La géométrie hyperbolique des pièces X.

Projet de semestre.

Jérémie Cabessa.

30 juin 2000

Table des matières

Chapitre 1

Éléments de géométrie hyperbolique

1.1 La géométrie hyperbolique dans $\mathbb{R}^3$

Désignons par H_o l'espace $\mathbb{R}^3$ muni d'une base orthonormale $B = \{ I, J, K \}$, de la forme bilinéaire symétrique

$$\cdot : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$$

définie par le fait que $I \cdot I = J \cdot J = -K \cdot K = 1$, et de la forme bilinéaire antisymétrique

$$\wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$$

définie par le fait que $I \wedge J = K$, $I \wedge K = J$, $K \wedge J = I$.

On a donc dans cet espace un “produit scalaire” défini ainsi :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = aa' + bb' - cc'$$

Et on peut aussi définir un produit vectoriel :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(bc' - cb') \\ ac' - ca' \\ ab' - ba' \end{pmatrix}$$

On peut alors définir un “produit global” dont découleraient les deux produits précédemment définis ainsi :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = aa' + bb' - cc' + \begin{pmatrix} -(bc' - cb') \\ ac' - ca' \\ ab' - ba' \end{pmatrix}$$

Désignons par $\mathbb{H}$ l'hyperboloïde dans $\mathbb{R}^3$ d'équation : $x^2 + y^2 - z^2 = 1$
Ainsi les points de cet hyperboloïde sont représentés par des vecteurs A tels que $A \cdot A = -1$.
La distance d entre deux points A et B est définie par :

$$ch(d) = \frac{|A \cdot B|}{\sqrt{A^2 B^2}}$$

Et les géodésiques sur H sont représentées par l'intersection des plans passant par l'origine avec l'hyperboloïde. Celles-ci pourront alors être décrites par un vecteur N normal au plan duquel elles sont issues, où N sera pris tel que $N \cdot N > 0$.
Si on travaille en passant aux classes de projection, on peut alors énoncer la définition suivante :

Définition 1 :

Un vecteur non nul $A \in H_0$ est appelé :
- *Un point (fini) si $A \cdot A < 0$.*
- *Une géodésique si $A \cdot A > 0$.*
- *Un point (à l'infini) si $A \cdot A = 0$.*

Pour la suite des évènements, on va avoir besoin de propriétés mentionnées par le théorème suivant, que je me contenterai d'énoncer sans démonstration.

Théorème 1 :

- *Si A et B sont deux points distincts, alors la géodésique passant par A et B est donnée par $A \wedge B$.*
- *Si A et B sont deux géodésiques et que $A \wedge B$ est aussi une géodésique, alors $A \wedge B$ est la géodésique perpendiculaire à A et B.*
- *Si A et B sont deux géodésiques et que $A \wedge B$ est un point, alors $A \wedge B$ est le point d'intersection de A et B.*
- *Si A est une géodésique et que B est un point, alors la géodésique perpendiculaire à A passant par B est donnée par $A \wedge B$.*

Remarque importante :
H_0 peut être vu comme sous espace de l'espace quadridimentionnel H suivant :

$$H = \{\{A\} = a + A \mid a \in \mathbb{R} \; et \; A \in H_0\}$$

Dans cet espace, on définit un "produit global"

$$* : H \times H \longmapsto H$$

$$\begin{array}{rcl} \{A\} * \{B\} & = & (a + A) * (b + B) \\ & = & ab + aB + bA + A * B \\ & = & ab + aB + bA + A \cdot B + A \wedge B \end{array}$$

Produit duquel on peut déduire deux "sous produits" :

$$scalarpart(\{A\} * \{B\}) = ab + A \cdot B$$

$$vectorpart(\{A\} * \{B\}) = aB + bA + A \wedge B$$

Mais cet espace ainsi défini n'est autre que $\mathbb{R}^4$, et le "produit global" s'exprime ainsi :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bb' + cc' + dd' \\ ab' + a'a - (bc' - cb') \\ ac' + a'c + ac' - ca' \\ ad' + a'c + ab' - ba' \end{pmatrix}$$

1.2 La correspondance entre l'hyperboloïde $\mathbb{H}^2$ et le demi plan complexe supérieur $\mathbb{C}_+$

Si on considère la projection stéréographique de centre (0 ;-1) de l'hyperboloïde $\mathbb{H}^2$, alors on ramène celui-ci dans le cercle unité C. Si par la suite, on considère l'inversion de cercle de centre (0 ;-1) et de rayon $\sqrt{2}$ de ce cercle C, on obtient alors $\mathbb{R}^2_+$ qui peut bien sûr être vu comme le demi plan complexe supérieur $\mathbb{C}_+$.

Il y a une proposition à propos des géodésiques de $\mathbb{H}^2$ qui mérite d' être mentionnée à ce propos :

Proposition 1 :
De part la correspondance entre $\mathbb{H}^2$ et $\mathbb{C}_+$, les géodésiques de $\mathbb{H}^2$ seront représentées dans $\mathbb{C}_+$ par des demis cercles orthogonaux à l'axe réel.

Par la suite, les situations géométriques considérées seront représentées dans ce demi plan complexe supérieur.

1.3 La correspondance entre $\mathbb{H}^2$ et $SL(2,\mathbb{R})$

Soit $M(2,\mathbb{R})$ l'espace des matrices réelles 2×2 muni de la base $\mathcal{B}$ suivante :

$$\mathcal{B}=\{\tilde{I},\tilde{J},\tilde{K},\tilde{L}\}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right\}$$

On a

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} &= a\tfrac{1}{2}(\tilde{I}+\tilde{J})+b\tfrac{1}{2}(\tilde{K}+\tilde{L})+c\tfrac{1}{2}(\tilde{K}-\tilde{L})+d\tfrac{1}{2}(\tilde{I}-\tilde{J})\\ &= \tfrac{1}{2}(a+d)\tilde{I}+\tfrac{1}{2}(a-d)\tilde{J}+\tfrac{1}{2}(b+c)\tilde{K}+\tfrac{1}{2}(b-c)\tilde{L}\end{aligned}$$

On peut alors donner l'identification suivante entre $M(2;\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^4$:

$$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(a+d)\\\frac{1}{2}(a-d)\\\frac{1}{2}(b+c)\\\frac{1}{2}(b-c)\end{pmatrix}=\tilde{A}$$

Si on regarde de plus près cette identification, on peut remarquer que le "produit global" précédemment défini dans $\mathbb{R}^4$ correspond exactement au produit matriciel classique dans $M(2;\mathbb{R})$. À partir de ceci, on peut aisément définir l'identification de nos produits scalaire et vectoriel de $\mathbb{R}^4$, et on a :

$$\begin{aligned}\{A\}*\{B\} &\cong \tilde{A}\tilde{B}\\ A\cdot B &\cong \tfrac{1}{2}Tr(\tilde{A}\tilde{B})\\ A\wedge B &\cong \tfrac{1}{2}(\tilde{A}\tilde{B}-\tilde{B}\tilde{A})\end{aligned}$$

Les points de $\mathbb{H}^2$ étaient définis tels que $A\cdot A=-1$.

- Comme ces points appartiennent à $\mathbb{R}^3$, la relation d'identification nous dit qu'ils sont identifiés avec des matrices de trace nulle, et
- comme ces points sont tels que $A \cdot A = -1$, les relations précédentes permettent de dire qu'ils sont identifiés avec des matrices de déterminant égal à 1.

Si on appelle $SL(2;\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de trace nulle et de déterminant égal à 1, alors on peut dire que les points de l'hyperboloïde $\mathbb{H}^2$ sont identifiables avec les matrices de $SL(2;\mathbb{R})$.

1.4 Les isométries de $\mathbb{H}^2$

Définition 2 :

Une isométrie de H_0 est dite :

- *elliptique si elle fixe un point,*
- *hyperbolique si elle fixe une géodésique,*
- *parabolique si elle fixe un point à l'infini.*

On peut définir les isomťries de H_0 comme éléments de l'espace H^1 suivant :

$$H^1 = \{\{A\} = a + A \mid a \in \mathbb{R}\ ,\ A \in H_0\ ; et\ a^2 - A \cdot A = 1\}$$

L'action d'une isométrie A de H^1 sur un élément X de H_0 est alors définie de la manière suivante :

$$\{A\}(X) := \{A\}^{-1} * X * \{A\}$$

Ce qui nous permet d'énoncer (sans démonstration) la proposition suivante :

Proposition 2 :

Soit $\{A\} = a + A$ une isométrie de H^1, alors $\{A\}$ fixe l'élément A de H_0 ainsi que tous ces multiples αA.

En fait, si on se rappelle de l'identification entre les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ et les matrices 2×2, alors on peut remarquer que la nature d'une isométrie est directement liée à la trace de la matrice qui lui correspond. En effet, l'isométrie $\{A\} = a + A$ de H^1 correspond à une matrice $\tilde{A}$ de trace $\frac{1}{2}a$, et elle fixe l'élément A. Ainsi du fait que $a^2 - A \cdot A = 1$, on a que :

- Si $\{A\}$ est elliptique, alors $A \cdot A = 0$ et $a^2 = 1 + A \cdot A = 1 \Leftrightarrow (\frac{1}{2}Tr(\tilde{A}))^2 = 1 \Leftrightarrow |\frac{1}{2}Tr(\tilde{A})| = 1$
- Si $\{A\}$ est hyperbolique, alors $A \cdot A > 0$ et $a^2 = 1 + A \cdot A > 1 \Leftrightarrow (\frac{1}{2}Tr(\tilde{A}))^2 > 1 \Leftrightarrow |\frac{1}{2}Tr(\tilde{A})| > 1$
- Si $\{A\}$ est parabolique, alors $A \cdot A < 0$ et $a^2 = 1 + A \cdot A < 1 \Leftrightarrow (\frac{1}{2}Tr(\tilde{A}))^2 < 1 \Leftrightarrow |\frac{1}{2}Tr(\tilde{A})| < 1$

On a donc que le type d'une isométrie (elliptique, hyperbolique ou parabolique) est donné par le fait que la valeur absolue de sa trace soit égale, plus grande ou plus petite que 2.

Finalement, si on fait l'analogie entre les matrices 2×2 et les transformations de Möbius, on s'aperçoit alors que la matrice $\tilde{A}$ (qui correspond à l'isométrie $\{A\} = a + A$), correspond justement à la transformation de Möbius fixant le demi cercle de $\mathbb{C}_+$ correspondant à la géodésique A.

Dans la suite des évènements, nous ne ferons plus de différence entre la géodésique A et l'isométrie $\{A\} = a + A$ fixant cette géodésique. On commettra alors l'abus de langage en parlant de géodésique $\{A\} = a + A$.

Chapitre 2

Les géodésiques bien placées

2.1 La situation désirée

Dans ce chapitre, les géodésiques seront représentées par des demis cercles dans le demi plan complexe supérieur, dont le centre se situe sur l'axe réel. La première étape de notre problème est la suivante : Soient trois géodésiques $\{A\}$, $\{B\}$ et $\{C\}$ disjointes ; on désire trouver une condition permettant de garantir que ces trois géodésiques sont placées dans la situation suivante :

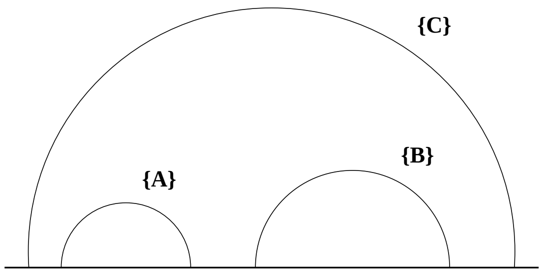

FIG. 2.1 –

Par opposition aux situations suivantes :

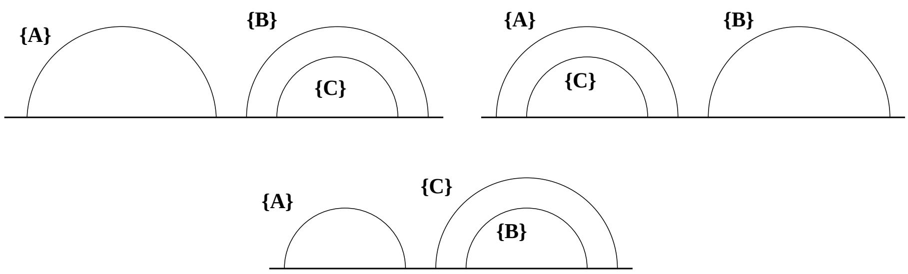

FIG. 2.2 –

En fait cette situation est caractérisée par le fait que :
- Les trois géodésiques A, B et C sont disjointes,
- Les géodésiques $A \wedge B$ et C sont disjointes,
- Les géodésiques $B \wedge C$ et A sont disjointes,

– Les géodésiques $C \wedge A$ et B sont disjointes.
Mathématiquement, cette situation peut donc être caractérisée par le système d'inéquations suivant :

$$\left\{\begin{array}{c}(A \wedge B)^2 > 0 \\ (B \wedge C)^2 > 0 \\ (C \wedge A)^2 > 0 \\ ((A \wedge B) \wedge C)^2 > 0 \\ ((B \wedge C) \wedge A)^2 > 0 \\ ((C \wedge A) \wedge B)^2 > 0\end{array}\right.$$

2.2 Quelques propositions concernant cette situation

On énonce alors le théorème suivant :

Théorème 2 :

Soient trois géodésiques A, B et C disjointes,
alors on est dans la bonne situation $\Leftrightarrow (A \cdot B)(B \cdot C)(C \cdot A) < 0.$

Dém:

"$\Rightarrow$" En utilisant la formule suivante

$$((A \wedge B) \wedge C)^2 = ((B \cdot C)A - (A \cdot C)B)^2 = (B \cdot C)^2 A^2 + (A \cdot C)^2 B^2 - 2(A \cdot B)(B \cdot C)(C \cdot A)$$

On a alors :

$$(A \cdot B)(B \cdot C)(C \cdot A) < 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}((A \wedge B) \wedge C)^2 \\ = (B \cdot C)^2 A^2 + (A \cdot C)^2 B^2 - 2(A \cdot B)(B \cdot C)(C \cdot A) > 0 \\ ((B \wedge C) \wedge A)^2 \\ = (C \cdot A)^2 B^2 + (B \cdot A)^2 C^2 - 2(A \cdot B)(B \cdot C)(C \cdot A) > 0 \\ ((C \wedge A) \wedge B)^2 \\ = (A \cdot B)^2 C^2 + (C \cdot B)^2 A^2 - 2(A \cdot B)(B \cdot C)(C \cdot A) > 0\end{array}\right.$$

Ce qui caractérise justement la bonne situation.

"$\Leftarrow$" On peut supposer sans perte de généralité que

$$A^2 = B^2 = C^2 = 1 \text{ et } |(A \cdot B)| > |(B \cdot C)| > |(C \cdot A| > 1.$$

Ainsi

$$\begin{array}{rcl}(A \wedge B)^2 > 0 & \Rightarrow & (A \cdot B)^2 - A^2 B^2 > 0 \\ & \Leftrightarrow & (A \cdot B)^2 > 1 \\ & \Leftrightarrow & |(A \cdot B)| > 1\end{array}$$

La formule utilisée au début nous dit en fait que

$$|2(A \cdot B)(B \cdot C)(C \cdot A)| > (B \cdot C)^2 + (C \cdot A)^2 \Rightarrow 2(A \cdot B)(B \cdot C)(C \cdot A) < 0.$$

Il suffit donc de montrer que $|2(A \cdot B)(B \cdot C)(C \cdot A)| > (B \cdot C)^2 + (C \cdot A)^2$

$$\begin{array}{rcl} |2(A \cdot B)(B \cdot C)(C \cdot A)| & = & 2|(A \cdot B)||(B \cdot C)||(C \cdot A)| \\ & > & 2|(B \cdot C)||(B \cdot C)||(C \cdot A)| \\ & = & 2(B \cdot C)^2|(C \cdot A)| \\ & > & 2(B \cdot C)^2 \\ & > & (B \cdot C)^2 + (C \cdot A)^2 \end{array}$$

□

Le théorème précédent nous permet donc de caractériser analytiquement une situation purement géométrique, alors que le théorème suivant rentre plus dans des détails analytiques. Pour la suite, une géodésique $\{A\} = (a+A)$ sera dite normalisée si $a^2 - A^2 = 1$.

Théorème 3 :

Sioent $(a+A)$, $(b+B)$ et $(c+C)$ trois géodésiques normalisées telles que $(a+A)$ et $(b+B)$ sont disjointes, et $(a+A) * (b+B) * (c+C) = 1$.
Alors si ces trois géodésiques sont placées dans la "bonne situation" et si $ab(A \cdot B) < 0$, il en résulte que $abc < 0$.

Dém:

Le fait que les trois géodésiques soient dans la "bonne situation" (i.e $(A \cdot B)(B \cdot C)(C \cdot A) < 0$) nous impose que $(c+C)$ soit aussi une géodésique. Il nous faut donc montrer que :

$$\left.\begin{array}{c} |a|, |b|, |c| > 1 \\ a^2 - A^2 = b^2 - B^2 = c^2 - C^2 = 1 \\ (A \cdot B)^2 - A^2B^2 > 0 \\ (A \cdot B)(B \cdot C)(C \cdot A) < 0 \\ ab(A \cdot B) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow abc < -1$$

Mais on peut supposer sans perte de généralité que $a, b > 1$, ainsi l'hypothèse $ab(A \cdot B) < 0$ nous dit que $(A \cdot B) < 0$. Il nous faut alors montrer :

$$\left.\begin{array}{c} a, b > 1 \\ a^2 - A^2 = b^2 - B^2 = c^2 - C^2 = 1 \\ (A \cdot B)^2 - A^2B^2 > 0 \\ (B \cdot C)(C \cdot A) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow c < -1$$

Mais l'hypothèse $(a+A)*(b+B)*(c+C) = 1$ veut en fait dire que $(c-C) = (a+A)*(b+B)$, c'est à dire $C = -bA - aB - A \wedge B$, et $c = ab + (A \cdot B) = ab - |(A \cdot B)| < ab$. Finalement, en utilisant la forme négative équivalente du problème, il nous faut montrer que :

$$\left.\begin{array}{c} a, b > 1 \\ a^2 - A^2 = b^2 - B^2 = c^2 - C^2 = 1 \\ 1 < c < ab \end{array}\right\} \Rightarrow \ (B \cdot C)(C \cdot A) < 0 \quad ou \quad (A \cdot B)^2 - A^2B^2 \leq 0$$

On a :

$$\begin{array}{l} (A \cdot C) = A(-bA - aB - A \wedge B) = -a(A \cdot B) - bA^2 \\ (B \cdot C) = B(-bA - aB - A \wedge B) = -b(A \cdot B) - aB^2 \end{array}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}(A\cdot C)(B\cdot C) &= ab(A\cdot B)^2 + a^2(A\cdot B)B^2 + b^2(A\cdot B)A^2 + abA^2B^2\\ &= ab(c-ab)^2 + a^2(c-ab)(b^2-1) + b^2(c-ab)(a^2-1) + ab(a^2-1)(b^2-1)\\ &= abc^2 + (-a^2-b^2)c + a^3b^3 - ab(a^2b^2-1)\end{aligned}$$

Étudier le signe de $(A\cdot C)(B\cdot C)$ revient donc à étudier le signe de

$$f(c) := c^2 - \frac{a^2+b^2}{ab}c + 1$$

Aussi étudier le signe de $(A\cdot B)^2 - A^2B^2$ revient à étudier le signe de

$$h(c) := a^2 + b^2 + c^2 - 2abc - 1$$

Et on peut facilement voir que pour $0 < c < 1$, on a toujours au moins soit $f(c) < 0$, soit $h(c) < 0$. Ceci conclut la démonstration.

□

En fait, le signe du polynome h introduit dans la démonstration va jouer un rôle important quand à la "disjointude" des géodésiques considérées. Pour voir ceci, montrons au préalable le lemme suivant :

Lemme 1 :

Soient trois géodésiques $(a+A)$, $(b+B)$ et $(c+C)$ telles que $(a+A)*(b+B)*(c+C) = 1$. Alors si deux des trois géodésiques s'intersectent, il en résulte que les trois géodésiques A, B et C s'intersectent deux à deux.

Dém:

On a $(a+A)*(b+B)*(c+C) = 1$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow\ (A\cdot B)^2 - A^2B^2 &= (c-ab)^2 - (a^2-1)(b^2-1) &= a^2+b^2+c^2-2abc-1 &= h(c)\\ \Rightarrow\ (B\cdot C)^2 - B^2C^2 &= (a-bc)^2 - (b^2-1)(c^2-1) &= a^2+b^2+c^2-2abc-1 &= h(a)\\ \Rightarrow\ (C\cdot A)^2 - C^2A^2 &= (b-ac)^2 - (c^2-1)(a^2-1) &= a^2+b^2+c^2-2abc-1 &= h(b)\end{aligned}$$

Mais le fait que A et B s'intersectent est exprimé par $h(c) \leq 0$. Or h est un polynome symétrique en a, b et c. Donc $h(c) \leq 0 \Rightarrow h(a) \leq 0$ et $h(b) \leq 0$.

□

On peut alors conclure qu'il n'existe que deux types de situations quand à la "disjointude" de trois géodésiques $(a+A)$, $(b+B)$ et $(c+C)$ telles que $(a+A)*(b+B)*(c+C) = 1$:

- Soit elles sont toutes disjointes deux à deux, et on a $h > 0$,
- soit elles s'intersectent toutes deux à deux, et on a $h \leq 0$.

Finalement, de part le théorème 3 et le lemme 1, on peut dire qu'il n' existe que trois cas de figure possibles concernant la position de trois géodésiques $(a+A)$, $(b+B)$ et $(c+C)$ telles que $(a+A)*(b+B)*(c+C) = 1$. On peut se représenter ces trois cas de figure de la manière suivante :

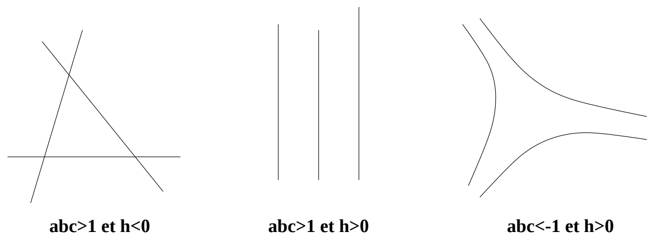

FIG. 2.3 –

Ce sont les trois types de triangles hyperboliques. On a donc que le signe de abc est lié à la position des géodésiques, et celui de h représente en quelque sorte “la configuration d’intersection”. La bone situation est celle caractérisée par abc$<$0 et h$>$0. Il est à remarquer que dans la bonne situation, si on trace les trois perpendiculaires aux déodésiques, alors on obtient un hexagone.

Chapitre 3

Le groupe de Teichmüller

3.1 La situation finale

On considère maintenant la situation suivante :

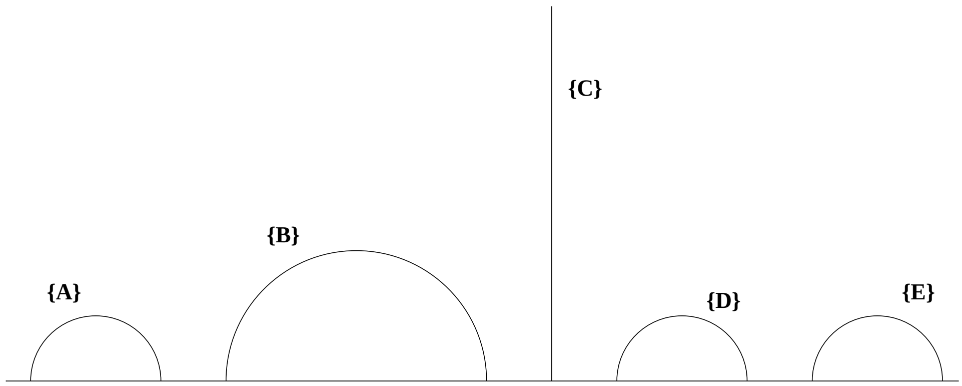

FIG. 3.1 –

Si on trace les perpendiculaires à ces géodésiques, on voit apparaître “l’octogone” qui nous rappelle bien la forme de la pièce X, (qui est en fait obtenue en quotientant $\mathbb{C}$ par un groupe d’isométries directement lié aux géodésiques considérées).

Cette situation est en fait caractérisée par deux “bonnes situations” du chapitre précédent, en effet :

– $\{A\}$, $\{B\}$ et $\{C\}$ sont dans la bonne situation, et
– $\{C\}$, $\{D\}$ et $\{E\}$ sont dans la bonne situation.

On a donc par les résultats précédents que :

$$\begin{array}{ccc} \{A\} * \{B\} * \{C\} = 1 & \Rightarrow & abc < -1 \quad et \quad h(a,b,c) > 0 \\ \{C\} * \{D\} * \{E\} = 1 & \Rightarrow & cde < -1 \quad et \quad h(c,d,e) > 0 \end{array}$$

3.2 La justification des variables

Sachant que $\{A\} = a + A$,$\{B\} = b + B$, $\{C\} = c + C$, $\{D\} = d + D$ et $\{E\} = e + E$, alors on a :

$$(a+A)*(b+B)*(c+C) = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (A \cdot B) = c - ab \\ (B \cdot C) = a - bc \\ (C \cdot A) = b - ca \end{cases}$$

$$(c+C)*(d+D)*(e+E) = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (C \cdot D) = e - cd \\ (D \cdot E) = c - de \\ (E \cdot C) = d - ec \end{cases}$$

et on introduit une nouvelle variable $\{F\}$ telle que :

$$(b+B)*(d+D)^{-1}*(f+F)^{-1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (B \cdot D) = f + bd \\ (D \cdot F) = b - df \\ (F \cdot B) = d - fb \end{cases}$$

Ainsi la pièce X que l'on considère se présente de la manière suivante :

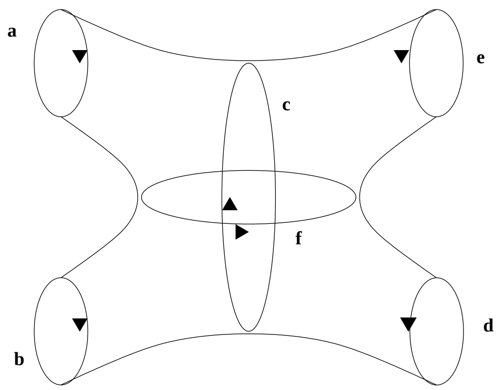

FIG. 3.2 –

En fait, on a a, b, d et e qui reprśentent "les longueurs" des géodésiques extrèmes de la pièce X alors que c donne la "longueur" de la courbe la plus mince au centre de la pièce, il caractérise donc le serrage ou la minceur. Quand à f, il controle le "twist" qui mesure en quelque sorte la torsion de cette pièce. Plus précisément, on peut dire que le "twist" mesure sur $\{C\}$ la distance d'intersection entre la perpendiculaire à $\{B\}$ et $\{C\}$ et la perpendiculaire à $\{C\}$ et $\{D\}$, c'est à dire :

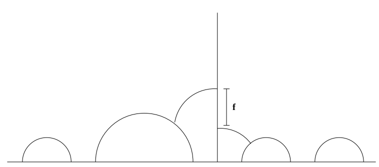

FIG. 3.3 –

Les orientations des courbes sont données par les signes de a, b, c, d, e et f. Ceux-ci ne sont bien entendu pas tous arbitraires et ils représentent une importante contrainte sur les variables pour permettre l'existence d'une pièce X. De par la définition de nos variables, on sait déja que $|a|$, $|b|$, $|c|$, $|d|$, $|e|$, $|f| > 1$.

Coisissons a, $b > 1$. Le fait que $abc < -1$ nous impose $c < -1$. Puis le fait que $cde < -1$ nous dit que d et e doivent être de même signe. Choisissons alors d et e < -1. Reste à déterminer le signe de f. Le fait que $(\{B\}, \{D\}, \{F\})$ soit un "bon triangle" nous pousse à prendre $f > 1$ car ayant choisi $b > 1$, et $d < -1$ on a bien ainsi $bdf < -1$. En résumé, on a alors :

$$a, b, f > 1 \quad et \quad c, d, e < -1$$

Bien entendu, il faut vérifier la cohérence de ces choix avec le problème considéré. Avec nos choix, on a :

$$\begin{array}{lcl} (A \cdot B) = c - ab < 0 & & (C \cdot D) = e - cd < 0 \\ (B \cdot C) = a - bc > 0 & et & (D \cdot E) = c - de < 0 \\ (C \cdot A) = b - ca > 0 & & (E \cdot C) = d - ec < 0 \end{array}$$

Ce qui est cohérent car on a bien $(A \cdot B)(B \cdot C)(C \cdot A) < 0$ et $(C \cdot D)(D \cdot E)(E \cdot C) < 0$ qui nous confirme que $(\{A\}, \{B\}, \{C\})$ et $(\{C\}, \{D\}, \{E\})$ sont deux bons triangles. De plus, on a $c = ab + (A \cdot B)$ et $c = de - (D \cdot E)$ avec $(A \cdot B) < 0$, $ab > 0$, $(D \cdot E) < 0$ et $de > 0$, ce qui nous montre bien que $\{C\}$ est la plus petite des deux géodésiques possibles telle que $\{A\} * \{B\} * \{C\} = 1$ et $\{C\} * \{D\} * \{E\} = 1$. C'est à dire ce n'est pas celle qui tourne en huit autour de la pièce.

Il reste à justifier le choix de f. Sa positivité a déjà été justifiée, mais il faut encore voir pourquoi il a été choisi tel que $(b + B) * (d + D)^{-1} * (f + F)^{-1} = 1$: Et bien comme $(\{B\}, \{C\}, \{D\})$ est un mauvais triangle, on a $(B \cdot C)(C \cdot D)(D \cdot B) > 0$, ce qui implique $(D \cdot B) < 0$. Ce qui veut dire que $\{D\}$ et $\{B\}$ sont de sens opposés. On définit alors $\{F\}$ comme le produit de $\{B\}$ et de $\{D\}^{-1}$. On peut aussi déduire cette relation en regardant sur la pièce X, on voit que la courbe $\{D\} * \{B\}$ est justement celle "en huit", or nous voulons que $\{F\}$ soit l'autre courbe, la plus petite.

3.3 Le groupe de Teichmüller

On cherche désormais la dépendence maximale qu'il doit y avoir entre nos variables pour que celles-ci puissent engendrer une pièce X. On a déja vu que les signes ne peuvent pas être choisis n'importe comment, mais il se trouve en plus que f non plus ne peut pas être prise au hasard, mais elle dépend des cinq autres variables. Le but est alors de trouver cette relation de dépendance entre f et les autres variables. Aussi, vu que le problème que l'on traite possède beaucoup de symétries, on s'attend à trouver une relation symétrique par rapport à la permutation de certaines variables.

Plus précisément, on peut entre autre observer que si on fait subir une sorte de rotation à la pièce X, alors on voit apparaître les correspondances suivantes (où les signes sont déduits à partir des signes de a, b, c, d, e et f) :

$$\left.\begin{array}{ccc} -\{E\} & \longrightarrow & \{A\}^{-1} \\ \{A\} & \longrightarrow & \{B\} \\ \{B\} & \longrightarrow & -\{D\}^{-1} \\ \{D\} & \longrightarrow & \{E\} \end{array}\right\} \Rightarrow \{C\}^{-1} = \{A\} * \{B\} \quad \longrightarrow \quad -\{B\}\{D\}^{-1}$$

Ce qui correspond pour nos variables à l'ensemble des permutations suivantes :

$$\begin{array}{ccc} a & \longleftrightarrow & b \\ b & \longleftrightarrow & -d \\ c & \longleftrightarrow & -f \\ d & \longleftrightarrow & -e \\ e & \longleftrightarrow & -a \end{array}$$

On espère alors que notre relation soit invariante pour certaines compositions ce ces permutations.

La situation que l'on considère est entre autre caractérisée par :

$$\begin{array}{c} ((A \wedge D) \wedge C)^2 = (D \cdot C)^2 A^2 + (A \cdot C)^2 D^2 - 2(A \cdot D)(D \cdot C)(C \cdot A) < 0 \\ ((A \wedge E) \wedge C)^2 = (E \cdot C)^2 A^2 + (A \cdot C)^2 E^2 - 2(A \cdot E)(E \cdot C)(C \cdot A) < 0 \\ ((B \wedge D) \wedge C)^2 = (D \cdot C)^2 B^2 + (B \cdot C)^2 D^2 - 2(B \cdot D)(D \cdot C)(C \cdot B) < 0 \\ ((B \wedge E) \wedge C)^2 = (E \cdot C)^2 B^2 + (B \cdot C)^2 E^2 - 2(B \cdot E)(E \cdot C)(C \cdot B) < 0 \end{array}$$

Mais les relations établies ci-dessus ne nous donnent pas $(A \cdot D)$, $(A \cdot E)$ et $(B \cdot E)$. Il va donc falloir calculer ces expressions pour pouvoir déduire une relation qui permet de garantir leur existence en fonction de a, b, c, d, e et f. Pour cela, on procède de la manière suivante :

$$\begin{array}{c} A = -bC - cB - (B \wedge C) \\ \Rightarrow (A \cdot D) = -b(C \cdot D) - c(B \cdot D) - (B \wedge C, D) \\ \Leftrightarrow [(A \cdot D) + b(C \cdot D) + c(B \cdot D)]^2 = (B \wedge C, D)^2 \end{array}$$

On a donc affaire à une équation de la forme $(x - K)^2 = L^2$, qui possède toujours une solution $x = \pm(K + L)$. La condition pour avoir l'existence de $(A \cdot D)$ est donc simplement que $(B \wedge C, D)^2$ existe pour les $\{B\}$, $\{C\}$ et$\{D\}$ que l'on a défini. La relation cherchée s'exprime donc simplement ainsi :

$$\begin{array}{cc} & (B \wedge C, D)^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (B \cdot C)^2 D^2 + (B \cdot D)^2 C^2 + (C \cdot D)^2 B^2 - 2(B \cdot C)(C \cdot D)(B \cdot D) - B^2 C^2 D^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (a - bc)^2(d^2 - 1) + (bd - f)^2(c^2 - 1) + (e - cd)^2(b^2 - 1) \\ & -2(a - bc)(bd - f)(e - cd) - (b^2 - 1)(c^2 - 1)(d^2 - 1) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & 1 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2 - e^2 - f^2 + a^2 d^2 + b^2 e^2 + c^2 f^2 \\ & +2abc + 2bdf + 2cde + 2aef + 2abde + 2bcef + 2acdf \geq 0 \\ \Leftrightarrow & det \begin{pmatrix} 1 - c^2 & a - bc & e - cd \\ a - bc & 1 - b^2 & f - bd \\ e - cd & f - bd & 1 - d^2 \end{pmatrix} \geq 0 \end{array}$$

De même, en ce qui concerne $(B \cdot E)$, on a :

$$\begin{array}{c} E = -cD - dC - (C \wedge D) \\ \Rightarrow (B \cdot E) = -c(B \cdot D) - d(B \cdot C) - (C \wedge D, B) \\ \Leftrightarrow [(B \cdot E) + c(B \cdot D) + d(B \cdot C)]^2 = (C \wedge D, B)^2 \end{array}$$

et comme avant, la condition s'exprime par le fait que

$$\begin{aligned} & (C \wedge D, B)^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \ldots \\ \Leftrightarrow \quad & det \begin{pmatrix} 1-c^2 & a-bc & e-cd \\ a-bc & 1-b^2 & f-bd \\ e-cd & f-bd & 1-d^2 \end{pmatrix} \geq 0 \end{aligned}$$

On obtient donc la même relation dans les deux cas. Quant à l'existence de $(A \cdot E)$, elle dépend directement de celle de $(A \cdot D)$ et $(B \cdot E)$, ce qui nous donne finalement que l'existence de nos trois produits scalaires manquants est assurée par une unique relation.

Nous remarquons donc que la condition se résume à l'inégalité du triangle pour le triangle $(\{B\}, \{C\}, \{D\})$, or on sait que dans le cas hyperbolique, l'inégalité triangulaire n'existe que pour les mauvais triangles, mais justement $(\{B\}, \{C\}, \{D\})$ est un mauvais triangle hyperbolique.

De plus, je me permet d'énoncer le théorème suivant, que je n'ai pas démontré, mais qui, je l'espère, est correct :

Théorème 4 :

Soient Φ et Ψ une paire de mauvais triangles appartenant à la pièce X, alors il existe une composition de permutations énoncées ci dessus permettant de passer de Φ à Ψ et laissant la relation invariante.

Nous pouvons alors déduire que cette relation n'est finalement rien d'autre que l'inégalité triangulaire pour tous les mauvais triangles qui existent dans notre situation, c'est donc en ceci que résidait toute la symétrie du problème.

Pour conclure, on peut dire que l'ensemble des sextuplets a, b, c, d, e, f pouvant donner lieu à la formation d'une pièce X forment un groupe contenu dans $\mathbb{R}^6$ appelé le groupe de Teichmüller. Nous pouvons alors maintenant énoncer ce groupe :

$$\Gamma = \{a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \mid a, b, -c, -d, -e, f > 1 \text{ et } det \begin{pmatrix} 1-c^2 & a-bc & e-cd \\ a-bc & 1-b^2 & f-bd \\ e-cd & f-bd & 1-d^2 \end{pmatrix} \geq 0\}$$

FIN.

En annexe, je propose quelques permutations laissant cette fameuse relation invariante.