit un homomorphisme*

$$S_q(f) : S_q(X) \to S_q(Y), \quad \sum_\sigma n_\sigma \sigma \mapsto \sum_\sigma n_\sigma (f \circ \sigma)$$

pour tout $q \in \mathbb{Z}$*. La famille* $S(f) = (S_q(f))_{q\in\mathbb{Z}}$ *est un morphisme de chaînes et le couple d'applications* $X \mapsto S(X), f \mapsto S(f)$ *permet de définir un foncteur* S *entre espaces topologiques et complexes de chaîne. Pour simplifier les notations, nous allons écrire* $S_q(f) : S_q(X) \to S_q(Y)$ *et* $S(f) = S_\bullet : S(X) \to S(Y)$*.*

Démonstration. Soient X, Y et Z des espaces topologiques et $f : X \to Y, g : Y \to Z$ des applications continues. Par la définition même de S, $(\mathrm{Id}_X)_\bullet = Id_{S(X)}$ et $f_\bullet g_\bullet = (fg)_\bullet$. Il nous reste encore à montrer que $f_\bullet$ est bien un morphisme de chaînes, notamment que $f_\bullet$ commute avec ∂. Il suffit de vérifier cette relation pour les générateurs de chaque $S_q(X)$. Soit $\sigma : \Delta \to X$. D'une part on obtient

$$\partial(f_\bullet\sigma) = \partial(f \circ \sigma) = \sum (-1)^i (f \circ \sigma) \circ \delta^i_{q-1}.$$

Or d'autre part on a

$$f_\bullet(\partial\sigma) = f_\bullet(\sum (-1)^i \sigma \circ \delta^i_{q-1}) = \sum (-1)^i f \circ (\sigma \circ \delta^i_{q-1}).$$

Ainsi $\partial f_\bullet = f_\bullet \partial$ et $f_\bullet$ est bien un morphisme de chaînes. □

Définition 1.11.
L'application continue $f : X \to Y$ induit un homomorphisme de groupes d'homologie donnée par $f_{*_q} = H_q(f) = H_q(S(f)) : H_q(X) \to H_q(Y)$. Pour un q-cycle singulier z dans X on peut écrire $f_*([z]_X) = [f_\bullet(z)]_Y$.

Définition 1.12.
Soit K un corps. Alors la famille $(V_n)_{n\geq 0}$ de K-espaces vectoriels est appelé un *espace vectoriel gradué* sur K.

Remarque 1.13.
Vu que $H_q(X) = 0$ pour tout $q < 0$, nous pouvons écrire $H_*(X) = (H_q(X))_{q\geq 0}$. Désormais, il sera sous-entendu que pour les espaces vectoriels gradués d'homologie singulière, l'ensemble d'indices parcourt seulement les entiers non-négatifs.

Le théorème suivant découle de la proposition 1.5 et du théorème 1.10 :

Théorème 1.14.
Pour tout nombre entier q le couple d'applications $X \mapsto H_q(X)$, $f \mapsto H_q(f)$ définit un foncteur appelé H et donc le couple d'applications $X \mapsto H_*(X)$, $f \mapsto f_*$ définit un foncteur H_* entre espaces topologiques et espaces vectoriels gradués sur $\mathbb{Q}$. En particulier, $\mathrm{Id}_* = \mathrm{Id}$ *et* $(gf)_* = g_*f_*$.

CHAPITRE 2

Algèbres, coalgèbres et algèbres de Hopf

Dans ce chapitre, le but est de définir les outils algébriques qui vont nous permettre par la suite d'étudier de plus près les groupes d'homologie et d'homotopie d'un espace topologique donné. Dans un premier temps, nous allons présenter les notions topologiques auxquelles on peut les associer, pour nous focaliser ensuite sur l'étude des concepts algébriques proprement dits.

1. Espaces topologiques et coalgèbres

Une *coalgèbre* A peut être décrite comme un espace vectoriel doté d'une comultiplication $\Delta : A \to A \otimes A$ associative et unitaire. Avant de reprendre cette définition de façon plus formelle en fin de chapitre, nous allons montrer comment on peut associer à tout espace topologique de manière naturelle une coalgèbre.

Définition 2.1.
Soient A et B deux espaces vectoriels gradués sur un corps K. Alors $A \otimes B = A \otimes_K B$ est le K-espace vectoriel défini par $(A \otimes B)_n = \oplus_{i+j=n} A_i \otimes B_j$ pour tout $n \geq 0$. Pour tout couple de morphismes de K-espaces vectoriels gradués $f : A \to A'$, $g : B \to B'$, on définit $(f \otimes g) : A \otimes B \to A' \otimes B'$ comme le morphisme de K-espaces vectoriels gradués donné par $(f \otimes g)_n = \oplus_{i+j=n} f_i \otimes g_j$ pour tout $n \geq 0$. Le *morphisme d'échange* $T : A \otimes B \to B \otimes A$ est un morphisme de K-espaces vectoriels gradués défini par $T_n(a \otimes b) = (-1)^{pq} b \otimes a$ pour $a \in A_p$, $b \in B_q$ et $p + q = n$.

Rappelons qu'à la fin du chapitre précédent, nous avons montré que $H_*(-)$ est un foncteur entre espaces topologiques et espaces vectoriels gradués sur $\mathbb{Q}$. Les deux propositions suivantes sont une conséquence directe de cette affirmation :

Proposition-Définition 2.2.
Soit X un espace topologique. La diagonale *est l'application continue $\Delta : X \to X \times X$ définie par $\Delta(x) = (x, x)$ pour tout $x \in X$. En sachant qu'il existe un isomorphisme*

$$H_*(X \times X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} H_*(X, \mathbb{Q}) \otimes H_*(X, \mathbb{Q}) \ ,$$

la diagonale induit un morphisme de $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels

$$\Delta'_* : \qquad H_*(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\Delta_*} H_*(X \times X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} H_*(X, \mathbb{Q}) \otimes H_*(X, \mathbb{Q}) \ .$$

Démonstration. L'existence d'un tel isomorphisme est un cas particulier de la formule de Künneth (pour plus de détails, consulter [10]). □

PROPOSITION-DÉFINITION 2.3.
Soit $\{*\}$ *l'espace topologique composé d'un seul point. L'application constante* $\varepsilon : X \to \{*\}$ *induit alors un morphisme*

$$\varepsilon_* : H_*(X, \mathbb{Q}) \to H_*(\{*\}, \mathbb{Q}).$$

De plus, en sachant que

$$H_*(\{*\}, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q},$$

nous obtenons un morphisme de $\mathbb{Q}$*-espaces vectoriels*

$$\varepsilon'_* : \qquad H_*(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\varepsilon_*} H_*(\{*\}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Q}\ .$$

DÉMONSTRATION. Il nous suffit de montrer que

$$H_m(\{*\}, \mathbb{Q}) = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } m = 0 \\ 0 & \text{si } m > 0. \end{cases}$$

Soit $S_*(\{*\})$ le complexe de chaînes de $\{*\}$. Désignons par Δ_q le simplexe standard de dimension q, par σ_q l'application continue qui envoie Δ_q sur $\{*\}$ (elle est unique, car $\{*\}$ est composé d'un seul point), et par $\delta^i_{q-1} : \Delta_{q-1} \to \Delta_q$ l'application identifiant le $(q-1)$-simplexe à l'i-ème côté du q-simplexe. L'opérateur de bord

$$\partial_q : S_q(\{*\}) \to S_{q-1}(\{*\})$$

est alors définie par

$$\begin{aligned} \partial_q \sigma_q &= \sum_{i=0}^{q} (-1)^i (\sigma_q \circ \delta^i_{q-1}) \\ &= \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \sigma_{q-1} \\ &= \begin{cases} \sigma_{q-1} & \text{si } q \text{ pair} \\ 0 & \text{si } q \text{ impair.} \end{cases} \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\operatorname{Ker} \partial_q = \begin{cases} 0 & \text{si } q \text{ pair, } q > 0 \\ S_q(\{*\}) & \text{si } q \text{ impair ou } q = 0 \end{cases}$$

et

$$\operatorname{Im} \partial_q = \begin{cases} S_{q-1}(\{*\}) & \text{si } q \text{ pair} \\ 0 & \text{si } q \text{ impair.} \end{cases}$$

Ainsi, pour $m > 0$,

$$H_m(\{*\}) = \operatorname{Ker} \partial_m / \operatorname{Im} \partial_{m+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } m \text{ pair} \\ S_m(\{*\})/S_m(\{*\}) = 0 & \text{si } m \text{ impair.} \end{cases}$$

Pour $m = 0$, nous avons

$$H_0(\{*\}) = \operatorname{Ker} \partial_0 / \operatorname{Im} \partial_1 = S_0(\{*\})/0 = S_0(\{*\}).$$

Comme $S_0(\{*\})$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension 1, il est isomorphe à $\mathbb{Q}$, d'où l'affirmation. □

Voici maintenant la définition d'une coalgèbre.

Définition 2.4.
Une *coalgèbre* sur un corps K est un K-espace vectoriel gradué A doté de deux morphismes de K espaces vectoriels gradués

$$\Delta : A \to A \otimes A \text{ et } \varepsilon : A \to K$$

tels que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"] & A \otimes A \arrow[d, "\Delta\otimes\mathrm{Id}"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\mathrm{Id}\otimes\Delta"] & A \otimes A \otimes A \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[rr, "\varepsilon\otimes\mathrm{Id}"] & & K \otimes A \arrow[dl, "\cong"] \\ & A \arrow[ul, "\Delta"] \arrow[dl, "\Delta"] & \\ A \otimes A \arrow[rr, "\mathrm{Id}\otimes\varepsilon"] & & A \otimes K \arrow[ul, "\cong"] \end{tikzcd}$$

Le morphisme Δ s'appelle la *comultiplication* et la première condition nous garantit qu'elle est (co)associative. Le morphisme ε est appelé la *counité* de la coalgèbre.

Exemples 2.5.

(1) Il existe une manière naturelle de considérer le corps K comme coalgèbre : il suffit de prendre $\mathrm{Id}_K : K \to K$ pour la counité et $\Delta : K \to K \otimes K$ définie par $\Delta(x) = x \otimes 1$ pour tout $x \in K$ pour la comultiplication.

(2) Soit X un espace topologique. Il découle alors des propositions 2.2 et 2.3 que $(H_*(X, \mathbb{Q}), \Delta'_*, \varepsilon'_*)$ est une coalgèbre sur $\mathbb{Q}$.

(3) (Produit tensoriel de coalgèbres)
Soient A et B deux coalgèbres sur un corps K. Alors $A \otimes B$ est une coalgèbre avec la comultiplication donnée par la composition

$$A \otimes B \xrightarrow{\Delta_A \otimes \Delta_B} A \otimes A \otimes B \otimes B \xrightarrow{\mathrm{Id}_A \otimes T \otimes \mathrm{Id}_B} A \otimes B \otimes A \otimes B$$

et la counité définie par

$$A \otimes B \xrightarrow{\varepsilon_A \otimes \varepsilon_B} K \otimes K = K \, .$$

Définition 2.6.
Soient A et B deux coalgèbres sur un corps K. Un *morphisme de coalgèbres* $f : A \to B$ est un morphisme de K-espaces vectoriels gradués tel que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta_A"] \arrow[d, "f"] & A \otimes A \arrow[d, "f\otimes f"] \\ B \arrow[r, "\Delta_B"] & B \otimes B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varepsilon_A"] \arrow[d, "f"] & K \arrow[d, "\mathrm{Id}_K"] \\ B \arrow[r, "\varepsilon_B"] & K \end{tikzcd}$$

Exemple 2.7 (Augmentation de coalgèbre).
Une *augmentation* de A un morphisme de coalgèbres $\eta : K \to A$. Il est alors facile à voir que $\varepsilon\eta = \mathrm{Id}_K$. Une coalgèbre munie d'une augmentation s'appelle une *coalgèbre augmentée*.

Définition 2.8.
La coalgèbre A est dite *commutative* si le diagramme

$$\begin{tikzcd} & A \otimes A \arrow[dd, "T"] \\ A \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[dr, "\Delta"'] & \\ & A \otimes A \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Notation 2.9 (La notation de Sweedler).
Soit (A, Δ, ε) une coalgèbre. Pour un élément $a \in A$, nous allons écrire

$$\Delta(a) = \sum a_1 \otimes a_2.$$

Avec les conventions usuelles, nous aurions dû écrire

$$\Delta(a) = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \otimes a_{i2}.$$

La notation de Sweedler supprime l'indice i, ce qui nous permet de mettre l'accent sur la forme de $\Delta(a)$ et elle est très utile pour écrire de longues composition de manière compacte et intelligible. Voici un exemple d'utilisation à travers les définitions de coalgèbre :

Proposition 2.10.
Soit (A, Δ, ε) une K-coalgèbre et $a \in A$. Alors de l'égalité $(\Delta \otimes A) \circ \Delta = (A \otimes \Delta) \circ \Delta$ de la définition 2.4, il s'ensuit que

$$\sum \Delta(a_1) \otimes a_2 = \sum a_1 \otimes \Delta(a_2)$$

ou encore que

$$\sum a_{1_1} \otimes a_{1_2} \otimes a_2 = \sum a_1 \otimes a_{2_1} \otimes a_{2_2}.$$

La commutativité du deuxième diagramme de cette même définition peut être réécrite comme

$$\mathrm{Id}_A = \phi_g \circ (\varepsilon \otimes Id_A) \circ \Delta = \phi_d \circ (\mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon) \circ \Delta,$$

où $\phi_d : A \otimes K \xrightarrow{\cong} A$ et $\phi_g : K \otimes A \xrightarrow{\cong} A$ sont les isomorphismes canoniques. En utilisant la notation de Sweedler, on peut réécrire ces mêmes équations comme

$$\sum \varepsilon(a_1)c_2 = \sum a_1 \varepsilon(a_2) = a.$$

2. Espaces topologiques et algèbres

Une algèbre est un espace vectoriel muni d'une multiplication $\varphi : A \otimes A \to A$ qui soit associative. Toutefois, contrairement au cas des coalgèbres, dans un espace topologique quelconque il n'existe pas de multiplication usuelle qui pourrait nous permettre d'y associer une algèbre de manière canonique. Pour cela, il est nécessaire de doter l'espace topologique d'une structure supplémentaire, dont nous allons montrer plusieurs exemples dans les sections suivantes. Pour la définition formelle d'une algèbre, le lecteur pourra se référer au paragraphe 2.25.

Pour commencer, voici une courte présentation de la notion de groupe topologique.

2.1. Groupes topologiques.

Définition 2.11.
Un *groupe topologique* est un espace topologique G muni de deux applications continues $\mu : G \times G \to G$ (*multiplication*) et $\iota : G \to G$ (*inversion*) telles que (G, μ, ι) est un groupe.

Définition 2.12.
Soient G et H deux groupes topologiques. Un *homomorphisme de groupes topologiques* $\varphi : G \to H$ est une application continue qui est en même temps un homomorphisme de groupes.

Exemples 2.13.

(1) Soit G un groupe dénombrable. Alors G muni de la topologie discrète est un groupe topologique. En effet, on voit immédiatement que l'inversion est continue. Comme la topologie produit de $G \times G$ est également la topologie discrète, il en découle que la multiplication est continue aussi.

(2) Le groupe additifs $(\mathbb{R}, +)$ et des complexes $(\mathbb{C}, +)$ sont des groupes topologiques abéliens.

(3) Les groupes multiplicatifs $\mathbb{R}^\times$ et $\mathbb{C}^\times$, munis de la topologie de sous-espace sont également des groupes topologiques abéliens.

(4) Soit $S^0 = \{x \in \mathbb{R}^\times \mid |x| = 1\} = \{-1, 1\}$, la sphère de dimension zéro. Alors S^0 est un sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{R}^\times$ et sa topologie de sous-espace coïncide avec la topologie discrète sur S^0. Par conséquent S^0 est un sous-groupe topologique de $\mathbb{R}^\times$ qui est isomorphe au groupe cyclique d'ordre 2.

(5) De façon analogue, le cercle $S^1 = \{z \in \mathbb{C}^\times \mid \|z\| = 1\}$ est un sous-groupe topologique de $\mathbb{C}^\times$, il est donc abélien.

(6) Si G et H sont deux groupes topologiques, alors $G \times H$ muni de la topologie produit est également un groupe topologique. Par exemple le tore de dimension n, $\mathbb{T}^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ (n fois) est encore un groupe topologique.

(7) Soit $\mathbb{H} = \{w+xi+yj+zk \mid w,x,y,z \in \mathbb{R}\}$ l'anneau des quaternions. Alors $\mathbb{H}$ est un corps non-commutatif et le groupe multiplicatif $\mathbb{H}^\times$ est un groupe topologique non-abélien. Soit

$$S^3 = \{w + xi + yj + zk \in \mathbb{H}^\times \mid w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

la sphère de dimension 3. Alors S^3 est un sous-groupe topologique de $\mathbb{H}^\times$.

Passons maintenant à la classe plus large des monoïdes topologiques qui contient notamment la classe des groupes topologiques.

2.2. Monoïdes topologiques.

Définition 2.14.
Un *monoïde topologique* est un espace topologique pointé (M, e) doté d'une application continue $\mu : M \times M \to M$ qui est *associative* autrement dit telle que $\mu(\mu(x,y),z) = \mu(x,\mu(y,z))$ pour tout $x,y,z \in M$ et telle que $e \in M$ soit l'élément neutre : $\mu(x,e) = \mu(e,x) = x$ pour tout $x \in M$.

Définition 2.15.
Soient (M,μ) et (N,ν) deux monoïdes topologiques. Un *homomorphisme de monoïdes* est une application continue $\varphi : M \to N$ telle que $\nu(\varphi(x),\varphi(y)) = \varphi(\mu(x,y))$.

Exemple 2.16 (Chemins de Moore).
Soit (X, x_0) un espace topologique pointé. Un *chemin de Moore* dans X est une paire (γ, s_0) où $\gamma : \mathbb{R}_+ \to X$ est une application continue telle que $\gamma(s) = \gamma(s_0)$ si $s \geq s_0$. On dit alors que le chemin s'arrête à $\gamma(s_0)$. Si (δ, t_0) est un autre chemin de Moore avec $\delta(0) = \gamma(s_0)$, on les compose de la façon suivante :

$$\gamma \cdot \delta(s) = \begin{cases} \gamma(s) & \text{si } 0 \leq s \leq s_0 \\ \delta(s - s_0) & \text{si } s_0 < s. \end{cases}$$

Ainsi $(\gamma \cdot \delta, s_0 + t_0)$ est un chemin de Moore dans X. On désigne par MX l'ensemble des chemins de Moore dans X. Muni de la topologie compacte-ouverte, MX est un espace topologique.

Soit $\Omega X \subset MX$ l'ensemble des *lacets* de Moore, autrement dit des chemins de Moore (α, s_0) qui vérifient $\alpha(0) = \alpha(s_0) = x_0$ La composition des lacets de Moore définit une application

$$\Omega X \times \Omega X \xrightarrow{\mu} \Omega X, \qquad ((\gamma, s_0), (\delta, t_0)) \mapsto (\gamma \cdot \delta, s_0 + t_0).$$

Proposition 2.17.
Muni de l'application $\mu : \Omega X \times \Omega X \to \Omega X$ définie ci-dessus, $(\Omega X, \mu)$ est un monoïde topologique.

Le résultat suivant nous permet d'affirmer que pour étudier les groupes d'homotopie d'un espace topologique pointé (X, x_0), il suffit d'étudier les groupes d'homotopie de l'espace de lacets de Moore ΩX correspondant.

Théorème 2.18.
Soit (X, x_0) *un espace topologique pointé et* ΩX *l'espace de lacets de Moore correspondant. Alors* $\pi_k(\Omega X) \cong \pi_{k+1}(X)$ *pour tout* $k \geq 1$.

Avant de prouver ceci, voici quelques rappels utiles pour la démonstration.

Rappel.
Soient E et B deux espaces topologiques. Une application continue $p : E \to B$ est une *fibration* si elle vérifie la propriété de relèvement d'homotopie : pour tout carré commutatif

$$\begin{tikzcd} Y \times \{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ Y \times I \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dotted, "h"] & B \end{tikzcd}$$

il existe un revêtement $h : Y \times I \to E$ tel que $ph = g$ et $hi = f$. On appelle E l'espace total et B l'espace de base de fibration.

Fixons un point de base $b_0 \in B$ et posons $F = p^{-1}(b_0)$, la fibre de p. Alors il existe une suite longue exacte en homotopie,

$$\cdots \to \pi_n(F) \to \pi_n(E) \to \pi_n(B) \to \pi_{n-1}(F) \to \cdots$$

Démonstration. Soit $PX = \{(\gamma, s_0) \in MX \mid \gamma(0) = x_0\}$ l'ensemble des chemins de Moore partant de x_0.

(1) L'ensemble PX muni de la topologie de sous-espace est contractile.

En effet, soit

$$H : PX \times I \to PX$$

définie par

$$H((\gamma, s_0), t) = (\gamma, (1-t)s_0)$$

pour tout $(\gamma, s_0) \in PX$ et $t \in I$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} H((\gamma, s_0), 0) &= (\gamma, s_0), \\ H((\gamma, s_0), 1) &= (\gamma, 0) = (c, 0), \end{aligned}$$

où $(c, 0)$ est le chemin constant en x_0. De plus H est clairement continue, nous avons ainsi trouvé une homotopie entre PX et l'espace à un seul point qui correspond ici à l'application constante $(c, 0)$.

(2) L'application d'évaluation $\epsilon : PX \to X$ définie par $\epsilon(\gamma, s_0) = \gamma(s_0)$ est une fibration.

Pour montrer ceci, construisons, pour tout carré commutatif

$$\begin{tikzcd} Y \times \{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & PX \arrow[d, "\epsilon"] \\ Y \times I \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dotted, "h"] & X \end{tikzcd}$$

un revêtement $h : Y \times I \to PX$ tel que $\epsilon h = g$ et $hi = f$. Soit $y \in Y$. Alors $\epsilon \cdot f(y, 0) = \epsilon(\gamma, s_0) = \gamma(s_0)$ pour un $(\gamma, s_0) \in PX$ et $g(y, 0) = \gamma(s_0)$ par la commutativité du diagramme.

Pour $(y, t_0) \in Y \times I$, $g|_{\{y\}\times[0,t_0]} = (\delta, t_0) \in MX$ avec $\delta(0) = \gamma(s_0)$ et $\delta(t) = g(y, t)$ pour tout $t \leq t_0$ par la continuité de g.

On pose

$$\begin{aligned} h(y,t) &= (f(y,0)) \cdot (\delta, t) \\ &= (\gamma, s_0) \cdot (\delta, t) \in PX \end{aligned}$$

pour tout $(y, t) \in Y \times I$. L'application est bien définie car $\delta(0) = \gamma(s_0)$ et elle est continue car il s'agit d'une composition de deux chemins. Il nous faut encore vérifier si le diagramme commute.

$$\begin{aligned} h(i(y,t)) &= h(y,0) \\ &= (f(y,0)) \cdot (\delta, 0) \\ &= f(y,0) \qquad \text{(car } (\delta,0) \text{ est le chemin constant),} \end{aligned}$$

pour tout $y \in Y$ et

$$\begin{aligned} \epsilon(h(y,t)) &= \epsilon((\gamma \cdot \delta), s_0 + t) \\ &= (\gamma \cdot \delta)(s_0 + t) \\ &= \delta(t) \\ &= g(y,t) \end{aligned}$$

pour tout $(y, t) \in Y \times I$. Ainsi h est bien le revêtement cherché.

(3) La fibre de x_0 est l'espace de lacets de Moore ΩX.

En effet,

$$\begin{aligned} \epsilon^{-1}(x_0) &= \{(\gamma, s_0) \in PX \mid \gamma(s_0) = x_0\} \\ &= \{(\gamma, s_0) \in MX \mid \gamma(0) = x_0, \gamma(s_0) = x_0\} \\ &= \Omega X. \end{aligned}$$

(4) $\pi_k(\Omega X) \cong \pi_{k+1}(X)$.

En effet, nous avons montré au point précédent que $\epsilon^{-1}(x_0) = \Omega X$ est la fibre de x_0. Par le rappel, nous avons la suite exacte

$$\cdots \to \pi_k(PX) \to \pi_k(X) \to \pi_{k-1}(\Omega X) \to \pi_{k-1}(PX) \to \cdots$$

Comme PX est contractile, $\pi_k(PX) = 0$ pour tout $k \geq 1$ et la suite devient

$$\cdots \to 0 \to \pi_k(X) \to \pi_{k-1}(\Omega X) \to 0 \to \cdots$$

Etant donné que la suite est exacte, on a bien $\pi_k(X) \cong \pi_{k-1}(\Omega X)$ pour tout $k \geq 2$ et le théorème est donc démontré.

□

Soit (M, μ_M) un monoïde topologique et X un espace topologique tel qu'il existe une équivalence d'homotopie $f : M \xrightarrow{\simeq} X$. Dans ce cas f induit une application continue $\mu_X : X \times X \to X$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} M \times M \arrow[r, "\mu_M"] \arrow[d, "f\times f"'] & M \arrow[d, "f"] \\ X \times X \arrow[r, "\mu_X"] & X \end{tikzcd}.$$

Il faut toutefois remarquer que (X, μ_X) n'est pas un monoïde topologique - il n'en est un qu'à homotopie près. C'est notre motivation principale pour la définition suivante, cette dernière nous permettant « d'alléger » la structure de monoïde topologique et d'obtenir une propriété invariante par équivalence d'homotopie.

2.3. H-groupes.

Définition 2.19.
Un *H-espace* (X, x_0) est un espace topologique muni de deux applications continues $\mu : X \times X \to X$, appelée *multiplication* et $\iota : \{x_0\} \to X$ tel que $\mu \circ (\mathrm{Id}_X \times \iota) \simeq \mathrm{Id}_X \simeq \mu \circ (\iota \times \mathrm{Id}_X)$, ce qui correspond à l'existence d'un élément neutre dans X.

Un H-espace est dit *associatif* si la multiplication est associative à homotopie près, c'est-à-dire que $\mu \circ (\mathrm{Id}_X \times \mu) \simeq \mu \circ (\mu \times \mathrm{Id}_X)$.

Un *H-groupe* est un H-espace associatif doté d'une application continue $\psi : X \to X$ tel que $\mu \circ (\mathrm{Id}_X \times \psi) \simeq \iota \simeq \mu \circ (\psi \times \mathrm{Id}_X)$, ce qui correspond à l'existence d'un inverse à homotopie près.

Exemple 2.20.
Soit (X, x_0) un espace topologique pointé. Alors l'espace de lacets ΩX de base x_0 est un H-espace par rapport à la multiplication donnée par la composition de chemins et ι correspondant à l'inclusion de du chemin constant en x_0 dans ΩX.

2.4. Groupes de Lie.

Définition 2.21.
Un *groupe de Lie* est une variété différentiable M munie d'une structure de groupe telle que la multiplication $M \times M \to M$ et l'inversion $M \to M$ soient C^∞. Un *morphisme de groupes de Lie* est à la fois un morphisme de variétés et un homomorphisme.

Exemples 2.22.

(1) Tous les exemples de groupes topologiques déjà cités sont en particulier des groupes de Lie.

(2) Le groupe linéaire général $GL(n)$, des matrices réelles inversibles d'ordre n, muni de la multiplication de matrices est un groupe de Lie non connexe. Il suffit en effet de regarder son image par le déterminant : $GL(n)$ admet exactement deux composantes connexes $GL(n)^+ = \det^{-1}(\mathbb{R}^*_+)$ et $GL(n)^- = \det^{-1}(\mathbb{R}^*_-)$. Le groupe linéaire spécial $SL(n) \subset GL(n)$ des matrices de déterminant 1 est un sous-groupe de Lie de $GL(n)$.

(3) Le groupe orthogonal $O(n)$ des matrices réelles d'ordre n qui vérifient $A^T A = I$ (où A^T désigne la transposée de A) et le groupe orthogonal spécial $SO(n) \subset O(n)$ des matrices orthogonales de déterminant 1 sont des groupes de Lie.

(4) Le groupe unitaire $U(n)$ des matrices complexes d'ordre n qui vérifient $\overline{A}^T A = I$ (où $\overline{A}$ désigne la matrice conjuguée de A) et le groupe unitaire spécial $SU(n) \subset U(n)$ des matrices unitaires de déterminant 1 sont des groupes de Lie.

2.5. La notion d'algèbre.

Les propositions suivantes découlent de la fonctorialité de l'homologie singulière $H_*(-)$ vue à la fin du premier chapitre.

Proposition 2.23.
Soit X un monoïde topologique, respectivement un H-espace associatif et soit $\varphi : X \times X \to X$ la multiplication correspondante. Alors φ induit un morphisme de $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels

$$\varphi'_* : \qquad H_*(X, \mathbb{Q}) \otimes H_*(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} H_*(X \times X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\varphi_*} H_*(X, \mathbb{Q}) .$$

Proposition 2.24.
Soit X défini comme ci-haut et $\{*\}$ l'espace topologique composé d'un seul point. L'application d'inclusion $\eta : \{*\}, \to X$ dont l'image est l'élément neutre, induit alors un morphisme

$$\eta'_* : \qquad \mathbb{Q} \xrightarrow{\cong} H_*(\{*\}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\eta_*} H_*(X, \mathbb{Q}) .$$

Voici maintenant la définition d'une algèbre.

Définition 2.25.
Une *algèbre* sur un corps K est un K-espace vectoriel gradué A doté de deux morphismes de K-espaces vectoriels gradués

$$\varphi : A \otimes A \to A \text{ et } \eta : K \to A$$

tels que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "\mathrm{Id} \otimes \varphi"] \arrow[d, "\varphi \otimes \mathrm{Id}"] & A \otimes A \arrow[d, "\varphi"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\varphi"] & A \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
K \otimes A \arrow[rr, "\eta\otimes\mathrm{Id}"] & & A \otimes A \arrow[dl, "\varphi"] \\
& A \arrow[ul, "\cong"] \arrow[dl, "\cong"'] & \\
A \otimes K \arrow[rr, "\mathrm{Id}\otimes\eta"] & & A \otimes A \arrow[ul, "\varphi"']
\end{tikzcd}$$

L'application φ est appelée la *multiplication* de l'algèbre et la première condition garantit son associativité. L'application η est dite *l'unité* de A, elle garantit l'existence d'un élément neutre pour la multiplication.

Exemples 2.26.

(1) La multiplication usuelle d'un corps K permet de considérer ce dernier comme K-algèbre de façon canonique.

(2) Soit X un monoïde topologique, respectivement un H-espace associatif. Alors il découle des propositions 2.23 et 2.24 que $(H_*(X, \mathbb{Q}), \varphi'_*, \eta'_*)$ est une algèbre sur $\mathbb{Q}$.

(3) (Produit tensoriel d'algèbres)
Soient A et B deux algèbres sur un corps K. Alors $A \otimes B$ est une algèbre avec la multiplication donnée par la composition

$$A \otimes B \otimes A \otimes B \xrightarrow{\mathrm{Id}_A \otimes T \otimes \mathrm{Id}_B} A \otimes A \otimes B \otimes B \xrightarrow{\varphi_A \otimes \varphi_B} A \otimes B$$

et l'unité définie par

$$K = K \otimes K \xrightarrow{\eta_A \otimes \eta_B} A \otimes B\ .$$

Définition 2.27.
Soient A et B deux algèbres sur un corps K. Un *morphisme d'algèbres* $f : A \to B$ est un morphisme de K-espaces vectoriels gradués tel que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "\varphi_A"] \arrow[d, "f\otimes f"] & A \arrow[d, "f"] \\
B \otimes B \arrow[r, "\varphi_B"] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_K"] & A \arrow[d, "f"] \\
K \arrow[r, "\eta_B"] & B
\end{tikzcd}$$

Exemple 2.28 (Augmentation d'algèbre).
Une *augmentation* est un morphisme d'algèbres $\varepsilon : A \to K$. Il est alors facile de voir que $\varepsilon\eta = \mathrm{Id}_K$. Une algèbre munie d'une augmentation s'appelle une *algèbre augmentée*.

DÉFINITION 2.29.
Une algèbre A est dite *commutative* si le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[dd, "T"] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ & A \\ A \otimes A \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

est commutatif.

3. Algèbres de Hopf

Après avoir défini les algèbres et coalgèbres, il est naturel de se demander comment ces deux structures peuvent coexister sur un même espace vectoriel. Dans ce qui suit, nous aimerions étudier des situations dans lesquelles ces structures sont compatibles. Avant de commencer, rappelons que si A est une algèbre, respectivement coalgèbre sur un corps K, alors $A \otimes A$ est également une algèbre, resp. coalgèbre et que l'on peut doter le corps K à la fois d'une structure d'algèbre et de coalgèbre de manière canonique.

PROPOSITION 2.30.
Soit A un espace vectoriel gradué, (A, φ, η) une algèbre et (A, Δ, ε) une coalgèbre. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) *Les applications φ et η sont des morphismes de coalgèbres.*

(2) *Les applications Δ et ε sont des morphismes d'algèbres.*

DÉMONSTRATION. Pour que φ soit un morphisme de coalgèbres, il faut que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\Delta\otimes\Delta"] & A \arrow[r, "\Delta"] & A \otimes A \\ A \otimes A \otimes A \otimes A \arrow[rr, "\mathrm{Id}\otimes T\otimes\mathrm{Id}"] & & A \otimes A \otimes A \otimes A \arrow[u, "\varphi\otimes\varphi"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "\varepsilon\otimes\varepsilon"] \arrow[d, "\varphi"] & K \otimes K \arrow[d, "\cong"] \\ A \arrow[r, "\varepsilon"] & K \end{tikzcd}$$

L'application η est un morphisme de coalgèbres si et seulement si les diagrammes

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\eta"] & K \otimes K \arrow[d, "\eta\otimes\eta"] \\ A \arrow[r, "\Delta"] & A \otimes A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K \arrow[r, "\mathrm{Id}_K"] \arrow[d, "\eta"] & K \arrow[d, "\mathrm{Id}_K"] \\ A \arrow[r, "\varepsilon"] & K \end{tikzcd}$$

commutent. Il est facile de voir que Δ est un morphisme d'algèbres si et seulement si le premier et le troisième diagramme commutent et que ε est un morphisme d'algèbres si et seulement si le deuxième et le quatrième diagramme commutent. D'où découle l'équivalence des deux assertions. □

Définition 2.31.
Une *algèbre de Hopf* ou *bialgèbre* sur un corps K est un K-espace vectoriel gradué A doté de morphismes de K-espaces vectoriels gradués

$$\varphi : A \otimes A \to A, \qquad \eta : K \to A$$
$$\Delta : A \to A \otimes A, \qquad \varepsilon : A \to K$$

tels que

(1) (A, φ, η) est une algèbre sur K,
(2) (A, Δ, ε) est une coalgèbre sur K
(3) φ et η sont des morphismes de coalgèbres (ou de façon équivalente, Δ et ε sont des morphismes d'algèbres).

Remarque 2.32.
Il s'ensuit de proposition 2.30 qu'une algèbre de Hopf ainsi définie est une algèbre augmentée avec augmentation ε et une coalgèbre augmentée avec augmentation η.

Définition 2.33.
Soient H et H' deux K-algèbres de Hopf. Un morphisme de K-espaces vectoriels gradués $f : H \to H'$ est appelée un *morphisme d'algèbres de Hopf* si f est un morphisme d'algèbres, respectivement de coalgèbres pour les algèbres, resp. coalgèbres sous-jacentes.

Exemple 2.34.
Soit X un monoïde topologique, respectivement un H-espace associatif. Alors $(H_*(X, \mathbb{Q}), \varphi'_*, \eta'_*, \Delta'_*, \varepsilon'_*)$ est une algèbre de Hopf sur $\mathbb{Q}$.

Exemple 2.35 (Algèbre tensorielle).
Soit V un K-espace vectoriel. Une *algèbre tensorielle* de V est un couple (X, ι) où X est une K-algèbre et $\iota : V \to X$ est une application linéaire telle que la propriété universelle suivante est satisfaite : pour tout K-algèbre A et pour toute application K-linéaire $f : V \to A$ il existe un unique morphisme d'algèbres $\overline{f} : X \to A$ tel que $\overline{f}\iota = f$ autrement dit le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & & X \arrow[dl, "\overline{f}"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

On peut montrer que l'algèbre tensorielle d'un espace vectoriel existe et elle est unique à isomorphisme près. A présent nous allons présenter sa construction. Posons $T^0(V) = K, T^1(V) = V$ et pour $n \geq 2$, $T^n(V) = V \otimes \ldots \otimes V$, le produit tensoriel de V avec lui-même n fois. Pour finir, posons $T(V) = \oplus_{n \geq 0} T^n(V)$, et $\iota : V \to T(V)$ définie par $\iota(v) = v \in T^1(V)$ pour tout $v \in V$. On définit la multiplication sur $T(V)$ de la manière suivante : si $v = v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \in T^n(V)$ et $w = w_1 \otimes \ldots \otimes w_m \in T^m(V)$, alors

$$v \cdot w = v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \otimes w_1 \otimes \ldots \otimes w_m \in T^{n+m}(V).$$

Il est facile de voir que la multiplication est associative, et de plus $1 \in T^0(V)$ est l'élément neutre pour la multiplication. Ainsi, $T(V)$ est une algèbre et le couple $(T(V), \iota)$ est l'algèbre tensorielle de V.

Avant de définir une structure de coalgèbre sur $T(V)$, nous allons introduire une nouvelle notation pour plus de clarté : si $v \in T^n(V)$ et $w \in T^m(V)$ sont deux monômes tensoriels, alors on notera le monôme tensoriel dans $T(V) \otimes T(V)$ ayant v comme première et w comme deuxième composante par $v \overline{\otimes} w$.

Considérons maintenant l'application linéaire $f : V \to T(V) \otimes T(V)$ définie par $f(v) = v \overline{\otimes} 1 + 1 \overline{\otimes} v$. Grâce à la propriété universelle de l'algèbre tensorielle, il existe un morphisme d'algèbres $\Delta : T(V) \to T(V) \otimes T(V)$ tel que $\Delta\iota = f$.

Montrons que Δ est coassociative, autrement dit que $(\Delta \otimes \mathrm{Id})\Delta = (\mathrm{Id} \otimes \Delta)\Delta$. Comme les deux égalités de l'équation sont des morphismes d'algèbres, il suffit de démontrer la relation pour un système de générateurs de $T(V)$, donc pour $\iota(V) = V$. Mais pour $v \in V$, nous avons en effet

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes \mathrm{Id})\Delta(v) &= (\Delta \otimes \mathrm{Id})(v \overline{\otimes} 1 + 1 \overline{\otimes} v) \\ &= v \overline{\otimes} 1 \overline{\otimes} 1 + 1 \overline{\otimes} v \overline{\otimes} 1 + 1 \overline{\otimes} 1 \overline{\otimes} v \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (\mathrm{Id} \otimes \Delta)\Delta(v) &= (\mathrm{Id} \otimes \Delta)(v \overline{\otimes} 1 + 1 \overline{\otimes} v) \\ &= v \overline{\otimes} 1 \overline{\otimes} 1 + 1 \overline{\otimes} v \overline{\otimes} 1 + 1 \overline{\otimes} 1 \overline{\otimes} v, \end{aligned}$$

ce qui montre la coassociativité de Δ. Définissons ensuite la counité grâce à la propriété universelle de l'algèbre tensorielle pour l'application identiquement nulle $0 : V \to K$. Nous obtenons un morphisme d'algèbres $\varepsilon : T(V) \to K$ tel que $\varepsilon(v) = 0$ pour tout $v \in \iota(V)$. Pour montrer que $(\varepsilon \otimes \mathrm{Id})\Delta = \phi$, où $\phi : T(V) \to K \otimes T(V), \phi(v) = 1 \otimes v$ est l'isomorphisme canonique, il suffit de vérifier l'égalité pour $\iota(V)$. Dans ce cas, nous avons clairement

$$(\varepsilon \otimes \mathrm{Id})\Delta(v) = \varepsilon(v) \otimes 1 + \varepsilon(1) \otimes v = 1 \otimes v = \phi(v).$$

De même, $(\mathrm{Id} \otimes \varepsilon)\Delta = \phi'$, où $\phi' : T(V) \to T(V) \otimes K$ est l'isomorphisme canonique.

En résumé, nous pouvons donc conclure que $T(V)$ est une algèbre de Hopf.

CHAPITRE 3

Constructions duales

1. Rappels sur les espaces duaux

Voici quelques rappels d'algèbre linéaire concernant l'espace dual.

Définition 3.1.
Soit V un espace vectoriel sur un corps K. Alors *l'espace dual* de V est l'ensemble des applications linéaires allant de V dans K que l'on dénote par V^*. Soient V et W deux K-espaces vectoriels et $\varphi : V \to W$ une application linéaire. Alors φ induit une application linéaire $\varphi^* : W^* \to V^*$ définie par $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ pour tout $f \in W^*$. On appelle φ^* la *transposée* de φ.

Dans ce qui suit, on suppose que les espaces vectoriels sont de dimension finie.

Proposition 3.2.

(1) *Soit V un K-espace vectoriel et $\{x_1, \dots, x_n\}$ une base de V. Alors $\{f_i : V \to K \mid f_i(x_j) = \delta_{ij} \,\forall\, 1 \le i, j \le n\}$ est une base de V^* et V est isomorphe à V^*.*

(2) *Soit V défini comme ci-haut. Alors $V \otimes V$ admet pour base $\{x_i \otimes x_j \mid 1 \le i, j \le n\}$ et $\{g_{ij} : V \otimes V \to K \mid g_{ij}(x_r \otimes x_s) = \delta_{ir}\delta_{js} \,\forall\, 1 \le i, j, r, s \le n\}$ est la base correspondante de $(V \otimes V)^*$.*

(3) *Soit V un K-espace vectoriel. L'application $\rho : V^* \otimes V^* \to (V \otimes V)^*$ définie par $\rho(f \otimes g)(v \otimes w) = f(v)g(w)$ pour $f, g \in V^*, v, w \in V$ est un isomorphisme.*

(4) *Par récurrence, on peut montrer que pour tout $n \geq 3$, l'application $\theta_n : \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{nfois} \to \underbrace{(V \otimes \cdots \otimes V)^*}_{nfois}$ définie par $\theta(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = f_1(v_1) \cdots f_n(v_n)$ pour $f_1, \dots, f_n \in V^*, v_1, \dots, v_n \in V$ est un isomorphisme.*

(5) *Soit V un espace vectoriel. Alors l'application linéaire $\theta_V : V \to V^{**}$ définie par $\theta_V(v)(v^*) = v^*(v)$ pour tout $v \in V, v^* \in V^*$ est un isomorphisme.*

(6) *Soient V, W deux $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels et soit $\varphi : V \to W$ une application linéaire. Alors $\varphi : V \to W$ est injective si et seulement si $\varphi^* : W^* \to V^*$ est surjective.*

(7) *Soit $\langle\, ,\, \rangle : V \times W$ une application bilinéaire et considérons l'homomorphisme induit $V \otimes W \to \mathbb{Q}$ définie par $v \otimes w \mapsto \langle v, w \rangle$. Supposons que si $\langle v, w \rangle = 0 \,\forall\, w \in W$ alors $v = 0$, ainsi que si $\langle v, w \rangle = 0 \,\forall\, v \in V$ alors $w = 0$. Dans ce cas $V \cong W^*$.*

DÉMONSTRATION. Les points (1)-(5) sont des rappels d'algèbre linéaire. Nous n'allons démontrer ici que les deux dernières affirmations.

Preuve de (6) :

Supposons $\varphi : V \to W$ injective et soit $f \in V^*$. Par hypothèse, φ admet un inverse à gauche $\psi : W \to V$ (autrement dit, $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_V$). Posons $g = f \circ \psi \in W^*$. Alors $\varphi^*(g) = g \circ \varphi = f \circ \psi \circ \varphi = f \circ \mathrm{Id}_V = f$, et donc φ^* est surjective.

Supposons ensuite $\varphi : V \to W$ surjective et soient $f, g \in W^*$ telles que $\varphi^*(f) = \varphi^*(g) \Leftrightarrow f(\varphi(x)) = g(\varphi(x))$ pour tout $x \in V$. Par la surjectivité de φ, il existe pour tout $y \in W$ un $x \in V$ tel que $\varphi(x) = y$. Il s'ensuit que $f(y) = g(y)$ pour tout $y \in W$, d'où l'injectivité de φ^*.

Preuve de (7) :

Considérons l'homomorphisme d'évaluation $\varepsilon : V \to W^*, v \mapsto \langle v, - \rangle$. Par la première hypothèse, elle est clairement injective car $\mathrm{Ker}(\varepsilon) = \{0\}$.

Supposons ensuite par l'absurde que ε ne soit pas surjective. Soit $n = \dim V$. Alors il existe $\{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V telle que $\mathrm{Im}\,\varepsilon = \mathrm{span}(\langle v_1, - \rangle, \ldots, \langle v_1, - \rangle)$. Soit $f \in W^* \setminus \mathrm{Im}\,\varepsilon$. Alors $\mathrm{span}(f) \cap \mathrm{Im}\,\varepsilon = 0$ et il existe donc $w \neq 0 \in W$ tel que $f(w) = 1, \langle v_i, w \rangle = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Prenons ensuite $v = \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j \in V$ quelconque. Il vient $\langle v, w \rangle = \langle \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j, w \rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle v_j, w \rangle = 0$ et par conséquent $\langle v, w \rangle = 0$ pour tout $v \in V$, ce qui contredit la deuxième hypothèse. Ainsi ε est surjective et il s'agit donc bien d'un isomorphisme. □

2. La (co)algèbre duale

Après avoir construit l'espace dual d'un espace vectoriel donné, on peut se demander s'il est possible d'associer à une coalgèbre une algèbre duale et vice versa. Les théorèmes suivants nous garantissent l'existence de telles paires dans le cas des (co)algèbres de type fini.

THÉORÈME 3.3.
Soit (A, Δ, ε) une K-coalgèbre. Définissons les applications $\varphi : A^* \otimes A^* \to A^*, \varphi = \Delta^* \rho$ où ρ est définie comme dans la proposition 3.2 et $\eta : K \to A^*, \eta = \varepsilon^* \phi$ où $\phi : K \to K^*$ est l'isomorhisme canonique, c'est-à-dire $\phi(1) = \mathrm{Id}_K$. Alors (A^*, φ, η) est une algèbre. Ainsi définie, A^* s'appelle l'algèbre duale *de la coalgèbre A.*

DÉMONSTRATION. Désignons $\varphi(f \otimes g)$ par $f * g$. En utilisant la notation de Sweedler, on obtient à partir de la définition que

$$\begin{aligned}
(f * g)(a) &= (\Delta^* \rho)(f \otimes g)(a) \\
&= \rho(f \otimes g)(\Delta(a)) \\
&= \rho(f \otimes g)(\sum a_1 \otimes a_2) \\
&= \rho(\sum f(a_1) \otimes g(a_2)) \\
&= \sum f(a_1) g(a_2)
\end{aligned}$$

pour $f, g \in A^*$ et $a \in A$. Il s'ensuit grâce à la proposition 2.10 que pour $f, g, h \in A^*$ et $a \in A$, nous avons

$$\begin{aligned} (f * g) * h)(a) &= \sum (f * g)(a_1)h(a_2) \\ &= \sum f(a_{1_1})g(a_{1_2})h(a_2) \\ &= \sum f(a_1)g(a_{2_1})h(a_{2_2}) \\ &= \sum f(a_1)(g * h)(a_2) \\ &= (f * (g * h))(a), \end{aligned}$$

d'où l'associativité.

On peut de plus remarquer que pour $k \in K$ et $a \in A$, on a

$$\eta(k)(a) = \varepsilon^* \phi(k)(a) = \phi(k)(\varepsilon(a)) = k\varepsilon(a).$$

Vérifier la deuxième condition de la définition d'algèbre revient à montrer qu'il existe un élément neutre pour la multiplication définie par φ, autrement dit que $\eta(1) * f = f * \eta(1) = f$ pour tout $f \in A^*$, ce qui est une conséquence directe de la formule $\sum \varepsilon(a_1)a_2 = a_1\varepsilon(a_2) = a$, déjà montrée dans la proposition 2.10. □

Théorème 3.4.
Soit (A, φ, η) une K-algèbre finie. Définissons les applications $\Delta : A^* \to A^* \otimes A^*$, $\Delta = \rho^{-1}\varphi^*$ où ρ est définie comme dans la proposition 3.2 et $\varepsilon : A^* \to K$, $\varepsilon = \psi\eta^*$ où $\psi : K^* \to K$ est l'isomorhisme canonique, c'est-à-dire $\psi(f) = f(1)$ pour tout $f \in K^*$. Alors $(A^*, \Delta, \varepsilon)$ est une coalgèbre. Ainsi définie, A^* s'appelle la coalgèbre duale *de l'algèbre A.*

Démonstration. Notons tout d'abord que si $\Delta(f) = \sum_i g_i \otimes h_i$ avec $g_i, h_i \in A^*$, alors $f(ab) = \sum_i g_i(a) \otimes h_i(b)$ pour tout $a, b \in A$. De plus, si $(g'_j, h'_j)_j$ est une famille finie d'éléments de A^* telles que $f(ab) = \sum_j g'_j(a) \otimes h'_j(b)$ pour tout $a, b \in A$, alors $\sum_i g_i \otimes h_i = \sum_j g'_j \otimes h'_j$ grâce à l'injectivité de ρ.

Nous pouvons ainsi définir $\Delta(f) = \sum_i g_i \otimes h_i$ pour toute famille finie $(g_i, h_i)_i \in A^*$ ayant la propriété que $f(ab) = \sum_i g_i(a) \otimes h_i(b)$ pour tout $a, b \in A$.

Prouvons maintenant la coassociativité de Δ. Soit $f \in A^*$ avec $\Delta(f) = \sum_i g_i \otimes h_i$. Soit de plus $\Delta(g_i) = \sum_j g'_{ij} \otimes g''_{ij}$ et $\Delta(h_i) = \sum_j h'_{ij} \otimes h''_{ij}$. Alors

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes A) \otimes \Delta(f) &= \sum_{i,j} g'_{ij} \otimes g''_{ij} \otimes h_i \\ (A \otimes \Delta) \otimes \Delta(f) &= \sum_{i,j} g_i \otimes h'_{ij} \otimes h''_{ij}. \end{aligned}$$

Considérons l'application $\theta_3 : A^* \otimes A^* \otimes A^* \to (A \otimes A \otimes A)^*$ définie dans la proposition 3.2. Alors pour tout $a, b, c \in A$,

$$\begin{aligned} \theta_3(\sum_{i,j} g'_{ij} \otimes g''_{ij} \otimes h_i)(a \otimes b \otimes c) &= \sum_{i,j} g'_{ij}(a) g''_{ij}(b) h_i(c) \\ &= \sum_i g_i(ab) h_i(c) \\ &= f(abc) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\theta_3(\sum_{i,j} g_i \otimes h'_{ij} \otimes h''_{ij})(a \otimes b \otimes c) &= \sum_{i,j} g_i(a)h'_{ij}(b)h''_{ij}(c) \\ &= \sum_i g_i(a)h_i(bc) \\ &= f(abc).\end{aligned}$$

Comme θ_3 est un isomorphisme, donc en particulier injectif, nous obtenons que

$$\sum_{i,j} g'_{ij} \otimes g''_{ij} \otimes h_i = \sum_{i,j} g_i \otimes h'_{ij} \otimes h''_{ij},$$

d'où la coassociativité de Δ.

Il nous reste encore à vérifier la propriété de counité. Mais pour tout $a \in A$, nous avons

$$(\sum_i \varepsilon(g_i)h_i)(a) = \sum_i g_i(1)h_i(a) = f(1 \cdot a) = f(a),$$

et donc $\sum_i \varepsilon(g_i)h_i = f$. De la même manière, on montre que $\sum_i \varepsilon(h_i)g_i = f$, donc la propriété de counité est également vérifiée. □

Remarque 3.5.

(1) Il est toujours vrai que le dual d'une coalgèbre et une algèbre mais la réciproque n'est vérifié que dans le cas des espaces vectoriels finis. Cela découle du fait que l'application ρ que nous avons utilisé lors des constructions est seulement injective, mais pas bijective s'il s'agit d'espaces vectoriels de dimension infinie.

(2) Au cours des preuves précédentes, nous n'avons pas fait mention de (co)algèbres graduées mais de simples (co)algèbres. En remplaçant l'hypothèse de la dimension finie par l'hypothèse que les (co)algèbres gradués sont de type fini, les théorèmes tiennent dans ce cadre plus général également. Toutefois, lors des vérifications il faut tenir compte du degré des éléments, ce qui entrave la lisibilité des preuves, raison pour laquelle nous l'avons omis. En l'occurrence, si $V = (V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un espace vectoriel gradué, la définition de $\rho : V^* \otimes V^* \to (V \otimes V)^*$ devient $\rho(f \otimes g)(v \otimes w) = (-1)^{pq} f(v)g(w)$ pour $f, g \in V^*, v \in V^p, w \in V^q$.

Nous allons maintenant montrer qu'en plus des structures d'algèbre et de coalgèbre, les morphismes se traduisent tout aussi convenablement lors du passage au dual.

Théorème 3.6.

(1) *Si $f : C \to D$ est un morphisme de coalgèbres, alors $f^* : D^* \to C^*$ est un morphisme d'algèbres.*

(2) *Si $f : A \to B$ est un morphisme d'algèbres finies, alors $f^* : B^* \to A^*$ est un morphisme de coalgèbres.*

DÉMONSTRATION.

(1) Soient $d^*, e^* \in D^*$ et $c \in C$. Nous avons alors

$$(f^*(d^* * e^*))(c) = (d^* * e^*)(f(c))$$

$$= \sum d^*(f(c_1))e^*(f(c_2)) \text{ (f est un morphisme de coalgèbres)}$$

$$= \sum (f^*(d^*))(c_1)(f^*(e^*))(c_2)$$

$$= (f^*(d^*) * f^*(e^*))(c),$$

et par conséquent l'égalité $f^*(d^*e^*) = f^*(d^*)f^*(e^*)$ est vérifiée. De plus, pour $k \in K$, on a

$$f^*\eta_D(k)(c) = f^*\varepsilon_D^*\phi(k)(c) = kf^*(\varepsilon_D(c)) = k\varepsilon_D(f(c))$$

$$= k\varepsilon_C(c) = \varepsilon_C^*\phi(k)(c) = \eta_C(k)(c),$$

vu que $\varepsilon_D f = \varepsilon_C$, et donc f^* est bien un morphisme d'algèbres.

(2) Nous devons montrer la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} B^* \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\Delta_{B^*}"'] & A^* \arrow[d, "\Delta_{A^*}"] \\ B^* \otimes B^* \arrow[r, "f^* \otimes f^*"] & A^* \otimes A^* \end{tikzcd}$$

Soit $b^* \in B^*$ avec $(\Delta_{A^*} f^*)(b^*) = \Delta_{A^*}(b^* f) = \sum_i g_i \otimes h_i$ et $\Delta_{B^*}(b^*) = \sum_j p_j \otimes q_j$ et soit $\rho : A^* \otimes A^* \to A^*$ l'isomorphisme canonique. Alors pour tout $a, b \in A$, nous avons

$$\rho((\Delta_{A^*} f*)(b^*))(a \otimes b) = \sum_i g_i(a)h_i(b) = (b^* f)(ab)$$

et

$$\begin{aligned} \rho((f^* \otimes f^*)\Delta_{B^*}(b^*))(a \otimes b) &= \rho(\sum_j p_j f \otimes q_j f)(a \otimes b) \\ &= \sum_j (p_j f)(a)(q_j f)(b) \\ &= \sum_j p_j(f(a))q_j(f(b)) \\ &= b^*(f(a)f(b)) \\ &= b^*(f(ab)), \end{aligned}$$

ce qui montre que le diagramme est commutatif. De plus

$$(\varepsilon_{A^*} f^*)(b^*) = \varepsilon_{A^*}(b^* f) = (b^* f)(1) = b^*(f(1)) = b^*(1) = \varepsilon_{B^*}(b^*),$$

ce qui prouve que f^* est en effet un morphisme de coalgèbres.

□

3. L'algèbre de Hopf duale

A présent, nous avons tous les outils nécessaires en main pour prouver un résultat capital, à savoir le fait que le dual d'une algèbre de Hopf de type fini est encore une algèbre de Hopf.

Théorème 3.7.
Soit H une algèbre de Hopf de dimension finie. Alors H^*, muni de la structure d'algèbre duale à la structure de coalgèbre de H et de la structure de coalgèbre duale à la structure d'algèbre de H est une algèbre de Hopf, appelée l'algèbre de Hopf duale *de H.*

Démonstration. Soient Δ et ε la comultiplication et la counité de H, et soient δ et E la comultiplication et la counité de H^*. Souvenons-nous que pour $h^* \in H^*$, nous avons $E(h^*) = h^*(1)$ et $\delta(h^*) = \sum h_1^* \otimes h_2^*$ avec $h^*(hg) = \sum h_1^*(h)h_2^*(g)$ pour tout $h, g \in H$. Il nous suffit de montrer que δ et E sont des morphismes d'algèbres. En effet, si $h^*, g^* \in H^*$ et $\delta(h^*) = \sum h_1^* \otimes h_2^*, \delta(g^*) = \sum g_1^* \otimes g_2^*$, alors pour tout $h, g \in H$ nous avons

$$\begin{aligned}
(h^* * g^*)(hg) &= \sum h^*(h_1g_1)g^*(h_2g_2) \\
&= \sum h_1^*(h_1)h_2^*(g_1)g_1^*(h_2)g_2^*(g_2) \\
&= \sum (h_1^*g_1^*)(h)(h_2^*g_2^*)(g),
\end{aligned}$$

ce qui montre que

$$\delta(h^*g^*) = \sum h_1^*g_1^* \otimes h_2^*g_2^* = \delta(h^*)\delta(g^*).$$

De plus, $\varepsilon(hg) = \varepsilon(h)\varepsilon(g)$ pour tout $h, g \in H$, et donc $\delta(\varepsilon) = \varepsilon \otimes \varepsilon$, ce qui montre que δ et bien un morphisme d'algèbres. Il nous reste encore à prouver que E est également un morphisme d'algèbres. Mais ceci est facile à voir, étant donné que

$$E(h^*g^*) = (h^*g^*)(1) = h^*(1)g^*(1) = E(h^*)E(g^*)$$

et

$$E(\varepsilon) = \varepsilon(1) = 1,$$

ce qui termine la preuve. □

CHAPITRE 4

Le théorème de Milnor-Moore

1. Éléments primitifs et indécomposables

Définition 4.1.
Soit A une K-algèbre ou K-coalgèbre augmentée. Alors A est dite *connexe* si A_0 est isomorphe à K.

La proposition suivante est une conséquence directe de la définition de morphisme de (co)algèbres :

Proposition 4.2.
(1) *Soit A une algèbre et $\varepsilon : A \to K$ une augmentation de A. Désignons par IA le noyau de ε. Alors si A est connexe, il existe une unique augmentation de A et $IA = \{A_q\}_{q>0}$.*
(2) *Soit A une coalgèbre et $\eta : K \to A$ une augmentation de A. Désignons par JA le conoyau de η. Alors si A est connexe, il existe une unique augmentation de A et $JA = \{A_q\}_{q>0}$.*

Définition 4.3.
(1) Soit A une algèbre augmentée sur K et soit QA le K-espace vectoriel gradué $IA/\varphi(IA \otimes IA)$. Les éléments de QA s'appellent alors les *éléments indécomposables* de A.
(2) Soit A une coalgèbre augmentée sur K et PA l'ensemble des éléments $a \in JA$ tels que $\Delta(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a$. Ces derniers s'appellent les *éléments primitifs* de A.

Théorème 4.4.
Soit A une $\mathbb{Q}$-algèbre de Hopf connexe. Alors $P(A^*) = Q(A)^*$.

Démonstration. Partons du morphisme d'évaluation $\epsilon : A^* \otimes A \to \mathbb{Q}$ définie par $\epsilon(f \otimes a) = f(a)$, $f \in A^*, a \in A$. Sa restriction induit un morphisme $P(A^*) \otimes IA \to \mathbb{Q}$.
Prenons $f \in P(A^*)$ et $x, y \in IA$. Alors

$$\epsilon(f \otimes (xy)) = f(xy) = (f \otimes 1 + 1 \otimes f)(x \otimes y) = f(x)1(y) + (-1)^{\deg f \deg y} 1(x) f(y) = 0,$$

car $1 : A \to \mathbb{Q}$ est défini par $1(a) = a$ si $a \in A_0$, $1(a) = 0$ si $a \in A_q, q > 0$ et x, y sont de degré strictement positif par la connexité de A. Par conséquent, $\varphi(IA \otimes IA) \subset \operatorname{Ker} f$

pour tout $f \in P(A^*)$ et donc l'application

$$\overline{\epsilon} : P(A^*) \otimes IA/\varphi(IA \otimes IA) = P(A^*) \otimes QA \to \mathbb{Q}$$

donnée par

$$\overline{\epsilon}(f \otimes \overline{a}) = f(a), \qquad f \in P(A^*), \overline{a} \in QA$$

est bien définie.

Nous aimerions maintenant montrer que $\overline{\epsilon}$ satisfait les hypothèses de la proposition 3.2(7).

Soit $f \in P(A^*)$ tel que $\overline{\epsilon}(f \otimes \overline{a}) = 0$ pour tout $\overline{a} \in QA$. Alors $f(a) = 0$ pour tout $a \in IA$ et donc f est bien l'application identiquement nulle.

Soit ensuite $\overline{a} \in QA$ tel que $\overline{\epsilon}(f \otimes \overline{a}) = 0$ pour tout $f \in P(A^*)$. Alors $f(a) = 0$ pour tout $f \in P(A^*)$. Supposons par l'absurde que $a \neq 0$. Alors, si $a \in A_n$, on peut compléter $\{a\}$ en une base $\{a_1 = a, a_2, \ldots, a_N\}$ de A_n telle que $\{\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_m}\}$ est une base de $(QA)^n$. Considérons ensuite les fonctions indicatrices $f_i, 0 \leq i \leq N$ correspondants qui forment une base de $(A^*)^n$. Comme $f_1(a_1) = 1 \neq 0$, l'application f_1 n'appartient pas à $P(A^*)$. Il s'ensuit que

$$\Delta f_1 = f_1 \otimes 1 + \sum f_{11} \otimes f_{12} + 1 \otimes f_1$$

avec $\overline{\Delta} f_1 = \sum f_{11} \otimes f_{12} \neq 0$. Par conséquent, il existe $\sum a' \otimes a'' \in (IA \otimes IA)_n$ tel que $(\overline{\Delta} f_1)(\sum a' \otimes a'') = t \neq 0$. Mais alors

$$t = \sum (\overline{\Delta} f_1)(a' \otimes a'') = \sum f_1(a'a'') = f_1(\sum a'a''),$$

et comme $\sum a'a'' \in A_n$, on peut écrire $\sum a'a'' = \sum_{i=1}^N r_i a_i$ avec $r_i \in K$. Etant donné que f_1 est la fonction indicatrice de a_1, on obtient

$$t = f_1(\sum a'a'') = f_1(\sum_{i=1}^N r_i a_i) = r_1,$$

autrement dit $\sum a'a'' = ta_1 + \sum_{i=2}^N r_i a_i$. Soit $\pi : A^n \to (QA)^n$ l'application quotient. Alors

$$\pi(\sum a'a'') = 0 = t\overline{a_1} + \sum_{i=2}^m r_i \overline{a_i}.$$

Par l'indépendance linéaire des $\overline{a_i}$, on obtient $t = r_1 = \cdots = r_m = 0$, contradiction. Ainsi on a bien $a = 0$.

Nous pouvons donc en conclure que $P(A^*) \cong Q(A)^*$. □

Définition 4.5.
Soit A une algèbre et $V \subset A$ un espace vectoriel. On dit que V *engendre* A si le morphisme d'algèbres $\overline{\iota} : T(V) \to A$ induite par l'inclusion $\iota : V \to A$ est surjective.

Proposition 4.6.
Si A une algèbre, alors QA engendre A.

Démonstration. Soit $\{\overline{a}_i\}_{i \in I}$ une base de QA. Choisissons des représentants des classes $a_i \in \overline{a}_i$ pour définir une application linéaire $QA \xrightarrow{\iota} A, \iota(\overline{a}_i) = a_i, i \in I$. Il s'ensuit que l'application induite $\bar{\iota} : T(QA) \to A$ est un morphisme d'algèbres. Par la proposition 3.8 de [7], $\bar{\iota}$ est surjectif si et seulement si

$$Q(\bar{\iota}) : Q(T(QA)) \to Q(A)$$

est surjectif. Mais $Q(T(QA)) = QA$ et $Q(\bar{\iota})$ est l'indentité, donc en particulier surjective, d'où l'affirmation. □

2. Algèbres de Lie

Définition 4.7.
Soit A une K-algèbre et définissons $[\,,\,] : A \otimes A \to A$ par $[x, y] = xy - (-1)^{pq} yx$ pour $x \in A_p$, $y \in A_q$. Le morphisme d'espaces vectoriels gradués $[\,,\,]$ est appelé le crochet de Lie de A. L'espace vectoriel A muni du crochet de Lie est appelé *l'algèbre de Lie associée* à l'algèbre A.

Une *algèbre de Lie* sur K est un K-espace vectoriel gradué L muni d'un morphisme $[\,,\,] : L \otimes L \to L$ tel qu'il existe une algèbre A et un morphisme de K-espaces vectoriels gradués $f : L \to A$ injectif de manière à ce que le diagramme

$$\begin{tikzcd} L \otimes L \arrow[r, "{[\,,]}"] \arrow[d, "f \otimes f"] & L \arrow[d, "f"] \\ A \otimes A \arrow[r, "{[\,,]}"] & A \end{tikzcd}$$

commute. Si L et L' sont deux algèbres de Lie sur K, un morphisme d'algèbres de Lie $f : L \to L'$ est un morphisme de K-espaces vectoriels gradués tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} L \otimes L \arrow[r, "{[\,,]}"] \arrow[d, "f \otimes f"] & L \arrow[d, "f"] \\ L' \otimes L' \arrow[r, "{[\,,]}"] & L \end{tikzcd}$$

commute.

Proposition 4.8.
Soit L une algèbre de Lie sur K, $x \in L_p$, $y \in L_q$ et $z \in L_r$. Alors

(1) $[x, y] = (-1)^{pq+1}[y, x]$, *et*

(2) $(-1)^{pr}[x, [y, z]] + (-1)^{qp}[y, [z, x]] + (-1)^{rq}[z, [x, y]] = 0.$

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence directe de la formule $[x, y] = xy - (-1)^{pq} yx$ pour $x \in L_p$, $y \in L_q$. □

Remarque 4.9.
Notons qu'une algèbre de Lie n'est pas une algèbre car le crochet n'est pas associatif et il n'existe pas non plus d'élément neutre pour la multiplication.

Définition 4.10.
Soit L une algèbre de Lie. *L'algèbre universelle enveloppante* de L est le couple $(U(L), \iota_L)$

où $U(L)$ est une K-algèbre et $\iota_L : L \to U(L)$ est un morphisme d'algèbres de Lie tel que la propriété universelle suivante est satisfaite : pour tout K-algèbre A et pour tout morphisme d'algèbres de Lie $f : L \to A$ il existe un unique morphisme d'algèbres $f^\sharp : U(L) \to A$ tel que $f^\sharp \iota_L = f$ autrement dit le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "\iota_L"] \arrow[dr, "f"'] & & U(L) \arrow[dl, "f^\sharp"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Remarque 4.11.
Si l'algèbre universelle enveloppante existe, elle est unique à isomorphisme près. Voici comment on peut la construire : soit L une algèbre de Lie et $(T(L), \iota)$ l'algèbre tensorielle associée à l'espace vectoriel sous-jacent. Rappelons qu'il existe alors pour tout algèbre A et tout morphisme d'espaces vectoriels gradués $f : L \to A$ un unique morphisme d'algèbres $\overline{f} : T(L) \to A$ tel que $\overline{f}\iota = f$. Soit maintenant f un morphisme d'algèbres de Lie et soit I l'idéal de $T(L)$ engendré par les éléments $xy - (-1)^{pq} yx - [x, y]$ pour $x \in L_p, y \in L_q$. Alors $\overline{f}(I) = 0$ et en posant $U(L) = T(L)/I$, il existe un unique morphisme d'algèbres $f^\sharp : U(L) \to A$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "\iota_L"] \arrow[dr, "f"'] & & U(L) \arrow[dl, "f^\sharp"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

est commutatif, avec ι_L la composition $L \xrightarrow{\iota} T(L) \to U(L)$.

Définition 4.12.
Si L, L' sont des algèbres de Lie sur K, alors $L \times L'$ est l'algèbre de Lie sur K telle que

$$[(x, y), (x', y')] = ([x, x'], [y, y'])$$

pour

$$(x, y) \in (L \times L')_p = L_p \times L'_p, \quad (x', y') \in (L \times L')_q = L_q \times L'_q.$$

L'algèbre de Lie $L \times L'$ est appelée le *produit* des algèbres de Lie L et L'.

Proposition 4.13.
Soit A une algèbre de Hopf connexe. Alors PA est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie associée à A.

Démonstration. Soient $x, y \in PA$, avec $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x, \Delta(y) = y \otimes 1 + 1 \otimes y$ et $x \in A_p, y \in A_q$. Nous avons alors

$$\begin{aligned}
\Delta([x,y]) &= [\Delta(x), \Delta(y)] \\
&= [x \otimes 1 + 1 \otimes x, y \otimes 1 + 1 \otimes y] \\
&= [x \otimes 1, y \otimes 1] + [x \otimes 1, 1 \otimes y] + [1 \otimes x, y \otimes 1] + [1 \otimes x, 1 \otimes y] \\
&= (xy \otimes 1 - (-1)^{pq} yx \otimes 1) + (x \otimes y - (-1)^{pq}(-1)^{pq} x \otimes y) \\
&\quad + ((-1)^{pq} y \otimes x - (-1)^{pq} y \otimes x) + (1 \otimes xy - (-1)^{pq} 1 \otimes yx) \\
&= [x,y] \otimes 1 + 1 \otimes [x,y],
\end{aligned}$$

étant donné que les deux termes du milieu de la somme s'annulent. Donc $[x, y]$ est bien un élément de PA. □

Définition 4.14.
Une algèbre de Hopf A est dite *de génération primitive* si la plus petite sous-algèbre de A contenant PA est A elle-même.

3. Le théorème de Milnor-Moore

Théorème 4.15.
Soit A une algèbre de Hopf connexe sur $\mathbb{Q}$. Alors le morphisme naturel $\theta : PA \to QA$ donné par la composition $PA \hookrightarrow JA = IA \xrightarrow{\pi} QA$ est injectif si et seulement si A est commutative pour la multiplication.

Démonstration. **(1)** Supposons d'abord θ injectif et montrons que la multiplication de A est commutative. Cela revient à prouver que $xy-(-1)^{pq}yx = [x, y] = 0$ pour $x \in A_p, y \in A_q, p, q > 0$. Procédons par récurrence sur $\deg(x) + \deg(x) \geq 2$.

Si $\deg(x) = \deg(y) = 1$, alors x, y sont primitifs et $[x, y] \in PA$ comme démontré dans la proposition 4.13. De plus, $[x, y]$ n'est pas indécomposable et donc $\theta[x, y] = 0$. Par l'injectivité de θ nous pouvons en déduire que $[x, y] = 0$.

Supposons maintenant que $[u, v] = 0$ si $\deg(u) + \deg(v) < n$ et montrons le résultat pour n. Soit $x \in A_p, y \in A_q, p + q = n$. Posons

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + \sum x_1 \otimes x_2 + 1 \otimes x \quad \text{avec } \deg(x_i) < p \text{ pour tout } i,$$

$$\Delta(y) = y \otimes 1 + \sum y_1 \otimes y_2 + 1 \otimes y \quad \text{avec } \deg(y_i) < q \text{ pour tout } i.$$

Calculons

$$\begin{aligned}
\Delta[x,y] &= [\Delta(x), \Delta(y)] \\
&= [x \otimes 1 + \sum x_1 \otimes x_2 + 1 \otimes x, y \otimes 1 + \sum y_1 \otimes y_2 + 1 \otimes y] \\
&= [x \otimes 1, y \otimes 1] + \sum [x \otimes 1, y_1 \otimes y_2] + [x \otimes 1, 1 \otimes y] \\
&\quad + \sum [x_1 \otimes x_2, y \otimes 1] + \sum [x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2] + \sum [x_1 \otimes x_2, 1 \otimes y] \\
&\quad + [1 \otimes x, y \otimes 1] + \sum [1 \otimes x, y_1 \otimes y_2] + [1 \otimes x, 1 \otimes y].
\end{aligned}$$

Traitons les termes séparément :

$$[x \otimes 1, y \otimes 1] = xy \otimes 1 - (-1)^{pq} yx \otimes 1 = [x, y] \otimes 1,$$

et de façon similaire, $[1 \otimes x, y \otimes 1] = 1 \otimes [x, y]$. Ensuite

$$[x \otimes 1, 1 \otimes y] = x \otimes y - (-1)^{pq}(-1)^{pq} x \otimes y = 0,$$

et de même, $[1 \otimes x, y \otimes 1] = 0$. En ce qui concerne les termes composés, posons $\deg(x_i) = p_i, \deg(y_i) = q_i$ avec $p_1 + p_2 = p, q_1 + q_2 = q$. Alors

$$\begin{aligned}
[x \otimes 1, y_1 \otimes y_2] &= (x \otimes 1)(y_1 \otimes y_2) - (-1)^{pq}(y_1 \otimes y_2)(x \otimes 1) \\
&= xy_1 \otimes y_2 - (-1)^{pq}(-1)^{pq_2}(y_1 x \otimes y_2) \\
&= [x, y_1] \otimes y_2 = 0
\end{aligned}$$

car $pq + pq_2 \equiv pq_1 \mod 2$ et en appliquant l'hypothèse de récurrence. Pareillement,

$$[x_1 \otimes x_2, y \otimes 1] = [x_1 \otimes x_2, 1 \otimes y] = [1 \otimes x, y_1 \otimes y_2] = 0.$$

Pour finir

$$\begin{aligned}
[x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2] &= (x_1 \otimes x_2)(y_1 \otimes y_2) - (-1)^{pq}(y_1 \otimes y_2)(x_1 \otimes x_2) \\
&= (-1)^{p_2 q_1} x_1 y_1 \otimes x_2 y_2 - (-1)^{pq + p_1 q_2} y_1 x_1 \otimes y_2 x_2 \\
&\quad -(-1)^{p_2 q_1}(-1)^{p_1 q_1} y_1 x_1 \otimes x_2 y_2 + (-1)^{pq_1} y_1 x_1 \otimes x_2 y_2 \\
&= (-1)^{p_2 q_1}[x_1, y_1] \otimes x_2 y_2 + (-1)^{pq_1}(y_1 x_1 \otimes [x_2, y_2]) = 0,
\end{aligned}$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence et le fait que $pq + p_1 q_2 \equiv pq_1 + p_2 q_2 \mod 2$. En résumé,

$$\Delta[x, y] = [x, y] \otimes 1 + 1 \otimes [x, y].$$

Ainsi, $[x, y] \in PA$ et il est décomposable, donc $\theta[x, y] = 0$. Par l'injectivité de θ, on peut conclure que $[x, y] = 0$ et la multiplication de A est donc bien associative.

(2) Supposons maintenant que la multiplication de A est associative et montrons que θ est injectif. Nous n'allons faire la preuve que pour une algèbre de Hopf de génération finie (autrement dit, avec QA de dimension finie). Le cas général suit car une algèbre de Hopf est la limite directe de sous-algèbres de Hopf de génération finie (pour plus de détails, voir la propsition 4.13 de [7]). Procédons par récurrence sur le nombre de générateurs.

Supposons que A est engendré par $x \in A_n$. Remarquons que x doit être primitif. Si n est *impair*, $x^2 = (-1)^{n^2} x^2 = -x^2$ et donc $x^2 = 0$. Il s'ensuit que $A_0 = \mathbb{Q}, A_n = \mathbb{Q}\{x\}, A_i = 0$ si $i \neq 0, n$. Par conséquent $PA = A_n = QA$ et θ est l'identité, donc en particulier injective.

Si n est *pair*, alors pour $k \geq 1$,

$$\Delta(x^k) = \Delta(x)^k = (x \otimes 1 + 1 \otimes x)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^j \otimes x^{k-j}$$

et on voit que $x^k \in PA$ si et seulement si $k = 1$. De plus, $QA = \mathbb{Q}\{\overline{x}\}$ et donc θ est encore un isomorphisme.

Supposons maintenant que l'affirmation soit vraie pour $(n-1)$ générateurs et soit A engendrée par $\{x_1, \dots, x_n\}$ avec $\deg(x_1) \leq \deg(x_2) \leq \dots \leq \deg(x_n)$. Soit A' la sous-algèbre engendrée par $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$, elle est connexe et de multiplication commutative par hypothèse. Soit $I(x_1, \dots, x_{n-1})$ l'idéal engendré par $x_1, \dots x_{n-1}$. Posons $A'' = A/I(x_1, \dots, x_{n-1})$ l'algèbre monogène engendrée par l'image de x_n. La suite exacte

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{j} A \xrightarrow{\pi} A''$$

induit alors deux suites d'applications telles que le diagramme suivant ait des rangs exacts (les suites en questions) et il commute :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & PA' \arrow[r, "P(j)"] \arrow[d, "\theta'"] & PA \arrow[r, "P(\pi)"] \arrow[d, "\theta"] & PA'' \arrow[d, "\theta''"] & \\ 0 \arrow[r] & QA' \arrow[r, "Q(j)"] & QA \arrow[r, "Q(\pi)"] & QA'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} .$$

(Le lecteur pourra se référer au chapitre 3 de [7] pour de plus amples détails sur la construction de ce diagramme.)

Nous savons que θ'' est un isomorphisme et θ' est injectif par l'hypothèse de récurrence. Soit $y \in PA$ tel que $\theta(y) = 0$. Alors $0 = Q(\pi) \circ \theta(y) = \theta'' \circ P(\pi)(y)$ et donc $P(\pi)(y) = 0$ car θ'' est un isomorphisme. Comme la première suite est exacte, il existe $y' \in PA'$ tel que $P(j)(y') = y$. Alors $Q(j) \circ \theta'(y') = \theta \circ P(j)(y') = \theta(y) = 0$. Par l'injectivité de θ', nous pouvons conclure que $y' = 0$, et donc $y = 0$, ce qui prouve l'injectivité de θ. □

Corollaire 4.16.
Soit A une algèbre de Hopf connexe de type fini avec comultiplication commutative. Alors le morphisme naturel $\theta : PA \to QA$ est surjectif, autrement dit A est de génération primitive.

Démonstration. Si A est une algèbre de Hopf connexe de type fini avec comultiplication commutative, alors A^* est encore une algèbre de Hopf connexe de type fini et de plus sa multiplication (qui est le dual de la comultiplication de A) est commutative. Par le théorème précédent, le morphisme naturel :

$$\theta^* : P(A^*) \to Q(A^*)$$

est injectif. Par la proposition 3.2,

$$\theta^{**} : Q(A^*)^* \to P(A^*)^*$$

est surjectif. Mais le théorème 4.4 nous dit que $Q(A^*)^* = P(A^{**}) = P(A)$ et $P(A^*)^* = Q(A)^{**} = Q(A)$, en utilisant le fait qu'un espace vectoriel est isomorphe au dual de son dual. Finalement, cette relation équivaut à dire que

$$\theta : P(A) \to Q(A)$$

est injectif, donc A est bien de génération primitive. □

4. Application au morphisme d'Hurewicz

Ce travail a été préparé dans le cadre d'un séminaire sur le morphisme d'Hurewicz. Dans ce dernier chapitre, nous allons tenter de présenter un bref aperçu des liens entre le théorème de Milnor-Moore et le sujet global. Sans vouloir prétendre à l'exhaustivité, nous renvoyons le lecteur intéressé aux autres travaux effectués dans ce même cadre et aux références mentionnées tout le long du chapitre.

Définition 4.17.
Soit $n \geq 0$, (X, x_0) un espace topologique pointé, (S^n, s_0) la sphère de dimension n et $f : S^n \to X$ une application continue. Le foncteur $H_n(-)$ induit alors un

homomorphisme $H_n(f) : H_n(S^n, \mathbb{Q}) \to H_n(X, \mathbb{Q})$. Notons $[f]$ la classe de f dans $\pi_n(X)$. Le n-ième *morphisme d'Hurewicz*

$$h_n : \pi_n(X) \to H_n(X, \mathbb{Q})$$

est donné par

$$h_n(f) = H_n(f)(\alpha_n),$$

où α_n est le générateur de $H_n(S^n, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}\{\alpha_n\}$. Soit $h = (h_n)_{n\geq 0} : \pi_*(X) \to H_*(X, \mathbb{Q})$ le morphisme défini par les h_n. Le foncteur $- \otimes \mathbb{Q}$ induit alors un morphisme

$$h_{\mathbb{Q}} : \pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} \to H_*(X, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q} = H_*(X, \mathbb{Q}),$$

appelé le *morphisme d'Hurewicz rationnel*.

Théorème 4.18 (Cartan-Serre).
Le morphisme d'Hurewicz rationnel est un isomorphisme

$$h_{\mathbb{Q}} : \qquad \pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\cong} P(H_*(X, \mathbb{Q})) ,$$

où $P(H_*(X, \mathbb{Q}))$ désigne les éléments primitifs de $H_*(X, \mathbb{Q})$.

Démonstration. Pour la preuve de ce théorème, le lecteur pourra consulter [1], [2] ou encore [8]. □

En résumé, soit X un monoïde topologique, respectivement un H-espace associatif connexe par arcs tel que $H_n(X, \mathbb{Q})$ est de type fini pour tout $n \geq 0$. Alors $H_*(X, \mathbb{Q})$ est une algèbre de Hopf vérifiant les hypothèses du corollaire 4.16, et il s'ensuit qu'elle est de génération primitive. Grâce au théorême de Cartan-Serre, nous pouvons donc conclure que l'homologie rationnelle de X est engendrée par son homotopie rationnelle.

Exemple 4.19.
Soit Y un CW-complexe avec un nombre de cellules fini en chaque dimension. Dans ce cas, par le théorème de Milnor (voir [6]), l'espace de lacets ΩY admet un espace vectoriel gradué d'homologie singulière rationnelle de type fini et on peut appliquer les théorèmes précédents.

Bibliographie

[1] Henri Cartan and Jean-Pierre Serre. Espaces fibrés et groupes d'homotopie. I. Constructions générales. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 234 :288–290, 1952.

[2] Henri Cartan and Jean-Pierre Serre. Espaces fibrés et groupes d'homotopie. II. Applications. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 234 :393–395, 1952.

[3] Sorin Dăscălescu, Constantin Năstăsescu, and Şerban Raianu. *Hopf algebras*, volume 235 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker Inc., New York, 2001. An introduction.

[4] Beno Eckmann. Groupes d'homotopie et dualité. *Bull. Soc. Math. France*, 86 :271–281, 1958.

[5] Michel Matthey. Groupes de Lie compacts. Notes de cours, http ://irrotationnels.epfl.ch/documentation/pdf/Lie.pdf.

[6] John Milnor. Construction of universal bundles. I. *Ann. of Math. (2)*, 63 :272–284, 1956.

[7] John W. Milnor and John C. Moore. On the structure of Hopf algebras. *Ann. of Math. (2)*, 81 :211–264, 1965.

[8] John C. Moore. Semi-simplicial complexes and Postnikov systems. In *Symposium internacional de topología algebraica International symposium on algebraic topology*, pages 232–247. Universidad Nacional Autónoma de México and UNESCO, Mexico City, 1958.

[9] James R. Munkres. *Elements of algebraic topology*. Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, 1984.

[10] Edwin H. Spanier. *Algebraic topology*. Springer-Verlag, New York, 1981. Corrected reprint.

[11] Ralph Stöcker and Heiner Zieschang. *Algebraische Topologie*. Mathematische Leitfäden. [Mathematical Textbooks]. B. G. Teubner, Stuttgart, 1988. Eine Einführung. [An introduction].