Projet de Semestre

été 2005

K–théorie topologique

David Kohler

Professeure Responsable:

Kathryn Hess Bellwald

Table des matières

Résumé

Se travail se base sur la théorie des fibrés vectoriels pour introduire la K–théorie topologique d'un espace localement compact. Nous donnons les constructions des groupes $K(X)$ et $K(X, Y)$ et démontrons de nombreuses propriétés à leur sujet.

Table des notations

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long du travail:

$\mathscr{A}b$	Catégorie des groupes abéliens
$\mathscr{F}(X)$	Groupe abélien libre engendré par l'ensemble X
$H^0(X, \mathbb{N})$	Ensemble des fonctions continues de X dans $\mathbb{N}$
$H^0(X, \mathbb{Z})$	Premier groupe de cohomologie de Cech
$K(\mathscr{C})$	Groupe de Grothendieck d'une catégorie additive $\mathscr{C}$
$K_0(A)$	Premier groupe de K–théorie algébrique de l'anneau A
$K(X)$	Premier groupe de K–théorie topologique de l'espace X
$\tilde{K}(X)$	K–théorie réduite de l'espace X
$K(\varphi)$	Groupe de Grothendieck d'un foncteur additif φ
$K(X, Y)$	K–théorie de la paire d'espaces (X, Y)
$\mathscr{L}(V, W)$	Ensemble des applications linéaires entre deux espaces vectoriels
$\Phi(\mathscr{C})$	Monoïde des classes d'isomorphies des objets d'une catégorie $\mathscr{C}$
$\Phi(X)$	Monoïde des classes d'isomorphies de fibrés vectoriels sur X
$S(M)$	Symétrisé du monoïde abélien M
$\mathrm{supp}(\alpha)$	Support d'un morphisme α de fibrés vectoriels
X^+	Compactifié d'Alexandroff de l'espace X

Introduction

Ce projet consiste principalement en une relecture de l'excellent ouvrage de Max Karoubi sur la K–théorie topologique ([**1**]) et couvre les deux premières sections du chapitre deux. La théorie des fibrés vectoriels, absolument nécessaire à la K–théorie topologique, est couverte dans le premier chapitre de [**1**] et est traitée par Oliver Prosperi [**2**] dans son projet de semestre. Tous les résultats et notations nécessaires à la bonne compréhension de ce projet sont traités dans [**2**].

L'objectif de ce projet de semestre, outre une introduction à la K–théorie topologique, constituait à acquérir suffisament de notions pour comprendre un des outils fondamentaux de la K–théorie : l'isomorphisme de Thom, et ce afin de comprendre les mécanismes inhérents au célèbre théorème de l'indice d'Atiyah et Singer.

CHAPITRE 1

$K(X)$

1. Le groupe de Grothendieck d'une catégorie

La construction détaillée dans cette section est très générale, elle permet de définir les K–théories topologiques et algébriques qui sont étroitement liées par le théorème de Serre–Swan.

THÉORÈME ET DÉFINITION 1.1. *Pour tout monoïde abélien M, il existe un unique groupe abélien, noté $S(M)$ et appelé le* symétrisé *de M, ainsi qu'un morphisme de monoïde abélien s de M dans $S(M)$, satisfaisant la propriété universelle suivante : pour tout homomorphisme de monoïde $f : M \to G$ dans un groupe abélien G, il existe un unique homomorphisme de groupes abéliens $\tilde{f} : S(M) \to G$ tel que $\tilde{f} \circ s = f$. Cette propriété universelle est représentée par le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "s"] \arrow[dr, "f"'] & & S(M) \arrow[dl, dashed, "\exists! \tilde{f}"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

Remarquons que la propriété universelle nous garantit l'unicité du groupe abélien $S(M)$ à isomorphisme près, il nous suffit donc de prouver son existence. A cette fin, nous donnons deux preuves différentes parmis les plus courantes que l'on puisse trouver dans la littérature.

1ÈRE PREUVE. Posons $\mathscr{F}(M) = \bigoplus_{m \in M} \mathbb{Z}[m]$, le groupe libre engendré par les éléments de M et $Q =< \{[m+n] - [m] - [n] | m, n \in N\} >$ le sous-groupe engendré par les différences formelles. On définit le groupe abélien $S(M)$ par

$$S(M) = {}^{\mathscr{F}(M)}\!\diagup_{Q}$$

munit de l'application

$$\begin{aligned} s : M &\longrightarrow S(M) \\ m &\longmapsto [[m]] =: [m] \end{aligned}$$

Pour vérifier la propriété universelle requise, on contemple le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & \mathscr{F}(M) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, dashed, "\bar{f}"] & S(M) \arrow[dl, dashed, "\tilde{f}"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

avec $i(m) = [m]$ et où $\bar{f}$ nous est donné par la propriété universelle du produit libre (dans la catégorie $\mathscr{A}b$ des groupes abéliens) et $\tilde{f}$ est le passage au quotient de $\bar{f}$ car le sous-groupe Q est contenu dans son noyau. En effet, on a :

$$\begin{aligned} \bar{f}([m+n]-[m]-[n]) &= \bar{f}([m+n]) - \bar{f}([m]) - \bar{f}([n]) \\ &= \bar{f}(i(m+n)) - \bar{f}(i(m)) - \bar{f}(i(n)) \\ &= f(m+n) - f(m) - f(n) \\ &= f(m) + f(n) - f(m) - f(n) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Les deux propriétés universelles utilisées nous garantissent l'unicité de l'homomorphisme $\tilde{f}$. $\square$

2ème preuve. Considérons la relation suivante sur le monoïde $M \times M$:

$$(m,n) \sim (m',n') \iff \text{il existe } p,q \in M \text{ tels que } (m,n)+(p,p) = (m',n')+(q,q)$$

On pose alors

$$S(M) = {}^{M\times M}\!/\!_{\sim}$$

et on définit l'application s par :

$$\begin{aligned} s : M &\longrightarrow M{\times}M \longrightarrow S(M) \\ m &\longmapsto (m{,}0) \longmapsto [(m,0)] \end{aligned}$$

Montrons d'abord que $S(M)$ est bel et bien un groupe abélien. Comme M est un monoïde abélien, $S(M)$ l'est de manière évidente, il suffit donc d'exhiber les inverses. Notons $[(m,n)] =: [m,n]$, on a

$$\begin{aligned} [m,n]+[n,m] &= [(m,n)+(n,m)] \\ &= [m+n, n+m] \\ &= [m+n, m+n] \\ &= [0,0] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi $-[m,n] = [n,m]$. Vérifions la propriété universelle demandée ; on a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "s"] \arrow[dr, "f"'] & S(M) \arrow[d, dashed, "\tilde{f}"] \\ & G \end{tikzcd}$$

où $\tilde{f}([m,n]) := f(m) - f(n)$. Montrons que cette application est bien définie. Si $[m,n] = [m',n']$, il existe $p,q \in M$ tels que $(m+p, n+p) = (m'+q, n'+q)$, on a donc,

$$\begin{aligned}\tilde{f}([m,n]) &= f(m) - f(n)\\ &= f(m) + f(p) - f(n) - f(p)\\ &= f(m+p) - f(n+p)\\ &= f(m'+q) - f(n'+q)\\ &= f(m') + f(q) - f(n') - f(q)\\ &= f(m') - f(n')\\ &= \tilde{f}([m',n'])\end{aligned}$$

L'application $\tilde{f}$ est bien un homomorphisme de groupes car :

$$\begin{aligned}\tilde{f}([m,n] + [m',n']) &= \tilde{f}([m+m', n+n'])\\ &= f(m+m') - f(n+n')\\ &= f(m) + f(m') - f(n) - f(n')\\ &= \tilde{f}([m,n]) + \tilde{f}([m',n'])\end{aligned}$$

Le diagramme ci-dessus est commutatif car

$$\begin{aligned}\tilde{f} \circ s(m) &= \tilde{f}(m,0)\\ &= f(m) - f(0)\\ &= f(m)\end{aligned}$$

et finalement, $\tilde{f}$ est unique, car si $g : S(M) \to G$ fait également commuter le diagramme du dessus, on a :

$$\begin{aligned}g([m,n]) &= g([m,0] + [0,n])\\ &= g([m,0] - [n,0])\\ &= g([m,0]) - g([n,0])\\ &= g \circ s(m) - g \circ s(n)\\ &= f(m) - f(n)\\ &= \tilde{f}([m,n])\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration. □

Remarque 1.2. La relation d'équivalence de la deuxième construction peut être remplacée par la suivante :

$$(m,n) \sim (m',n') \iff \text{il existe } p \in M \text{ tel que } m + n' + p = m' + n + p$$

En effet, notons $\sim_1$ la relation d'équivalence de la deuxième construction et $\sim_2$ la relation qui vient d'être définie. On a

$$\begin{aligned}(m,n) \sim_1 (m',n') &\iff \text{il existe } p,q \in M \text{ tels que } (m,n) + (p,p) = (m',n') + (q,q)\\ &\iff \text{il existe } p,q \in M \text{ tels que } m+p = m'+q \text{ et } n+p = n'+q\\ &\iff \text{il existe } p,q \in M \text{ tels que } m+n'+p+q = m'+n+p+q\\ &\iff (m,n) \sim_2 (m',n')\end{aligned}$$

Proposition 1.3. *Soit M un monoïde abélien, tout élément de $S(M)$ peut s'écrire sous la forme $s(m) - s(n)$ pour des éléments m, n dans M.*

DÉMONSTRATION. Ceci est clair dans la deuxième construction proposée ci-dessus où l'on a : $[m,n] = [m,0] - [n,0] = s(m) - s(n)$ où $[m,n]$ est un élément arbitraire de $S(M)$.

Montrons cette affirmation dans la première construction également. Remarquons d'abord que si $m \in M$ et $\lambda \in \mathbb{N}$, alors

$$[\lambda[m]] = [[\lambda m]] =: [\lambda m] \qquad \text{et} \qquad [-\lambda[m]] = -[\lambda m]$$

Soit $x \in S(M)$, x s'écrit sous la forme :

$$x = \left[\sum_{i=1}^{k} \lambda_i [m_i]\right]$$

sans perte de généralité, on peut supposer que $\lambda_i \geq 0$ pour tout $0 < i \leq l$ et $\lambda_i < 0$ pour tout $l < i \leq k$. Ainsi, en posant $\mu_i = |\lambda_i|$ on a :

$$\begin{aligned} x &= \left[\sum_{i=1}^{l} \mu_i[m_i]\right] - \left[\sum_{i=l+1}^{k} \mu_i[m_i]\right] \\ &= \left[\sum_{i=1}^{l} [\mu_i m_i]\right] - \left[\sum_{i=l+1}^{k} [\mu_i m_i]\right] \\ &= \left[\underbrace{[\sum_{i=1}^{l} \mu_i m_i}_{m}]\right] - \left[\underbrace{[\sum_{i=l+1}^{k} \mu_i m_i}_{n}]\right] \\ &= s(m) - s(n) \end{aligned}$$

□

PROPOSITION 1.4. *Si A est un groupe abélien, alors $S(A) \cong A$.*

DÉMONSTRATION. Montrons que le morphisme de monoïdes abéliens

$$\begin{aligned} s : A &\longrightarrow S(A) \\ a &\longmapsto [a] \end{aligned}$$

est un isomorphisme de groupes abéliens. Ce morphisme est déjà un homomorphisme de groupes abéliens car la catégorie des groupes abéliens est une sous-catégorie pleine de la catégorie des monoïdes abéliens. Il suffit donc de montrer que s est bijectif. Le noyau de s est trivial car si $s(a) = [a] = 0$, il existe un élément $b \in A$ tel que $a + b = 0 + b$. Mais comme A est un groupe, b est simplifiable, ainsi $a = 0$. La surjectivité de s découle de l'identité $[-b] = -[b]$. En effet,

$$\begin{aligned} [b] + [-b] &= [b - b] \\ &= [0] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, puisque tout élément de $S(A)$ s'écrit sous la forme $[a] - [b]$, on a

$$\begin{aligned} s(a - b) &= s(a) + s(-b) \\ &= [a] + [-b] \\ &= [a] - [b] \end{aligned}$$

□

Théorème 1.5. *La symétrisation est un foncteur covariant additif de la catégorie des monoïdes abéliens dans la catégorie des groupes abéliens. La proposition 1.4 implique de plus que ce foncteur est l'identité sur la sous-catégorie pleine des groupes abéliens.*

Démonstration. Soit $f : M \to N$ un morphisme de monoïdes abéliens, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & N \arrow[d, "s"] \\ S(M) \arrow[r, dashed, "S(f)"] & S(N) \end{tikzcd}$$

où $S(f)$ est induit par l'homomorphisme de monoïdes abéliens $s \circ f$. On obtient alors que $S(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{S(M)}$ et $S(g \circ f) = S(g) \circ S(f)$ où $g : N \to P$ est un autre morphisme de monoïdes abéliens.

Montrons finalement que S est additif. Soit M et N deux monoïdes abéliens ; nous allons exhiber un isomorphisme entre $S(M \times N)$ et $S(M) \times S(N)$[1]. Soit

$$\begin{aligned} \varphi : S(M \times N) &\longrightarrow S(M) \times S(N) \\ [(m, n), (m', n')] &\longmapsto ([m, m'], [n, n']) \end{aligned}$$

L'application φ est bien définie car $[(m, n), (m', n')] = [(p, q), (p', q')]$ si et seulement s'il existe $(r, s) \in M \times N$ tel que $(m, n) + (p', q') + (r, s) = (m', n') + (p, q) + (r, s)$, c'est-à-dire, si et seulement si $m + p' + r = m' + p + r$ et $n + q' + s = n' + q + s$ et donc si et seulement si $[m, m'] = [p, p']$ et $[n, n'] = [q, q']$. Cette application est linéaire, en effet

$$\begin{aligned} \varphi\left([(m, n), (m', n')] + [(p, q), (p', q')]\right) &= \varphi\left([(m, n) + (p, q), (m', n') + (p', q')]\right) \\ &= \varphi\left([(m + p, n + q), (m' + p', n' + q')]\right) \\ &= ([m + p, m' + p'], [n + q, n' + q']) \\ &= ([m, m'] + [p, p'], [n, n'] + [q, q']) \\ &= ([m, m'], [n, n']) + ([p, p'], [q, q']) \\ &= \varphi\left([(m, n), (m', n')]\right) + \varphi\left([(p, q), (p', q')]\right) \end{aligned}$$

La surjectivité de φ est évidente, il ne reste plus qu'à montrer son injectivité. Soit $[(m, n), (m', n')]$ un élément dans le noyau de φ. On a donc $[m, m'] = 0 = [n, n']$, ainsi il existe p dans M et q dans N tels que

$$\begin{aligned} m + p &= m' + p \\ n + q &= n' + q \end{aligned}$$

Autrement dit, $(m, n) + (p, q) = (m', n') + (p, q)$ et donc $[(m, n), (m', n')] = 0$. □

Proposition 1.6. *Le symétrisé du monoïde abélien* $\mathbb{N}$ *des entiers positifs est isomorphe au groupe abélien* $\mathbb{Z}$ *des entiers.*

[1] Ce qui prouve que le foncteur est additif puisque $A \times B \cong A \oplus B$ dans toute catégorie additive.

Démonstration. L'application

$$\begin{aligned} \varphi : S(\mathbb{N}) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ [n]-[m] &\longmapsto n-m \end{aligned}$$

est un isomorphisme de groupes abéliens. En effet, cette application est bien définie car si $[n]-[m]=[n']-[m']$, il existe un entier positif p tel que $n+m'+p=n'+m+p$ et donc $n-m=n'-m'$. Cette application est linéaire :

$$\begin{aligned} \varphi\left(([n]-[m])+([n']-[m'])\right) &= \varphi\left(([n]+[n'])-([m]-[m'])\right) \\ &= \varphi([n+n']-[m-m']) \\ &= n+n'-(m+m') \\ &= (n-m)+(n'-m') \\ &= \varphi([n]-[m])+\varphi([n']-[m']) \end{aligned}$$

La surjectivité de φ est évidente, il suffit de montrer son injectivité. Si $n-m=0$, alors $n=m$ et donc $[n]-[m]=0$, ce qui achève la démonstration.

Il est intéressant de remarquer que l'application $s : \mathbb{N} \to S(\mathbb{N})$ est injective ici, ce qui n'est pas toujours le cas dans une symétrisation. □

Nous nous intéressons maintenant à une catégorie additive $\mathscr{C}$ pour laquelle nous définissons le groupe abélien $K(\mathscr{C})$. On verra dans la section suivante comment utiliser cela pour définir le groupe abélien $K(X)$ d'un espace topologique compact.

Proposition et Définition 1.7. *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie additive, on note $\Phi(\mathscr{C})$ l'ensemble des classes d'isomorphies d'objets de $\mathscr{C}$, alors la somme directe muni cet ensemble d'une structure de monoïde abélien, où l'élément neutre est la classe de l'objet nul. De plus, Φ est un foncteur covariant de la catégorie des catégories additives*[2] *vers la catégorie des monoïdes abéliens.*

Démonstration. Nous recommandons le lecteur à n'importe quel bon ouvrage traitant des catégories. A titre d'exemple, nous citons [**3**] où les catégories additives sont traitées dans la sectipn 18, dès la page 28. □

Définition 1.8. Soit $\mathscr{C}$ une catégorie additive, on note $K(\mathscr{C}) = S(\Phi(\mathscr{C}))$ le groupe abélien obtenu en appliquant la construction de grothendieck au monoïde des classes d'isomorphies de $\mathscr{C}$. On appelle $K(\mathscr{C})$ le *groupe de Grothendieck* de la catégorie $\mathscr{C}$. On notera simplement $[X]$ au lieu de $[[X]]$ les éléments de $K(\mathscr{C})$ pour un objet X de $\mathscr{C}$.

Proposition 1.9. *Le groupe de Grothendieck d'une catégorie défini un foncteur covariant noté K de la catégorie des catégories additives vers la catégoire des groupes abéliens.*

Démonstration. Le foncteur K est la composition des foncteurs S et Φ qui sont tous deux covariants. □

Proposition 1.10. *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie additive, tout élément de $K(\mathscr{C})$ peut s'écrire sous la forme $[E]-[F]$ pour des éléments E et F de $\mathscr{C}$, de plus, on a*

$$[E]-[F]=[E']-[F'] \iff \textit{il existe } G \in \mathscr{C} \textit{ tel que } E \oplus F' \oplus G \cong E' \oplus F \oplus G$$

[2] les morphismes de cette catégorie sont les foncteurs additifs

DÉMONSTRATION. Ceci n'est qu'une reformulation de la proposition 1.3 en utilisant la relation d'équivalence mentionnée dans la remarque 1.2. $\square$

COROLLAIRE 1.11. *On a de plus :*

$$[E] = [F] \in K(X) \iff \textit{il existe } G \in \mathscr{C} \textit{ tel que } E \oplus G \cong F \oplus G$$

EXEMPLE 1.12 (K–théorie algébrique). Soit A un anneau à unité, on note $\mathscr{P}(A)$ la catégorie des A–modules projectifs à gauche de type fini. $\mathscr{P}(A)$ est une catégorie additive, et le groupe abélien $K_0(A) = K(\mathscr{P}(A))$ est appelé le *premier groupe de K–théorie algébrique de A*

2. Définition de $K(X)$

Soit X un espace topologique compact non vide. Rappelons qu'un espace topologique est compact s'il est de Hausdorff et s'il est paracompact[3].

DÉFINITION 1.13. On appelle *premier groupe de K–théorie topologique de X* le groupe abélien $K(X) = K(\mathrm{Vect}(X))$. Comme Vect est un foncteur contravariant de la catégorie des espaces topologiques compacts dans la catégorie des catégories additives, K est un foncteur contravariant de la catégorie des espaces topologiques compacts dans la catégorie des groupes abéliens.

REMARQUE 1.14. Puisque K est un foncteur, il est clair que deux espaces compacts homéomorphes ont des groupes de K-théorie isomorphes.

REMARQUE 1.15. Le théorème de Serre-Swan (voir **[2]**, théorème 2.56) nous dit que les catégories $\mathrm{Vect}(X)$ des classes d'isomorphies de fibrés vectoriels sur X et $\mathscr{P}(\mathrm{C}(X))$ des modules projectifs de type fini sur l'anneau des fonctions continues de X dans le corps $\mathbb{K}$ sont équivalentes. Ainsi :

$$K(X) \cong K_0(\mathrm{C}(X))$$

La K–théorie topologique est donc un cas particulier de la K–théorie algébrique. Remarquons cependant que la K–théorie algébrique est covariante et non contravariante comme sa version topologique. En effet, le foncteur $\mathscr{P}$ est covariant : Soit $\varphi : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux à unité, on a

$$\begin{aligned} \mathscr{P}(\varphi) : \mathscr{P}(A) &\longrightarrow \mathscr{P}(B) \\ P &\longmapsto P \otimes_A B \end{aligned}$$

PROPOSITION 1.16. *Tout élément de $K(X)$ peut s'écrire sous la forme $[E]-[\theta_n]$ où θ_n est le fibré trivial sur X de dimension n. De plus, on a :*

$$[E] - [\theta_n] = [F] - [\theta_m] \iff \textit{il existe } p \in \mathbb{N} \textit{ tel que } E \oplus \theta_{m+p} \cong F \oplus \theta_{n+p}$$

où E et F sont des fibrés vectoriels sur X.

[3] Un espace est paracompact s'il possède la propriété que tout recouvrement ouvert de cet espace admet un sous-recouvrement fini.

Démonstration. Par 1.10, tout élément de $K(X)$ s'écrit sous la forme $[E] - [F]$. Par le théorème 2.45 de **[2]** , il existe un fibré F' et un entier positif n tels que $F \oplus F' \cong \theta_n$. Ainsi,

$$\begin{aligned}[E] - [F] &= [E] + [F'] - [F] - [F'] \\ &= [E \oplus F'] - [\theta_n]\end{aligned}$$

Ce qui prouve la première assertion.

Supposons maintenant que $[E] - [\theta_n] = [F] - [\theta_p]$, alors par la proposition 1.10, il existe un fibré G tel que $E \oplus \theta_p \oplus G \cong F \oplus \theta_n \oplus G$. Par le théorème 2.45 de **[2]** , il existe un fibré G' tel que $G \oplus G' \cong \theta_q$, ainsi

$$E \oplus \theta_p \oplus G \oplus G' \cong F \oplus \theta_n \oplus G \oplus G'$$
$$\text{i.e.}$$
$$E \oplus \theta_p \oplus \theta_q \cong F \oplus \theta_n \theta_q$$
$$\text{i.e.}$$
$$E \oplus \theta_{p+q} \cong F \oplus \theta_{n+q}$$

La réciproque est évidente, si $E \cong \theta_p \oplus \theta_q \cong F \theta_n \oplus \theta_q$, alors $[E] - [\theta_n] = [F] - [\theta_p]$. □

Corollaire 1.17. *Soit E et F deux fibrés vectoriels sur X, alors*

$$[E] = [F] \iff \textit{il existe } n \in \mathbb{N} \textit{ tel que } E \oplus \theta_n \cong F \oplus \theta_n$$

Proposition 1.18. *Soit $\{x_0\}$ un espace topologique à un seul point, alors son K–groupe, $K(\{x_0\})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$.*

Démonstration. Un fibré vectoriel sur un point est nécessairement trivial, ainsi les classes d'isomorphies de fibrés sont complétement caractérisées par leur dimension, i.e. $\mathrm{Vect}(\{x_0\})$ est isomorphe à $\mathbb{N}$ et on a vu à la proposition 1.6 que $S(\mathbb{N}) \cong \mathbb{Z}$. □

Définition 1.19. Soit P un espace topologique à un point et $\pi : X \to P$ la projection évidente. En appliquant le foncteur K on obtient un homomorphisme de groupes

$$K(\pi) : \mathbb{Z} \cong K(P) \longrightarrow K(X)$$

et on note $\tilde{K}(X) = \mathrm{coker}(K(\pi))$ que l'on appelle la *K–théorie réduite* de X.

Proposition 1.20. *On a la suite exacte courte*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow K(X) \longrightarrow \tilde{K}(X) \longrightarrow 0$$

et tout choix de point de base x_0 dans X définit une rétraction canonique qui scinde la suite, on obtient alors

$$K(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \tilde{K}(X)$$

Démonstration. Soit x_0 un point de base de X, sans perte de généralité on peut supposer $P = \{x_o\}$. L'inclusion i de P dans X induit un homomorphisme

$$K(X) \xrightarrow{K(i)} K(P) \cong \mathbb{Z}$$

et on a

$$\begin{aligned} K(i) \circ K(\pi) &= K(i \circ \pi) \\ &= K(\mathrm{id}_P) \\ &= \mathrm{id}_{K(P)} \\ &= \mathrm{id}_{\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

ainsi, $K(\pi)$ est une section, ce qui scinde la suite exacte. □

La K-théorie réduite va nous permettre de définir la K-théorie d'un espace topologique localement compact. Pour cela, nous rappelons la compactification d'Alexandroff.

Définition 1.21. Soit W un espace topologique de Hausdorff, on peut étendre W d'un point de manière à ce que ce nouvel espace soit paracompact[4] et que W en soit un sous-espace. Cette construction est appelée *compactification d'Alexandroff* ou *one point compactification* en anglais et se fait de la manière suivante : On définit W^+ comme étant la réunion de W et d'un nouveau point ∞ que l'on munit de la topologie suivante : on prend la topologie de W que l'on augmente des voisinages du point ∞ où l'on définit un voisinage de ∞ comme étant un sous-ensemble V de W^+ contenant ∞ tel que $W\backslash(V\backslash\{\infty\}) = W^+\backslash V$ soit compact dans W. Remarquons que pour tout ouvert V de W^+, $W^+\backslash V$ est un ouvert de W, car dans le cas où V est un voisinage de ∞, $V\backslash\{\infty\}$ est le complémentaire d'un sous-espace compact qui est fermé dans W car ce dernier est de Hausdorff.

Mentionnons les propriétés suivantes de la compactification d'Alexandroff.

Proposition 1.22. *Le compactifié W^+ est paracompact et contient W comme sous-espace topologique.*

Démonstration. W est clairement un sous-espace de W^+ puisque ce dernier en est une extension. Il ne reste qu'à montrer que W^+ est paracompact. Soit $\{V_i\}_{i\in I} \subseteq W^+$ un recouvrement ouvert de W^+. Par hypothèse, il existe un ouvert V_{i_0} du recouvrement contenant le point $\{\infty\}$. Posons alors

$$U_i = V_i\backslash\{\infty\} \qquad \forall\, i \in I\backslash\{i_0\}$$

Par définition de la topologie de W^+, les U_i sont tous ouverts dans W. De plus, comme $W^+\backslash V_{i_0}$ est compact dans W et que la famille $\{U_i\}_{i\in I\backslash\{i_0\}}$ est un recouvrement ouvert de ce compact, on peut en extraire un sous-recouvrement fini $\{U_i\}_{i=1}^n \subseteq \{U_i\}_{i\in I\backslash\{i_0\}}$. La famiile $\{V_{i_0}\} \cup \{V_i\}_{i=1}^n$ est ainsi un sous-recouvrement fini du recouvrement initial. □

Proposition 1.23. *Le compactifié W^+ est un espace de Hausdorff si et seulement si W est localement compact*[5]*.*

Démonstration.

[4]Un espace est paracompact s'il possède la propriété que tout recouvrement ouvert de cet espace admet un sous-recouvrement fini.

[5]Un espace est localement compact s'il est de Hausdorff et si tout point admet un voisinage contenu dans une partie compacte. Clairement, tout espace compact est localement compact.

- $\Rightarrow$ Soit $x \in W$, par hypothèse, il existe deux ouverts disjoints V_1 et V_2 de W^+ tels que V_1 soit un voisinage de x et V_2 un voisinage du point ∞. De plus, $W^+ \backslash V_2$ est compact et V_1 est inclus dans ce compact. Le voisinage V_1 est donc le voisinage cherché qui prouve que W est localement compact.
- $\Leftarrow$ Comme W est supposé de Hausdorff, il suffit de montrer que l'on peut séparer le point ∞ d'un point arbitraire x de W. Par hypothèse, il existe un voisinage ouvert V de x dans W et un compact K tel que V soit inclus dans K. Par définition de la topologie du compactifié, V est un voisinage ouvert de x dans W^+ et en posant $U = W^+ \backslash K$, on vérifie bien que U est un voisinage de ∞ disjoint de V.

$\square$

Définition 1.24. Soit Y un espace topologique localement compact, posons

$$K(Y) = \tilde{K}(Y^+)$$

que l'on appelle également le *premier groupe de K–théorie de Y*.

3. Propriétés de $K(X)$

Définition 1.25. Posons $\Phi(X) = \Phi(\mathrm{Vect}(X))$ le monoïde abélien des classes d'isomorphies de fibrés vectoriels sur X et notons

$$\gamma : \Phi(X) \xrightarrow{s} K(X) \xrightarrow{\beta} \tilde{K}(X)$$

le morphisme de monoïde abéliens de $\Phi(X)$ dans $\tilde{K}(X)$.

Proposition 1.26. *Le morphisme $\gamma : \Phi(X) \to \tilde{K}(X)$ est surjectif, de plus*

$$\gamma(\bar{E}) = \gamma(\bar{F}) \iff \textit{il existe } n, m \in \mathbb{N} \textit{ tel que } E \oplus \theta_n \cong F \oplus \theta_m$$

où $\bar{E}$ est la classe d'isomorphie du fibré vectoriel F.

Démonstration. Par définition de $\tilde{K}(X)$, la classe d'un fibré trivial θ_p est nulle. En effet, $\tilde{K}(X) = \mathrm{coker}(K(\pi))$ où

$$\begin{aligned} K(\pi) : \mathbb{Z} &\longrightarrow K(X) \\ n &\longmapsto [\theta_m] - [\theta_q] \qquad \text{où } n = m - q, \quad m, q \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Si $q = 0$, on a $[\theta_m] - [\theta_0] = [\theta_m]$ car $[\theta_0]$ est l'élément neutre de $\Phi(X)$. On peut donc reformuler $K(\pi)$ de la manière suivante :

$$K(\pi)(n) = \begin{cases} [\theta_n] & \text{si } n \geq 0 \\ -[\theta_n] & \text{si } n \leq 0 \end{cases}$$

Ainsi, tout fibré trivial est dans l'image de $K(\pi)$, et donc $\beta([\theta_n]) = 0$ pour tout entier positif $n \in \mathbb{N}$.

Comme l'homomorphisme $\beta : K(X) \to \tilde{K}(X)$ est surjectif, tout élément de $\tilde{K}(X)$ s'écrit comme $\beta([E]-[\theta_n])$, or

$$\begin{aligned}\beta([E]-[\theta_n]) &= \beta([E]) - \beta([\theta_n])\\ &= \beta([E])\\ &= \beta \circ s(\bar{E})\\ &= \gamma(\bar{E})\end{aligned}$$

ce qui prouve la surjectivité de γ. Montrons encore la deuxième assertion : Soit E et F deux fibrés vectoriels sur X, on a :

$$\begin{aligned}\gamma(\bar{E}) = \gamma(\bar{F}) &\iff [E]-[F] \in \mathrm{im}(K(\pi))\\ &\iff [E]-[F] = [\theta_m] - [\theta_q] \qquad \text{où } n, m \in \mathbb{N}\\ &\iff \text{ il existe } p \in \mathbb{N} \text{ tel que } E \oplus \theta_q \oplus \theta_p \cong F \oplus \theta_m \oplus \theta_p\\ &\iff E \oplus \theta_{q+p} \cong F \oplus \theta_{m+p}\end{aligned}$$

□

Corollaire 1.27. *On peut alors redéfinir la K–théorie réduite comme :*

$$\tilde{K}(X) \cong {}^{\Phi(X)}\!/\!_{\sim}$$

où $\bar{E} \sim \bar{F} \iff E \oplus \theta_n \cong F \oplus \theta_m$ *pour* n, n *deux entiers positifs.*

Puisque les fibrés vectoriels ont de bonnes propriétés homotopiques, on s'attend à ce que la K–théorie en hérite également.

Théorème 1.28. *Soit* $f_0, f_1 : Y \to X$ *deux applications continues et homotopes entre deux espaces topologiques compacts, alors ces applications induisent les mêmes homomorphismes de groupes :*

$$K(X) \xrightarrow[K(f_1)]{K(f_0)} K(Y) \qquad \textit{et} \qquad \tilde{K}(X) \xrightarrow[\tilde{K}(f_1)]{\tilde{K}(f_0)} \tilde{K}(Y)$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}K(f_i) : K(X) &\longrightarrow K(Y)\\ [E] &\longmapsto [f_i^*(E)]\end{aligned}$$

Comme f_0 et f_1 sont homotopes, la proposition 2.41 de [**2**] implique que les fibrés induits sont isomorphes, i.e. $f_0^*(E) \cong f_1^*(E)$, ainsi les deux applications $K(f_0)$ et $K(f_1)$ sont identiques. De plus, le diagramme

$$\begin{tikzcd} & K(X) \arrow[dd, "K(f_i)"] \\ \mathbb{Z} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & K(Y) \end{tikzcd}$$

commute, ce qui permet de définir $\tilde{K}(f_i) : \tilde{K}(X) \to \tilde{K}(Y)$. Puisque $K(f_0) = K(f_1)$, on a $\tilde{K}(f_0) = \tilde{K}(f_1)$. □

Corollaire 1.29. *Si X et Y sont deux espaces compacts ayant le même type d'homotopie, alors $K(X) \cong K(Y)$ et $\tilde{K}(X) \cong \tilde{K}(Y)$.*

Proposition 1.30. *Supposons que X soit la réunion disjointe d'un nombre fini d'ouverts $X_1, \ldots, X_n$, alors*

$$K(X) \cong K(X_1) \oplus \ldots \oplus K(X_n)$$

Démonstration. Le théorème de recollement 2.5 de [**2**] implique qu'un fibré vectoriel sur X est caractérisé par ses restrictions sur chaque ouvert X_i, on en déduit que $\Phi(X) \cong \Phi(X_1) \times \ldots \times \Phi(X_n)$ et on obtient le résultat voulu en appliquant le foncteur S qui est additif. $\square$

Remarque 1.31. La proposition précédente est fausse pour $\tilde{K}(X)$. Par exemple, si on prend un espace topologique fini discret $X = \{x_0, x_1\}$, on a $\tilde{K}(X) \cong \mathbb{Z}$ et $\tilde{K}(\{x_i\}) \cong 0$, pour $i \in \{0, 1\}$.

Nous avons défini en 1.24 la K–théorie d'un espace localement compact comme étant la K–théorie réduite de son compactifié d'Alexandroff. Comme tout espace compact est localement compact, on s'attend à ce que cette définition donne le même groupe de K–théorie que dans la définition initiale.

Proposition 1.32. *Soit X un espace compact, alors $\tilde{K}(X^+) \cong K(X)$.*

Démonstration. Nous commencerons par montrer que la compactification d'un espace compact est l'adjonction disjointe d'un point, c'est-à-dire, que $X^+ = X \sqcup \{\infty\}$. En effet, par définition de la compactification, on ajoute à la topologie de X les voisinages du point ∞, définis comme la réunion de ce point et d'un ouvert de X tel que son complémentaire est compact dans X. Comme X est compact, tout fermé est compact et donc tout ouvert satisfait la propriété souhaitée. En particulier, l'ouvert vide la satisfait, ainsi le sous-ensemble $\{\infty\}$ est un ouvert du compactifié. Ainsi, un ouvert de X^+ est la réunion d'un ouvert de X et d'un ouvert de l'espace $\{\infty\}$, ce qui correspond bien à la topologie de la réunion disjointe. Ainsi, par la proposition 1.30, on a

$$\begin{aligned} K(X^+) &= K(X \sqcup \{\infty\}) \\ &\cong K(X) \oplus K(\{\infty\}) \\ &\cong K(X) \oplus \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Comme $\tilde{K}(X^+) \cong {}^{K(X^+)}\!/_{\mathbb{Z}}$, on a bien $\tilde{K}(X^+) \cong K(X)$. $\square$

Définition 1.33. Soit E un fibré vectoriel sur X, posons,

$$\begin{aligned} r_E : X &\longrightarrow \mathbb{N} \\ x &\longmapsto \dim_k(E_x) \end{aligned}$$

La remarque 2.8 de [**2**] indique que r_E est une fonction localement constante. Posons

$$H^0(X, \mathbb{N}) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{N} | \ f \text{ est localement constante } \} = C(X, \mathbb{N})$$

muni de la structure de monoïde abélien : $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$. Ainsi, r_E induit un homomorphisme de monoïdes abéliens

$$\begin{aligned} r : \Phi(X) &\longrightarrow H^0(X, \mathbb{N}) \\ \bar{E} &\longmapsto r_E \end{aligned}$$

Comme $S(H^0(X,\mathbb{N})) = H^0(X,\mathbb{Z}) = C(X,\mathbb{Z})$, r induit un homomorphisme de groupes abéliens

$$r : K(X) \longrightarrow H^0(X,\mathbb{Z})$$

REMARQUE 1.34. Le groupe $H^0(X,\mathbb{Z})$ est appelé le *premier groupe de cohomologie de Cech* de X à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

PROPOSITION 1.35. *On a la suite exacte courte, canoniquement scindée :*

$$0 \longrightarrow \ker(r) \longrightarrow K(X) \xrightarrow{r} H^0(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

De plus, si X est connexe, $\ker(r) \cong \tilde{K}(X)$.

DÉMONSTRATION. Commençons par constuire une section de l'homomorphisme de monoïdes abéliens :

$$r : \Phi(X) \longrightarrow H^0(X,\mathbb{N})$$

Soit $f \in H^0(X,\mathbb{N})$ une fonction localement constante dans $\mathbb{N}$; comme X est compact, f ne prend qu'un nombre fini de valeures $n_1, \ldots, n_p$ et donc

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} \underbrace{f^{-1}(\{n_i\})}_{=:\, X_i}$$

Comme $\mathbb{N}$ est discret, les sous-ensembles X_i sont ouverts. Considérons $E_i = X_i \times k^{n_i}$ le fibré trivial sur X_i de dimension n_i. Posons E_f le recollement sur X des fibrés E_i (ainsi, la restriction à X_i de E_f est le fibré E_i). Définissons la section cherchée par

$$\begin{aligned} \sigma : H^0(X,\mathbb{N}) &\longrightarrow \Phi(X) \\ f &\longmapsto \bar{E}_f \end{aligned}$$

Il est aisé de vérifier que σ est un homomorphisme de monoïdes abéliens tel que $r \circ \sigma = \mathrm{id}_{H^0(X,\mathbb{N})}$. Ainsi, en appliquant le foncteur S, on obtient un section en K–théorie $\sigma : H^0(X,\mathbb{Z}) \to K(X)$ ce qui prouve que la suite de départ est exacte et scindée.

Supposons maintenant que X est connexe, les fonctions localement constantes dans $\mathbb{Z}$ sont alors les fonctions constantes, on obtient donc un isomorphisme entre $H^0(X,\mathbb{Z})$ et $\mathbb{Z}$. Ainsi, σ est définit par

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{Z} &\longrightarrow K(X) \\ n &\longmapsto [\theta_m] - [\theta_q] \qquad \text{où } n = m - q, \quad m, q \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

ce qui correspond exactement à l'homomorphisme $K(\pi)$ définissant la K–théorie réduite de X.

Comme la suite exacte donnée dans l'énoncé est scindée, on a $\ker(r) \cong \operatorname{coker}(\sigma)$, or $\sigma = K(\pi)$, ainsi

$$ker(r) \cong \operatorname{coker}(\sigma) \cong \operatorname{coker}(K(\pi)) \cong \tilde{K}(X)$$

ce qui termine la démonstration.

□

DÉFINITION 1.36. Si X est connexe, on pose

$$\Phi_n(X) = \left\{ \bar{E} \in \Phi(X) \middle| \operatorname{rang}(\bar{E}) = n \right\}$$

L'ensemble des classes d'isomorphies de fibrés vectoriels sur X de rang n. La somme directe de fibrés nous donne des applications

$$\begin{aligned} \Phi_n(X) \times \Phi_m(X) &\longrightarrow \Phi_{n+m}(X) \\ (\bar{E}, \bar{F}) &\longmapsto \overline{E \oplus F} \end{aligned}$$

On obtient donc un système inductif dont la colimite, $\Phi'(X)$, est munie d'une structure de monoïde abélien par la somme directe.

Remarque 1.37. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'application

$$\begin{aligned} \varphi_n : \Phi_n(X) &\longrightarrow \ker(r) \subseteq K(X) \\ \bar{E} &\longmapsto [E] - [\theta_n] \end{aligned}$$

L'image de φ_n est dans le noyau de r car E et θ_n sont de même rang. Par la propriété universelle des colimites, on obtient un homomorphisme de monoïde

$$\varphi : \Phi'(X) \longrightarrow \ker(r)$$

Proposition 1.38. *L'homomorphisme de monoïde φ décrit dans la remarque précédente est un isomorphisme. Ainsi, $\Phi'(X)$ est un groupe abélien.*

4. Calculs de $K(S^1)$

Nous calculons ici la K–théorie réelle et complexe du cercle et citons celle de certaines sphères. Rappelons que $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Proposition 1.39. *Soit E un $\mathbb{K}$-fibré vectoriel de dimension n sur le cercle S^1, alors il existe un isomorphisme $\lambda \in \mathrm{GL}(\mathbb{K}^n)$ tel que*

$$E \cong {}^{[0,1]\times\mathbb{K}^n}\!/\!_{\sim}$$

où $(0, \xi) \sim (1, \lambda(\xi))$ pour tout $\xi \in \mathbb{K}^n$.

Démonstration. Considérons que le cercle est donné par le quotient de l'intervalle $[0, 1]$ par la relation identifiant les points 0 et 1. Notons π l'application quotient de $[0, 1]$ sur le cercle et $p : E \to S^1$ l'application associée au fibré E. Posons $F = \pi^*E$, le fibré induit par E et π sur $[0, 1]$. Comme $[0, 1]$ est contractile, tous ses fibrés sont triviaux. Ainsi, il existe un isomorphisme de fibrés α entre F et $[0, 1] \times \mathbb{K}^n$ le fibré trivial de dimension n. On obtient alors un isomorphisme d'espaces vectoriel $\alpha_t : F_t \to \{t\} \times \mathbb{K}^n$ sur chaque fibre de F, que l'on peut voir, en identifiant chaque fibre à $\mathbb{K}^n$ comme un isomorphisme $\tilde{\alpha}_t : \mathbb{K}^n \to \{t\} \times \mathbb{K}^n$. Posons alors

$$G = {}^{I\times\mathbb{K}^n}\!/\!_{\sim}$$

où $\tilde{\alpha}_0(\xi) \sim \tilde{\alpha}_1(\xi)$ pour tout ξ dans $\mathbb{K}^n$. Montrons alors que G est isomorphe à E. Définissons cette isomorphisme sur chaque fibre de E par

$$\beta_t : E_t \to \mathbb{K}^n \to F_t \to \{t\} \times \mathbb{K}^n \to G_t$$

pour tout t dans $[0,1]$. Et identifions β_0 et β_1. On obtient alors un morphisme de fibré entre G et E car l'application $t \mapsto \beta_t$ est clairement continue. Ce morphisme est même un isomorphisme puisqu'il l'est sur chaque fibre.

Sans pertes de généralité, on peut supposer que $\tilde{\alpha}_0$ est (presque) l'identité, à savoir

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_0 : \mathbb{K}^n &\longrightarrow \{0\} \times \mathbb{K}^n \\ \xi &\longmapsto \{0\} \times \xi \end{aligned}$$

Ainsi, en posant

$$\lambda : \mathbb{K}^n \xrightarrow{\tilde{\alpha}_1} \{1\} \times \mathbb{K}^n \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{K}^n$$

on vérifie bien que λ est un isomorphisme et qu'il vérifie la propriété exigée. □

Proposition 1.40. *Soit E un $\mathbb{K}$-fibré vectoriel de dimension n sur le cercle S^1. Par la proposition précédente il existe un isomorphisme $\lambda \in \mathrm{GL}(\mathbb{K}^n) \cong \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que*

$$E \cong {}^{[0,1]\times\mathbb{K}^n}\!\big/\!_{\sim}$$

alors, E est trivial si et seulement si λ est dans la même composante de connexité par arcs que l'identité dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration. Soit $\alpha : S^1 \times \mathbb{K}^n \to {}^{[0,1]\times\mathbb{K}^n}\!\big/\!_{\sim}$ un morphisme de $\mathbb{K}$-fibrés sur S^1. Le morphisme α induit une application continue

$$\begin{aligned} \gamma : [0,1] &\longrightarrow \mathrm{End}(\mathbb{K}^n) \cong \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) \\ t &\longmapsto \alpha_t \end{aligned}$$

où $\alpha_t : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ est induit par α sur la fibre en $t \in [0,1]$, avec $\alpha_0 = \alpha_1 \circ \lambda$.

Sans pertes de généralité, on peut supposer que α_1 est l'identité, ainsi $\alpha_0 = \lambda$. L'application γ est donc un chemin dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ entre λ et l'identité. Ainsi, α est un isomorphisme de fibrés vectoriels si et seulement si chaque application induite α_t est un isomorphisme, c'est-à-dire que chaque α_t est dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, et donc si et seulement si γ est un chemin dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ entre λ et l'identité. □

Corollaire 1.41. *Tous les fibrés vectoriels complexes sur le cercle sont triviaux.*

Démonstration. Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs, la proposition précédente nous permet de conclure. □

Corollaire 1.42. $K_{\mathbb{C}}(S^1) \cong \mathbb{Z}$ *et* $\tilde{K}_{\mathbb{C}}(S^1) \cong 0$.

Démonstration. Le corollaire précédent implique qu'à isomorphisme près, les fibrés complexes du cercles sont caractérisés par leur dimension, i.e. $\Phi(\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(S^1))$ est isomorphe à $\mathbb{N}$ et donc $K_{\mathbb{C}}(S^1) \cong \mathbb{Z}$ car $S(\mathbb{N}) \cong \mathbb{Z}$.

Par définition de la K–théorie réduite, on a la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{K(\pi)} \mathbb{Z} \longrightarrow \tilde{K}_{\mathbb{C}}(S^1) \longrightarrow 0$$

Comme $K(\pi)(1) = 1$; $K(\pi)$ est l'identité et donc $\tilde{K}_{\mathbb{C}}(S^1) \cong 0$. □

Corollaire 1.43. $K_{\mathbb{R}}(S^1) \cong \mathbb{Z} \cong {}^{\mathbb{Z}}\!/\!_{2\mathbb{Z}}$ *et* $\tilde{K}_{\mathbb{R}}(S^1) \cong {}^{\mathbb{Z}}\!/\!_{2\mathbb{Z}}$.

Démonstration. Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ possède deux composantes connexes par arcs : les matrices de déterminant positif et celles de déterminant négatif. Ainsi, les fibrés vectoriels réels sur le cercle sont caractérisés par leur dimension et le signe du déterminant de l'isomorphisme λ qui leur est associé dans la proposition 1.39. En d'autres termes, on a un isomorphisme de monoïdes

$$\Phi_{\mathbb{R}}(S^1) \cong \mathbb{N} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

En appliquant le foncteur de symétrisation on obtient donc

$$K_{\mathbb{R}}(S^1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Car ce foncteur est additif et que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est abélien.

On a donc la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{K(\pi)} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \tilde{K}_{\mathbb{R}}(S^1) \longrightarrow 0$$

et $k(\pi)(n) = (n, 0)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\tilde{K}_{\mathbb{R}}(S^1) &\cong (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})/(\mathbb{Z} \oplus 0)\\ &\cong 0 \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\\ &\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\end{aligned}$$

□

Mentionnons encore les résultats suivants :

Proposition 1.44. *La K–théorie des sphères de dimension* 2 *et* 3 *est :*

$$\begin{aligned}
K_{\mathbb{C}}(S^2) &\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \tilde{K}_{\mathbb{C}}(S^2) &\cong \mathbb{Z}\\
K_{\mathbb{C}}(S^3) &\cong \mathbb{Z} & \tilde{K}_{\mathbb{C}}(S^3) &\cong 0\\
K_{\mathbb{R}}(S^2) &\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \tilde{K}_{\mathbb{R}}(S^2) &\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\\
K_{\mathbb{R}}(S^3) &\cong \mathbb{Z} & \tilde{K}_{\mathbb{R}}(S^3) &\cong 0
\end{aligned}$$

5. Deuxième construction de $K(X)$

Nous donnons ici une deuxième construction du K–groupe d'un espace localement compact. Cette construction est basée sur des classes d'équivalences de morphismes entre fibrés vectoriels et pourrait être généralisée à des chaînes finies de morphismes de fibrés

Dans cette section, X est un espace topologique localement compact.

Définition 1.45. Soit $\alpha : E \to F$ un morphisme de fibrés sur X, on appelle *support de* α l'ensemble

$$\mathrm{supp}(\alpha) = \{x \in X | \alpha_x : E_x \to F_x \text{ n'est pas un isomorphisme}\}$$

Lemme 1.46. *Soit* $\alpha : E \to F$ *un morphisme de fibré sur* X*, alors le support de* α *est fermé dans* X*.*

DÉMONSTRATION. Montrons que le complémentaire de supp(α) dans X est ouvert. Soit x_0 un point de cet ensemble, il existe un voisinage ouvert U de ce point qui trivialise E et F. On a donc le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} E_U \cong U \times \mathbb{K}^n \arrow[rr, "\alpha_U"] \arrow[dr] & & U \times \mathbb{K}^m \cong F_U \arrow[dl] \\ & U & \end{tikzcd}$$

La restriction α_U du morphisme α à U correspond alors a une application continue

$$\begin{aligned} f : U &\longrightarrow \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \\ x &\longmapsto (\alpha_x) \end{aligned}$$

où (α_x) est la matrice de l'application linéaire entre les fibres en x. Comme α_{x_0} est supposé être un isomorphisme, les dimensions des fibres doivent être identiques, i.e. $m = n$. Composons alors f avec l'application continue du determinant :

$$\begin{aligned} \det \circ f : U &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto \det(\alpha_x) \end{aligned}$$

Par hypothèse, $\det \circ f(x_0) \neq 0$ et comme cette application est continue, il existe un voisinage V de x_0 dans U tel que $\det \circ f(V) \neq 0$, c'est-à-dire, il existe un voisinage V de x_0 dans X tel que α_x est un isomorphisme pour tout point x de V, ce qui prouve que le complémentaire du support de α est ouvert. □

DÉFINITION 1.47. Un triple (E, F, α) est à *support compcat* si le support de α est compact. Notons $\delta(X)$ l'ensemble des triples à support compact de X et définissons une relation sur cet ensemble de la manière suivante : Deux triples (E, F, α) et (E', F', α') sont dit équivalents s'ils sont homotopes dans $\delta(X)$, c'est-à-dire, si et seulement s'il existe des isomorphismes

$$\beta : E \longrightarrow E' \quad \text{et} \quad \gamma : F \longrightarrow F'$$

et une homotopie

$$H : E \times [0, 1] \longrightarrow F$$

telle que l'application

$$\begin{aligned} H_t : E &\longrightarrow F \\ \xi &\longmapsto H(\xi, t) \end{aligned}$$

soit un morphisme de fibrés à support compact pour tout t dans l'intervalle $[0, 1]$ avec $H_0 = \alpha$ et telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "H_1"] \arrow[d, "\cong"', "\beta"] & F \arrow[d, "\cong"', "\gamma"] \\ E' \arrow[r, "\alpha'"] & F' \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

LEMME 1.48. *La relation définie précédemment sur $\delta(X)$ est une relation d'équivalence.*

Démonstration. La réflexivité et la symétrie sont évidentes, il suffit donc de montrer la transitivité. Soit $(E,F,\alpha)\sim(E',F',\alpha')$ et $(E',F',\alpha)\sim(E'',F'',\alpha'')$ deux paires de triples équivalents, alors il existe quatre isomorphismes

$$\begin{aligned} \beta &: E \longrightarrow E' & \qquad\qquad \gamma &: F \longrightarrow F' \\ \beta' &: E' \longrightarrow E'' & \gamma' &: F' \longrightarrow F'' \end{aligned}$$

et deux homotopies

$$H : E\times[0,1] \longrightarrow F \quad \text{ et } \quad H' : E'\times[0,1]\longrightarrow F'$$

telles que H_t et H'_t soient des morphismes de fibrés à support compact pour tout t dans $[0,1]$, avec $H_0=\alpha$ et $H'_0=\alpha'$ et telles que les diagrammes suivants commutent

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "H_1"] \arrow[d, "\beta"] & F \arrow[d, "\gamma"] \\ E' \arrow[r, "\alpha'"] & F' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E' \arrow[r, "H'_1"] \arrow[d, "\beta'"] & F' \arrow[d, "\gamma'"] \\ E'' \arrow[r, "\alpha''"] & F'' \end{tikzcd}$$

Posons alors

$$G : E\times[0,1]\longrightarrow F$$

définie par $G_t=\gamma^{-1}\circ H'_t\circ\beta$ et posons également

$$\begin{aligned} H'' : E\times[0,1] &\longrightarrow F \\ (\xi,t) &\longrightarrow \begin{cases} H(\xi,2t) & ,\ t\in[0,\frac{1}{2}] \\ G(\xi,2t-1) & ,\ t\in[\frac{1}{2},1] \end{cases} \end{aligned}$$

On a bien

$$\begin{aligned} H_1 &= \gamma^{-1}\circ\alpha'\circ\beta \\ &= \gamma^{-1}\circ H'_1\circ\beta \\ &= G_0 \end{aligned}$$

ainsi H'' est continue. De plus, $H''_0=H_0=\alpha$ et $H''_1=G_1=\gamma-1\circ H'_1\circ\beta$ et donc le diagramme

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "H''_0"] \arrow[d, "\beta'\circ\beta"] & F\gamma'\circ\gamma \arrow[d] & \\ E'' \arrow[r, "\alpha''"] & F'' & \gamma \end{tikzcd}$$

commute car

$$\begin{aligned} \gamma'\circ\gamma\circ H''_1 &= \gamma'\circ\gamma\circ\gamma'^{-1}\circ H'_1\circ\beta \\ &= \gamma'\circ H'_1\circ\beta \\ &= \alpha''\circ\beta'\circ\beta \end{aligned}$$

et donc $(E,F,\alpha)\sim(E'',F'',\alpha'')$. $\square$

Remarque 1.49. Deux triples $(E,F,\alpha),(E',F',\alpha')$ isomorphes, c'est-à-dire tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\cong"'] & F \arrow[d, "\cong"] \\ E' \arrow[r, "\alpha'"] & F' \end{tikzcd}$$

commute, sont clairement équivalents.

Proposition et Définition 1.50. *Notons $\Delta(X)$ le quotient de $\delta(X)$ par la relation d'équivalence que l'onvient de définir. Notons $d(E,F,\alpha)$ la classe du triple (E,F,α) dans ce quotient et posons*

$$d(E,F,\alpha)+d(E',F',\alpha')=d(E\oplus E',F\oplus F',\alpha\oplus\alpha')$$

alors cette loi donne une structure de monoïde abélien à $\Delta(X)$.

Démonstration. Montrons d'abord que cette loi $+$ est bien définie. Pour cela, montrons que le support de $\alpha\oplus\alpha'$ est compact. On a

$$\operatorname{supp}(\alpha\oplus\alpha')\subseteq\operatorname{supp}(\alpha)\cup\operatorname{supp}(\alpha')$$

or le support est un sous-ensemble fermé et la réunion finie de compacts est compacte. Pour terminer la preuve, on vérifie aisément que la loi $+$ est compatible avec la relation d'équivalence, l'élément neutre est clairement la classe du triple $(0,0,0)$ et la somme est commutative car les triples $(E\oplus E',F\oplus F',\alpha\oplus\alpha')$ et $(E'\oplus E,F'\oplus F,\alpha'\oplus\alpha)$ sont isomorphes et donc équivalents. □

Définition 1.51. Notons $\Delta_0(X)$ l'ensemble des classes d'équivalences de triples à support vide, i.e.

$$\Delta_0(X)=\{d(E,F,\alpha)\,|\,(E,F,\alpha)\in\delta(X)\text{ et }\operatorname{supp}(\alpha)=\varnothing\}$$

Remarquons que si le support d'un triple (E,F,α) est vide, alors α est un isomorphisme entre E et F.

Proposition 1.52. *$\Delta_0(X)$ est un sous-monoïde de $\Delta(X)$.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que $\Delta_0(X)$ est stable pour la loi de $\Delta(X)$. Pour cela, il suffit d'observer que le support de la somme de deux triples à support vide est également vide puisque

$$\operatorname{supp}(\alpha\oplus\alpha')\subseteq\operatorname{supp}(\alpha)\cup\operatorname{supp}(\alpha')$$

□

Lemme 1.53. *Si X est compact, la classe $d(E,F,\alpha)$ d'un triple (E,F,α) ne dépend pas du morphisme α.*

Démonstration. Puisque X est compact et que le support de tout morphisme est fermé par le lemme 1.46, tout morphisme est à support compact. Ainsi le morphisme nul $0:E\to F$ qui envoie tout point sur le vecteur nul dans la fibre correspondante est à support compact. Nous allons montrer que tout triple (E,F,α) est équivalents au triple $(E,F,0)$. Pour cela, il suffit de considérer l'homotopie

$$\begin{aligned} H: E\times[0,1] &\longrightarrow F\\ (\xi,t)&\longmapsto t\alpha(\xi)\end{aligned}$$

On a bien $H_0=0$ et $H_1=\alpha$, ainsi $d(E,F,\alpha)=d(E,F,0)$. □

Définition 1.54. Notons alors, lorsque X est compact, $d(E,F)$ au lieu de $d(E,F,\alpha)$.

Théorème 1.55. *Le quotient* ${}^{\Delta(X)}\!/_{\Delta_0(X)}$ *est isomorphe à* $K(X)$.

Démonstration. Prouvons-le pour un espace X compact. Remarquons que par le lemme 1.53, on a les deux propriétés suivantes sur $\Delta_0(X)$:

(1) $d(E,F) \in \Delta_0(X) \iff E \cong F$

(2) $d(E,F) = d(E',F')$ dans $\Delta_0(X) \iff E \cong E'$ et $F \cong F'$

Commençons par montrer que ${}^{\Delta(X)}\!/_{\Delta_0(X)}$ est un groupe, plus précisément, montrons que l'inverse de l'élément $[d(E,F)]$ est $[d(F,E)]$. En effet,

$$[d(E,F)] + [d(F,E)] = [d(E \oplus F, F \oplus E)] = 0$$

car $E \oplus F \cong F \oplus E$. Posons alors

$$\begin{aligned} \varphi : {}^{\Delta(X)}\!/_{\Delta_0(X)} &\longrightarrow K(X) \\ [d(E,F)] &\longmapsto [E] - [F] \end{aligned}$$

I) φ est bien définie. En effet, si $[d(E,F)] = [d(E',F')]$, alors

$$\begin{aligned} [d(E,F)] - [d(E',F')] &= [d(E,F)] + [d(F',E')] \\ &= [d(E \oplus F', F \oplus E')] \end{aligned}$$

appartient à $\Delta_0(X)$. Ainsi,

$$E \oplus F' \cong F \oplus E'$$

et donc $[E] - [F] = [E'] - [F']$ dans $K(X)$ par la proposition 1.10.

II) φ est linéaire. En effet, soit $[d(E,F)]$ et $[d(G,H)]$ deux éléments, alors

$$\begin{aligned} \varphi([d(E,F)] + [d(G,H)]) &= \varphi([d(E \oplus G, F \oplus H)]) \\ &= [E \oplus G] - [F \oplus H] \\ &= [E] + [G] - [F] - [H] \\ &= ([E] - [F]) + ([G] - [H]) \\ &= \varphi([d(E,F)]) + \varphi([d(G,H)]) \end{aligned}$$

III) φ est injective. En effet, si $[d(E,F)]$ est dans le noyau de φ, alors son image est nulle, c'est-à-dire, $[E] - [F] = 0$. Il existe donc un fibré G tel que $E \oplus G \cong F \oplus G$. Ainsi

$$\begin{aligned} 0 &= [d(E \oplus G, F \oplus G)] \\ &= [d(E,F)] + [d(G,G)] \\ &= [d(E,F)] \end{aligned}$$

car $d(G,G)$ appartient à $\Delta_0(X)$. Donc $\ker(\varphi)$ est trivial.

IV) φ est surjective. En effet, puisque tout élément de $K(X)$ s'écrit sous la forme $[E] - [F]$, on a clairement $\varphi([d(E,F)]) = [E] - [F]$.

On a donc prouvé que φ est un isomorphisme de groupes. $\square$

Remarque 1.56. Pour prouver le théorème précédent sur un espace localement compact X, il faut travailler un peu plus. En effet, $K(X)$ est alors définit par la K–théorie réduite de son compactifié X^+, il faut donc étendre nos fibrés vectoriels sur cet espace. Nous pouvons tout de même donner une description de cette construction. Soit (E, F, α) un triple à support compact, on le déforme sans modifier son support de manière à obtenir un triple (E', F', α') équivalent tel que les fibrée E' et F' soient triviaux en dehors d'un compact C de X et tel que α' soit l'identité en dehors de C. Ceci nous permet d'étendre notre triple en un triple (E'', F'', α'') sur X^+, où le complémentaire de C est un voisinage trivialisant du point ∞. L'isomorphimse cherché alors $[d(E, F, \alpha)] \longmapsto [E''] - [F'']$.

CHAPITRE 2

$K(X,Y)$

1. Le groupe de Grothendieck d'un foncteur

DÉFINITION 2.1. Soit $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux catégories additives. Un foncteur additif $\varphi : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ est dit *quasi-surjectif* si tout objet de $\mathscr{C}$ est un facteur direct de l'image par φ d'un objet de $\mathscr{C}$.

REMARQUE 2.2. Soit $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux catégories additives et $\varphi : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ un foncteur additif. Rappelons que $\tilde{\mathscr{C}}$ est la catégorie pseudo-abélienne associée à $\mathscr{C}$ (voir 2.50 de [**2**]). Si φ est plein, respectivement fidèle, respectivement quasi-surjectif, alors le foncteur $\tilde{\varphi} : \tilde{\mathscr{C}} \to \tilde{\mathscr{C}'}$ associé à φ est plein, respectivement fidèle, respectivement quasi-surjectif.

Dans cette section φ désignera un foncteur quasi-surjectif entre deux catégories additives $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

DÉFINITION 2.3. Soit $\varphi : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ un foncteur quasi-surjectif, posons

$$\Gamma(\varphi) = \left\{(E, F, \alpha)|\ \varphi(E) \overset{\alpha}{\cong} \varphi(F)\right\}$$

l'ensemble des *triples* (E, F, α) où E et F sont des objets de $\mathscr{C}$ et où α est un isomorphisme entre $\varphi(E)$ et $\varphi(F)$. Deux triples (E, F, α) et (E', F', α') sont *isomorphes* s'il existe des isomorphismes

$$f : E \longrightarrow E' \quad \text{et} \quad g : F \longrightarrow F'$$

tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\varphi(E) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi(f)"] & \varphi(F) \arrow[d, "\varphi(g)"] \\
\varphi(E') \arrow[r, "\alpha'"] & \varphi(F')
\end{tikzcd}$$

On note alors $(E, F, \alpha) \cong (E', F', \alpha')$. Un triple (E, F, α) est dit *élémentaire* si $E = F$ et si α est homotope à l'identité de $\varphi(E)$ dans l'ensemble $\mathrm{Aut}(\varphi(E))$ des automorphismes de $\varphi(E)$. Notons $0 = (0, 0, 0)$ le triple élémentaire où 0 est l'objet nul de $\mathscr{C}$. La *somme* de deux triples (E,F,α) et (E',F',α') est le triple

$$(E,F,\alpha)\oplus(E',F',\alpha')=(E\oplus E',F\oplus F',\alpha\oplus\alpha')$$

Définissons maintenant une relation d'équivalence sur $\Gamma(\varphi)$. Deux triples σ et σ' sont dits *équivalents*, et on le notera $\sigma\sim\sigma'$, si et seulement s'il existe deux triples élémentaires τ et τ' tels que $\sigma+\tau\cong\sigma'+\tau'$.

Proposition 2.4. *La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\Gamma(\varphi)$.*

Démonstration. Soit $\sigma=(E,F,\alpha),\sigma'=(E',F',\alpha')$ et $\sigma''=(E'',F'',\alpha'')$ trois triples de $\Gamma(\varphi)$, on a $\sigma+0=\sigma+0$ ce qui prouve la réflexivité car l'égalité est un cas particulier d'isomorphisme. La symétrie est évidente par définition de la relation. Supposons finalement que $\sigma\sim\sigma'$ et $\sigma'\sim\sigma''$, il existe alors des triples élémentaires τ,τ',ω et ω' tels que

$$\sigma+\tau\cong\sigma'+\tau'\quad\text{ et }\quad\sigma'+\tau'\cong\sigma''+\tau''$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}\sigma+\tau+\omega'&\cong\sigma'+\tau'+\omega'\\&\cong\sigma''+\tau'+\omega''\end{aligned}$$

car la somme de triples est commutative et associative à isomorphisme près. Comme la somme de deux triples élémentaires est également élémentaire on obtient l'équivalence entre σ et σ'' ce qui prouve la transitivité de la relation $\sim$. □

Définition 2.5. Soit φ un foncteur quasi-surjectif. On pose alors

$$K(\varphi)={}^{\Gamma(\varphi)}\!/_{\sim}$$

que l'on appelle le *groupe de Grothendieck du foncteur* φ. On note $d\sigma=d(E,F,\alpha)$ la classe du triple $\sigma=(E,F,\alpha)$ dans $K(\varphi)$.

Proposition 2.6. *$K(\varphi)$ est un monoïde abélien.*

Démonstration. Commençons par montrer que la somme de triples est bien définie sur $K(\varphi)$. En effet, si σ, respectivement τ, est équivalent à σ', respectivement τ', alors il existe des triples élémentaires μ,μ',ν et ν' tels que

$$\sigma+\mu\cong\sigma'+\mu'\quad\text{ et }\quad\tau+\nu\cong\tau'+\nu'$$

On obtient ainsi :

$$\sigma+\tau+\mu+\nu\cong\sigma'+\tau'+\mu'+\nu'$$

et comme $\mu+\nu$ et $\mu'+\nu'$ sont élémentaires, $\sigma+\tau$ et $\sigma'+\tau'$ sont équivalents. La somme sur $K(\varphi)$ est alors définie par :

$$d(E,F,\alpha)+d(E',F',\alpha')=d(E\oplus E',F\oplus F',\alpha\oplus\alpha')$$

L'associativité de cette somme découle de celle de la somme sur $\Gamma(\varphi)$, qui est elle-même due à l'associativité de la somme directe dans $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. Les sceptiques sont invités à se convaincre de ceci par leur propre expérience. Ajoutons que le triple élémentaire $0=d0$ est clairement l'élément neutre de $K(\varphi)$. □

Proposition 2.7. *$K(\varphi)$ est un groupe abélien et $-d(E,F,\alpha)=d(F,E,\alpha^{-1})$.*

Démonstration.

$$\begin{aligned} d(E,F,\alpha)+d(F,E,\alpha^{-1}) &= d(E\oplus F, F\oplus E, \alpha\oplus\alpha^{-1}) \\ &= d(E\oplus F, E\oplus F, \beta) \end{aligned}$$

où β est l'isomorphisme induit par la propriété universelle du coproduit de la manière suivante :

$$\begin{tikzcd} \varphi(E) \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, hook] & & \varphi(F) \arrow[dr, hook] & \\ & \varphi(E)\oplus\varphi(F) \arrow[rr, dashed, "\exists!\beta"] & & \varphi(E)\oplus\varphi(F) \\ \varphi(F) \arrow[rr, "\alpha^{-1}"] \arrow[ur, hook] & & \varphi(E) \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

L'isomorphisme entre les triples $(E\oplus F, F\oplus E, \alpha\oplus\alpha^{-1})$ et $(E\oplus F, E\oplus F, \beta)$ est exhibé par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \varphi(E)\oplus\varphi(F) \arrow[r, "\alpha\oplus\alpha^{-1}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & \varphi(F)\oplus\varphi(E) \arrow[d, "\nu"] \\ \varphi(E)\oplus\varphi(F) \arrow[r, "\beta"] & \varphi(E)\oplus\varphi(F) \end{tikzcd}$$

où ν est induit par la propritété universelle du coproduit de la manière suivante :

$$\begin{tikzcd} \varphi(E) \arrow[rr, equal] \arrow[dr, hook] & & \varphi(F) \arrow[dr, hook] & \\ & \varphi(F)\oplus\varphi(E) \arrow[rr, dashed, "\exists!\nu"] & & \varphi(E)\oplus\varphi(F) \\ \varphi(F) \arrow[rr, equal] \arrow[ur, hook] & & \varphi(E) \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

Par construction de β, on a $\beta = \nu\circ\alpha\oplus\alpha^{-1}$. On peut voir ceci matriciellement, β correspond alors à la matrice

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha^{-1} \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Dans le groupe $\mathrm{Aut}(\varphi(E)\oplus\varphi(F))$ on a l'identité suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\alpha^{-1} \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où 1 représente l'identité. Définissons alors une application continue

$$\begin{aligned} \sigma : I &\longrightarrow \mathrm{Aut}(\varphi(E)\oplus\varphi(F)) \\ t &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 & -t\alpha^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -t\alpha^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a $\sigma(0) = \mathrm{id}$ et $\sigma(1) = \beta$, ainsi β est homotope à l'identité de $\varphi(E)\oplus\varphi(F)$ dans le groupe des automorphismes ce qui prouve que le triple $(E\oplus F, E\oplus F, \beta)$ est élémentaire et donc que $d(E\oplus F, E\oplus F, \beta) = 0$. $\square$

2. Propriétés de $K(\varphi)$

Proposition 2.8. *Dans $K(\varphi)$, $d(E,F,\alpha)=0$ si et seulement s'il existe deux objets S et T de $\mathscr{C}$ et deux isomorphismes $f : E\oplus S \longrightarrow T$ et $g : F\oplus S \longrightarrow T$ tels que $\varphi(g)\circ(\alpha\oplus \mathrm{id}_{\varphi(S)})\circ\varphi(f^{-1}) \simeq \mathrm{id}_{\varphi(T)}$ dans le groupe des automorphismes de $\varphi(T)$.*

Démonstration. La classe de (E,F,α) est nulle si et seulement s'il existe deux triples élémentaires $\sigma=(S,S,\eta)$ et $\tau=(T,T,\mu)$ tels que

$$(E,F,\alpha)+\sigma \cong 0+\tau \cong \tau$$

c'est-à-dire, si et seulement s'il existe de plus deux isomorphismes $f : E\oplus S \longrightarrow T$ et $g : F\oplus S \longrightarrow T$ tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\varphi(E)\oplus\varphi(S) \arrow[r, "\alpha\oplus\eta"] \arrow[d, "\varphi(f)"] & \varphi(F)\oplus\varphi(S) \arrow[d, "\varphi(g)"] \\
\varphi(T) \arrow[r, "\mu"] & \varphi(T)
\end{tikzcd}$$

or $\eta\simeq \mathrm{id}_{\varphi(S)}$ et $\mu\simeq\mathrm{id}_{\varphi(T)}$, on obtient donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{id}_{\varphi(T)} &\simeq \mu \\
&= \varphi(g)\circ(\alpha\oplus\eta)\circ\varphi(f^{-1}) \\
&\simeq \varphi(g)\circ(\alpha\oplus\mathrm{id}_{\varphi(S)})\circ\varphi(f^{-1})
\end{aligned}$$

qui est bien la relation cherchée. □

Il est intéressant d'observer que l'on retrouve le groupe de Grothendieck de la catégorie $\mathscr{C}$ si l'on suppose que la catégorie $\mathscr{C}'$ est nulle.

Proposition 2.9. *$K(\varphi)\cong K(\mathscr{C})$ si $\mathscr{C}'=0$.*

Démonstration. Si $\mathscr{C}'=0$, tout objet de $\Gamma(\varphi)$ est de la forme $(E,F,0)$. La relation d'isomorphie est alors $(E,F,0)\cong(E',F',0)$ si et seulement si $E\cong E'$ et $F\cong F'$. Un triple $(E,F,0)$ est élémentaire si et seulement si $E=F$. La relation d'équivalence sur $\Gamma(\varphi)$ est alors la suivante : $(E,F,0)\sim(E',F',0)$ si et seulement s'il existe deux objets G et H de $\mathscr{C}$ tels que

$$E\oplus G\cong E'\oplus H \quad \text{et} \quad F\oplus G\cong F'\oplus H$$

autrement dit, si

$$E\oplus F'\oplus G\oplus H\cong E'\oplus F\oplus G\oplus H$$

qui est la relation d'équivalence dans $K(\mathscr{C})$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
K(\varphi) &\longrightarrow K(\mathscr{C}) \\
d(E,F,0) &\longmapsto [E]-[F]
\end{aligned}$$

est un isomorphisme de groupes. □

La proposition suivante nous montre que la classe d'un triple (E,F,α), pour des fibrés E et F fixés, ne dépend que de la classe d'homotopie du morphisme α.

PROPOSITION 2.10. *Soit $d(E,F,\alpha)$ et $d(E,F,\alpha')$ deux éléments de $K(\varphi)$ tels que α et α' soient homotopes dans le groupe $\mathrm{Iso}(\varphi(E),\varphi(F))$, alors $d(E,F,\alpha) = d(E,F,\alpha')$.*

DÉMONSTRATION. On a

$$\begin{aligned} d(E,F,\alpha) - d(E,F,\alpha') &= d(E,F,\alpha) + d(F,E,\alpha'^{-1}) \\ &= d(E\oplus F, F\oplus E, \alpha\oplus\alpha'^{-1}) \\ &= d(E\oplus F, E\oplus F, \beta) \\ &= 0 \end{aligned}$$

où β est défini comme dans la preuve de la proposition 2.7. □

La somme dans $K(\varphi)$ possède de bonnes propriétés de composition comme nous le montre la proposition suivante. Cette propriété fort intéressante nous sera utile par la suite.

PROPOSITION 2.11. $d(E,F,\alpha) + d(F,G,\beta) = d(E,G,\beta\circ\alpha)$

DÉMONSTRATION. Comme déjà fait auparavant, on a

$$\begin{aligned} d(E,F,\alpha) + d(F,G,\beta) &= d(E\oplus F, F\oplus G, \alpha\oplus\beta) \\ &= d(E\oplus F, G\oplus F, \gamma) \end{aligned}$$

où γ est donné matriciellement par

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

On a de plus

$$\begin{aligned} d(E,G,\beta\circ\alpha) &= d(E,G,\beta\circ\alpha) + d(F,F,\mathrm{id}_{\varphi(F)}) \\ &= d(E\oplus F, G\oplus F, \beta\circ\alpha\oplus\mathrm{id}_{\varphi(F)}) \\ &= d(E\oplus F, G\oplus F, \gamma') \end{aligned}$$

où $\gamma' = \beta\circ\alpha\oplus\mathrm{id}_{\varphi(F)}$. Le morphisme $\gamma\circ\gamma'^{-1}$ est alors défini matriciellement par

$$\gamma\circ\gamma'^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

qui est homotope à l'identité de $\varphi(G)\oplus\varphi(F)$ par le même argument que dans la preuve de la proposition 2.7. Ainsi γ est homotope à γ' et par la proposition 2.10 on peut conclure que $d(E\oplus F, G\oplus F, \gamma) = d(E\oplus F, G\oplus F, \gamma')$ qui correspond bien à l'égalité cherchée. □

Le théorème suivant nous donne une suite exacte qui lie étroitement le groupe de Grothendieck d'un foncteur aux groupes de Grothendieck des catégories en jeu. Ce théorème à lui seul motive notre intérêt pour le groupe $K(\varphi)$.

THÉORÈME 2.12. *Soit $\varphi : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ un foncteur quasi-surjectif entre deux catégories additives, considérons les homomorphismes de groupes suivants :*

$$\begin{aligned} i : K(\varphi) &\longrightarrow K(\mathscr{C}) & \qquad j : K(\mathscr{C}) &\longrightarrow K(\mathscr{C}') \\ d(E,F,\alpha) &\longmapsto [E]-[F] & [E]-[F] &\longmapsto [\varphi(E)]-[\varphi(F)] \end{aligned}$$

alors on a la suite exacte

$$K(\varphi) \xrightarrow{i} K(\mathscr{C}) \xrightarrow{j} K(\mathscr{C}')$$

Si on suppose de plus qu'il existe un foncteur additif $\psi : \mathscr{C}' \to \mathscr{C}$ tel que les foncteurs $\varphi \circ \psi$ et $\mathrm{id}_{\mathscr{C}'}$ soient isomorphes, alors on obtient la suite exacte courte scindée

$$0 \longrightarrow K(\varphi) \xrightarrow{i} K(\mathscr{C}) \xrightarrow{j} K(\mathscr{C}') \longrightarrow 0$$

DÉMONSTRATION.

I) Montrons que $\operatorname{im} i \subseteq \ker j$ i.e. $j \circ i = 0$. Soit $d(E,F,\alpha) \in K(\varphi)$, alors

$$\begin{aligned} j \circ i(d(E,F,\alpha)) &= j([E]-[F]) \\ &= [\varphi(E)] - [\varphi(F)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

car α est un isomorphisme entre $\varphi(E)$ et $\varphi(F)$.

II) Montrons que $\ker j \subseteq \operatorname{im} i$. Soit $[E]-[F]$ un élément du noyau de j, on a ainsi $[\varphi(E)] - [\varphi(F)] = 0$, par la proposition 1.10, il existe un objet T' de $\mathscr{C}'$ tel que $\varphi(E) \oplus T' \cong \varphi(F) \oplus T'$. Comme φ est quasi-surjective, il existe un objet S' de $\mathscr{C}'$ et un objet T de $\mathscr{C}$ tels que $\varphi(T) \cong T' \oplus S'$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \varphi(E \oplus T) &\cong \varphi(E) \oplus \varphi(T) \\ &\cong \varphi(E) \oplus T' \oplus S' \\ &\cong \varphi(F) \oplus T' \oplus S' \\ &\cong \varphi(F) \oplus \varphi(T) \\ &\cong \varphi(F \oplus T) \end{aligned}$$

Soit δ un isomorphisme entre $\varphi(E \oplus T)$ et $\varphi(F \oplus T)$, on a alors

$$\begin{aligned} i(d(E \oplus T, F \oplus T, \delta)) &= [E \oplus T] - [F \oplus T] \\ &= ([E]-[F]) + ([T]-[T]) \\ &= [E]-[F] \end{aligned}$$

Ce qui prouve la première partie du théorème. Supposons maintenant l'existence d'un foncteur ψ comme dans l'ennoncé.

III) Montrons que i est injective. Soit $d(E,F,\alpha)$ un élément du noyau de i, on a ainsi $[E]-[F] = 0$. Il existe donc un objet T de $\mathscr{C}$ tel que $E \oplus T \cong F \oplus T$, ainsi

$$\begin{aligned} d(E,F,\alpha) &= d(E \oplus T, F \oplus T, \alpha \oplus \mathrm{id}_{\varphi(T)} \\ &= d(G,G,\beta) \end{aligned}$$

où $G = E \oplus T \cong F \oplus T$ et où β est la composition de ρ et $\alpha \oplus \mathrm{id}_{\varphi(T)}$; où ρ est un isomorphisme entre $\varphi(E \oplus T)$ et $\varphi(F \oplus T)$. On a donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \varphi(G) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"] & \varphi(G) \arrow[d, "\gamma"] \\ \varphi \circ \psi(\varphi(G)) \arrow[r, "\varphi\circ\psi(\beta)"] & \varphi \circ \psi(\varphi(G)) \end{tikzcd}$$

où γ est induit par l'isomorphisme de foncteurs $\varphi \circ \psi \cong \mathrm{id}_{\mathscr{C}'}$. On a donc $\beta = \gamma^{-1} \circ (\varphi \circ \psi)(\beta) \circ \gamma$ et ainsi par la proposition 2.11, on obtient :

$$d(G,G,\beta) = d(G, \psi\circ\varphi(G), \gamma) + d(\psi\circ\varphi(G), \psi\circ\varphi(G), \varphi\circ\psi(\beta)) + d(\psi\circ\varphi(G), G, \gamma^{-1})$$

Or $d(\psi\circ\varphi(G), G, \gamma^{-1})$ est l'inverse de $d(G, \psi\circ\varphi(G), \gamma)$ ainsi leur somme est nulle. Il suffit donc de montrer que le triple $(\psi\circ\varphi(G), \psi\circ\varphi(G), \varphi\circ\psi(\beta))$ est isomorphe à un triple élémentaire, ce qui prouvera que $d(G, G, \beta) = 0$ et ainsi l'injectivité de i. On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\varphi\circ(\psi\varphi(G)) \arrow[r, "\varphi\circ\psi(\beta)"] \arrow[d, "\varphi\circ\psi(\beta)"] & \varphi\circ(\psi\varphi(G)) \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
\varphi\circ(\psi\varphi(G)) \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \varphi\circ(\psi\varphi(G))
\end{tikzcd}$$

Ainsi $(\psi\circ\varphi(G), \psi\circ\varphi(G), \varphi\circ\psi(\beta)) \cong (\psi\circ\varphi(G), \psi\circ\varphi(G), \mathrm{id})$ qui est élémentaire.

IV) Montrons que j est surjective. Soit $[E'] - [F']$ un élément de $K(\mathscr{C}')$. Les foncteurs $\varphi\circ\psi$ et $\mathrm{id}_{\mathscr{C}'}$ étant isomorphes on a les isomorphismes

$$\varphi\circ\psi(E') \cong E' \quad \text{et} \quad \varphi\circ\psi(F') \cong F'$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} j([\psi(E')] - [\psi(F')] &= [\varphi\circ\psi(E')] - [\varphi\circ\psi(F')] \\ &= [E'] - [F'] \end{aligned}$$

V) Montrons finalement que j admet une section, c'est-à-dire que la suite exacte est scindée. L'homomorphisme de groupes

$$\begin{aligned} k : K(\mathscr{C}') &\longrightarrow K(\mathscr{C}) \\ [E'] - [F'] &\longmapsto [\psi(E')] - [\psi(F')] \end{aligned}$$

est une section, car, par le point IV de cette preuve, on a $j\circ k = \mathrm{id}_{K(\mathscr{C}')}$.

□

3. Catégories de Banach

DÉFINITION 2.13. Soit $\mathscr{C}$ une catégorie additive, une *structure de Banach* sur $\mathscr{C}$ est la donnée d'une structure d'espace de Banach sur chacun des ensembles de morphismes $\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(X, Y)$. On suppose de plus que chaque composition de morphismes

$$\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(Y, Z) \times \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(X, Z)$$

est bilinéaire et continue. Une telle catégorie est alors appelée *catégorie de Banach*.

Nous allons maintenant prouver que si X est un espace compact, la catégorie $\mathrm{Vect}(X)$ possède une structure de Banach. Dans cette section, X désignera un espace compact et A l'algèbre des fonctions continues de X dans le corps $\mathbb{K}$. Rappelons que l'algèbre A munie de la norme sup est un espace de Banach. Nous allons commencer par donner une structure de Banach aux ensembles des sections continues $\Gamma(X, E) = \Gamma(E)$ d'un $\mathbb{K}$-fibré vectoriel E sur X. Rappelons que par la proposition 2.38 de **[2]** , $\Gamma(E)$ est un A–module de type fini car X est compact.

Définition 2.14. Soit E un fibré sur X, nous allons donner une structure d'espace de Banach au module des sections continues. Puisque $\Gamma(E)$ est un A–module de type fini, il existe un homomorphisme A-linéaire surjectif

$$u: \ A^n \twoheadrightarrow \Gamma(E)$$

Donnons alors à $\Gamma(E)$ la topologie quotient induite par u.

Proposition 2.15. *La topologie sur $\Gamma(E)$ définie ci-dessus ne dépend pas du choix de l'homomorphisme A-linéaire surjectif u.*

Démonstration. Soit

$$u : A^n \longrightarrow \Gamma(E)$$
$$u' : A^{n'} \longrightarrow \Gamma(E)$$

deux homomorphismes A-linéaires surjectifs. Comme A^n et $A^{n'}$ sont des A–modules projectifs (car libres), il existe deux homomorphismes A-linéaires v et v' tels que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} A^n \arrow[rr, shift left, "v"] \arrow[dr, "u"'] & & A^{n'} \arrow[ll, shift left, "v'"] \arrow[dl, "u'"] \\ & \Gamma(E) & \end{tikzcd}$$

Les applications v et v' sont continues car linéaires et définissent donc la même topologie sur $\Gamma(E)$. En effet, soit Ω un sous-ensemble de $\Gamma(E)$, on a

$$u^{-1}(\Omega) = v^{-1}(u'^{-1}(\Omega))u'^{-1}(\Omega) = v'^{-1}(u^{-1}(\Omega))$$

ainsi, $u^{-1}(\Omega)$ est ouvert si et seulement si $u'^{-1}(\Omega)$ l'est aussi. $\square$

Proposition 2.16. *Soit $f : E \to F$ un morphisme de fibrés, alors l'application*

$$\Gamma(f) : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(F)$$
$$s \longmapsto f \circ s$$

est un homomorphisme A-linéaire continu.

Démonstration. La A-linéarité de $\Gamma(f)$ se vérifie aisément en évaluant $\Gamma(f)(s)(x)$. Contemplons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} A^n \arrow[r, dashed, "\bar{f}"] \arrow[d, two heads, "u"] & A^m \arrow[d, two heads, "v"] \\ \Gamma(E) \arrow[r, "\Gamma(f)"] & \Gamma(F) \end{tikzcd}$$

où u et v sont des homomorphismes A-linéaires surjectifs et où $\bar{f}$ est l'homomorphisme A-linéaire induit par le A–module projectif A^n. Comme $\bar{f}$ est linéaire, il est également continu, ainsi $\Gamma(f)$ est continu. $\square$

La proposition suivante, qui concerne les algèbres de Banach en général, nous permettra de conclure à la proposition d'après.

Proposition 2.17. *Soit B une algèbre de Banach sur un corps K et P, Q deux B–modules projectifs de type fini, alors le K espace vectoriel $\mathrm{Hom}_B(P,Q)$ possède une structure naturelle d'espace de Banach.*

Démonstration. Commençons par montrer que tout module projectif de type fini P possède une structure d'espace de Banach. Soit $\pi : B^n \twoheadrightarrow P$ un homomorphisme B-linéaire surjectif, donnons à P la topologie quotient induite par π. La preuve de la proposition 2.15 indique que cette topologie ne dépend pas du choix de π. Puisque P est projectif, il existe une section $\sigma : P \hookrightarrow B^n$, c'est-à-dire un homomorphisme B-linéaire injectif tel que $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_P$. Définissons une norme sur P de la manière suivante

$$\|x\|_P = \|\sigma(x)\| \qquad \forall x \in P$$

où $\|\,.\,\|$ est la norme sur B^n. La K-linéarité et l'injectivité de σ permettent au lecteur de démontrer aisément que $\|\,.\,\|_P$ est une norme.

Lemme 2.18. *Notons $B_P(x,\varepsilon)$ la boule dans P centrée en x et de rayon ε et $B(y,\varepsilon)$ la boule dans B^n centrée en y de rayon ε, alors on a*

$$\pi^{-1}(B_P(x,\varepsilon)) = (\sigma\circ\pi)^{-1}(B(\sigma(x),\varepsilon)) et B_P(x,\varepsilon) = \sigma^{-1}(B(\sigma(x),\varepsilon))$$

Démonstration. La deuxième égalité découle de la première en appliquant π, car $\pi \circ \pi^{-1} = \mathrm{id}_P$. Montrons donc la deuxième. On a

$$\begin{aligned} y \in \pi^{-1}(B_P(x,\varepsilon)) &\iff \pi(y) \in B_P(x,\varepsilon) \\ &\iff \|\pi(y) - x\|_P < \varepsilon \\ &\iff \|\sigma\circ\pi(y) - \sigma(x)\| < \varepsilon \\ &\iff \sigma\circ\pi(y) \in B(\sigma(x),\varepsilon) \\ &\iff y \in (\sigma\circ\pi)^{-1}(B(\sigma(x),\varepsilon)) \end{aligned}$$

□

Montrons que la topologie induite par cette norme coïncide avec la topologie quotient. Pour cela, nous montrerons que tout ouvert de P contient une boule et réciproquement que toute boule est ouverte dans la topologie quotient. Soit $U \subseteq P$ un ouvert et $x \in U$, on a donc que $\pi^{-1}(U)$ est ouvert dans B^n. Comme B^n est de Banach et que $\sigma(x) \in \pi^{-1}(U)$, il existe une boule de rayon $\varepsilon > 0$ tel que $B(\sigma(x),\varepsilon) \subseteq \pi^{-1}(U)$. En appliquant σ^{-1}, on obtient

$$\sigma^{-1}(B(\sigma(x),\varepsilon)) \subseteq \sigma^{-1}\circ\pi^{-1}(U)$$

Or $\sigma^{-1}(B(\sigma(x),\varepsilon)) = B_P(x,\varepsilon)$ par le lemme et $\sigma^{-1}\circ\pi^{-1} = \mathrm{id}_P$ car σ est une section de π. Ainsi $B_P(x,\varepsilon) \subseteq U$.

Réciproquement, soit $x \in P$ et $\varepsilon > 0$, montrons que la boule $B_P(x,\varepsilon)$ est ouverte dans P pour la topologie quotient. En effet, par le lemme on a

$$\pi^{-1}(B_P(x,\varepsilon)) = (\sigma\circ\pi)^{-1}(B(\sigma(x),\varepsilon))$$

Or $\sigma\circ\pi : B^n \to B^n$ est continue car B-linéaire, ainsi $\pi^{-1}(B_P(x,\varepsilon))$ est un ouvert de B^n.

Pour montrer que l'espace vectoriel $\mathrm{Hom}_B(P,Q)$ est un espace de Banach, nous allons prouver que c'est un fermé de l'espace $\mathscr{L}(P,Q)$ des application K-linéaires qui est un espace de Banach par un célèbre théorème d'analyse fonctionelle puisque Q est un espace de Banach.

Pour cela, considérons les applications

$$\lambda_b : \mathscr{L}(P,Q) \longrightarrow \mathscr{L}(P,Q)$$

définies par $\lambda_b(\varphi)(x) = \varphi(bx) - b\varphi(x)$ pour toute application linéaire φ, tout point x de P et tout élément b de B. L'application λ_b est clairement K-linéaire et continue et observons que si φ est une application B-linéaire entre P et Q, alors $\lambda_b(\varphi) = 0$ pour tout b dans B. On a donc clairement l'égalité

$$\mathrm{Hom}_B(P,Q) = \bigcap_{b \in B} \ker(\lambda_b)$$

Ainsi $\mathrm{Hom}_B(P,Q)$ est fermé car les noyaux d'applications linéaires le sont et que toute intersection de fermés l'est aussi. $\square$

Remarque 2.19. Notons que la norme sur $\mathrm{Hom}_B(P,Q)$ et ainsi celle de $\mathscr{L}(P,Q)$, c'est-à-dire

$$\|\varphi\| = \inf \left\{ \|\varphi(x)\| \,\middle|\, \|x\| = 1 \right\}$$

Corollaire 2.20. *Soit P, Q, R trois modules projectifs de type fini sur B, alors l'application de composition*

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_B(Q,R) \times \mathrm{Hom}_B(P,Q) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_B(P,R) \\ (\varphi, \psi) &\longmapsto \varphi \circ \psi \end{aligned}$$

est continue et K-linéaire.

Démonstration. Cette application est clairement induite par l'application continue et K-linéaire

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(Q,R) \times \mathscr{L}(P,Q) &\longrightarrow \mathscr{L}(P,R) \\ (\varphi, \psi) &\longmapsto \varphi \circ \psi \end{aligned}$$

$\square$

Corollaire 2.21. *La catégorie $\mathscr{P}(R)$ des modules projecifs de type fini sur un anneau unitaire R possède une structure de Banach.*

Appliquons la proposition précédente au cas des fibrés vectoriels.

Théorème 2.22. *Soit E, F et G trois fibrés vectoriels sur X, alors le groupe abélien $Hom(E,F)$ possède une structure de Banach compatible avec la composition et donc* $\mathrm{Vect}(X)$ *est une catégorie de Banach.*

Démonstration. Par le théorème de Serre-Swan [1] , on a l'isomorphisme de groupes abéliens

$$\mathrm{Hom}(E,F) \cong \mathrm{Hom}_A(\Gamma(E), \Gamma(F))$$

On transporte la structure d'espace de Banach que l'on a donné à $\mathrm{Hom}_A(\Gamma(E), \Gamma(F))$ sur $\mathrm{Hom}(E,F)$ et on conclut par la proposition précédente. $\square$

Définition 2.23. Soit $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux catégories de Banach. Un foncteur $\varphi : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ est un *foncteur de Banach* si pour tout couple d'objets E et F de $\mathscr{C}$, l'application

$$\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(E,F) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}'}(\varphi(E), \varphi(F))$$

est linéaire et continue. Notons qu'un foncteur de Banach est additif par linéarité de l'application ci-dessus.

[1] voir 2.56 de **[2]**

Proposition 2.24. *Soit $f : Y \to X$ une application continue entre deux espaces compacts, alors le foncteur*

$$f^* : \mathrm{Vect}(X) \longrightarrow \mathrm{Vect}(Y)$$

est un foncteur de Banach quasi-surjectif.

Démonstration. Pour montrer que le foncteur f^* est de Banach, il faut montrer la continuité des applications

$$\mathrm{Hom}(E, F) \longrightarrow \mathrm{Hom}(f^*(E), f^*(F))$$

Pour tout couple de fibrés (E, F) sur X. Pour cela, il suffit de le voir sur les fibrés triviaux. Remarquons tout d'abord que l'image par le foncteur f^* d'un fibré trivial $X \times \mathbb{K}^n$ de rang n est le fibré trivial $Y \times \mathbb{K}^n$; ainsi, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(X \times \mathbb{K}^n, X \times \mathbb{K}^m) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}(Y \times \mathbb{K}^n, Y \times \mathbb{K}^m) \arrow[d, "\cong"] \\
C(X, \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})) \arrow[r, "\tilde{f}^*"] & C(Y, \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K}))
\end{tikzcd}$$

où $\tilde{f}^*$ est la composition à gauche : $\tilde{f}^*(g) = g \circ f$. Les flèches verticales sont clairement des isométries par définition de la structure de Banach et $\tilde{f}^*$ est continue, ainsi f^* l'est aussi.

Si E et F sont des fibrés sur X, le théorème 2.45 de **[2]** implique qu'il existe deux fibrés vectoriels E' et F' tels que

$$E \oplus E' \cong X \times \mathbb{K}^n \quad \text{et} \quad F \oplus F' \cong X \times \mathbb{K}^m$$

Reprenons l'isomorphisme du théorème de Serre-Swan [2]

$$\mathrm{Hom}(E, F) \cong \mathrm{Hom}_A(\Gamma(E), \Gamma(F))$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}(E, F) \times \mathrm{Hom}(E', F') &\cong \mathrm{Hom}_A(\Gamma(E), \Gamma(F)) \oplus \mathrm{Hom}_A(\Gamma(E'), \Gamma(F')) \\
&\cong \mathrm{Hom}_A(\Gamma(E) \oplus \Gamma(E'), \Gamma(F) \oplus \Gamma(F')) \\
&\cong \mathrm{Hom}_A(\Gamma(E \oplus E'), \Gamma(F \oplus F')) \\
&\cong \mathrm{Hom}_A(\Gamma(X \times \mathbb{K}^n), \Gamma(X \times \mathbb{K}^m)) \\
&\cong \mathrm{Hom}(X \times \mathbb{K}^n, X \times \mathbb{K}^m)
\end{aligned}$$

On peut donc voir $\mathrm{Hom}(E, F)$ comme un sous-espace de $\mathrm{Hom}(X \times \mathbb{K}^n, X \times \mathbb{K}^m)$.

Montrons finalement que le foncteur f^* est quasi-surjectif. En effet, soit F un fibré vectoriel sur Y, il existe un fibré F' tel que $F \oplus F' \cong Y \times \mathbb{K}^n$. On a donc

$$f^*(X \times \mathbb{K}^n) \cong Y \times \mathbb{K}^n \cong F \oplus F'$$

□

Corollaire 2.25. *De plus, dans le cas où $f = i$ est l'inclusion d'un sous-espace fermé Y dans X, le foncteur i^* est aussi plein.*

[2] voir 2.56 de **[2]**

DÉMONSTRATION. Nous renvoyons le lecteur à [**1**], théorème 5.10. Il faut prouver que l'homomorphisme

$$\Gamma(X,E) \to \Gamma(Y,E_Y)$$

est surjectif, puis prouver que les foncteurs

$$(E,F) \longmapsto \mathrm{Hom}(E,F) \quad \text{et} \quad (E,F) \longmapsto \Gamma(X,\mathrm{HOM}(E,F))$$

sont isomorphes. □

Nous citons maintenant deux lemmes que nous ne souhaitons pas prouver. Leurs preuves peuvent être trouvées dans [**1**] aux pages 64 et 65.

LEMME 2.26. *Soit A et B deux algèbres de Banach, $f : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux continu et surjectif et $\tau : I \to B^*$ un chemin dans $B*$, le groupe des unités de B, tel que $\tau(0) = f(\alpha)$ pour un certain élément inversible α de A, alors il existe un élément inversible α' de A tel que $f(\alpha') = \tau(1)$.*

DÉFINITION 2.27. Notons $B(X)$ l'algèbre de Banach des fonctions continues sur un espace topologique compact X à valeurs dans une algèbre de Banach B.

LEMME 2.28. *Reprenons le lemme précédent, si l'homomorphisme d'anneaux f induit un homomorphisme d'anneaux $\tilde{f} : A(I) \to B(I)$ surjectif, alors il existe un chemin $\sigma : I \to A^*$ tel que $f \circ \sigma = \tau$.*

PROPOSITION 2.29. *Soit Y un sous-espace fermé d'un espace topologique compact X et E un fibré vectoriel sur X. Soit $\alpha : E \to E$ un automorphisme de E et $\tau : I \to \mathrm{Aut}(E_Y)$ un chemin tel que $\tau(0) = \alpha|_Y$; alors il existe un chemin $\sigma : I \to \mathrm{Aut}(E)$ tel que $\sigma(0) = \alpha$ et $\sigma(t)|_Y = \tau(t)$, pour tout t dans I.*

DÉMONSTRATION. Cette proposition découle directement des deux lemmes précédents. □

Dans cette section, $\varphi : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ désignera un foncteur de Banach plein et quasi surjectif entre deux catégories de Banach.

PROPOSITION 2.30. *Soit $\varphi : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ un foncteur de Banach plein et quasi-surjectif, et soit $\tau = (E,E,\alpha)$ un triple élémentaire. Alors τ est isomorphe au triple $(E,E,\mathrm{id}_{\varphi(E)})$.*

DÉMONSTRATION. Soit $A = \mathrm{End}(E)$ et $B = \mathrm{End}(\varphi(E))$, A et B sont des algèbres de Banach. Le foncteur φ induit un homomorphisme d'anneaux surjectif et continu

$$\begin{aligned} \varphi : A &\longrightarrow B \\ \beta &\longmapsto \varphi(\beta) \end{aligned}$$

Comme le triple τ est élémentaire, on peut trouver un chemin $\sigma : I \to B^* = \mathrm{Aut}(\varphi(E))$ tel que $\sigma(0) = \mathrm{id}_{\varphi(E)}$ et $\sigma(1) = \alpha$, ce chemin est obtenu à partir de l'homotopie entre α et $\mathrm{id}_{\varphi(E)}$. Par le lemme 2.26, il existe un automorphisme de E, β tel que $\varphi(\beta) = \sigma(1) = \alpha$. On obtient ainsi le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \varphi(E) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi(\beta)"] & \varphi(E) \arrow[d, "\varphi(\mathrm{id}_E)"] \\ \varphi(E) \arrow[r, "\mathrm{id}_{\varphi(E)}"] & \varphi(E) \end{tikzcd}$$

Ainsi, les triples de l'énnoncé sont bien isomorphes. □

Corollaire 2.31. *Considérons $\dot{K}(\varphi)$ le monoïde abélien obtenu par la définition de $K(\varphi)$ en remplaçant les triples élémentaires par les triples de la forme $(E, E, \mathrm{id}_{\varphi(E)})$, alors $\dot{K}(\varphi)$ est isomorphe à $K(\varphi)$.*

Remarque 2.32. Le corollaire précédent nous donne une description purement algébrique de $K(\varphi)$ lorsque le foncteur φ est de Banach, plein et quasi-surjectif. En effet, dans la définition 2.5 de $K(\varphi)$, les triples élémentaires font intervenir la notion d'homotopie, ce qui n'est pas le cas dans la définition de $\dot{K}(\varphi)$. Désormais, dans ce cas précis, on identifiera ces deux constructions.

Proposition 2.33. *Soit $d(E, F, \alpha)$ un élément de $K(\varphi)$, alors $d(E, F, \alpha) = 0$ si et seulement s'il existe un objet G de $\mathscr{C}$ et un isomorphisme $\beta : E \oplus G \to F \oplus G$ tel que $\varphi(\beta) = \alpha \oplus \mathrm{id}_\varphi(G)$.*

Démonstration.

$\Longrightarrow$ Si $d(E, F, \alpha) = 0$, il existe deux triples élémentaires $(G, G, \mathrm{id}_{\varphi(G)})$ et $(H, H, \mathrm{id}_{\varphi(H)})$ tels que les triples $(E \oplus G, F \oplus G, \alpha \oplus \mathrm{id}_{\varphi(G)})$ et $(H, H, \mathrm{id}_{\varphi(H)})$ soient isomorphes. Ainsi, il existe deux isomorphismes

$$f : E \oplus G \longrightarrow H \quad \text{et} \quad g : F \oplus G \longrightarrow H$$

tels que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
\varphi(E \oplus G) \arrow[r, "\alpha \oplus \mathrm{id}_\varphi(G)"] \arrow[d, "\varphi(f)"'] & \varphi(F \oplus G) \arrow[d, "\varphi(g)"] \\
\varphi(H) \arrow[r, "\mathrm{id}_{\varphi(H)}"] & \varphi(H)
\end{tikzcd}$$

Posons $\beta = g^{-1} \circ f$, on a bien

$$\begin{aligned}
\varphi(\beta) &= \varphi(g^{-1} \circ f) \\
&= \varphi(g^{-1}) \circ \varphi(f) \\
&= \varphi(g)^{-1} \circ \varphi(f) \\
&= \varphi(g)^{-1} \circ \mathrm{id}_{\varphi(H)} \circ \varphi(f) \\
&= \alpha \oplus \mathrm{id}_{\varphi(G)}
\end{aligned}$$

$\Longleftarrow$ On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\varphi(E \oplus G) \arrow[r, "\alpha \oplus \mathrm{id}_\varphi(G)"] \arrow[d, "\varphi(\beta)"'] & \varphi(F \oplus G) \arrow[d, "\mathrm{id}_{\varphi(F \oplus G)}"] \\
\varphi(F \oplus G) \arrow[r, "\mathrm{id}_{\varphi(F \oplus G)}"] & \varphi(F \oplus G)
\end{tikzcd}$$

ainsi les triples $(E \oplus G, F \oplus G, \alpha \oplus \mathrm{id})$ et $(F \oplus G, F \oplus G, \mathrm{id})$ sont isomorphes et donc

$$\begin{aligned}
d(E, F, \alpha) &= d(E \oplus G, F \oplus G, \alpha \oplus \mathrm{id}) \\
&= d(F \oplus G, F \oplus G, \mathrm{id}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\square$

4. $K(X,Y)$

Appliquons ces résultats au cas où $\mathscr{C} = \mathrm{Vect}(X)$ et $\mathscr{C}' = \mathrm{Vect}(Y)$, où Y est un sous-espace fermé d'un espace topologique compact X.

Définition 2.34. Soit $\varphi : \mathrm{Vect}(X) \to \mathrm{Vect}(Y)$ le foncteur induit par la restriction des fibrés vectoriels sur Y. Ce foncteur est de Banach, plein et quasi surjectif comme mentionné en 2.25. On note alors

$$K(X,Y) = K(\varphi)$$

Remarque 2.35. Un élément $d(E,F,\alpha)$ de $K(X,Y)$ correspond à un couple de fibrés vectoriels E et F sur X où α est un isomorphisme entre leur restriction à Y. On a la propritété suivante, $d(E,F,\alpha) = d(E',F',\alpha')$ si et seulement s'il existe deux fibrés vectoriels G et G' et deux isomorphismes

$$f : E \oplus G \longrightarrow E' \oplus G' \quad \text{et} \quad g : F \oplus G \longrightarrow F' \oplus G'$$

tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
(E \oplus G)|_Y \arrow[r, "\alpha \oplus \mathrm{id}_{G_Y}"] \arrow[d, "f|_Y"] & (F \oplus G)|_Y \arrow[d, "g|_Y"] \\
(E' \oplus G')|_Y \arrow[r, "\alpha' \oplus \mathrm{id}_{G'_Y}"] & (F' \oplus G')|_Y
\end{tikzcd}$$

On a de plus la suite exacte :

$$\begin{array}{ccccc}
K(X,Y) & \longrightarrow & K(X) & \longrightarrow & K(Y) \\
d(E,F,\alpha) & \longmapsto & [E]-[F] & \longmapsto & [E|_Y]-[F|_Y]
\end{array}$$

Notons encore que $K(X,\varnothing) \cong K(X)$.

Proposition 2.36. *Soit Y un sous-espace fermé d'un espace topologique compact X. Supposons de plus que Y soit un rétracte par déformation de X, alors la suite exacte de la remarque précédente s'étend en une suite exacte courte scindée :*

$$0 \longrightarrow K(X,Y) \longrightarrow K(X) \longrightarrow K(Y) \longrightarrow 0$$

Démonstration. En vertu de la proposition 2.12, il suffit de montrer qu'il existe un foncteur inverse à la restriction $i^* : \mathrm{Vect}(X) \to \mathrm{Vect}(Y)$. Comme Y est supposé être un rétracte par déformation de X, il existe une rétraction par déformation $r : X \to Y$ telle que $r \circ i \simeq \mathrm{id}_Y$. Par la proposition 2.41 de **[2]** , les foncteurs $(r \circ i)^*$ et $(\mathrm{id}_Y)^*$ sont isomorphes. Le foncteur $r^* : \mathrm{Vect}(Y) \to \mathrm{Vect}(X)$ est alors le foncteur cherché puisque :

$$\begin{aligned}
i^* \circ r^* &= (r \circ i)^* \\
&\cong (\mathrm{id}_Y)^* \\
&= \mathrm{id}_{\mathrm{Vect}(Y)}
\end{aligned}$$

□

Remarque 2.37. La construction de $K(X,Y)$ définit un foncteur contravariant

$$K : \mathcal{P} \longrightarrow \mathscr{A}b$$

où $\mathcal{P}$ est la catégorie des paires d'espaces topologiques (X,Y) où Y est un sous-espace fermé de X qui est compact. Rappelons qu'un morphisme de paires $f : (X,Y) \to (X',Y')$ est une application continue $f : X \to X'$ telle que $f(Y) \subseteq Y'$. Un tel morphisme induit un diagramme de catégories commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Vect}(X) \arrow[r] \arrow[d, "f^*"] & \mathrm{Vect}(Y) \arrow[d, "(f|_Y)^*"] \\ \mathrm{Vect}(X') \arrow[r] & \mathrm{Vect}(Y') \end{tikzcd}$$

et induit ainsi un homomorphisme, noté f^* entre $K(X',Y')$ et $K(X,Y)$ donné par

$$f^*(d(E',F',\alpha')) = d(f^*(E'), f^*(F'), (f|_Y)^*(\alpha)) \quad \text{pour tout } d(E',F',\alpha') \in K(X',Y')$$

Mentionnons finalement le théorème d'excision qui nous donne une des propriétés les plus forte du groupe $K(X,Y)$ par rapport à la K–théorie du quotient ${}^{X}\!/_{Y}$.

Théorème 2.38 (Excision). *Soit Y un sous-espace fermé d'un espace topologique compact X, alors la projection $\pi : X \to X/Y$ induit un isomorphisme*

$$\pi^* : K({}^{X}\!/_{Y}, \{y\}) \longrightarrow K(X,Y)$$

où $\{y\}$ est le point correspondant à Y dans l'espace quotient.

Quelques perspectives futures

Ce projet de semestre ne constitue qu'une maigre introduction à la K–théorie topologique. Par la suite, on défini le groupe $K^{-1}(\mathscr{C})$ à partir des automorphismes de $\mathscr{C}$. En appliquant ceci à la catégorie $\mathrm{Vect}(X)$ des fibrés vectoriels sur X, on obtient le groupe $K^{-1}(X)$. On obtient alors une suite exacte courte

$$K^{-1}(X) \to K^{-1}(Y) \to K(X,Y) \to K(X) \to K(Y)$$

où Y est un sous-espace fermé de X. On définit alors les groupes $K^{-n}(X)$ et $K^{-n}(X,Y)$ pour tout entier $n \geq 2$ qui prolonge la suite exacte comme on pouvait s'y attendre pour obtenir une théorie cohomologique.

$$K^{-n-1}(X) \to K^{-n-1}(Y) \to K^{-n}(X,Y) \to K^{-n}(X) \to K^{-n}(Y)$$

A partir de là, le théorème central de la K–théorie est le théorème de périodicité de Bott qui donne des isomorphismes :

$$K_{\mathbb{C}}^{-n}(X,Y) \cong K_{\mathbb{C}}^{-n-2}(X,Y) \text{et} K_{\mathbb{R}}^{-n}(X,Y) \cong K_{\mathbb{R}}^{-n-8}(X,Y)$$

On dit alors que la K–théorie complexe est périodique de période 2 et que la K–théorie réelle est périodique de période 8. On obtient, entre autres, les résultats suivants :

$$K_{\mathbb{C}}(X) \cong K_{\mathbb{C}}(X \times \mathbb{R}^2)$$

et

$$\tilde{K}_{\mathbb{C}}(S^n) \cong \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ \mathbb{Z} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

On peut égalament donner une structure d'anneau au K–groupe $K(X)$. Cet anneau possède une unité si et seulement si l'espace X est compact.

Le deuxième outil principal de la K–théorie est l'isomorphisme de Thom qui établit un isomorphisme entre le K–groupe d'une variété et celui d'un fibré complexe sur cette variété. Nous énonçons ce théorème ici :

Isomorphisme de Thom. *Soit X une variété et E un fibré vectoriel complexe sur X, alors il existe un isomorphisme de $K(X)$–module*

$$\psi : K(X) \longrightarrow K(E)$$

Si de plus, la variété X est compcate, alors on a $\psi(\xi) = \xi\psi(1)$ et on appelle $\psi(1)$ la classe de Thom du fibré E.

Une conséquence imédiate du théorème de Thom est l'isomorphisme $\tilde{K}_{\mathbb{C}}(S^{2n}) \cong \mathbb{Z}$ pour tout entier n. En effet, S^{2n} peut être vu comme le compactifié de l'espace $\mathbb{C}^n$ qui est lui même un fibré complexe de rang n sur un point. Le théorème nous donne donc un isomorphisme entre le K–groupe du point et le K–groupe de $\mathbb{C}^n$. On obtient donc

$$\tilde{K}_{\mathbb{C}}(S^{2n}) \cong \tilde{K}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{n+}) \cong K(\mathbb{C}^n) \cong K(\{x\}) \cong \mathbb{Z}$$

La K–théorie fut introduite par Grothendieck dans sa formulation du théorème de Riemann-Roch. Par la suite, la K–théorie topologique s'est révélée être un puissant outil. Adams et Atiyah ont ainsi pu donner une preuve simple que les seules sphères possédant une structure de H-espace sont S^1, S^3 et S^7. La K–théorie topologique a également permis a Atiyah et Singer de démontrer le théorème de l'indice, qui a motivé notre étude de ce sujet.

L'avènement de la K–théorie algébrique, qui généralise sa cousine topologique, a largement participé à un certain délaissement de cette dernière, les seuls ouvrages généraux traitant la K–théorie topologique aujourd'hui sont ceux de Karoubi[3] et d'Atiyah[4]. Cette théorie conserve cependant son intérêt, premièrement pour ses résultats et deuxièmement pour mieux comprendre la K–théorie algébrique qui s'en inspire très largement.

---

[3] [**1**]
[4] [**4**]

Bibliographie

[1] Karoubi, Max. *K-Theory, An Introduction*. Springer-Verlag, 1978

[2] Prosperi, Oliver. *Fibrés vectoriels*. Projet de semestre à l'EPFL, été 2005.

[3] Mitchell, Bary. *Theory of categories*. Smith and Eilenberg, 1965.

[4] Atiyah, Michael. *K-Theory*. W.A. Benjamin Inc. 1967.

Index