

Projet de Semestre

Été 2004

Introduction à la Topologie Algébrique

David Kohler

Professeur Responsable:

Professeur Jacques Thévenaz

Assistant: Peter Bubenik

Table des matières

1. Résumé	2
2. Remerciements	2
3. Table de Notations	3
Chapitre 1. Homotopie	5
Définitions et propriétés de base	5
Chapitre 2. CW-Complexes	13
Définitions et propriétés de base	13
Attachements de cellules	16
Chapitre 3. Groupe fondamental	19
Homotopies de chemins	19
Le groupe fondamental	23
Fonctorialité	25
Espaces simplement connexes	27
Groupe fondamental du cercle	29
Groupes topologiques	36
Chapitre 4. Le théorème de Seifert - Van Kampen	39
Produit libre de groupes	39
Théorème de Seifert-Van Kampen	43
Chapitre 5. Revêtements	53
Définitions et propriétés	53
Classification des revêtements connexes par arcs	57
Classification des revêtements localement connexes par arcs	63
Transformations de revêtements	67
Bibliographie	69

1. Résumé

Ce projet de semestre est né de l'idée de Peter Jossen d'associer les efforts de plusieurs étudiants afin de créer un projet commun recouvrant un sujet plus important que ce qui peut se faire seul. Le sujet choisi fut le problème inverse de Galois. Accompagnés de Francesca Mazzaro, nous avons partagé la matière de manière à créer trois projets de semestre distincts.

Ce projet introduit les notions de bases de la topologie algébrique – le groupe fondamental et la notion de revêtement en particulier. Les CW-complexes sont également présentés pour leurs propriétés très flexibles, finalement, un chapitre entier est consacré au théorème de Seifert-Van Kampen qui donne une excellente méthode pour calculer des groupes fondamentaux.

2. Remerciements

Je tiens spécialement à remercier Peter Bubenik pour son aide à la réalisation de ce travail.

3. Table de Notations

Nous utiliserons les notations suivantes:

\oplus	La somme directe
$*$	Le produit libre
\amalg	La somme disjointe
\vee	Le produit wedge
\mathbb{C}	Les nombres complexes
\mathbb{R}	Les nombres réels
\mathbb{Q}	Les nombres rationnels
\mathbb{Z}	Les nombres entiers
\mathbb{N}	$\{0, 1, 2, 3, \dots\}$
\mathbb{N}_n	$\{1, 2, \dots, n\}$
\mathbb{P}	Nombres premiers
$C(X, Y)$	L'ensemble des applications continues entre les espaces topologiques X et Y
<i>Set</i>	La catégorie des ensembles
<i>Top</i>	La catégorie des espaces topologiques
<i>Top*</i>	La catégorie des espaces topologiques pointés
<i>Grp</i>	La catégorie des groupes
D^n	Le disque de dimension n
S^n	La sphère de dimension n , i.e. le bord du disque D^{n+1}
\mathbb{T}	Le tore de dimension 1
\mathcal{S}_n	Le groupe symétrique d'ordre $n!$
$\text{Perm}(X)$	Le groupe des permutations de l'ensemble X
\simeq	L'homotopie d'applications
\approx	L'homotopie de chemins
\cdot	La concaténation de chemins
Id_X	L'application d'identité sur X
π_1	Le groupe fondamental

Homotopie

L'homotopie est une notion fondamentale issue de la topologie que l'on retrouve également en analyse et en géométrie. Cette notion établit formellement l'idée de déformation continue. Par exemple, le carré et le cercle sont des objets géométriquement distincts, cependant on voit clairement que l'on peut déformer continuellement l'un en l'autre, comme on le ferait avec un morceau de ficelle. Ces deux objets sont ainsi dits homotopes et on appelle homotopie l'application de déformation.

Définitions et propriétés de base

DÉFINITION 1.1. Soit X, Y deux espaces topologiques et $f, g \in C(X, Y)$ deux applications continues de X dans Y . Une *homotopie* de f vers g est une famille d'applications continues $\{H_t\}_{t \in I} \subseteq C(X, Y)$ telle que

- i) L'application associée $H : X \times I \rightarrow Y, (x, t) \mapsto H_t(x)$ est continue
- ii) $H_0 = f$ et $H_1 = g$

f et g sont alors dites *homotopes* et on le note $f \simeq g$ ou $f \simeq_H g$ si on veut préciser l'homotopie H .

EXEMPLE 1.1. La notion d'homotopie est, dans de nombreux cas, très visuelle. On peut se la représenter comme dans la figure ci-dessous comme une déformation continue d'une courbe en une autre.

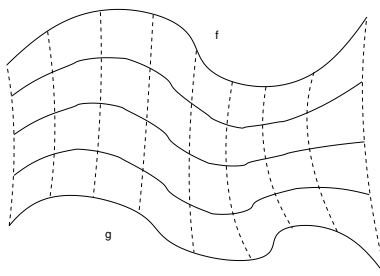


FIG. 1. Homotopie entre deux courbes f et g .

On considère aussi les homotopies qui ne déforment pas une certaine partie de l'espace. Par exemple, comme nous le verrons au chapitre 3, les homotopies de chemins fixent les extrémités des chemins.

DÉFINITION 1.2. Soit $A \subseteq X$, on appelle *homotopie rel A* (relative A) toute homotopie H qui laisse fixe A

$$\text{i.e. } H_t(a) = H_{t'}(a) \quad \forall t, t' \in I, \forall a \in A$$

Remarquons que l'homotopie relative généralise l'homotopie. Ainsi, l'homotopie est une homotopie relative à l'ensemble vide.

PROPOSITION 1.3. *L'homotopie relative établit une relation d'équivalence sur l'ensemble des applications continues d'un espace X vers un espace Y . C'est à dire,*

- i) $f \simeq f$
 - ii) $f \simeq g \iff g \simeq f$
 - iii) $f \simeq g$ et $g \simeq h \implies f \simeq h$
- $\forall f, g, h \in C(X, Y)$.

DÉMONSTRATION. Soit $A \subseteq X$ et considérons les homotopies rel A sur $C(X, Y)$.

- i) Clairement $H_t(x) = f(x) \forall t \in I$ est une homotopie de f vers f et on a bien, $\forall a \in A, H_t(a) = H_{t'}(a) \forall t, t' \in I$.
- ii) Supposons $f \simeq_H g$ et posons $\overline{H}_t(x) = H_{(1-t)}(x)$, alors \overline{H} est clairement une homotopie de g vers f . De plus, $\forall a \in A, \overline{H}_t(a) = H_{(1-t)}(a) = H_{(1-t')}(a) = \overline{H}_{t'}(a) \forall t, t' \in I$.
- iii) Supposons $f \simeq_H g$ et $g \simeq_K h$. On vérifie facilement que f est homotope à g par l'homotopie :

$$H \cdot K(x, t) = \begin{cases} H(x, 2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ K(x, 2t - 1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

De plus, comme H et K sont stables sur A et que $H_1 = K_0$ on a, $\forall a \in A$ $H_t(a) = H_{t'}(a) = K_t(a) = K_{t'}(a) \forall t, t', t'' \in I$. Ainsi, pour tout élément a dans A , $H \cdot K_t(a) = H \cdot K_{t'}(a) \forall t, t' \in I$.

□

EXEMPLE 1.2. Considérons l'exemple mentionné en introduction de ce chapitre, à savoir le carré et le cercle. Notons

$$C_a = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_\infty = a\}$$

$$S_b^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = b\}$$

C_a est le carré de coté $2a$ et S_b^1 est le cercle de rayon b . Puisqu'on a défini l'homotopie sur les applications continues, il nous faut une paramétrisation du carré et

du cercle. Posons

$$c : [0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \longmapsto \begin{cases} (a, -8at + a) & t \in [0, \frac{1}{4}] \\ (-8at + 3a, -a) & t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ (-a, 8at - 5a) & t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ (8at - 7a, a) & t \in [\frac{3}{4}, 1[\end{cases}$$

$$\gamma : [0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \longmapsto \left(b \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2\pi t\right), b \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2\pi t\right) \right)$$

La paramétrisation du cercle a été choisie de manière à ce que les points $0, c(t), \gamma(t)$ soient alignés. Ceci n'est pas absolument nécessaire mais rendra l'homotopie visuellement plus intéressante. En effet, on peut construire une homotopie du carré vers le cercle en laissant glisser les points du carré radialement sur le cercle, comme le montre la figure 2.

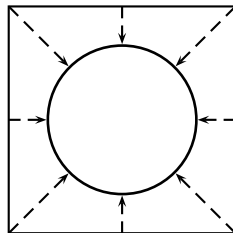


FIG. 2.

L'homotopie proprement dite de c vers γ est alors l'application

$$H : [0, 1[\times I \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(t, s) \longmapsto c(t) + s \left(\frac{c(t)}{\|c(t)\|} b - c(t) \right)$$

On a bien $H_0(t) = c(t)$ et $H_1(t) = \frac{c(t)}{\|c(t)\|} b = \gamma(t)$, ce qui prouve que le cercle et le carré sont homotopes.

L'homotopie est une notion très flexible. Dans la proposition suivante, nous allons montrer qu'elle est compatible avec la composition d'applications.

PROPOSITION 1.4. *Soit X, Y, Z des espaces topologiques et deux paires d'applications homotopes $f_0, f_1 \in C(X, Y)$ et $g_0, g_1 \in C(Y, Z)$, alors, $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$. En particulier, si $g \in C(Y, Z)$ et $h \in C(Z, X)$, alors, $g \circ f_1 \simeq g \circ f_2$ et $f_1 \circ h \simeq f_2 \circ h$.*

DÉMONSTRATION. Soit $f_0 \simeq_H f_1$ et $g_0 \simeq_K g_1$, alors, $K_t \circ H_t(x) = K_t(H_t(x))$ est une homotopie de $g_0 \circ f_0$ vers $g_1 \circ f_1$.

□

Comme nous l'avons vu dans l'exemple précédent, pour dire que deux espaces sont homotopes, il faut passer par une paramétrisation. Une généralisation de cette idée est le type d'homotopie.

DÉFINITION 1.5. Deux espaces topologiques X et Y ont même *type d'homotopie* s'il existe $f \in C(X, Y)$ et $g \in C(Y, X)$ telles que $f \circ g \simeq \text{id}_Y$ et $g \circ f \simeq \text{id}_X$. Les applications f et g sont alors appelées des *équivalences d'homotopie*.

Clairement, deux espaces homéomorphes ont le même type d'homotopie, ce qui était le cas dans notre exemple.

Comme on pouvait s'y attendre, le type d'homotopie hérite de l'homotopie la propriété de définir une relation d'équivalence.

PROPOSITION 1.6. *Le type d'homotopie est une relation d'équivalence dans la catégorie des espaces topologiques.*

DÉMONSTRATION. La réflexivité et la symétrie sont évidentes, reste donc à montrer la transitivité. Soit

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{g} \end{array} Y \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \xleftarrow{k} \end{array} Z$$

avec

$$\begin{array}{ll} f \circ g \simeq \text{Id}_Y & g \circ f \simeq \text{Id}_X \\ h \circ k \simeq \text{Id}_Z & k \circ h \simeq \text{Id}_Y \end{array}$$

Par la proposition 1.4,

$$\begin{array}{ll} (g \circ k) \circ (h \circ f) = g \circ (k \circ h) \circ f & (h \circ f) \circ (g \circ k) = h \circ (f \circ g) \circ k \\ \simeq g \circ \text{Id}_Y \circ f & \simeq h \circ \text{Id}_Y \circ k \\ = g \circ f & = h \circ k \\ \simeq \text{Id}_Z & \simeq \text{Id}_Z \end{array}$$

□

Un cas important de classe de type d'homotopie est celui de la classe d'homotopie du point. Il s'agit donc de tous les espaces que l'on peut déformer en un point. De tels espaces sont dits contractiles.

DÉFINITION 1.7. Un espace topologique est dit *contractile* s'il a le même type d'homotopie qu'un point. Nous noterons $*$ = $\{*\}$ l'espace topologique à un point.

PROPOSITION 1.8. *Soit X un espace topologique, alors, les affirmations suivantes sont équivalentes :*

- 1) X est contractile
- 2) L'identité sur X est homotope à une application constante
- 3) Toute application continue d'un espace Y dans X est homotope à une application constante
- 4) Toute paire d'applications continues d'un espace Y dans X sont homotopes
- 5) Toute application continue de X dans un espace Z est homotope à une application constante
- 6) Toute paire d'applications continues de X dans un espace connexe par arcs Z sont homotopes

DÉMONSTRATION.

1)⇒2) Comme X est contractile, il existe deux applications

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{g} \end{array} *$$

où $f \circ g \simeq \text{Id}_*$ et $g \circ f \simeq \text{Id}_X$. L'application g étant forcément constante, $g \circ f$ l'est également et est homotope à l'identité sur X .

2)⇒3) Soit $f \in C(Y, X)$ une application continue. Par hypothèse, il existe une application constante a homotope à l'identité sur X . Par la proposition 1.4, $f \simeq \text{Id}_X \circ f \simeq a \circ f$ et comme a est constante, $a \circ f$ également.

3)⇒4) Soit $f, g \in C(Y, X)$ et considérons

$$f \amalg g : Y \amalg Y \rightarrow X$$

Par hypothèse, $f \amalg g \simeq a$ où $a \in C(Y \amalg Y, X)$ est constante. On peut écrire $a = a \amalg a$ et par le lemme 1.9, $f \simeq a \simeq g$.

4)⇒5) Soit $f \in C(X, Z)$. Pour $Z = X$, on a $\text{Id}_X \simeq b$ où b est une application constante dans X . Ainsi $f = f \circ \text{Id}_X \simeq f \circ b$ et $f \circ b$ est constante.

5)⇒6) Soit f, g deux applications continues de X dans Z . Par hypothèse, f est homotope à une application constante a et g à une application constante b . Comme Z est connexe par arcs, il existe un chemin c qui relie le point image de a au point image de b . L'application $h_s(x) = c(t)$ est ainsi une homotopie de a vers b , ce qui rend homotopes les chemins f et g .

6)⇒1) Soit $X \rightleftarrows *$ avec $f(x) = * \forall x \in X$ et $g(*) = x_0$ pour un $x_0 \in X$. On a donc $f \circ g(*) = *$, i.e. $f \circ g = \text{Id}_*$ et $g \circ f(x) = x_0 \forall x \in X$. Par hypothèse avec $Z = X$ on obtient $g \circ f \simeq \text{Id}_X$ i.e. X est contractile.

□

LEMME 1.9. Soit X, Y deux espaces topologiques, $f, f', g, g' \in C(Y, X)$, alors,

$$f \amalg g \simeq f' \amalg g' \iff f \simeq f' \text{ et } g \simeq g'$$

DÉMONSTRATION.

⇒ Supposons que $f \amalg g \simeq_H f' \amalg g'$ où

$$H_t : Y \amalg Y \rightarrow X$$

avec $H_0 = f \amalg g$ et $H_1 = f' \amalg g'$. Posons

$$F_t = H_t \big|_{Y \times \{0\}}$$

$$G_t = H_t \big|_{Y \times \{1\}}$$

F et G sont bien continues et on a $F_0 = H_0 \big|_{Y \times \{0\}} = f, F_1 = f', G_0 = g$ et $G_1 = g'$.

⇐ Supposons que $f \simeq_F f'$ et $g \simeq_G g'$, alors l'application

$$H_t = F_t \amalg G_t$$

est bien une homotopie de $f \amalg g$ vers $f' \amalg g'$.

□

PROPOSITION 1.10. Tout espace contractile est connexe par arcs.

DÉMONSTRATION. Soit X un espace contractile, a, b deux points dans X et les applications continues

$$\begin{array}{ccc} \alpha : * & \longrightarrow & X \\ * & \longmapsto & a \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \beta : * & \longrightarrow & X \\ * & \longmapsto & b \end{array}$$

Le point 4) de la proposition 1.8 implique que α et β sont homotopes. Ainsi, il existe une application $H : * \times I \rightarrow X$ telle que $H_0(*) = a$ et $H_1(*) = b$. Comme $* \times I \cong I$, on peut voir H comme un chemin $H : I \rightarrow X$ reliant a et b ce qui prouve que X est connexe par arcs. \square

EXEMPLE 1.3. \mathbb{R}^n est contractile, $\forall n \geq 1$.
En effet, soit $n \geq 1$, l'application

$$\begin{array}{ccc} H_t : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto & xt \end{array}$$

est clairement une homotopie de l'application constante nulle vers l'identité de \mathbb{R}^n . Par la proposition 1.8, \mathbb{R}^n est contractile.

De manière plus générale, nous allons montrer que tout espace convexe est contractile. L'idée intuitive est simple : un espace convexe est connexe par arcs et sans trous, on peut donc le déformer pour obtenir un seul point.

PROPOSITION 1.11. *Tout espace convexe est contractile.*

DÉMONSTRATION. Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ un convexe et $x_0 \in V$, alors l'application $H_s(x) = x + s(x_0 - x)$ est une homotopie de l'identité de V sur l'application constante $x \mapsto x_0$. \square

Nous allons généraliser le concept d'espace contractile de la manière suivante : plutôt que de considérer les espaces qui se déforment en un point, nous allons considérer les espaces se déformant en un espace topologique donné.

Nous définissons d'abord la notion plus simple de rétraction avant de la spécialiser aux déformations.

DÉFINITION 1.12. Soit Y un sous-espace d'un espace topologique X . On dit que Y est un *rétracte* de X si l'application d'inclusion de Y dans X admet une *rétraction* i.e. s'il existe une application continue $r : X \rightarrow Y$ telle que $r(y) = y$ pour tout $y \in Y$.

EXEMPLE 1.4.

- 1) Tout point d'un espace topologique en est un rétracte.
- 2) S^1 est un rétracte de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ par la rétraction

$$\begin{array}{ccc} r : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} & \longrightarrow & S^1 \\ x & \longmapsto & \frac{x}{\|x\|} \end{array}$$

Les rétractes conservent certaines propriétés des espaces topologique dans lesquels ils se trouvent comme le montre la proposition suivante.

PROPOSITION 1.13. *Tout rétracte d'un espace connexe, respectivement connexe par arcs est connexe, respectivement connexe par arcs.*

DÉMONSTRATION. Toute rétraction étant surjective, le rétracte est l'image par une application continue d'une espace connexe, respectivement connexe par arc. \square

DÉFINITION 1.14. Nous pouvons maintenant généraliser la notion d'espace contractile. Un espace topologique X se *déforme par rétraction* sur un sous-espace Y si Y en est un rétracte et si sa rétraction est homotope à l'identité de X relativement à Y . On dira alors que Y est un *rétracte par déformation* et que la rétraction de X sur Y est une *rétraction par déformation*.

L'intérêt des rétractes par déformation, comme dans le cas des espace contractiles, consiste au fait que la partie déformée ne joue pas de rôle sur le type d'homotopie.

PROPOSITION 1.15. *Si Y est un rétracte par déformation de X , alors X et Y ont le même type d'homotopie.*

DÉMONSTRATION. Soit r une rétraction par déformation de X sur Y et ι l'inclusion de Y dans X , on a bien

$$r \circ \iota = \text{Id}_Y \quad \iota \circ r = r \simeq \text{Id}_X$$

\square

Ainsi, lorsqu'un espace se déforme par rétraction sur un sous-espace, il suffit de travailler avec se sous-espace pour conserver toutes les propriétés d'homotopie de l'espace original.

PROPOSITION 1.16. *"Être un rétracte par déformation de" est une relation transitive.*

DÉMONSTRATION. Soit $Z \subseteq Y \subseteq X$ avec r_1 la rétraction de X sur Y et r_2 la rétraction de Y sur Z . On a alors $r_1 \simeq \text{Id}_X \text{ rel } Y$ et $r_2 \simeq \text{Id}_Y \text{ rel } Z$. Ainsi $r_1 \simeq \text{Id}_X \text{ rel } Z$ et donc

$$\begin{aligned} r_2 \circ r_1 &\simeq \text{Id}_Y \circ r_1 \text{ rel } Z \\ &\simeq r_1 \text{ rel } Z \\ &\simeq \text{Id}_X \text{ rel } Z \end{aligned}$$

ce qui prouve que Z est un rétracte par déformation de X . \square

EXEMPLE 1.5.

- 1) Comme nous l'avons vu plus haut, tout espace se rétracte sur un point, mais pas nécessairement par déformation. Cependant, il est clair qu'un espace qui se rétracte par déformation sur un point est un espace contractile et inversement.
- 2) Nous avons vu que S^1 est un rétracte de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. On a même plus, il s'agit d'un rétracte par déformation. En effet, l'application

$$H_s(x) = x + s \left(\frac{x}{\|x\|} - x \right)$$

est bien une homotopie de l'identité de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ sur la rétraction de S^1 .

CW-Complexes

Les CW-complexes ou complexes cellulaires sont des espaces topologiques décomposés en cellules. Nous allons voir comment les construire et quelles sont leur propriétés fondamentales. Les complexes cellulaires forment une large catégorie d'espaces topologiques qui seront utilisés par la suite.

Définitions et propriétés de base

DÉFINITION 2.1. Une *cellule de dimension n* ou *n -cellule* est un espace topologique homéomorphe à \mathbb{R}^n .

REMARQUE 2.2. Nous ne le démontrerons pas ici, mais nous admettons que $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$ si et seulement si $n = m$. Une preuve de ce résultat pour $n = 2$ est donnée dans le corollaire 3.45.

DÉFINITION 2.3. Une *décomposition cellulaire* d'un espace topologique X est une partition \mathcal{E} de X en sous-espaces qui sont tous des cellules. On note alors

$$X^n = \{e \in \mathcal{E} \mid \dim e \leq n\}$$

et on appelle cet ensemble le $n^{\text{ème}}$ *squelette* de X .

DÉFINITION 2.4. Un *CW-complexe* ou *complexe cellulaire* consiste en une paire (X, \mathcal{E}) où X est un espace de Hausdorff et \mathcal{E} une décomposition cellulaire de X telle que :

- i) Pour toute n -cellule $e \in \mathcal{E}$, il existe une application continue $\Phi_e : D^n \rightarrow X$, appelée *application caractéristique*, telle que la restriction de Φ_e à l'intérieur de D^n soit un homéomorphisme sur e et telle que $\Phi_e(S^{n-1}) \subseteq X^{n-1}$.
- ii) Pour toute n -cellule $e \in \mathcal{E}$, l'ensemble $\{f \in \mathcal{E} \mid \bar{e} \cap f \neq \emptyset\}$ est fini. i.e. l'adhérence de toute cellule n'intersecte qu'un nombre fini de cellules. On appelle cette propriété la *finitude de fermeture*.
- iii) La topologie de X est telle que $F \subseteq X$ est fermé $\iff F \cap \bar{e}$ est fermé pour tout $e \in \mathcal{E}$. Cette topologie est appelée *topologie faible*.

REMARQUE 2.5. En anglais, la condition *ii*) se nomme *closure finiteness* et la *iii*) *weak topology*. Les premières lettre de chacune d'entres elles nous donne le C et le W du mot CW-complexe. Cette définition des complexes cellulaires a été introduite par Whitehead en 1949.

DÉFINITION 2.6. Un CW-complexe est *fini* s'il possède un nombre fini de cellules. i.e. si $|\mathcal{E}| < \infty$ et la *dimension* d'un CW-complexe X est

$$\dim(X) = \inf \{n \in \mathbb{N} \mid X = \bigcup_{i=0}^n X^i\}$$

EXEMPLE 2.1. Un CW-complexe de dimension 1 est appelé un *graphe*. Les cellules de dimension nulle sont appelés des *sommets* et les 1-cellules des *arêtes*. Une arête peut relier deux sommets distincts ou un même sommet.

Dans la section suivante, nous donnerons d'autres exemples de CW-complexes que nous construirons grâce à la méthode d'attachement de cellules.

PROPOSITION 2.7. *Tout CW-complexe non-vide contient au moins une cellule de dimension nulle.*

DÉMONSTRATION. Soit X un CW-complexe et supposons l'assertion fausse. Soit $n > 0$ la plus petite dimension des cellules de X et e une n -cellule. On a alors $\Phi_e : D^n \rightarrow X$ avec $\Phi_e(S^{n-1}) \subseteq X^{n-1}$. Or, par hypothèse, $X^{n-1} = \emptyset$ et $S^{n-1} \neq \emptyset$; ce qui est une contradiction. \square

PROPOSITION 2.8. *Soit X un CW-complexe et e une n -cellule de X , alors, $\bar{e} = \Phi_e(D^n)$ et donc \bar{e} est compact. De plus, $\bar{e} \setminus e \subseteq X^{n-1}$.*

DÉMONSTRATION. Comme $\Phi_e(\overset{\circ}{D}^n) = e$, on a $e \subseteq \Phi_e(D^n) \subseteq \overline{\Phi_e(\overset{\circ}{D}^n)} \subseteq \bar{e}$. Or, D^n est compact, ainsi $\Phi_e(D^n)$ aussi et comme X est de Hausdorff, $\Phi_e(D^n)$ est fermé et compris entre e et \bar{e} . Ainsi $\Phi_e(D^n) = \bar{e}$. De plus, $\bar{e} \setminus e \subseteq \Phi_e(S^{n-1}) \subseteq X^{n-1}$. \square

Comme toujours dans une telle situation, on s'intéresse également à la notion de sous-structure – les sous-complexes dans le cas présent – lors de l'étude d'une nouvelle structure. La proposition suivante nous donne des équivalences définissant un sous-complexe.

PROPOSITION ET DÉFINITION 2.9. *Soit (X, \mathcal{E}) un CW-complexe, $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$ et $X' = \bigcup_{e \in \mathcal{E}'} e$, alors, (X', \mathcal{E}') est un sous-complexe de (X, \mathcal{E}) si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :*

- i) (X', \mathcal{E}') est un CW-complexe
- ii) X' est fermé dans X
- iii) Pour toute cellule $e \in \mathcal{E}'$, son adhérence \bar{e} est incluse dans X' .

DÉMONSTRATION.

ii) \Rightarrow *iii*) évident

iii) \Rightarrow *ii*) Soit $e \in \mathcal{E}$, montrons que $\bar{e} \cap X'$ est fermé dans X . Comme X est un CW-complexe, la propriété de finitude de fermeture implique que \bar{e} n'intercepte qu'un nombre fini de cellules de X' . Par hypothèse, l'adhérence de ces cellules est également dans X' et ainsi $\bar{e} \cap X' = \bar{e} \cap (\overline{e_1} \cup \dots \cup \overline{e_r})$ qui est bien un fermé de X .

- i*) \Rightarrow *iii*) Soit $e \in \mathcal{E}'$, son application caractéristique, Φ_e dans (X', \mathcal{E}') en est aussi une dans (X, \mathcal{E}) . Ainsi, par la proposition 2.8, $\Phi_e(D^n)$ est l'adhérence de e dans X et dans X' . On a donc bien que $\bar{e} \subseteq X'$.
- ii*), *iii*) \Rightarrow *i*) Soit $\Phi_e : D^n \rightarrow X$ l'application caractéristique de e dans X . Par le point *iii*), $\Phi_e(D^n) = \bar{e} \subseteq X'$ et donc, Φ_e est également une application caractéristique de e dans X' . Comme X' est un sous-ensemble de X , il possède également la propriété de finitude de fermeture. Il ne reste donc plus qu'à montrer que X' a la topologie faible.
- Soit $A \subseteq X'$ tel que $A \cap \bar{e}$ est fermé dans X' pour toute cellule $e \in \mathcal{E}'$. Par *ii*), "fermé dans X " et "fermé dans X' " sont des propriétés équivalentes, il suffit donc de montrer que $A \cap \bar{e}$ est fermé dans X pour toute cellule $e \in \mathcal{E}$. Soit $e \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}'$ (pour les cellules dans \mathcal{E}' c'est déjà vérifié par hypothèse). Par finitude de fermeture de X , $A \cap \bar{e} = A \cap (\bar{e}'_1 \cup \dots \cup \bar{e}'_r) \cap \bar{e}$ ou $e'_i \in \mathcal{E}'$. Par *iii*) on a donc $A \cap \bar{e} = A \cap (\bar{e}'_1 \cup \dots \cup \bar{e}'_r) \cap \bar{e}$. Or, $A \cap (\bar{e}'_1 \cup \dots \cup \bar{e}'_r)$ est fermé par hypothèse, ainsi, $A \cap \bar{e}$ est également fermé. Comme X possède la topologie faible, A est fermé dans X et donc, dans X' aussi.

□

COROLLAIRE 2.10.

- i) *Toute réunion ou intersection de sous-complexes est un sous-complexe.*
- ii) *Tout squelette d'un CW-complexe en est un sous-complexe.*
- iii) *Toute cellule est incluse dans un sous-complexe fini.*

COROLLAIRE 2.11. *Soit X un CW-complexe, $K \subseteq X$ une partie compacte de X , alors, K est incluse dans un sous-complexe fini X' de X .*

En particulier, un sous complexe est compact si et seulement s'il est fini.

DÉMONSTRATION. Soit $\{e_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{E}$ l'ensemble des cellules intersectant K et choisissons un point p_i dans chacune des intersections $e_i \cap K$. Posons

$$P = \{p_i\}_{i \in I} \subseteq K$$

Soit $A \subseteq P$, $e \in \mathcal{E}$, alors, $\bar{e} \cap A$ est fini, par finitude de fermeture de X et est donc fermé. Pour $A = P$, on obtient donc que P est discret et fermé dans K , donc compact et fini. On en déduit donc que K intercepte un nombre fini de cellules. Par le corollaire 2.10, chacune de ces cellules est incluse dans un sous-complexe fini, et la réunion des ces sous-complexes en est un également qui est fini et contient K .

Il ne reste plus qu'à montrer que tout sous-complexe fini X' est compact. Or, comme $X' = \cup_{i=1}^r \bar{e}_i$ et \bar{e}_i est compact, X' l'est également.

□

REMARQUE 2.12. Les notions de produit et de quotient peuvent être utilisées sur les CW-complexes. Ces opérations soulèvent parfois quelques difficultés topologiques que nous ne souhaitons pas développer ici. Pour toutes les questions sur la nature précise des CW-complexes et de leur propriétés, nous renvoyons le lecteur à [1] dans l'appendice, pages 519-529.

Attachements de cellules

Dans la pratique, on construit un CW-complexe inductivement sur chaque squelette en y attachant des cellules. Cette méthode extrêmement fructueuse permet de construire rapidement des CW-complexes. De nombreux auteurs prennent d'ailleurs cette construction comme définition des CW-complexes.

Pour des raisons pratiques et de temps, les propositions énoncées dans cette section ne seront pas démontrées. Notre but est avant tout d'introduire la notion de CW-complexe pour pouvoir l'utiliser par la suite sans faire un exposé détaillé de toutes leurs caractéristiques. Comme dit précédemment, nous recommandons la lecture de l'appendice de [1] pour tous détails supplémentaires.

DÉFINITION 2.13. Soit X, Y des espaces topologiques, $X_0 \subseteq X$ et $\varphi : X_0 \rightarrow Y$ une application continue, on définit

$$Y \cup_{\varphi} X = X \amalg Y / \sim$$

où chaque point n'est en relation qu'avec lui-même sauf pour les points attachés en X_0 , i.e. $x \sim \varphi(x)$ pour tout point x dans X_0 .

On dit alors que $Y \cup_{\varphi} X$ est obtenu en *attachant* X à Y en X_0 et que φ est *l'application d'attachement*. En général, on considère Y inchangé et X déformé et collé sur Y en $\varphi(X_0)$.

EXEMPLE 2.2. Voici un exemple simple pour visualiser la notion d'attachement. Il s'agit d'attacher à un espace topologique X un disque D^2 par son bord le long d'un lacet γ dans X . L'application d'attachement dans ce cas est alors

$$\begin{aligned} \phi : S^1 &\longrightarrow X \\ e^{2\pi it} &\longmapsto \gamma(t) \end{aligned}$$

La figure suivante permet de visualiser cette opération :

PROPOSITION 2.14. Soit X un CW-complexe et $\varphi : S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$ une application continue, alors, $X \cup_{\varphi} D^n$ est également un CW-complexe et ne possède qu'une n -cellule de plus que X .

DÉMONSTRATION. Il suffit d'observer que l'application d'attachement φ devient dans $X \cup_{\varphi} D^n$ une application caractéristique de la n -cellule nouvellement attachée. □

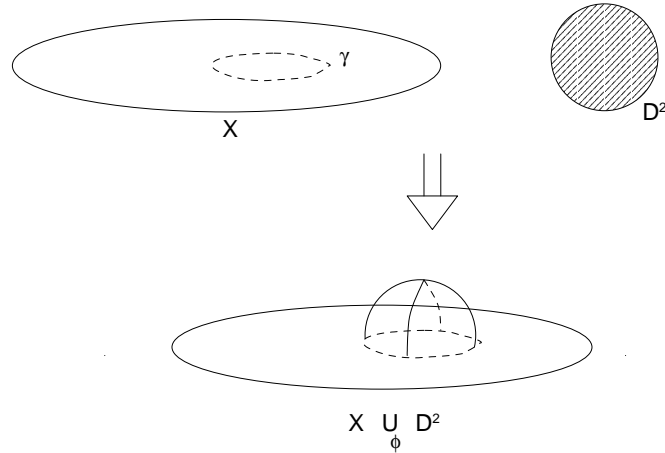
PROPOSITION 2.15. Soit X un CW-complexe, et $\{(e_{\alpha}, \varphi_{\alpha})\}_{\alpha \in \Lambda}$ une famille telle que e_{α} est une n_{α} -cellule et φ_{α} est une application d'attachement, i.e.

$$\varphi_{\alpha} : S^{n_{\alpha}-1} \longrightarrow X^{n_{\alpha}-1}$$

alors, l'espace $X \cup_{\varphi_{\alpha}} D^{n_{\alpha}}$ est un CW-complexe.

REMARQUE 2.16. On peut donc construire un CW-complexe de la manière suivante :

- (1) On part d'un ensemble discret qui sera le 0^{ème} squelette de notre CW-complexe.

FIG. 1. Attachement d'un disque à un espace X

- (2) Inductivement, on attache au $(n - 1)$ ^{ème} squelette X^{n-1} une famille de n -cellules $\{(e_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ où $\varphi_\alpha : S^n \rightarrow X^n$ est l'application d'attachement. On pose alors $X^n = X^{n-1} \cup_{\varphi_\alpha} D_\alpha^n$.
- (3) Le CW-complexe est alors la réunion de tous les squelettes que l'on munit de la topologie faible.

EXEMPLE 2.3. La sphère S^n de dimension n , possède une structure de CW-complexe à deux cellules. Une cellule e^0 de dimension nulle et une cellule e^n de dimension n dont le bord est attaché à la 0-cellule par l'application constante $S^{n-1} \rightarrow e^0$. Ceci est équivalent à considérer S^n comme l'espace quotient D^n/S^{n-1} .

EXEMPLE 2.4. \mathbb{Z} et \mathbb{Q} étant des espaces discrets, on peut leur associer une structure de CW-complexe de dimension nulle où chaque point est identifié à une 0-cellule. \mathbb{R} peut être construit comme un CW-complexe de dimension 1, un graphe infini, dont le 0-squelette est \mathbb{Z} et où chaque point de \mathbb{Z} est relié à son successeur par une arête.

EXEMPLE 2.5. Un polyèdre, possède une structure naturelle de CW-complexe de dimension 2. Chaque sommet est une 0-cellule, chaque arête une 1-cellule et chaque face une 2-cellule.

Un exemple très utilisé de CW-complexe consiste en la notion de surface de genre g . Une telle surface correspond à l'idée la plus simple de surface à trous. Le paramètre g est bien entendu ce nombre de trous. Pour $g = 1$, on pense naturellement au tore.

DÉFINITION 2.17. Une *surface orientable de genre g* est un CW-complexe de dimension 2 avec une 0-cellule, $2g$ 1-cellules et une 2-cellule. Si on appelle les 1-cellules respectivement $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$, alors on attache la 2-cellule le long du lacet $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$. En effet, chaque 1-cellule correspond à un lacet basé sur la 0-cellule. On choisit une orientation pour chacun de ces lacets et on définit le lacet ab comme étant le lacet parcourant a puis b . On note a^{-1} le lacet

a parcouru à l'envers. Un lacet étant homéomorphe au cercle, on peut donc définir une application d'attachement de la 2-cellule le long du lacet défini ci-dessus.

Plus visuellement, pour $g = 1$, on construit le tore de la manière suivante : On se donne deux 1-cellules a et b , le squelette de dimension 1 est ainsi un produit wedge de deux cercles, et on se donne une orientation de chacun de ces cercles. On attache alors une 2-cellule, i.e. un disque de dimension 2, le long du chemin parcouru par a puis b puis a^{-1} puis enfin b^{-1} pour obtenir le tore. Une autre manière de voir cela consiste à construire le polygone régulier à $2g$ côtés, le carré dans ce cas, et à nommer ses arêtes par a puis b puis a^{-1} puis enfin b^{-1} . On obtient la figure suivante :

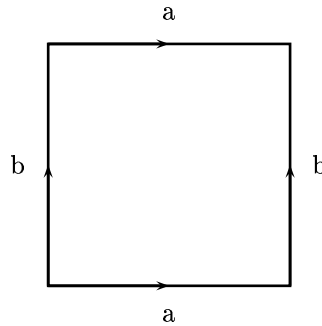


FIG. 2.

On place des flèches que l'on lit dans le sens anti-horaire afin de signifier que l'on parcourt a ou a^{-1} . On identifie alors les côtés ayant le même nom d'arête de manière à ce que les flèches soient dans le même sens. Dans ce cas, par exemple, en commençant par identifier les a , on obtient un cylindre que l'on plie sur lui-même en identifiant les b pour finalement obtenir le tore.

Pour $g = 2$, on obtient le "tore à deux trous" par l'identification :

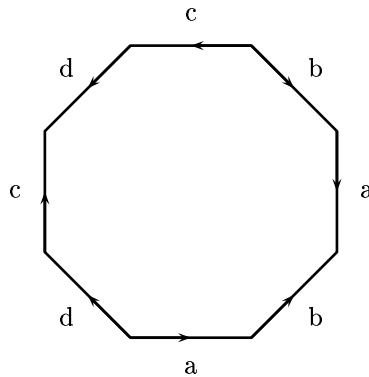


FIG. 3.

Groupe fondamental

Le groupe fondamental est le premier outil de base de la topologie algébrique. Il s'agit d'un foncteur¹ de la catégorie des espaces topologiques pointés vers la catégorie des groupes. De manière plus intuitive, le groupe fondamental nous permet de traduire un problème topologique en un problème algébrique. Cette méthode fructueuse a déjà engendré de nombreux résultats intéressants dont nous présenterons une partie.

Nous commencerons par étudier les propriétés principales des homotopies de chemins, puis, après avoir défini le groupe fondamental, parlerons d'une classe importante d'espace topologiques : les espaces simplement connexes. Nous terminerons ce chapitre par le calcul du groupe fondamental du cercle et traiterons les conséquences principales de ce résultat.

Homotopies de chemins

DÉFINITION 3.1. On rappelle que les *chemins* d'un espace topologique X sont les applications continues de I dans X , i.e. $C(I, X)$. On note c_{x_0} le chemin constant en $x_0 \in X$. Si $c \in C(I, X)$ est un chemin, on appelle $c(0)$ son *origine* et $c(1)$ son *extrémité*. On note \bar{c} le *chemin inverse* de c défini par : $\bar{c}(t) = c(1 - t)$.

Les homotopies entre chemins qui nous intéresseront sont celles qui fixent leurs extrémités. C'est pourquoi nous motivons une notation et une terminologie particulière pour ce cas.

DÉFINITION 3.2. On appelle *homotopies de chemins* les homotopies rel $\{0, 1\}$ de $C(I, X)$. Deux chemins c_1, c_2 sont ainsi dits *homotopes à extrémités fixées* s'il existe une homotopie de chemins de l'un vers l'autre. On note alors, $c_1 \approx c_2$ ou $c_1 \approx_H c_2$ si on veut préciser que H est l'homotopie entre c_1 et c_2 .

PROPOSITION ET DÉFINITION 3.3. *L'homotopie de chemins est une relation d'équivalence dans l'ensemble des chemins d'un espace topologique X . On note $[f]$ la classe d'équivalence d'homotopie de chemins du chemin $f \in C(I, X)$ et on l'appelle la classe d'homotopie de f .*

¹Pour en savoir plus sur la théorie des catégories, nous vous recommandons la lecture de [5].

Afin de pouvoir manipuler les chemins plus librement, nous définissons l'opération de concaténation des chemins qui nous permettra de couper ou coller des chemins à volonté. Pour rester cohérent, cette opération nécessite une reparamétrisation des chemins en jeu de manière à ce qu'ils soient tous définis sur l'intervalle $[0, 1]$.

DÉFINITION 3.4. Soit $f, g \in C(I, X)$ deux chemins tels que $f(1) = g(0)$. On définit la *concaténation* de f et g comme étant le chemin

$$f \cdot g(t) = \begin{cases} f(2t) & , t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2t - 1) & , t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

En d'autres termes, il s'agit du chemin parcouru par f sur la première moitié du temps, puis par g sur la seconde.

On dira que deux chemins sont *concaténables* s'ils respectent la condition nécessaire pour définir leur concaténation, à savoir que l'extrémité du premier soit l'origine du second.

La reparamétrisation des chemins, comme celle effectuée dans l'opération de concaténation, ne modifie pas fondamentalement les chemins. Le lemme suivant montre en effet que la reparamétrisation d'un chemin ne modifie pas sa classe d'homotopie.

LEMME 3.5. Soit $\phi : I \rightarrow I$ une reparamétrisation de l'intervalle I , i.e. une application continue telle que $\phi(0) = 0$ et $\phi(1) = 1$, alors, $\phi \approx Id_I$. En particulier, tout chemin est homotope à une reparamétrisation.

DÉMONSTRATION. Posons $H_s(t) = \phi(t)(1 - s) + ts$. Clairement, H est une homotopie de ϕ vers l'identité de I .

□

La proposition suivante démontre que si deux chemins sont homotopes, leurs inverses le sont également. Cette propriété découle naturellement de l'idée intuitive que le sens de paramétrisation n'influence pas la nature propre d'un chemin.

PROPOSITION 3.6. Soit $f, g \in C(I, X)$ deux chemins homotopes, alors, \bar{f} et \bar{g} sont également homotopes.

DÉMONSTRATION. On a $f \approx_H g$, ainsi, l'application $\bar{H}_s(t) = H_s(1 - t)$ est une homotopie de chemins de \bar{f} vers \bar{g} .

□

Nous allons maintenant démontrer plusieurs propriétés d'interaction entre la concaténation et l'homotopie.

PROPOSITION 3.7. Soit X un espace topologique, f, f_1, f_2 des chemins dans X d'origine $x \in X$ et d'extrémité $y \in X$, g_1, g_2 des chemins dans X d'origine y et d'extrémité $z \in X$, alors, on a les propriétés suivantes

- 1) La concaténation est compatible avec l'homotopie ; i.e. si f_1 et f_2 sont homotopes ainsi que g_1 et g_2 , alors, $f_1 \cdot g_1 \approx f_2 \cdot g_2$.
- 2) La concaténation est associative à homotopie près.
- 3) Le lacet trivial est un élément neutre pour la concaténation à homotopie près ; i.e. $f \cdot c_y \approx f$ et $c_x \cdot f \approx f$.

- 4) *Le chemin inverse est un inverse pour la concaténation à homotopie près ; i.e. $\bar{f} \cdot f \approx c_y$ et $f \cdot \bar{f} \approx c_x$.*

DÉMONSTRATION.

- 1) On a $f_1 \approx_F f_2$ et $g_1 \approx_G g_2$, posons

$$H_s(t) = \begin{cases} F_s(2t) & , t \in [0, \frac{1}{2}] \\ G_s(2t - 1) & , t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

H est clairement une homotopie de $f_1 \cdot g_1$ vers $f_2 \cdot g_2$.

- 2) Soit f, g, h des chemins avec f et g ainsi que g et h concaténables. Posons

$$H_s(t) = \begin{cases} f(\frac{4t}{1+s}) & , t \in [0, \frac{1+s}{4}] \\ g(4t - s - 1) & , t \in [\frac{1+s}{4}, \frac{2+s}{4}] \\ h(\frac{4t-s-2}{2-s}) & , t \in [\frac{2+s}{4}, 1] \end{cases}$$

H est une homotopie de $(f \cdot g) \cdot h$ vers $f \cdot (g \cdot h)$, en effet,

$$H_0(t) = \begin{cases} f(4t) & , t \in [0, \frac{1}{4}] \\ g(4t - 1) & , t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ h(2t - 1) & , t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$= ((f \cdot g) \cdot h)(t)$$

$$H_1(t) = \begin{cases} f(2t) & , t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(4t - 2) & , t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ h(4t - 3) & , t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

$$= (f \cdot (g \cdot h))(t)$$

et on a bien $H_s(0) = f(0)$, $H_s(1) = h(1)$.

- 3) Soit

$$H_s(t) = \begin{cases} f(\frac{2t}{1+s}) & , t \in [0, \frac{1+s}{2}] \\ y & , t \in [\frac{1+s}{2}, 1] \end{cases}$$

H est une homotopie de chemins de $f \cdot c_y$ vers f . En effet,

$$H_0(t) = \begin{cases} f(2t) & , t \in [0, \frac{1}{2}] \\ y & , t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$=(f \cdot c_y)(t)$$

$$H_1(t) = \begin{cases} f(t) & , t \in [0, 1] \\ y & , t = 1 \end{cases}$$

$$=f(t)$$

avec $H_s(0) = x$ et $H_s(1) = y$ pour tout $s \in I$. On procède de même pour montrer que $c_x \cdot f \approx f$.

4) L'application

$$H_s(t) = \begin{cases} x & , t \in [0, \frac{s}{2}] \\ f(2t - s) & , t \in [\frac{s}{2}, \frac{1}{2}] \\ f(2 - 2t - s) & , t \in [\frac{1}{2}, \frac{2-s}{2}] \\ x & , t \in [\frac{2-s}{2}, 1] \end{cases}$$

est une homotopie de $f \cdot \bar{f}$ vers c_x . En effet,

$$H_0(t) = \begin{cases} x & , t = 0 \\ f(2t) & , t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \bar{f}(2t - 1) & , t \in [\frac{1}{2}, 1] \\ x & , t = 1 \end{cases}$$

$$=(f \cdot \bar{f})(t)$$

$$H_1(t) = \begin{cases} x & , t \in [0, \frac{1}{2}] \\ f(0) = \bar{f}(1) = x & , t = \frac{1}{2} \\ x & , t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$=c_x(t)$$

avec $H_s(0) = x$ et $H_s(1) = x$ pour tout $s \in I$. On procède de même pour montrer que $\bar{f} \cdot f \approx c_y$.

□

Le groupe fondamental

DÉFINITION 3.8. Un *lacet* est un chemin ayant même origine et même extrémité, on dit alors que le lacet est *basé* en ce point. On note

$$\Omega(X, x_0) = \{f \in C(I, X) \mid f(0) = f(1) = x_0\}$$

l'ensemble des lacets basés en x_0 et on l'appelle *l'espace des lacets basés en x_0* .

Les lacets étant des chemins, tout ce que nous avons dit précédemment s'applique donc à eux. Deux lacets basés en un même point sont évidemment toujours concaténables, ce qui permet de définir la concaténation comme une loi de composition sur l'espace des lacets basés. L'espace des lacets nécessitant un point de base, on travaillera désormais avec des espaces topologiques pointés. Rappelons que la seule exigence supplémentaire par rapport aux espaces topologiques, consiste à ce que les applications continues entre espaces pointés envoie le point de base de l'une sur le point de base de l'autre.

DÉFINITION 3.9. Soit (X, x_0) un espace topologique pointé, on appelle *groupe fondamental* de (X, x_0) l'ensemble des classes d'homotopies de lacets basés en x_0 et on le note

$$\pi_1(X, x_0) = \{[f] \mid f \in \Omega(X, x_0)\}$$

On définit une loi de composition sur le groupe fondamental à partir de la concaténation par

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow \pi_1(X, x_0) \\ ([f], [g]) &\longmapsto [f][g] := [f \cdot g] \end{aligned}$$

LEMME 3.10. *La loi de composition définie sur $\pi_1(X, x_0)$ est bien définie.*

DÉMONSTRATION. Soit $[f_1] = [f_2]$ et $[g_1] = [g_2] \in \pi_1(X, x_0)$. On a donc $f_1 \approx f_2$ et $g_1 \approx g_2$. Par la proposition 3.7, on a $f_1 \cdot g_1 \approx f_2 \cdot g_2$, en d'autres termes, $[f_1][g_1] = [f_2][g_2]$. □

THÉORÈME 3.11. *Le groupe fondamental muni de la loi de composition définie ci-dessus est un groupe. Plus précisément, $[c_{x_0}]$ est son élément neutre et l'inverse d'une classe d'homotopie $[f]$ est la classe de son inverse, i.e. $[\bar{f}]$.*

DÉMONSTRATION. La proposition 3.7 nous garantit que l'espace des lacets est un groupe à homotopie près, or clairement, le groupe fondamental est l'espace des lacets à homotopie près. □

Commençons par étudier l'influence du choix du point de base sur le groupe fondamental.

PROPOSITION 3.12. *Soit x_0, x_1 deux points d'un espace topologique X . S'il existe un chemin γ reliant ces deux points, alors les groupes fondamentaux associés sont isomorphes, i.e.*

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$$

DÉMONSTRATION. Considérons l'application

$$\begin{aligned}\varphi : \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow \pi_1(X, x_1) \\ [f] &\longmapsto [\bar{\gamma} \cdot f \cdot \gamma]\end{aligned}$$

montrons que φ est bien un isomorphisme.

I) φ est un homomorphisme de groupe.

En effet,

$$\begin{aligned}\varphi([f][g]) &= [\bar{\gamma} \cdot f \cdot g \cdot \gamma] \\ &= [\bar{\gamma} \cdot f \cdot \gamma][\bar{\gamma} \cdot g \cdot \gamma] \\ &= \varphi([f])\varphi([g])\end{aligned}$$

II) φ est surjective.

Soit $[g] \in \pi_1(X, x_1)$, alors, $[g] = \varphi([\gamma \cdot g \cdot \bar{\gamma}])$.

III) φ est injective.

Soit $[f] \in \text{Ker}(\varphi)$, i.e., $[\bar{\gamma} \cdot f \cdot \gamma] = [c_{x_1}]$, alors, $[f] = [\gamma \cdot c_{x_1} \cdot \bar{\gamma}] = [\gamma \cdot \bar{\gamma}] = [c_{x_0}]$

□

COROLLAIRE 3.13. *Si x_0 et $x_1 \in X$ sont dans la même composante connexe par arcs, alors $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$.*

COROLLAIRE 3.14. *Si X est connexe par arcs, le choix du point de base n'influence pas le groupe fondamental à isomorphisme près.*

DÉFINITION 3.15. On notera β_γ l'isomorphisme φ engendré par le chemin γ de la preuve de la proposition précédente.

DÉFINITION 3.16. En vertu du corollaire précédent, on note $\pi_1(X)$ le groupe fondamental d'un espace X connexe par arcs, sans se soucier du point de base.

REMARQUE 3.17. L'isomorphisme entre $\pi_1(X, x_0)$ et $\pi_1(X, x_1)$ dépend du choix du chemin γ reliant x_0 et x_1 . La proposition suivante éclaire un peu ce point.

PROPOSITION 3.18. *Soit x_0 et $x_1 \in X$ ainsi que $\gamma_1, \gamma_2 \in C(I, X)$ deux chemins reliant x_0 et x_1 , alors, β_{γ_1} et β_{γ_2} sont conjugués dans $\pi_1(X, x_0)$. i.e. il existe $[h] \in \pi_1(X, x_0)$ telle que $\beta_{\gamma_1}([f]) = [\bar{h}]\beta_{\gamma_2}([f])[h]$.*

DÉMONSTRATION. En effet, il suffit de le vérifier :

$$\begin{aligned}\beta_{\gamma_1}([f]) &= [\bar{\gamma}_1 \cdot f \cdot \gamma_1] \\ &= [\bar{\gamma}_1 \cdot \gamma_2 \cdot \bar{\gamma}_2 \cdot f \cdot \gamma_2 \cdot \bar{\gamma}_2 \cdot \gamma_1] \\ &= [\bar{\gamma}_1 \cdot \gamma_2][\bar{\gamma}_2 \cdot f \cdot \gamma_2][\bar{\gamma}_2 \cdot \gamma_1] \\ &= [\bar{\gamma}_2 \cdot \gamma_1]\beta_{\gamma_2}([f])[\bar{\gamma}_2 \cdot \gamma_1]\end{aligned}$$

□

COROLLAIRE 3.19. *Si X est connexe par arcs et que $\pi_1(X)$ est commutatif, alors, tous les groupes fondamentaux $\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_1)$ sont isomorphes, à un unique isomorphisme près, pour tous points $x_0, x_1 \in X$.*

Fonctorialité

THÉORÈME 3.20. *Le groupe fondamental induit un foncteur π_1 de la catégorie \mathcal{Top}_* des espaces topologiques pointés vers la catégorie \mathcal{Grp} des groupes. Plus précisément, π_1 agit sur les morphismes de \mathcal{Top}_* de la manière suivante :*

$$\begin{array}{ccc} f : (X, x_0) & \longrightarrow & (Y, y_0) \\ & \Downarrow \pi_1 & \\ \pi_1(f) : \pi_1(X, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(Y, y_0) \\ & & [c] \longmapsto [f \circ c] \end{array}$$

DÉMONSTRATION. Commençons par montrer que $\pi_1(f)$ est bien définie. Soit $[c_1], [c_2] \in \pi_1(X, x_0)$, on a donc $c_1 \approx_H c_2$. Ainsi, $f \circ H$ est une homotopie de chemins de $f \circ c_1$ vers $f \circ c_2$, i.e. $\pi_1(f)([c_1]) = [f \circ c_1] = [f \circ c_2] = \pi_1(f)([c_2])$. Vérifions encore que les deux propriétés nécessaires à la fonctorialité de π_1 .

I) $\pi_1(\text{Id}_X) = \text{Id}_{\pi_1(X, x_0)}$.

En effet, soit $[c] \in \pi_1(X, x_0)$, alors on a $\pi_1(\text{Id}_X)([c]) = [\text{Id}_X \circ c] = [c] = \text{Id}_{\pi_1(X, x_0)}([c])$.

II) $\pi_1(f \circ g) = \pi_1(f) \circ \pi_1(g)$.

En effet, soit $(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{g} (Z, z_0)$ et $[c] \in \pi_1(X, x_0)$, alors on a $(\pi_1(f) \circ \pi_1(g))([c]) = \pi_1(f)([g \circ c]) = [f \circ g \circ c] = \pi_1(f \circ g)([c])$.

□

COROLLAIRE 3.21 (Invariance topologique du groupe fondamental).

Deux espaces homéomorphes ont leurs groupes fondamentaux isomorphes pour des points de bases associés, i.e. si

$$f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$$

est un homéomorphisme pointé², alors $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0)$.

COROLLAIRE 3.22. *Si $\pi_1(X, x_0) \not\cong \pi_1(Y, y_0)$, alors, (X, x_0) et (Y, y_0) ne sont pas homéomorphes.*

Afin de démontrer que le groupe fondamental est un invariant du type d'homotopie, nous démontrons le lemme suivant.

LEMME 3.23. *Soit (X, x_0) un espace topologique pointé, Y un espace topologique, $\varphi : X \times I \rightarrow Y$ une homotopie de φ_0 vers φ_1 et $\gamma : I \rightarrow X$ le chemin défini par $\gamma(t) = \varphi_t(x_0)$ reliant $\varphi_0(x_0)$ à $\varphi_1(x_0)$, alors, le diagramme suivant commute*

$$\begin{array}{ccc} & & \pi_1(Y, \varphi_0(x_0)) \\ & \nearrow \pi_1(\varphi_0) & \downarrow \beta_\gamma \\ \pi_1(X, x_0) & & \pi_1(Y, \varphi_1(x_0)) \\ & \searrow \pi_1(\varphi_1) & \end{array}$$

²Ceci revient au même que d'avoir un homéomorphisme $f : X \rightarrow Y$ et de choisir $y_0 = f(x_0)$ pour tout choix de point de base x_0 de X .

DÉMONSTRATION. Soit γ_s la restriction de γ à l'intervalle $[0, s]$ reparamétrisée sur I , i.e. $\gamma_s(t) = \gamma(st)$. Soit $[f] \in \pi_1(X, x_0)$, alors l'application

$$H_s(t) = (\overline{\gamma_s} \cdot \varphi_{(1-s)} \circ f \cdot \gamma_s)(t)$$

est une homotopie de $\pi_1(\varphi_1)([f]) = [\varphi_1 \circ f] = [\overline{\gamma_0} \cdot \varphi_1 \circ f \cdot \gamma_0]$ vers $\beta_\gamma(\pi_1(\varphi_0)([f])) = [\overline{\gamma} \cdot \varphi_0 \circ f \cdot \gamma] = [\overline{\gamma_1} \cdot \varphi_0 \circ f \cdot \gamma_1]$

□

THÉORÈME 3.24. *Soit X et Y deux espaces topologiques de même type d'homotopie et $\varphi \in C(X, Y)$ une équivalence d'homotopie, alors, pour tout choix de point de base x_0 dans X ,*

$$\pi_1(\varphi) : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, \varphi(x_0))$$

est un isomorphisme.

DÉMONSTRATION. Soit $\psi \in C(Y, X)$ un inverse d'homotopie pour φ , c'est à dire que $\varphi \circ \psi \simeq \text{Id}_Y$ et $\psi \circ \varphi \simeq \text{Id}_X$. Considérons les applications

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\pi_1(\varphi)} \pi_1(Y, \varphi(x_0)) \xrightarrow{\pi_1(\psi)} \pi_1(\psi \circ \varphi(x_0)) \xrightarrow{\pi_1(\varphi)} \pi_1(Y, \varphi \circ \psi \circ \varphi(x_0))$$

Comme $\psi \circ \varphi \simeq \text{Id}_X$, le lemme précédent implique qu'il existe $\gamma \in C(I, X)$, un chemin, tel que $\pi_1(\psi) \circ \pi_1(\varphi) = \beta_\gamma$ qui est un isomorphisme. Ainsi, $\pi_1(\varphi)$ est injective. Comme $\psi \circ \varphi \simeq \text{Id}_Y$, le lemme précédent implique également qu'il existe un chemin $\delta \in C(I, Y)$ tel que $\pi_1(\varphi) \circ \pi_1(\psi) = \beta_\delta$ qui est aussi un isomorphisme et donc, que $\pi_1(\varphi)$ est surjective.

□

COROLLAIRE 3.25 (invariance homotopique du groupe fondamental).

Pour les espaces topologiques connexes par arcs, le groupe fondamental est un invariant du type d'homotopie.

COROLLAIRE 3.26. *Le groupe fondamental de tout espace contractile est trivial.*

DÉMONSTRATION. En effet, tout espace contractile X est de même type d'homotopie que l'espace $*$ à un point. Comme l'espace des lacets de cet espace ne possède que le lacet trivial, son groupe fondamental est trivial et donc isomorphe au groupe fondamental de l'espace X .

□

COROLLAIRE 3.27. *Si X est un rétracte par déformation d'un espace Y , alors, X et Y ont le même groupe fondamental, i.e.*

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, x_0) \quad \forall x_0 \in X$$

DÉMONSTRATION. Par la proposition 1.15 X et Y ont le même type d'homotopie, et donc par la proposition 3.24, le même groupe fondamental, pour tout point x_0 de X .

□

Nous donnons maintenant une proposition qui est extrêmement utile pour le calcul de groupes fondamentaux et qui traduit la compatibilité du foncteur π_1 avec le produit.

PROPOSITION 3.28. *Soit X, Y des espaces topologiques, alors,*

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

DÉMONSTRATION. Soit $p_1 : X \times Y \rightarrow X$ et $p_2 : X \times Y \rightarrow Y$ les projections du produit, alors on va montrer que

$$\begin{aligned} \pi_1(p_1) \times \pi_1(p_2) : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) &\longrightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \\ [(f, g)] &\longmapsto ([f], [g]) \end{aligned}$$

est un isomorphisme. En effet, c'est un homomorphisme par functorialité de π_1 qui est clairement surjectif. Il ne reste donc plus qu'à montrer son injectivité. Soit $[(f, g)] \in \text{Ker}(\pi_1(p_1) \times \pi_1(p_2))$. On a donc $f \approx_F c_{x_0}$ et $g \approx_G c_{y_0}$. Alors, $H_t = F_t \times G_t$ est une homotopie de (f, g) vers $(c_{x_0}, c_{y_0}) = c_{x_0, y_0}$. □

Espaces simplement connexes

La question "cet espace a-t-il des trous ?" est formalisée par la notion d'espace simplement connexe.

DÉFINITION 3.29. Un espace topologique connexe par arcs est dit *simplement connexe* si son groupe fondamental est trivial.

EXEMPLE 3.1.

- 1) Tout espace contractile est simplement connexe.
- 2) \mathbb{R}^n est simplement connexe, car contractile.
- 3) Toute partie convexe est simplement connexe.

PROPOSITION 3.30. *Un espace topologique X est simplement connexe si et seulement si pour toute paire de points x_0, x_1 il existe une unique classe d'homotopie de chemins reliant x_0 à x_1 .*

DÉMONSTRATION.

\Rightarrow L'existence est claire car X est connexe par arc, il suffit donc de montrer l'unicité de la classe d'homotopie. Soit $f, g \in C(I, X)$ deux chemins reliant x_0 à x_1 . On a

$$f \simeq f \cdot \bar{g} \cdot g \simeq g$$

car le lacet $f \cdot \bar{g}$ est homotope au lacet nul c_{x_0} puisque $\pi_1(X, x_0)$ est trivial.

\Leftarrow La connexité par arcs de X découle de l'existence d'une classe d'homotopie pour tout couple de points. De plus, si tous les chemins reliant deux points sont homotopes, il en est de même, en particulier, pour les lacets. Ainsi, le groupe fondamental doit être trivial. □

REMARQUE 3.31. Une partie connexe par arcs de \mathbb{R}^n n'est pas forcément simplement connexe. Une partie ayant des "trous" par exemple n'est pas simplement connexe comme on le verra plus loin, alors qu'elle peut facilement être connexe par arcs s'il est possible de "contourner" ces trous.

Nous allons maintenant nous intéresser à certaines propriétés des sphères et des boules. Ceci nous permettra dans l'immédiat de démontrer une autre caractérisation des espaces simplement connexes et sera également utilisé dans la prochaine section pour calculer le groupe fondamental du cercle.

DÉFINITION 3.32. La *boule de dimension n* est l'espace topologique

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Son bord est appelé la *sphère de dimension $n - 1$* et se note

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Pour $n = 2$, on regardera souvent le disque D^2 et le cercle S^1 comme des sous-ensembles de \mathbb{C} . On a alors,

$$D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\} \quad \text{et} \quad S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

REMARQUE 3.33. Les boules de dimensions n sont homéomorphes aux cubes de même dimension. Les sphères S^n quant à elles, sont homéomorphes au quotient de D^n dans lequel le bord est identifié à un point. Pour $n = 2$, on obtient les homéomorphismes suivants :

$$\begin{aligned} \rho : I \times I &\longrightarrow D^2 \\ (t, s) &\longmapsto se^{2\pi it} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} p : [0, 1[&\longrightarrow S^1 \\ t &\longmapsto e^{2\pi it} \end{aligned}$$

De plus, $\rho|_{I \times \{1\}} = p$.

Comme tout point de \mathbb{C} s'écrit de manière unique sous la forme $me^{\theta i}$, les inverses de ρ et p sont

$$\rho^{-1}(me^{\theta i}) = \left(\frac{\theta}{2\pi}, m\right) \quad \text{et} \quad p^{-1}(e^{\theta i}) = \frac{\theta}{2\pi}$$

où $m \leq 1$.

On obtient ainsi la proposition suivante :

PROPOSITION 3.34. *Il existe une bijection entre l'espace des lacets basés en x_0 , $\Omega(X, x_0)$ et l'ensemble des applications continues pointées du cercle sur X , où 1 est le point de base du cercle qui préserve les équivalences d'homotopie.*

DÉMONSTRATION. En effet, on définit les applications

$$\begin{aligned} \{\hat{c} \in C(S^1, X) \mid \hat{c}(1) = x_0\} &\longrightarrow \Omega(X, x_0) \\ \hat{c} &\longmapsto \hat{c} \circ \bar{p} \end{aligned}$$

où \bar{p} est le prolongement de p à $[0, 1]$ avec $\bar{p}(1) = \bar{p}(0) = p(0) = 1$, et

$$\begin{aligned} \Omega(X, x_0) &\longrightarrow \{\hat{c} \in C(S^1, X) \mid \hat{c}(1) = x_0\} \\ c &\longmapsto c \circ p^{-1} \end{aligned}$$

Clairement, ces deux applications sont inverses l'une de l'autre. □

REMARQUE 3.35. Cette proposition démontre également que nous aurions pu définir de manière équivalente le groupe fondamental par les classes d'homotopie d'applications du cercle dans l'espace considéré.

On obtient alors la caractérisation suivante des espaces simplement connexes.

PROPOSITION 3.36. *Un espace topologique X connexe par arcs est simplement connexe si et seulement si toute application continue du cercle dans X se prolonge en une application continue du disque D^2 dans X .*

DÉMONSTRATION.

\Rightarrow Soit $\hat{c} \in C(S^1, X)$ et posons $x_0 = \hat{c}(1)$. Par la proposition précédente, on fait correspondre à \hat{c} un lacet c basé en x_0 . On a alors $c(t) = \hat{c}(2\pi it)$. Comme X est simplement connexe, c est homotope au lacet trivial en x_0 , ainsi il existe une homotopie $H \in C(I \times I, X)$ telle que $H_0(t) = x_0$ et $H_1(t) = c(t)$. Comme $I \times I$ est homéomorphe à D^2 , on obtient une application

$$\begin{aligned} C : D^2 &\longrightarrow X \\ se^{2\pi it} &\longmapsto H(t, s) \end{aligned}$$

et on a

$$C(e^{2\pi it}) = H_1(t) = c(t) = \hat{c}(e^{2\pi it})$$

i.e. $C|_{S^1} = \hat{c}$.

\Leftarrow Soit $[c] \in \pi_1(X, x_0)$. Par la proposition précédente, on fait correspondre à c l'application continue

$$\begin{aligned} \hat{c} : S^1 &\longrightarrow X \\ e^{2\pi it} &\longmapsto c(t) \end{aligned}$$

Par hypothèse, cette application se prolonge sur le disque D^2 , i.e il existe $C : D^2 \rightarrow X$ telle que $C|_{S^1} = \hat{c}$. Alors, l'application

$$\begin{aligned} H : I \times I &\longrightarrow X \\ (t, s) &\longmapsto C(se^{2\pi it}) \end{aligned}$$

est une homotopie de $H_0(t) = C(0) = x_0$ vers $H_1(t) = C(e^{2\pi it}) = \hat{c}(e^{2\pi it}) = c(t)$ et donc, $c \approx_H c_{x_0}$.

□

Groupe fondamental du cercle

Le premier exemple de groupe fondamental intéressant sera donné par le cercle. L'idée intuitive de ce calcul consiste à se dire que les lacets tournants une fois autour du cercle ne peuvent pas être homotopes au lacet trivial. De même, en tournant deux fois autour du cercle, un lacet ne peut être déformé de sorte qu'il ne tourne

plus qu'une fois autour du cerclce. Ainsi, en considérant également que le sens de rotation modifie la classe d'homotopie, on aboutit au postulat suivant : le groupe fondamental du cercle est isomorphe au groupe des entiers relatifs : \mathbb{Z} .

Avant de pouvoir démontrer ce résultat, nous aurons besoin de la notion de relèvement, qui sera étudiée en détails dans le chapitre 5 concernant les revêtements.

DÉFINITION 3.37. Soit X, Y, Z trois espaces topologiques et deux applications continues $f \in C(X, Y), g \in C(Z, Y)$. On dit que $\tilde{f} \in C(X, Z)$ est un *relèvement* de f dans Z par g , si $g \circ \tilde{f} = f$, c'est à dire, si le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} & & Z \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

LEMME 3.38. Soit X, \tilde{X} deux espaces topologiques et $p : \tilde{X} \rightarrow X$ ayant la propriété suivante

p est surjective et X admet un recouvrement ouvert $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ tel que $p^{-1}(U_\alpha)$ est une réunion disjointe d'ouverts tous homéomorphes à U_α .

Soit Y un espace topologique, $F \in C(Y \times I, X)$ une homotopie de Y dans X et $\tilde{f}_0 : Y \rightarrow \tilde{X}$ un relèvement de F_0 dans \tilde{X} , alors, il existe une unique homotopie $\tilde{F} \in C(Y \times I, \tilde{X})$ telle que

- i) $\tilde{F}_0 = \tilde{f}_0$
- ii) $p \circ \tilde{F} = F$

DÉMONSTRATION. Commençons par construire un relèvement

$$\tilde{F} : N \times I \longrightarrow \tilde{X}$$

pour un voisinage N d'un point $y_0 \in Y$. Soit $y_0 \in Y$, par continuité de F , tout point $(y_0, t) \in Y \times I$ possède un voisinage produit $N_t \times]a_t, b_t[$ tel que $F(N_t \times]a_t, b_t[) \subseteq U_\alpha$ pour un $\alpha \in \Lambda$. Ainsi, $\{N_t \times]a_t, b_t[\}_{t \in I}$ forme un recouvrement ouvert de $\{y_0\} \times I$. Par compacité de $\{y_0\} \times I$, on peut en tirer un sous-recouvrement fini $\{N_{t_i} \times]a_{t_i}, b_{t_i}[\}_{i=1}^n$. On peut choisir une famille $\{\tilde{t}_j\}_{j=0}^m \subseteq I$ telle que $0 = \tilde{t}_0 < \tilde{t}_1 < \dots < \tilde{t}_m = 1$ et $[\tilde{t}_j, \tilde{t}_{j+1}[\subseteq]a_{t_i}, b_{t_i}[$ pour un $i \in \mathbb{N}_n$. En posant $N = \bigcap_{i=1}^n N_{t_i}$ et en renommant la famille $\{\tilde{t}_j\}_{j=0}^m = \{t_i\}_{i=0}^m$ on a donc que $F(N \times [t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_\alpha$ pour un $\alpha \in \Lambda$. On note ce $U_\alpha = U_i$.

Procédons maintenant par récurrence en supposant \tilde{F} connu sur $N \times [0, t_i]$. Pour $i = 0$ on a par hypothèse le relèvement \tilde{f}_0 . Supposons donc \tilde{F} construit sur $N \times [0, t_i]$. On a $F([t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_i$. Par hypothèse, il existe un ouvert \tilde{U}_i de \tilde{X} homéomorphe à U_i et contenant le point $\tilde{F}(y_0, t_i)$. En remplaçant $N \times \{t_i\}$ par $(\tilde{F}|_{N \times \{t_i\}})^{-1}(\tilde{U}_i)$ on est certain que $\tilde{F}(N \times \{t_i\}) \subseteq \tilde{U}_i$. On définit alors \tilde{F} sur $N \times [t_i, t_{i+1}]$ par composition de F et de l'homéomorphisme $p^{-1} : U_i \rightarrow \tilde{U}_i$. Au terme de cette induction finie, on obtient donc un relèvement $\tilde{F} : N \times I \rightarrow \tilde{X}$, pour un voisinage N de y_0 .

Montrons maintenant l'unicité de ce relèvement dans le cas particulier où Y est

un point ; on peut donc omettre Y de la notation. Supposons que l'on ait deux relèvements \tilde{F} et \tilde{F}' de $F : I \rightarrow S^1$ tels que $\tilde{F}(0) = \tilde{F}'(0)$. Comme précédemment, on peut trouver une partition de $I : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$ telle que $F([t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_i$, pour tout $i \in \{0, \dots, m-1\}$. Par récurrence, on peut supposer que $\tilde{F} = \tilde{F}'$ sur $[0, t_i]$. Comme $[t_i, t_{i+1}]$ est connexe, $\tilde{F}([t_i, t_{i+1}])$ l'est aussi et doit donc être inclus dans un des ouverts \tilde{U}_i se projetant sur U_i de façon homéomorphe. Il en est de même pour $\tilde{F}'([t_i, t_{i+1}])$ qui est donc inclus dans un des ouverts \tilde{U}'_i . Comme ces ouverts sont disjoints et que $\tilde{F}(t_i) = \tilde{F}'(t_i)$, on déduit que $\tilde{U}_i = \tilde{U}'_i$. De plus, comme p est bijective sur \tilde{U}_i et que $p \circ \tilde{F} = p \circ \tilde{F}'$ on a $\tilde{F} = \tilde{F}'$ sur $[t_i, t_{i+1}]$ ce qui termine le pas d'induction et prouve l'unicité du relèvement.

Nous pouvons enfin conclure. Les relèvements construits sur des ensembles de la forme $N \times I$ étant uniques lorsque restreints à chaque segments $\{y\} \times I$, ils doivent coïncider sur toute intersection $(N \times I) \cap (N' \times I)$. Puisqu'on a déjà montré l'existence d'un voisinage N pour chaque point de Y , on obtient une application bien définie \tilde{F} sur $Y \times I$ qui est unique car unique sur chaque segment $\{y\} \times I$. □

Nous pouvons maintenant calculer le groupe fondamental du cercle.

THÉORÈME 3.39. *Le groupe fondamental du cercle S^1 est isomorphe à \mathbb{Z} . Plus précisément, l'application*

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{Z} &\longrightarrow \pi_1(S^1) \\ n &\longmapsto [\omega_n] \end{aligned}$$

est un isomorphisme, où

$$\begin{aligned} \omega_n : I &\longrightarrow S^1 \\ t &\longmapsto (\cos(2\pi nt), \sin(2\pi nt)) \end{aligned}$$

est un lacet basé en $(1, 0)$.

DÉMONSTRATION. Considérons l'application

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} &\longrightarrow S^1 \\ t &\longmapsto (\cos(2\pi nt), \sin(2\pi nt)) \end{aligned}$$

alors les applications

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_n : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto nt \end{aligned}$$

sont des relèvements des ω_n , i.e. $\omega_n = p \circ \tilde{\omega}_n$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Montrons que ϕ est un homomorphisme. Soit $m, n \in \mathbb{Z}$ et

$$\begin{aligned} \tau_m : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto t + m \end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned}
\phi(m+n) &= [\omega_{m+n}] \\
&= [p \circ \tilde{\omega}_{m+n}] \\
&= [p \circ (\tilde{\omega}_m \cdot (\tau_m \circ \tilde{\omega}_n))] \\
&= [(p \circ \tilde{\omega}_m) \cdot (p \circ \tau_m \circ \tilde{\omega}_n)] \\
&= [p \circ \tilde{\omega}_m][p \circ \tilde{\omega}_n] \\
&= \phi(m)\phi(n)
\end{aligned}$$

Prouvons deux résultats utiles qui découlent du lemme précédent

- A) Pour tout chemin $f : I \rightarrow S^1$ avec $x_0 = f(0)$ et pour tout relèvement $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ du point x_0 , il existe un unique relèvement $\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$ et $f = p \circ \tilde{f}$.
- B) Pour toute homotopie de chemins $F : I \times I \rightarrow S^1$ d'origine x_0 et pour tout relèvement $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ de x_0 , il existe une unique homotopie de chemins d'origine \tilde{x}_0 , $\tilde{F} : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $F = p \circ \tilde{F}$.

En effet, $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ possède la propriété demandée par le lemme pour n'importe quel recouvrement composé de deux arcs de cercles dont la réunion est S^1 . Le point A) découle directement du lemme pour $Y = *$.

Pour B), prenons un relèvement $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ de x_0 et $F_t : I \rightarrow S^1$ une homotopie de chemins d'origine x_0 . Par A), il existe un unique relèvement \tilde{f}_0 de F_0 et par le lemme, il existe un unique relèvement \tilde{F}_t de F telle que $\tilde{F}_0 = \tilde{f}_0$.

Montrons finalement que ϕ est bien un isomorphisme.

- I) ϕ est surjective. En effet, soit $[f] \in \pi_1(S^1, (1, 0))$ un lacet, par A), il existe un unique relèvement \tilde{f} de f tel que $\tilde{f}(0) = 0$. Comme $p \circ \tilde{f}(1) = f(1) = (1, 0)$ et que $p^{-1}(1, 0) = \mathbb{Z}$, il existe un entier n tel que $\tilde{f}(1) = n$. Ainsi, $\tilde{f} \approx \tilde{\omega}_n$ par l'homotopie

$$H_s = (1-s)\tilde{f} + s\tilde{\omega}_n$$

On a donc

$$\begin{aligned}
[f] &= [p \circ \tilde{f}] \\
&= [p \circ \tilde{\omega}_n] \\
&= [\omega_n] \\
&= \phi(n)
\end{aligned}$$

- II) ϕ est injective. En effet, soit n et m deux entiers tels que $\phi(n) = \phi(m)$, i.e. $\omega_n \approx_H \omega_m$. Par B), H se relève en une unique homotopie de chemins \tilde{H} d'origine 0. Par l'unicité de A), on obtient donc que $\tilde{H}_0 = \tilde{\omega}_n$ et $\tilde{H}_1 = \tilde{\omega}_m$ sont homotopes. L'extrémité de chemins homotopes étant la même, on a donc que $\tilde{\omega}_n(1) = \tilde{\omega}_m(1)$ i.e. $n = m$.

□

Ce théorème très utile nous permet directement de calculer une certaine quantité de groupe fondamentaux :

EXEMPLE 3.2. Le groupe fondamental du tore de dimension 2, $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ est $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Plus généralement, le groupe fondamental du tore de dimension n , $\mathbb{T}^n = \prod_{i=1}^n S^1$, est $\mathbb{Z}^n = \prod_{i=1}^n \mathbb{Z}$ en vertu de la proposition 3.28.

EXEMPLE 3.3. De la même manière, on obtient donc que le groupe fondamental du cylindre $I \times S^1$ est \mathbb{Z} puisque le groupe fondamental de l'intervalle I est trivial.

THÉORÈME 3.40 (Théorème fondamental de l'algèbre).

Tout polynôme non constant à coefficients dans \mathbb{C} possède une racine dans \mathbb{C} .

DÉMONSTRATION. Soit $p(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i \in \mathbb{C}(z)$ un polynôme dans \mathbb{C} . Sans perte de généralité, on peut supposer $a_n = 1$. Supposons que p n'admette pas de racines dans \mathbb{C} , alors, pour tout nombre réel r positif,

$$f_r(s) = \frac{p(re^{2\pi i s})/p(r)}{|p(re^{2\pi i s})/p(r)|}$$

définit un lacet dans le cercle $S^1 \subseteq \mathbb{C}$, basé en 1. De plus l'application f définit une homotopie entre tous ces lacets. Comme f_0 est le lacet trivial, on en déduit que $[f_r] = 0$ pour tout $r \geq 0$.

Soit $r > \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| + 1$ et $z \in \mathbb{C}$ de module égal à r . On a

$$\begin{aligned} |z^n| &= r^n \\ &= r \cdot r^{n-1} \\ &> \left(\sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \right) |z^{n-1}| \\ &\geq \left| \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i \right| \end{aligned}$$

Ainsi, le polynôme

$$p_t(z) = z^n + t \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i \right)$$

n'a pas de racine sur $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$ si $t \in I$. En effet, si $p_t(z) = 0$, alors,

$$\begin{aligned} |z^n| &= \left| t \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i \right) \right| \\ &= t \left| \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i \right| \\ &\leq \left| \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i \right| \end{aligned}$$

Ce qui est une contradiction avec ce que l'on a vu juste plus haut. En remplaçant p par p_t dans la formule de f_r et en variant t de 1 à 0 on obtient une homotopie de f_r vers le lacet $\omega_n(s) = e^{2\pi i n s}$. Par le théorème 3.39, ω_n représente n fois un générateur de \mathbb{Z} et comme $[\omega_n] = [f_r] = 0$ on en conclut que $n = 0$.

□

Comme le dit Allen Hatcher dans son livre [1] page 31, il est intéressant de remarquer que la topologie algébrique permet de démontrer un résultat aussi fondamental que la clôture algébrique de \mathbb{C} dans la mesure où, initialement, cette théorie était prévue pour démontrer des résultats de topologie en utilisant l'algèbre.

THÉORÈME 3.41 (Théorème du point fixe de Brower).

Toute application continue du disque sur lui-même possède un point fixe.

DÉMONSTRATION. Soit $h : D^2 \rightarrow D^2$ une application continue et supposons par l'absurde que l'application ne possède aucun point fixe. On peut donc définir une application $r : D^2 \rightarrow S^1$ qui envoie un point x sur l'intersection entre S^1 et la demi-droite $[h(x), x]$. La continuité de r est claire car il s'agit de la composition d'une projection et de la fonction continue h . Remarquons que r fixe S^1 , c'est à dire que r est une rétraction du disque sur le cercle. Nous allons montrer qu'une telle rétraction est absurde. Soit $[f_0] \in \pi_1(S^1, x_0)$ une classe d'homotopie de lacets du cercle. Dans D^2 , le lacet f_0 est homotope au lacet trivial, car D^2 est une partie convexe de \mathbb{R}^2 puisque nous avons vu à la section 1 que les convexes sont simplement connexes. L'homotopie qui les relie est alors

$$H_s(t) = (1 - s)f_0(t) + sx_0$$

Comme r est une rétraction, $r \circ H_s(t)$ est une homotopie de f_0 vers $r \circ H_1(t) = r(x_0) = x_0$. Ainsi $[f_0] = 0$ et comme ce raisonnement est valable pour tout lacet du cercle, on obtient que $\pi_1(S^1) = 0$ ce qui est une contradiction. \square

Le théorème suivant ressemble à un théorème de point fixe mais concerne des points antipodaux sur la sphère de dimension 2.

THÉORÈME 3.42. *Soit $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application continue de la sphère sur le plan, alors, il existe un point $x \in S^2$ tel que $f(x) = f(-x)$.*

DÉMONSTRATION. Supposons par l'absurde le théorème faux. On peut alors définir une application $g : S^2 \rightarrow S^1$ par

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|}$$

Soit $\eta : I \rightarrow S^2$, qui envoie t sur $(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 0)$ et posons $h = g \circ \eta$. Ainsi h est un lacet dans S^1 basé au point $g(1, 0, 0)$. On constate que $g(-x) = -g(x)$, $\forall x \in S^2$, ainsi $h(t + \frac{1}{2}) = -h(t)$, $\forall t \in [0, \frac{1}{2}]$. On peut relever le lacet h en un chemin $\tilde{h} : I \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $p \circ \tilde{h} = h$. Comme $h(s + \frac{1}{2}) = -h(s)$, on a $\tilde{h}(s + \frac{1}{2}) = \tilde{h}(s) + \frac{q}{2}$, pour un entier q impair. Comme $q = 2(\tilde{h}(s + \frac{1}{2}) - \tilde{h}(s))$, q dépend continument de s . Or q étant entier, il est forcément constant. En particulier, on a

$$\tilde{h}(1) = \tilde{h}(\frac{1}{2}) + \frac{q}{2} = \tilde{h}(0) + q$$

Ainsi, h représente q fois un générateur de $\pi_1(S^1)$. Comme q est impair, h ne peut être homotope au lacet trivial. Or $h = g \circ \eta$ et η est clairement homotope au lacet trivial de S^2 , ainsi $g \circ \eta$ est homotope au lacet trivial de S^1 ce qui est une contradiction. \square

COROLLAIRE 3.43. *Soit A_1, A_2, A_3 un recouvrement de la sphère S^2 par 3 ensembles fermés, alors, au moins un des A_i contient une paire $\{x, -x\}$ de points antipodaux.*

DÉMONSTRATION. Soit $d_i : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la distance entre un point de S^2 et l'ensemble A_i . Posons

$$d : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$x \longmapsto (d_1(x), d_2(x))$$

Par le théorème précédent, il existe un point $x \in S^2$ tel que $(d_1(x), d_2(x)) = (d_1(-x), d_2(-x))$. Si $d_j(x) = d_j(-x) = 0$ pour un $j \in \{1, 2\}$, alors, x et $-x \in A_j$. Sinon, on a $d_j(x) = d_j(-x) > 0$ pour tout $j \in \{1, 2\}$. Ainsi, x et $-x \in S^2 \setminus (A_1 \cup A_2) = A_3$. □

PROPOSITION 3.44. *Les sphères de dimension $n \geq 2$ sont simplement connexes.*

DÉMONSTRATION. Soit f un lacet dans S^n basé en x_0 où $n \geq 2$. Si $\text{Im}(f) \subseteq S^n \setminus \{x\}$ pour un point $x \in S^n$, alors f est de classe d'homotopie triviale car $S^n \setminus \{x\} \cong \mathbb{R}^n$ qui est simplement connexe. Montrons donc que tout lacet f est homotope à un lacet non surjectif. Soit $x \in S^n, x \neq x_0$ et B un voisinage ouvert de x ne contenant pas x_0 (l'existence de B est garantie par le fait que S^n est de Hausdorff). Par continuité, $f^{-1}(B)$ est un ouvert de $]0, 1[$ qui peut s'écrire comme une réunion d'intervalles $]a_i, b_i[$. La fibre $f^{-1}(x)$ étant fermée et bornée, elle est compacte et comme $f^{-1}(x) \subseteq f^{-1}(B) = \cup_{i \in I}]a_i, b_i[$, on peut en extraire un sous-recouvrement fini $\{]a_i, b_i[\}_{i=1}^m$. Soit $j \in \mathbb{N}_m$, on peut supposer sans perte de généralité que $]a_i, b_i[\cap f^{-1}(x) \neq \emptyset$ sinon on l'écarte du sous-recouvrement. Considérons $f_j = f|_{]a_j, b_j[}$, l'image de f_j est dans l'adhérence de B car l'intervalle $]a_j, b_j[\subseteq f^{-1}(B)$. De plus, f_j est un chemin de $f(a_j)$ vers $f(b_j)$ qui sont tous les deux sur le bord de B . Comme $n \geq 2$, on peut choisir un chemin g_j de $f(a_j)$ vers $f(b_j)$ ne passant pas par x , en prenant par exemple un chemin le long du bord de B qui est homéomorphe à S^{n-1} et donc est connexe par arcs si $n \geq 2$. L'adhérence de B est clairement homéomorphe à D^n . Comme D^n est une partie convexe de \mathbb{R}^n elle est simplement connexe et donc B également. Ainsi, g_j est homotope à f_j . On peut donc remplacer f_j par g_j dans f sans modifier sa classe d'homotopie et ce pour tout $j \in \mathbb{N}_m$. On obtient donc bien un lacet qui est non-surjectif car ne passant plus par le point x . □

COROLLAIRE 3.45. \mathbb{R}^2 n'est pas homéomorphe à \mathbb{R}^n , pour tout $n \neq 2$.

DÉMONSTRATION. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ un homéomorphisme. Le cas où $n = 1$ est évident car $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est connexe par arcs et $\mathbb{R} \setminus \{f(0)\}$ ne l'est pas. Ainsi, $n \neq 1$. Pour $n > 2$, on ne peut pas distinguer $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et $\mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$ par leur composantes connexes par arcs, mais on peut le faire par leur groupes fondamentaux. En effet, $\mathbb{R}^m \setminus \{*\} \cong S^{m-1} \times \mathbb{R}$ et donc par la proposition 3.28 on obtient

$$\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}) \cong \pi_1(S^{n-1}) \times \pi_1(\mathbb{R})$$

$$\cong \pi_1(S^{n-1})$$

Or pour $n = 2$ on a \mathbb{Z} et pour $n > 2$ on a 0, ce qui prouve qu'un homéomorphisme f n'existe que si $n = 2$. □

Pour montrer en toute généralité que $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m \iff n = m$, on a besoin d'outils supplémentaires. Il faut en effet introduire la notion de groupe d'homotopie, dont le groupe fondamental n'est que le premier³. Ces notions font intervenir les outils de l'algèbre homologique que nous ne traiterons pas dans le présent travail.

Groupes topologiques

Un autre exemple intéressant est celui des groupes topologiques. Nous allons montrer que le groupe fondamental d'un groupe topologique est toujours commutatif.

Soit G un groupe topologique dont on note l'élément neutre par e . La loi de composition du groupe nous permet de définir une nouvelle composition de chemins par le produit terme à terme en chaque instant t le long de deux chemins. La définition suivante précise cette idée.

DÉFINITION 3.46. Soit c et c' deux chemins dans G , alors on appelle *chemin produit de c et c'* le chemin

$$cc'(t) = c(t)c'(t)$$

dont l'origine est le produit des origines de c et c' et de même pour son extrémité. En particulier, si c et c' sont des lacets basés en e , cc' est également un lacet basé en e .

DÉFINITION 3.47. Soit c un chemin dans G , on définit *l'inverse de c* comme étant le chemin

$$c^{-1}(t) = (c(t))^{-1}$$

PROPOSITION 3.48. Soit c_1, c'_1 et c_2, c'_2 deux paires de chemins homotopes dans G , alors, les chemins c_1c_2 et $c'_1c'_2$ sont homotopes.

DÉMONSTRATION. Supposons $c_1 \approx_F c'_1$ et $c_2 \approx_H c'_2$, alors,

$$FH_s(t) = F_s(t)H_s(t)$$

est une homotopie de c_1c_2 vers $c'_1c'_2$. □

LEMME 3.49. *Le produit de lacets est compatible avec la concaténation, i.e.*

$$(f_1 \cdot g_1)(f_2 \cdot g_2) = f_1 f_2 \cdot g_1 g_2$$

DÉMONSTRATION. Ce résultat découle directement des définitions de produit et de concaténation de chemins. □

³D'où le 1 du symbole π_1 utilisé pour représenter le groupe fondamental.

Nous allons montrer que le produit de deux chemins n'est pas très différent de la concaténation, plus précisément, ces deux opérations donnent des résultats homotopes. De plus, le produit de chemins, et donc la concaténation également, est commutatif à homotopie près, ce qui prouvera que le groupe fondamental est commutatif.

PROPOSITION 3.50. *Soit f, g deux lacets basés en e dans G , alors,*

$$f \cdot g \approx fg \approx gf \approx g \cdot f$$

DÉMONSTRATION. Nous avons déjà un certain nombre d'identités connues :

$$f \approx_F f \cdot c_e \approx_{\overline{F}} f$$

$$f \approx_H c_e \cdot f$$

$$g \approx_K g \cdot c_e$$

$$g \approx_L c_e \cdot g \approx_{\overline{L}} g$$

Les homotopies inverses ont été notées par un surlignage. En utilisant le lemme précédent et en définissant le produit d'homotopie terme à terme on obtient

$$fg \approx_{FL} f \cdot g \approx_{\overline{LF}} gf \approx_{KH} g \cdot f$$

□

COROLLAIRE 3.51. *L'inverse d'un lacet est homotope à son lacet inverse.*

DÉMONSTRATION. On a clairement

$$\begin{aligned} \overline{c} &\approx_{c_e} c \cdot \overline{c} \\ &\approx_{c^{-1}c} c \cdot \overline{c} \\ &\approx_{c^{-1} \cdot c} c \cdot \overline{c} \\ &\approx_{c^{-1} \cdot c_e} c \cdot \overline{c} \\ &\approx_{c^{-1}} c \cdot \overline{c} \end{aligned}$$

□

On en déduit ainsi le théorème suivant

THÉORÈME 3.52. *Le groupe fondamental d'un groupe topologique est commutatif.*

Nous pouvons donc conclure par le corollaire 3.19 que si G est un groupe topologique, alors le changement de point de base induit un unique isomorphisme entre les groupes fondamentaux associés.

Le théorème de Seifert - Van Kampen

Nous allons démontrer dans ce chapitre le théorème de Seifert-Van Kampen. Ce théorème permet de calculer le groupe fondamental d'un espace topologique connexe par arcs à partir des groupes fondamentaux d'un recouvrement. Nous verrons également quelques applications de ce théorème aux CW-complexes dont en particulier un résultat important : tout groupe se réalise comme groupe fondamental d'un CW-complexe de dimension 2.

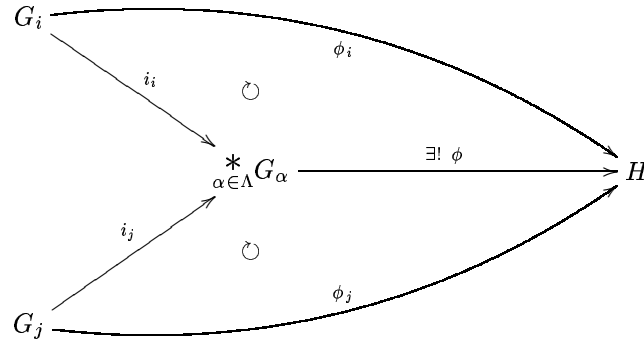
Produit libre de groupes

Avant d'attaquer le théorème de Seifert-Van Kampen il nous faut introduire la notion de produit libre de groupes, qui correspond au co-produit dans la catégorie des groupes.

DÉFINITION 4.1. Soit $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ une famille de groupes, on appelle *produit libre* de cette famille tout groupe G , noté alors $\underset{\alpha \in \Lambda}{*} G_\alpha$, muni d'une famille d'homomorphismes $\{i_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ où $i_\alpha : G_\alpha \rightarrow G$, qui satisfait la propriété universelle du coproduit, à savoir

Pour tout groupe H et pour toute famille d'homomorphismes $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ où $\phi_\alpha : G_\alpha \rightarrow H$, il existe un unique homomorphisme $\phi : \underset{\alpha \in \Lambda}{*} G_\alpha \rightarrow H$ tel que $\phi \circ i_\alpha = \phi_\alpha$.

On représente cette propriété par le diagramme commutatif suivant :



REMARQUE 4.2. Le produit libre de deux groupes G_1, G_2 est le produit amalgamé, ou push-out, des homomorphismes $0 \rightarrow G_1$ et $0 \rightarrow G_2$ il s'agit donc du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 0 & \longrightarrow & G_1 \\
 \downarrow & & \downarrow i_1 \\
 G_2 & \xrightarrow{i_2} & G_1 * G_2
 \end{array}$$

PROPOSITION 4.3. *Le produit libre d'une famille $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de groupes, s'il existe, est unique à isomorphisme près.*

DÉMONSTRATION. C'est évident par la propriété universelle définissant le produit libre. □

Le produit libre peut être explicité concrètement en termes de "mots".

DÉFINITION 4.4. Soit $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ une famille de groupes, on appelle *mot* dans cette famille toute suite finie

$$g_1 g_2 g_3 \dots g_m$$

où $g_i \in G_{\alpha_i}$. L'entier m est appelé la *longueur du mot* et on note $W(G_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ l'ensemble des mots dans $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$. On munit $W(G_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ d'une structure de monoïde de la manière suivante. La loi de composition est appelée la *juxtaposition* et consiste à aligner bout à bout deux mots, i.e.

$$(g_1 \dots g_m)(h_1 \dots h_n) = g_1 \dots g_m h_1 \dots h_n$$

cette loi est clairement associative et possède pour élément neutre le *mot vide*, noté w_0 , de longueur nulle.

On définit également une relation \sim sur $W(G_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ par les deux opérations suivantes.

- 1) $AB \sim Ae_\alpha B$ où e_α est l'élément neutre de G_α
- 2) $AxyB \sim AzB$ s'il existe $\alpha \in \Lambda$ tel que $x, y \in G_\alpha$ et $xy = z$

où $A, B \in W(G_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ sont des mots.

En d'autres termes, l'opération 1) consiste à introduire ou supprimer un élément neutre dans un mot et l'opération 2) consiste à remplacer deux termes consécutifs appartenant à un même groupe par leur produit ou inversement. Deux mots sont alors équivalents si on peut passer de l'un à l'autre par un nombre fini de ces opérations. Clairement, \sim est une relation d'équivalence sur l'ensemble des mots.

Le théorème suivant permet d'avoir une idée plus intuitive d'un produit libre. Comme on va le voir, le produit libre consiste en l'ensemble des mots formés par la famille de groupes donnés, quotienté par la relation d'équivalence explicitée plus haut.

THÉORÈME 4.5. *Le produit libre d'une famille $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de groupes existe toujours, plus précisément on a*

$$\prod_{\alpha \in \Lambda}^* G_\alpha = W(G_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} / \sim$$

DÉMONSTRATION. Commençons par montrer que $G = W(G_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} / \sim$ est un groupe.

Comme $W(G_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ est déjà un monoïde, il suffit de prouver que toute classe de mots possède un inverse. Soit $[g_1 \dots g_m] \in G$, son inverse est alors clairement la classe $[g_m^{-1} \dots g_1^{-1}]$. Montrons que cet inverse est bien défini, i.e. que si $g_1 \dots g_m \sim h_1 \dots h_n$, alors, $g_m^{-1} \dots g_1^{-1} \sim h_n^{-1} \dots h_1^{-1}$. En effet,

$$\begin{aligned} g_m^{-1} \dots g_1^{-1} &\sim g_m^{-1} \dots g_1^{-1} h_1 h_1^{-1} \\ &\sim g_m^{-1} \dots g_1^{-1} h_1 h_2 h_2^{-1} h_1^{-1} \\ &\dots \\ &\sim g_m^{-1} \dots g_1^{-1} h_1 \dots h_n h_n^{-1} \dots h_1^{-1} \\ &\sim g_m^{-1} \dots g_1^{-1} g_1 \dots g_m h_n^{-1} \dots h_1^{-1} \\ &\sim h_n^{-1} \dots h_1^{-1} \end{aligned}$$

Montrons finalement que G possède la propriété universelle du coproduit. Définissons

$$\begin{aligned} i_\alpha : G_\alpha &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto [g] \end{aligned}$$

où tout élément de G_α est envoyé sur la classe du mot correspondant de longueur 1. Soit H un groupe munit d'une famille d'homomorphisme $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ où $\phi_\alpha : G_\alpha \rightarrow H$. On pose alors,

$$\begin{aligned} \phi : G &\longrightarrow H \\ [g_1 \dots g_m] &\longmapsto \phi_{\alpha_1}(g_1) \dots \phi_{\alpha_m}(g_m) \end{aligned}$$

où $g_i \in G_{\alpha_i}$.

L'application ϕ est bien définie. En effet, comme ϕ est bien définie sur les mots, il suffit de montrer qu'elle est compatible avec la relation d'équivalence sur les mots, c'est à dire sur les deux opérations de base définissant cette relation. On a

- i) $\phi(Ae_\alpha B) = \phi(A)\phi_\alpha(e_\alpha)\phi(B) = \phi(A)\phi(B) = \phi(AB)$.
- ii) $\phi(AxyB) = \phi(A)\phi_\alpha(x)\phi_\alpha(y)\phi(B) = \phi(A)\phi_\alpha(xy)\phi(B)$
 $= \phi(A)\phi_\alpha(z)\phi(B) = \phi(AzB)$

Clairement ϕ fait commuter n'importe quel ϕ_α , i.e. $\phi_\alpha = \phi \circ i_\alpha$ et est unique par sa définition. □

DÉFINITION 4.6. On appelle *mot réduit* tout mot de longueur minimale dans sa classe d'équivalence. Il s'agit donc d'un mot dans lequel aucuns termes consécutifs n'appartiennent au même groupe et dans lequel il n'y a aucun élément neutre.

PROPOSITION 4.7. *Les mots réduits forment un système de représentants dans tout produit libre.*

DÉMONSTRATION. En effet, la réduction d'un mot se fait dans la même classe d'équivalence que le mot lui-même. De plus, si deux mots réduits sont dans la même classe d'équivalence, ils ont forcément la même longueur et sont donc égaux. □

Le produit libre est une construction hautement non commutative. On peut montrer par exemple que tout produit libre d'au moins deux groupes non triviaux n'est pas abélien, contient des éléments d'ordre infini et est de centre trivial.

Nous définissons également les groupes libres afin d'introduire la notion de présentation de groupes qui sera utilisée par la suite.

DÉFINITION 4.8. Un *groupe libre* est un groupe G isomorphe à un produit libre de copies de \mathbb{Z} , c'est-à-dire qu'il existe un ensemble d'indice Λ tel que G est isomorphe à $\ast_{\Lambda} \mathbb{Z}$.

PROPOSITION 4.9. *Tout groupe est isomorphe à un quotient d'un groupe libre.*

DÉMONSTRATION. Construisons l'homomorphisme surjectif

$$\varphi : \ast_G \mathbb{Z} \longrightarrow G$$

Par construction, on peut identifier chaque générateur de $\ast_G \mathbb{Z}$ à un élément de G par φ . Par le premier théorème d'isomorphie des groupes, G est donc isomorphe au quotient de ce groupe libre par le noyau de φ . □

DÉFINITION 4.10. Une *présentation d'un groupe G* est donnée sous la forme

$$\langle \{g_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \mid \{r_\beta\}_{\beta \in \Gamma} \rangle$$

où les g_α sont des *générateurs* et les r_β des *relations* entre générateurs tels que r_β sont des mots dans $\ast_{\alpha \in \Lambda} \mathbb{Z}_{g_\alpha}$ et G est isomorphe au quotient de $\ast_{\alpha \in \Lambda} \mathbb{Z}_{g_\alpha}$ par le sous-groupe normal engendré par les mots $\{r_\beta\}_{\beta \in \Gamma}$.

PROPOSITION 4.11. *Tout groupe admet une présentation*

DÉMONSTRATION. Nous avons déjà vu que tout groupe est un quotient d'un groupe libre. Les g_α sont les générateurs de ce groupe et les relations r_β sont des générateurs du noyau de l'application quotient. □

Notons qu'un groupe n'admet pas nécessairement une présentation unique. Ajoutons de plus, qu'il n'est pas souvent aisé de donner explicitement une présentation d'un groupe donné.

Théorème de Seifert-Van Kampen

On rappelle d'abord les push-outs dans les catégories des ensembles et des groupes. Comme on le verra dans le théorème de Seifert-Van Kampen, sous certaines hypothèses, le foncteur π_1 envoie un diagramme de push-out dans **Set** vers un push-out dans **Grp**.

PROPOSITION 4.12. *Le push-out des inclusions $A \cap B \rightarrow A$ et $A \cap B \rightarrow B$ dans la catégorie des ensembles est explicité par le diagramme commutatif suivant*

$$\begin{array}{ccc} A \cap B & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & A \cup B \end{array}$$

où les flèches sont les inclusions canoniques.

DÉMONSTRATION. Le diagramme est manifestement commutatif. Il suffit donc de montrer que $A \cup B$ satisfait la propriété universelle du produit amalgamé. Soit C un ensemble tel que le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccc} A \cap B & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

On définit alors

$$\begin{aligned} \varphi : A \cup B &\longrightarrow C \\ x &\longmapsto \begin{cases} f(x), & x \in A \\ g(x), & x \in B \end{cases} \end{aligned}$$

φ est bien définie car si $x \in A \cap B$, on a $f(x) = g(x)$ par commutativité du diagramme de C . □

PROPOSITION 4.13. *Le push-out de deux morphismes de groupes $f_1 : G \rightarrow G_1$ et $f_2 : G \rightarrow G_2$ dans la catégorie des groupes est donné par le diagramme commutatif suivant*

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f_1} & G_1 \\ f_2 \downarrow & & \downarrow j_1 \\ G_2 & \xrightarrow{j_2} & (G_1 * G_2) / N \end{array}$$

où N est le sous-groupe normal de $G_1 * G_2$ engendré par les éléments de la forme $(i_1 \circ f_1(g)) (i_2 \circ f_2(g))^{-1}$ pour tout $g \in G$, où

$$\begin{aligned} i_1 : G_1 &\longrightarrow G_1 * G_2 \\ i_2 : G_2 &\longrightarrow G_1 * G_2 \end{aligned}$$

sont les homomorphismes canoniques d'injection.

DÉMONSTRATION. Par définition de N , le diagramme est commutatif. Soit H un groupe et deux homomorphismes h_1 et h_2 tel que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f_1} & G_1 \\ f_2 \downarrow & & \downarrow h_1 \\ G_2 & \xrightarrow{h_2} & H \end{array}$$

La propriété universelle du produit libre nous garantit l'existence d'une application

$$\varphi : G_1 * G_2 \longrightarrow H$$

$$w = w_1 \dots w_n \longmapsto h_{k_1}(w_1) \dots h_{k_n}(w_n)$$

$$\text{où } k_i = \begin{cases} 1, & \text{si } w_i \in G_1 \\ 2, & \text{si } w_i \in G_2 \end{cases}$$

et telle que $\varphi \circ i_k = h_k$, i.e.

Pour définir φ sur le quotient $G_1 * G_2 / N$, il suffit de montrer que $N \subseteq \text{Ker}(\varphi)$. Soit $(i_1 \circ f_1(g)) (i_2 \circ f_2(g))^{-1}$ un générateur de N . on a

$$\begin{aligned} \varphi \left((i_1 \circ f_1(g)) (i_2 \circ f_2(g))^{-1} \right) &= (\varphi \circ i_1 \circ f_1(g)) (\varphi \circ i_2 \circ f_2(g))^{-1} \\ &= (h_1 \circ f_1(g)) (h_2 \circ f_2(g))^{-1} \\ &= (h_1 \circ f_1(g)) (h_1 \circ f_1(g))^{-1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

On obtient donc une application

$$\tilde{\varphi} : (G_1 * G_2) / N \longrightarrow H$$

telle que $\tilde{\varphi} \circ j_k = h_k$ puisque l'homomorphisme quotient commute, où j_1 est la composée de i_1 et de l'homomorphisme quotient canonique $G_1 * G_2 \rightarrow (G_1 * G_2) / N$ et de même pour j_2 . □

DÉFINITION 4.14. Nous noterons le groupe $(G_1 * G_2) / N$ par $G_1 *_G G_2$. Remarquons au passage que si $G = 0$, alors $G_1 *_G G_2 = G_1 * G_2$ car $N = 0$.

Nous allons maintenant énoncer et démontrer le théorème de Van Kampen.

THÉORÈME 4.15 (Seifert-Van Kampen).

Soit X un espace topologique décomposé en une réunion d'ouverts connexes par arcs $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subseteq X$ qui contiennent tous le point de base $x_0 \in X$. Chaque inclusion $i_\alpha : A_\alpha \rightarrow X$ induit un homomorphisme

$$\pi_1(i_\alpha) : \pi_1(A_\alpha) \rightarrow \pi_1(X)$$

Par la propriété universelle du produit libre, ces homomorphisme induisent un homomorphisme sur le produit libre :

$$\phi : \bigast_{\alpha \in \Lambda} \pi_1(A_\alpha) \longrightarrow \pi_1(X)$$

alors,

- i) Si toute intersection de paires, $A_\alpha \cap A_\beta$, est connexe par arcs, ϕ est surjectif.
- ii) Si de plus toute intersection de triples, $A_\alpha \cap A_\beta \cap A_\gamma$, est connexe par arcs, le noyau de ϕ est le sous-groupe normal N engendré par les éléments de la forme

$$(i_{\alpha\beta}(w))(i_{\beta\alpha}(w))^{-1}$$

où $i_{\alpha\beta} : \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta) \rightarrow \pi_1(A_\alpha)$. En conséquent,

$$\pi_1(X) \cong \bigast_{\alpha \in \Lambda} \pi_1(A_\alpha) / N$$

En particulier, si X est la réunion de deux ouverts A_1, A_2 connexes par arcs dont l'intersection est connexe par arcs et contient le point de base x_0 , alors le foncteur π_1 envoie le push-out

$$\begin{array}{ccc} A_1 \cap A_2 & \longrightarrow & A_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_2 & \longrightarrow & A_1 \cup A_2 = X \end{array}$$

sur le push-out

$\pi_1 \downarrow$

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(A_1 \cap A_2) & \longrightarrow & \pi_1(A_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(A_2) & \longrightarrow & \pi_1(A_1)_{\pi_1(A_1 \cap A_2)} \bigast \pi_1(A_2) = \pi_1(X) \end{array}$$

DÉMONSTRATION.

- i) Soit $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ et cherchons une préimage de $[f]$. Nous allons commencer par montrer que l'on peut décomposer l'intervalle $[0, 1]$ en sous-intervalles finies, $0 = s_0 < s_1 \dots s_m = 1$ telles que pour tout $i \in \mathbb{N}_m$, l'intervalle $[s_{i-1}, s_i]$ est envoyé par f dans un ouvert A_{α_i} pour un certain indice $\alpha_i \in \Lambda$. En effet, soit $t \in I$, l'image de t par f se trouve dans un des ouverts connexe par arcs A_α . Par continuité, la préimage de cet ouvert est un voisinage de t . Comme les intervalles fermés forment une base des voisinages de I , on peut trouver un intervalle fermé I_t contenu dans $f^{-1}(A_\alpha)$. Les intérieurs $\{\overset{\circ}{I}_t\}_{t \in I}$ forment un recouvrement ouvert de I . Par compacité, on peut extraire de ce recouvrement un sous-recouvrement fini $\{\overset{\circ}{I}_t\}_{t=0}^k$. La partition de l'intervalle I cherchée est alors constituée des bornes de ces intervalles.

Notons A_i l'ouvert contenant l'image de l'intervalle $[s_{i-1}, s_i]$ et f_i la reparamétrisation sur I de la restriction $f|_{[s_{i-1}, s_i]}$. Ainsi, on a

$$f = f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_m$$

où $f_i \in C(I, A_i)$. Par construction, $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ et est connexe par arcs, ainsi, on peut donc trouver un chemin g_i de x_0 vers $f(s_i) = f_i(1) = f_{i+1}(0) \in A_i \cap A_{i+1}$. Ainsi,

$$f \approx (f_1 \cdot \bar{g}_1) \cdot (g_1 \cdot f_2 \cdot \bar{g}_2) \cdot \dots \cdot (g_{m-1} \cdot f_m)$$

et chaque $g_{i-1} \cdot f_i \cdot \bar{g}_i$ est un lacet dans A_i (en posant de plus $g_0 = c_{x_0} = g_m$).

Ainsi, $\phi([f_1 \cdot \bar{g}_1][g_1 \cdot f_2 \cdot \bar{g}_2] \dots [g_{m-1} \cdot f_m]) = [f]$ i.e. ϕ est surjective.

- ii) Avant de commencer proprement cette deuxième partie de preuve, nous allons définir la notion de factorisation d'une classe d'homotopie.

DÉFINITION 4.16. Soit $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ une classe d'homotopie, une *factorisation* de $[f]$ consiste en des éléments $[f_1], \dots, [f_k]$ tels que

- f_i est un lacet basé en x_0 dans un A_i , i.e. $[f_i] \in \pi_1(A_i, x_0)$.
- $f \approx f_1 \cdot \dots \cdot f_k$ dans X .

En d'autres termes, une factorisation est un mot dans le produit libre $\prod_{\alpha \in \Lambda}^* \pi_1(A_\alpha)$ dont l'image par ϕ est $[f]$. Le point i) de cette preuve implique que chaque classe d'homotopie possède une factorisation.

Nous allons donc nous intéresser à l'unicité de cette factorisation.

DÉFINITION 4.17. Soit $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ une classe d'homotopie. Deux factorisations de $[f]$ sont dites *équivalentes* si elles sont en relation par les opérations suivantes et leurs inverses :

- Combiner deux termes adjacents $[f_i][f_{i+1}]$ de la factorisation en un unique terme $[f_i \cdot f_{i+1}]$ si $[f_i]$ et $[f_{i+1}]$ sont dans le même groupe $\pi_1(A_\alpha, x_0)$.
- Considérer un terme $[f_i] \in \pi_1(A_\alpha, x_0)$ comme un terme dans un autre groupe fondamental $\pi_1(A_\beta, x_0)$ si f_i est un lacet dans l'intersection $A_\alpha \cap A_\beta$.

La première opération ne modifie pas la factorisation car il s'agit d'une opération autorisée sur un produit libre de mots. En revanche, la seconde

opération modifie la factorisation, mais pas son image dans $Q = \bigstar_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha / N$ par définition de N . Ainsi, deux factorisations équivalentes ont la même image dans Q . On remarque également que cette relation est une relation d'équivalence dans $\bigstar_{\alpha \in \Lambda} \pi_1(A_\alpha)$.

Si on peut montrer que toutes les factorisations d'un élément $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ sont équivalentes, on aura prouvé que l'application

$$Q \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

est injective et donc que N est le noyau de ϕ .

Soit $[f_1] \dots [f_k]$ et $[f'_1] \dots [f'_l]$ deux factorisations d'une classe d'homotopie $[f]$. Les chemins $f_1 \dots f_k$ vers $f'_1 \dots f'_l$ sont homotopes car homotopes à f . Soit $F : I \times I \rightarrow X$ une homotopie entre eux.

En procédant de manière analogue à la première partie de la preuve, en utilisant la compacité de $I \times I$ et la continuité de F , on peut trouver une partition de $I \times I$

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$$

$$0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = 1$$

telle que chaque rectangle $R_{ij} = [t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j]$ est envoyé par F dans un ouvert A_{ij} , $i, j \in \Lambda$.

Par construction, les R_{ij} sont inclus dans un ouvert dont l'image par F est également contenue dans A_{ij} . On peut donc les modifier un peu afin d'obtenir un "pavage" de $I \times I$ similaire à celui de la figure suivante, de manière à ce que les intersections entre les R_{ij} ne fassent intervenir au plus que trois d'entre eux, c'est à dire, que chaque point de $I \times I$ ne soit au maximum que dans trois de ces rectangles.

9	10	11	12
5	6	7	8
1	2	3	4

FIG. 1.

On peut supposer que la partition du carré comporte au moins trois lignes, ainsi, il suffit de décaler les segments verticaux des lignes intermédiaires comme montré sur la figure ci-dessus. On renomme les R_{ij} comme sur la figure de R_1 à R_{nm} et de même pour les ouverts A_{ij} correspondants.

Il faut remarquer que chaque chemin γ allant du côté gauche de $I \times I$ vers le côté droite est envoyé par F sur un lacet $F|_\gamma$ car $\{0\} \times I$ et $\{1\} \times I$ sont envoyés par F sur x_0 , puisque F est une homotopie de lacets.

Définissons par γ_r le chemin partant du côté gauche dans $I \times I$ et terminant sur le côté droit, séparant les r premiers rectangles des autres. Ce chemin longe les arêtes des rectangles par le haut, descend sur le côté droit du $r^{\text{ème}}$ rectangle (si ce rectangle n'est pas à la fin d'une ligne) et continue horizontalement. Ainsi γ_0 correspond à $I \times \{0\}$ et γ_{nm} à $I \times \{1\}$. Appellons *sommets* de R_i les quatres coins du rectangle R_i . Pour chaque somme v on peut trouver un chemin g_v de x_0 vers $F(v)$ (si $F(v) = x_0$, on pose $g_v = c_{x_0}$). Par construction, v se trouve dans l'intersection de trois rectangles (pas nécessairement distincts), nommons-les R_a, R_b, R_c . Ainsi, puisque $A_a \cap A_b \cap A_c$ est connexe par arcs et contient x_0 par hypothèse, on peut supposer que g_v est un chemin dans cette intersection.

On obtient alors une factorisation de chaque lacet $F|_{\gamma_r}$ de la manière suivante : On décompose γ_r en $n+1$ chemins $\gamma_{r1}, \dots, \gamma_{r(n+1)}$ (ou n chemins pour γ_0 et γ_{nm}). Ces $n+1$ chemins sont les arêtes des rectangles R_i traversés par γ_r . On a donc

$$F|_{\gamma_r} = F|_{\gamma_{r1}} \cdot \dots \cdot F|_{\gamma_{r(n+1)}}$$

Chaque γ_{ri} relie deux sommets $v_{ri}, v_{r(i+1)}$. On va donc intercaler des lacets $\bar{g}_v \cdot g_v$ aux endroits appropriés comme dans la première partie de la preuve. On a ainsi

$$\begin{aligned} F|_{\gamma_r} &= F|_{\gamma_{r1}} \cdot \dots \cdot F|_{\gamma_{r(n+1)}} \\ &\approx (F|_{\gamma_{r1}} \cdot \bar{g}_{v_{r2}}) \cdot (g_{v_{r2}} \cdot F|_{\gamma_{r2}} \cdot \bar{g}_{v_{r3}}) \cdot \dots \cdot (g_{v_{r(n+1)}} \cdot F|_{\gamma_{r(n+1)}}) \end{aligned}$$

et chaque lacet $g_{v_{ri}} \cdot F|_{\gamma_{ri}} \cdot \bar{g}_{v_{r(i+1)}}$ est un lacet dans un A_{ri} , $ri \in \Lambda$.

Le choix consistant à voir une arête dans un rectangle plutôt que dans un autre donne une factorisation équivalente de $F|_{\gamma_r}$. De plus, γ_r étant clairement homotope à γ_{r+1} , les factorisations de $F|_{\gamma_r}$ et $F|_{\gamma_{r+1}}$ sont également équivalentes. On en déduit donc que la factorisation de γ_0 est équivalente à celle de γ_{nm} .

Nous allons conclure en montrant que la factorisation $f_1 \cdot \dots \cdot f_k$ de f est équivalente à celle de γ_0 et que la factorisation $f'_1 \cdot \dots \cdot f'_l$ de f est équivalente à celle de γ_{nm} .

En effet, comme chaque point de γ_0 n'est que dans deux rectangles R_i , lors du choix de g_v pour un sommet v traversé par γ_0 , on peut demander que g_v soit également inclus dans l'ouvert A_i associé au lacet f_i de la factorisation de f contenant $F(v)$. Les deux factorisations ne diffèrent plus que par le nombre de lacets. On commence par séparer les lacets f_i traversant l'image d'un sommet $F(v)$ en deux, puis en associant tous les lacets situés entre deux images de sommets consécutifs. Toutes ces opérations ne modifie pas la relation d'équivalence des factorisations. On procède alors de même pour γ_{nm} , ce qui achève cette démonstration. \square

EXEMPLE 4.1 (Produit wedge).

Soit $X = \vee_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ un produit wedge d'espace connexes par arcs. On suppose que pour tout indice α , le point de base x_α de l'espace X_α est un rétracte par déformation d'un ouvert U_α connexe par arcs de X_α . Ainsi, chaque espace X_α est

un rétracte par déformation de $X_\alpha \vee_{\beta \neq \alpha} U_\beta =: A_\alpha$. Le recouvrement composé de ces ensembles A_α est bien ouvert et connexe par arcs. De plus, l'intersection d'au moins deux d'entre eux distincts est $\bigvee_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$ qui est contractile. Ainsi, par le théorème de Seifert-Van Kampen, on a

$$\pi_1(X) \cong \bigstar_{\alpha \in \Lambda} \pi_1(X_\alpha)$$

car $\pi_1(A_\alpha \cap A_\beta) = \pi_1(\bigvee_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha) = 0$.

En particulier, pour le produit wedge de cercles on obtient

$$\pi_1(\bigvee_{\alpha \in \Lambda} S^1) \cong \bigstar_{\alpha \in \Lambda} \mathbb{Z}$$

Nous allons maintenant appliquer le théorème de Seifert-Van Kampen aux CW-complexes. Nous obtiendrons un joli résultat qui explique comment trouver un CW-complexe de dimension 2 dont on choisit le groupe fondamental. Le théorème suivant décrit l'influence sur le groupe fondamental d'un espace lorsqu'on lui attache des 2-cellules.

THÉORÈME 4.18. *Soit (X, x_0) un espace topologique connexe par arcs et Y l'espace obtenu en attachant à X une famille $\{(e_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ de cellules de dimension 2, alors, l'inclusion $X \hookrightarrow Y$ induit une surjection $\pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, x_0)$.*

DÉMONSTRATION. Les applications d'attachement $\varphi_\alpha : S^1 \rightarrow X$ peuvent être considérées comme des lacets $\varphi_\alpha : I \rightarrow X$ en identifiant S^1 à l'intervalle $[0, 1[$ et en posant $\varphi_\alpha(1) = \varphi_\alpha(0)$. Pour un point de base s_0 du cercle S^1 , les lacets φ_α sont basés en $\varphi_\alpha(s_0)$. Comme les images du point s_0 par les différentes applications d'attachement ne coïncident pas nécessairement, nous rajoutons deux chemins à chaque lacet φ_α pour en faire un lacet basé en x_0 . En effet, par connexité par arcs de X , pour tout indice $\alpha \in \Lambda$ il existe un chemin γ_α de x_0 vers $\varphi_\alpha(s_0)$. Ainsi, $\gamma_\alpha \cdot \varphi_\alpha \cdot \bar{\gamma}_\alpha$ est un lacet basé en x_0 . La classe d'homotopie de ce lacet n'est peut-être pas triviale dans X mais l'est certainement dans Y puisque φ_α est un lacet dans l'adhérence de la 2-cellule e_α . Or, toute n -cellule est simplement connexe et l'adhérence de tout sous-espace simplement connexe est également simplement connexe. Ainsi, le sous-groupe normal N engendré par les classes d'homotopie des lacets $\gamma_\alpha \cdot \varphi_\alpha \cdot \bar{\gamma}_\alpha$ est dans le noyau de l'homomorphisme induit $\pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, x_0)$. Le choix du chemin γ_α n'a pas d'influence sur N puisque pour un autre chemin η_α de x_0 vers $\varphi_\alpha(s_0)$ on a

$$\begin{aligned} \eta_\alpha \cdot \varphi_\alpha \cdot \bar{\eta}_\alpha &\approx \eta_\alpha \cdot (\bar{\gamma}_\alpha \cdot \gamma_\alpha) \cdot \varphi_\alpha \cdot (\bar{\gamma}_\alpha \cdot \gamma_\alpha) \cdot \bar{\eta}_\alpha \\ &\approx (\eta_\alpha \cdot \bar{\gamma}_\alpha) \cdot (\gamma_\alpha \cdot \varphi_\alpha \cdot \bar{\gamma}_\alpha) \cdot \overline{(\eta_\alpha \cdot \bar{\gamma}_\alpha)} \end{aligned}$$

i.e. les lacets associés sont conjugués et donc engendrent les mêmes éléments dans N puisque ce dernier est normal.

Nous allons montrer que $\pi_1(Y, x_0) \cong \pi_1(X, x_0)/N$ ce qui prouvera que l'homomorphisme $\pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, x_0)$ est surjectif et de noyau N . Pour cela, considérons un espace Z un peu plus grand que Y . Nous allons construire Z de manière à ce que Y en soit un rétracte par déformation afin que Y et Z aient le même groupe fondamental (à isomorphisme près). Z est obtenu en attachant des bandes rectangulaires $S_\alpha \cong I \times I \cong D^2$ à Y de la manière suivante :

- (1) Le côté inférieur $I \times \{0\}$ est attaché le long du chemin γ_α
- (2) Le côté droit $\{1\} \times I$ est attaché sur la cellule e_α

- (3) Les côtés gauches de tous ces rectangles sont identifiés
- (4) Le côté supérieur $I \times \{1\}$ n'est pas attaché, ce qui nous permet de déformer chaque bande sur son bord inférieur sur Y .

Nous allons maintenant chercher un recouvrement ouvert de Z afin d'appliquer le théorème de Seifert-Van Kampen. Choisissons un point y_α dans chaque cellule e_α ne se trouvant pas sur l'arc où S_α est attaché. Posons alors

$$A = Z \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} \{y_\alpha\} \right) \quad B = Z \setminus X$$

Ayant enlevé les points y_α , A se rétracte par déformation sur X puisque chaque $e_\alpha \setminus \{y_\alpha\}$ se rétracte par déformation sur φ_α . Quant à l'espace B , il est clairement contractile. Comme $A \cap B$ est connexe par arcs, le théorème de Seifert-Van Kampen implique

$$\pi_1(A \cup B) \cong \pi_1(A)_{\pi_1(A \cap B)}^* \pi_1(B)$$

Comme $\pi_1(B) = 0$ et $\pi_1(A \cup B) = \pi_1(Z) \cong \pi_1(Y)$, on a

$$\pi_1(Y) \cong \pi_1(A)/M$$

où M est le sous-groupe normal engendré par l'image de l'homomorphisme

$$\pi_1(A \cap B) \rightarrow \pi_1(A)$$

Il ne reste donc plus qu'à montrer que $N = M$. Pour cela, montrons que $\pi_1(A \cap B)$ est engendré par des lacets dans $A \cap B$ homotopes aux lacets $\gamma_\alpha \cdot \varphi_\alpha \cdot \bar{\gamma}_\alpha$. Appliquons à nouveau le théorème de Seifert-Van Kampen pour calculer $\pi_1(A \cap B)$. Soit le recouvrement de $A \cap B$ donné par les ensembles

$$A_\alpha = (A \cap B) \setminus \left(\bigcup_{\beta \neq \alpha} e_\beta \right)$$

A_α est connexe par arcs et se rétracte par déformation sur un cercle dans $e_\alpha \setminus \{y_\alpha\}$. Ainsi, $\pi_1(A_\alpha) \cong \mathbb{Z}$ qui est généré par un lacet homotope à $\gamma_\alpha \cdot \varphi_\alpha \cdot \bar{\gamma}_\alpha$. De plus, l'intersection d'au moins deux ensembles A_α est clairement contractile. On obtient donc

$$\pi_1(A \cap B) \cong \bigast_{\alpha \in \Lambda} \mathbb{Z}_{[\gamma_\alpha \cdot \varphi_\alpha \cdot \bar{\gamma}_\alpha]}$$

Ce qui achève la démonstration. □

REMARQUE 4.19. Il est important de noter que la preuve précédente permet de calculer explicitement le noyau de l'homomorphisme induit $\pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, x_0)$.

La première constatation importante que l'on peut tirer de ce théorème est la suivante : attacher des cellules de dimension strictement supérieure à deux n'influence pas le groupe fondamental.

PROPOSITION 4.20. *Soit (X, x_0) un espace connexe par arcs et Y l'espace obtenu en attachant à X une famille $\{(e_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ de cellules de dimension n , pour $n \geq 3$, alors, l'inclusion $X \hookrightarrow Y$ induit un isomorphisme $\pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, x_0)$.*

DÉMONSTRATION. Il est assez clair que l'argumentation utilisée dans la preuve du théorème 4.18 reste valide dans les hypothèses de ce corollaire. La seule différence réside dans le calcul du noyau N . En effet, pour la même décomposition $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de l'espace $A \cap B$, les sous-espaces A_α se déforment sur une sphère de dimension $n - 1$ qui est simplement connexe dans notre cas puisque $n \geq 3$.

Ainsi, $\pi_1(A_\alpha) = 0 = \pi_1(A \cap B)$ ce qui prouve que N , le noyau de l'homomorphisme surjectif $\pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$, est trivial. \square

COROLLAIRE 4.21. *Tout groupe G se réalise comme groupe fondamental d'un CW-complexe X_G connexe par arcs de dimension 2, i.e.*

$$\pi_1(X_G) \cong G$$

DÉMONSTRATION. Soit $G = \langle \{g_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \mid \{r_\beta\}_{\beta \in \Gamma} \rangle$ une présentation du groupe G . Comme nous l'avons vu dans la preuve de la proposition 4.11, les g_α sont les générateurs d'un groupe libre et les r_β des mots dans ce groupe libre engendrant le noyau N de l'homomorphisme surjectif du groupe libre sur le groupe G . Construisons alors X_G à partir du produit wedge de cercles comportant autant de cercles qu'il y a de générateurs – $X := \vee_{\alpha \in \Lambda} S_\alpha^1$ – en attachant des 2-cellules e_β par les lacets spécifiés par les mots r_β . En effet, pour un lacet dans X , on peut identifier ce lacet à une application d'attachement de 2-cellule. De plus, un mot $r_\beta = g_1 g_2 \dots g_n$ correspond à un lacet dans X de la manière suivante : Chaque lettre g_i correspond à un cercle S_i^1 et ainsi à un lacet parcourant S_i^1 dans le sens de l'orientation définie sur S_i^1 (le choix de l'orientation de ces cercles n'a pas d'importance ici). Le mot r_β correspond alors à la concaténation des lacets correspondant à chaque lettre le composant. X_G est alors clairement un CW-complexe de dimension 2 puisque X est un CW-complexe de dimension 1. De plus, le théorème 4.18 nous garantit que

$$\pi_1(X_G) \cong \pi_1(X)/N \cong \left(\bigstar_{\alpha \in \Lambda} \mathbb{Z}_\alpha \right) / N \cong G$$

puisque $\pi_1(\vee_{\alpha \in \Lambda} S^1) \cong \bigstar_{\alpha \in \Lambda} \mathbb{Z}$. \square

Nous allons calculer le groupe fondamental d'une surface orientée de genre g .

COROLLAIRE 4.22. *Soit M_g une surface orientée de genre g , alors,*

$$\pi_1(M_g) \cong \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] \rangle$$

DÉMONSTRATION. En effet, M_g se construit comme un produit wedge de $2g$ cercles auquel on attache une 2-cellule le long du lacet $[a_1, b_1] \dots [a_g, b_g]$. Ainsi, par le théorème 4.18, on a

$$\begin{aligned} \pi_1(M_g) &\cong \pi_1(\vee_{i=1}^{2g} S^1) / N \\ &\cong \left(\bigstar_{i=1}^{2g} \mathbb{Z} \right) / N \\ &\cong \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] \rangle \end{aligned}$$

\square

Revêtements

Définitions et propriétés

DÉFINITION 5.1. Soit X un espace topologique, un *revêtement* de X est un couple (\tilde{X}, p) où \tilde{X} est un espace topologique et où $p : \tilde{X} \rightarrow X$ est une application continue telle que

p est surjective et X admet un recouvrement ouvert $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ tel que $p^{-1}(U_\alpha)$ est une réunion disjointe d'ouverts tous homéomorphes à U_α , pour tout $\alpha \in \Lambda$.

Les propriétés topologiques de \tilde{X} sont rapportées au revêtement entier. Un revêtement est par exemple dit connexe si \tilde{X} est connexe.

EXEMPLE 5.1. Dans la preuve du théorème 3.39, l'application

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} &\longrightarrow S^1 \\ t &\longmapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \end{aligned}$$

est un revêtement.

THÉORÈME 5.2 (Propriété de relèvement d'homotopies).

Soit X un espace topologique et $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un revêtement. Pour toute homotopie $F_t : Y \rightarrow X$ avec une application $\tilde{f}_0 : Y \rightarrow \tilde{X}$ relevant F_0 , il existe une unique homotopie $\tilde{F}_t : Y \rightarrow \tilde{X}$ relevant F_t telle que $\tilde{F}_0 = \tilde{f}_0$.

Ce résultat est souvent représenté sous la forme du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{X} \\ & \exists! \tilde{F} \nearrow & \downarrow p \\ Y \times I & \xrightarrow{F} & X \end{array}$$

DÉMONSTRATION. Ce théorème a déjà été démontré au chapitre 3, il s'agit du lemme 3.38. □

COROLLAIRE 5.3 (Propriété de relèvement de chemins).

Pour tout chemin $f : I \rightarrow X$ et pour tout relèvement \tilde{x}_0 de l'origine de f , i.e. $p(\tilde{x}_0) = x_0 = f(0)$, il existe un unique chemin $\tilde{f} : I \rightarrow \tilde{X}$ relevant f d'origine \tilde{x}_0 .

On notera $\tilde{f}_{\tilde{x}_0}$ cet unique chemin.

DÉMONSTRATION. Il suffit de prendre l'homotopie

$$\begin{aligned} H : * \times I &\longrightarrow X \\ (*, t) &= t \longmapsto f(t) \end{aligned}$$

□

COROLLAIRE 5.4. Tout relèvement sur \tilde{X} d'un chemin constant est constant. Tout relèvement sur \tilde{X} d'une homotopie de chemins est une homotopie de chemins.

PROPOSITION 5.5. Soit $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un revêtement de X , alors l'application

$$\pi_1(p) : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

est injective pour tout relèvement $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ du point de base x_0 dans X .

De plus, l'image de $\pi_1(p)$ est le sous-groupe constitué des classes de lacets dans X basés en x_0 dont les relèvements sur \tilde{X} d'origine \tilde{x}_0 sont des lacets.

DÉMONSTRATION. Soit $[\tilde{f}_0] \in \text{Ker}(\pi_1(p))$, on a alors

$$f_0 := p \circ \tilde{f}_0 \approx_F c_{x_0}$$

Par la propriété des relèvements d'homotopies, il existe une homotopie $\tilde{F}_t : I \rightarrow \tilde{X}$ telle que $p \circ \tilde{F}_t = F_t$ et $\tilde{F}_0 = \tilde{f}_0$. On a alors $p \circ \tilde{F}_1 = F_1 = c_{x_0}$. Ainsi, \tilde{F}_1 est un relèvement d'un chemin constant donc constant et comme $\tilde{F}_1(0) = x_0$, on a $\tilde{F}_1 = c_{\tilde{x}_0}$. Ainsi, \tilde{f}_0 est homotope au lacet constant, i.e. $[\tilde{f}_0] = 0$.

Montrons encore l'assertion supplémentaire. Il est clair que les lacets basés en x_0 relevés en des lacets basés en \tilde{x}_0 sont dans l'image de $\pi_1(p)$. Réciproquement, soit f un lacet dans l'image de $\pi_1(p)$ basé en x_0 . Par hypothèse, il existe un lacet \tilde{g} dans \tilde{X} basé en \tilde{x}_0 tel que $\pi_1(p)([\tilde{g}]) = [p \circ \tilde{g}] = [f]$. Ainsi, il existe un lacet g dans la classe $[f]$ tel que $g = p \circ \tilde{g}$. Par unicité des relèvements, \tilde{g} est l'unique relèvement dans \tilde{X} d'origine \tilde{x}_0 . Comme g est dans la classe d'homotopie de f , il existe une homotopie H_t de g vers f . Par la propriété des relèvements d'homotopies, il existe une unique homotopie \tilde{H}_t de $\tilde{H}_0 = \tilde{g}$ vers \tilde{H}_1 . Posons $\tilde{f} = \tilde{H}_1$, comme \tilde{H}_t est une homotopie de chemins, \tilde{f} est un lacet comme \tilde{g} . On a alors $f = p \circ \tilde{f}$. Ainsi, par unicité des relèvements de chemins, \tilde{f} est l'unique relèvement de f dans \tilde{X} d'origine \tilde{x}_0 . Ainsi, f se relève bien en un lacet dans \tilde{X} , ce qui termine la preuve.

□

PROPOSITION 5.6. Soit $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un revêtement de X , alors, la cardinalité de $p^{-1}(x)$ est localement constante pour tout point x dans X .

DÉMONSTRATION. Par définition des revêtements, il existe un recouvrement ouvert $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq X$ tel que chaque préimage $p^{-1}(U_\alpha)$ est une réunion disjointe d'ouverts tous homéomorphes à U_α , pour tout indice $\alpha \in I$. Soit $\alpha \in I$, montrons

que la cardinalité de $p^{-1}(x)$ est constante pour tout $x \in U_\alpha$. Choisissons $x \in U_\alpha$, on a

$$p^{-1}(U_\alpha) = \coprod_{\mathbb{B} \in I_\alpha} V_{\alpha_i} \quad \text{avec } V_{\alpha_i} \cong U_\alpha$$

Et donc, $|p^{-1}(x)| = |I_\alpha|$ pour tout $x \in U_\alpha$. □

COROLLAIRE ET DÉFINITION 5.7. *Si X est connexe, la cardinalité de $p^{-1}(x)$ est constante pour tout point x . On l'appelle le nombre de feuillets de \tilde{X} .*

PROPOSITION 5.8. *Soit $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un revêtement connexe par arcs d'un espace topologique X connexe par arcs, alors, le nombre de feuillets de \tilde{X} est égal à l'indice de $\pi_1(p)(\pi_1(\tilde{X}))$ dans $\pi_1(X)$.*

DÉMONSTRATION. Soit g un lacet dans X basé en x_0 et $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Posons

$$G = \pi_1(X, x_0) \quad \text{et} \quad H = \pi_1(p)(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$$

Soit \tilde{g} le relèvement de g dans \tilde{X} d'origine \tilde{x}_0 . Par la proposition 5.5, pour $[h] \in H$, le relèvement \tilde{h} de h dans \tilde{X} d'origine \tilde{x}_0 est un lacet dans \tilde{X} . Par unicité des relèvements, le relèvement de $h \cdot g$ est $\tilde{h} \cdot \tilde{g}$. Comme \tilde{h} est un lacet, $\tilde{h} \cdot \tilde{g}$ et \tilde{g} ont les mêmes extrémités. On peut ainsi définir une application

$$\begin{aligned} \phi : H \backslash G &\longrightarrow p^{-1}(x_0) \\ H[g] &\longmapsto \tilde{g}(1) \end{aligned}$$

où $H \backslash G$ représente l'ensemble des classes à droite de $G \bmod H$. L'application ϕ est surjective par connexité par arcs de \tilde{X} . En effet, pour $x \in p^{-1}(x_0)$ il existe un chemin c dans \tilde{X} de \tilde{x}_0 vers x . Ainsi $g = p \circ c$ est bien un lacet dans X basé en x_0 . Par unicité des relèvements de chemins, le relèvement de g dans \tilde{X} d'origine \tilde{x}_0 est le chemin c , ainsi on a $\phi([g]) = c(1) = x$.

L'application ϕ est également injective. En effet, soit g_1, g_2 deux lacets dans X dont les classes $\bmod H$ ont la même image par ϕ et \tilde{g}_1, \tilde{g}_2 leurs relèvements respectifs sur \tilde{X} . Le lacet $\tilde{g}_1 \cdot \tilde{g}_2$ est donc bien défini dans \tilde{X} et basé en \tilde{x}_0 . Ainsi, $\pi_1(p)([\tilde{g}_1 \cdot \tilde{g}_2])$ est dans H par la proposition 5.5, i.e. $[g_1][g_2]^{-1} \in H$ et donc $H[g_1] = H[g_2]$.

ϕ étant une bijection, on a alors

$$|p^{-1}(x_0)| = |H \backslash G| = [G : H]$$

□

Nous donnons maintenant deux critères d'existence et d'unicité des relèvements d'applications.

THÉORÈME 5.9 (Critère d'existence de relèvements).

Soit $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ un revêtement d'un espace topologique X et une application continue

$$f : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$$

où Y est un espace connexe par arcs, localement connexe par arcs, alors, un relèvement de f sur \tilde{X} existe si et seulement si

$$\pi_1(f)(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq \pi_1(p)(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$$

DÉMONSTRATION.

\Rightarrow Soit \tilde{f} un relèvement de f , par functorialité de π_1 , on a $\pi_1(f) = \pi_1(p) \circ \pi_1(\tilde{f})$ et ainsi, $\text{Im}(\pi_1(f)) \subseteq \text{Im}(\pi_1(p))$.

\Leftarrow Soit $y \in Y$ et γ un chemin dans Y de y_0 vers y . Le chemin $f \circ \gamma$ dans X est d'origine x_0 , il se relève donc en un unique chemin $\widetilde{f \circ \gamma}$ d'origine \tilde{x}_0 . On définit alors

$$\begin{aligned} \tilde{f} : Y &\longrightarrow \tilde{X} \\ y &\longmapsto \widetilde{f \circ \gamma}(1) \end{aligned}$$

I) Commençons par montrer que \tilde{f} est bien définie. Soit γ' un autre chemin de y_0 vers y , alors $(f \circ \gamma') \cdot \overline{(f \circ \gamma)}$ est un lacet h_0 dans X basé en x_0 et on a

$$\begin{aligned} h_0 &= (f \circ \gamma') \cdot \overline{(f \circ \gamma)} \\ &= (f \circ \gamma) \cdot (f \circ \overline{\gamma}) \\ &= f \circ (\gamma' \cdot \overline{\gamma}) \end{aligned}$$

Ainsi $[h_0]$ est dans l'image par $\pi_1(f)$ du groupe fondamental de Y , car $\gamma' \cdot \overline{\gamma}$ est un lacet dans Y basé en y_0 . Par la proposition 5.5, h_0 se relève en un unique lacet \tilde{h}_0 basé en \tilde{x}_0 dans \tilde{X} . Par unicité des relèvements de chemins, \tilde{h}_0 est le relèvement de $(f \circ \gamma') \cdot \overline{(f \circ \gamma)}$ et ainsi

$$\tilde{h}_0 = \widetilde{(f \circ \gamma')} \cdot \widetilde{\overline{(f \circ \gamma)}}$$

Or $\widetilde{\overline{(f \circ \gamma)}} = \overline{\widetilde{f \circ \gamma}}$ et donc $\widetilde{f \circ \gamma'}(1) = \widetilde{f \circ \gamma}(1)$.

II) Montrons encore que \tilde{f} est continue. Soit $y \in Y$ et U un ouvert de X provenant du recouvrement associé au revêtement \tilde{X} et contenant $f(y)$. Il existe donc un ouvert \tilde{U} dans \tilde{X} contenant \tilde{y} et homéomorphe à U . Par continuité de f et par connexité locale de Y , il existe un voisinage V de y connexe par arcs tel que $f(V) \subseteq U$. Soit y' dans V , pour définir $\tilde{f}(y')$ on peut prendre le chemin $\gamma \cdot \eta$ où γ est un chemin fixé de y_0 vers y et η un chemin de y vers y' dans V . Ainsi, le chemin $f \circ (\gamma \cdot \eta) = (f \circ \gamma) \cdot (f \circ \eta)$ possède un unique relèvement $\widetilde{f \circ \gamma} \cdot \widetilde{f \circ \eta}$. Comme $f(V) \subseteq U$, le chemin $f \circ \eta$ est dans U et on a $\widetilde{f \circ \eta} = p \circ \widetilde{f \circ \eta}$. Comme p est inversible dans U sur \tilde{U} , on obtient que $\widetilde{f \circ \eta} = p^{-1} \circ f \circ \eta$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \tilde{f}(y') &= \widetilde{f \circ \gamma} \cdot \widetilde{f \circ \eta}(1) \\ &= \widetilde{f \circ \eta}(1) \\ &= p^{-1} \circ f \circ \eta(1) \in p^{-1}(f(V)) \subseteq \tilde{U} \end{aligned}$$

et donc $\tilde{f}(V) \subseteq \tilde{U}$, ce qui prouve la continuité de \tilde{f} .

□

THÉORÈME 5.10 (Critère d'unicité des relèvements).

Soit $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un revêtement de X et $f : Y \rightarrow X$ une application continue avec deux relèvements $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : Y \rightarrow \tilde{X}$ qui sont égaux en un point $y_0 \in Y$, alors, si Y est connexe, les deux relèvements sont égaux.

DÉMONSTRATION. Soit un point y dans Y et U un voisinage de $f(y)$ du recouvrement de X associé au revêtement \tilde{X} . On peut donc trouver deux voisinages \tilde{U}_1 et \tilde{U}_2 homéomorphes à U tels que $\tilde{f}_i(y) \in \tilde{U}_i$ pour $i = 1, 2$. Par continuité des applications \tilde{f}_i , il existe un voisinage N de y tel que $\tilde{f}_i(N) \subseteq \tilde{U}_i$. Posons

$$W = \{y \in Y \mid \tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y)\}$$

Montrons que W est non-vide, ouvert et fermé. W est non-vide par hypothèse par l'existence du point y_0 .

- I) W est fermé. En effet, soit un point y dans le complémentaire de W , on a donc $\tilde{f}_1(y) \neq \tilde{f}_2(y)$. Ainsi, $\tilde{U}_1 \neq \tilde{U}_2$ et sont même disjoints. On en déduit que tous les points dans N ont des images différentes par \tilde{f}_1 et \tilde{f}_2 , i.e. $N \subseteq (\tilde{X} \setminus W)$.
- II) W est également ouvert. En effet, soit y un point dans W , alors $\tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y)$ et donc $\tilde{U}_1 = \tilde{U}_2$. Comme $f = p \circ \tilde{f}_1 = p \circ \tilde{f}_2$ et que p est bijective sur $\tilde{U}_1 = \tilde{U}_2$, on a $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$ sur le voisinage N , i.e. $N \subseteq W$.

Comme Y est connexe, $W = Y$ ce qui prouve que les deux relèvements sont identiques. □

Classification des revêtements connexes par arcs

Nous allons maintenant classifier les revêtements d'un espace topologique. Puisque nous travaillons avec des chemins, il n'est pas surprenant que nous exigions des espaces considérés qu'ils soient localement connexes par arcs. Le lemme suivant nous garantit qu'aucune hypothèse supplémentaire n'est nécessaire pour pouvoir travailler avec les revêtements :

LEMME 5.11. Soit $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un revêtement d'un espace topologique X localement connexe par arcs, alors, \tilde{X} est également localement connexe par arcs.

DÉMONSTRATION. Soit \tilde{x} un point de \tilde{X} et \tilde{V} un voisinage de \tilde{x} . On peut trouver un voisinage \tilde{U} contenant \tilde{x} homéomorphe à un voisinage U contenant $x = p(\tilde{x})$. Ainsi $p(\tilde{U} \cap \tilde{V})$ est un voisinage de x dans X . Par hypothèse, on peut trouver dans ce voisinage un voisinage W de x connexe par arcs. On a donc

$$p^{-1}(W) \subseteq \tilde{U} \cap \tilde{V} \subseteq \tilde{V}$$

où $p^{-1}(W)$ est un voisinage connexe par arcs puisque p^{-1} est un homéomorphisme sur U . □

Nous allons commencer par classifier les revêtements d'espaces localement connexes par arcs qui sont connexes. Par connexité, de tels espaces sont même connexes par arcs.

Nous nous intéresserons d'abord aux conditions nécessaires pour qu'un tel espace admette un revêtement simplement connexe.

DÉFINITION 5.12. Un espace topologique X est dit *semi-localement simplement connexe* si pour chaque point x de X il existe un voisinage U tel que l'application induite par l'inclusion

$$\pi_1(i) : \pi_1(U, x) \longrightarrow \pi_1(X, x)$$

est triviale.

Clairement, tout espace localement simplement connexe est semi-localement simplement connexe. La réciproque est fautive, comme le montre l'exemple suivant.

EXEMPLE 5.2. On appelle bouquet de cercles de rayons $1/n$ l'espace topologique

$$X = \bigvee_{n \in \mathbb{N}^*} S_{1/n}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$$

où S_m^1 est le cercle de rayon m dans \mathbb{R}^2 . L'espace X n'est pas semi-localement simplement connexe, puisque toute boule de rayon ε centrée sur le point de base de X contiendra les cercles de rayons inférieurs à ε et induira donc une application non triviale.

Si en revanche on considère le cône construit sur X , à savoir l'espace

$$CX = (X \times I)/(X \times \{1\})$$

Cet espace est contractile, donc semi-localement simplement connexe, mais n'est pas localement simplement connexe.

Nous allons nous intéresser aux revêtements simplement connexes. Le théorème suivant permet de caractériser les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un tel revêtement existe. La preuve de ce théorème permet même de construire explicitement ce revêtement.

THÉORÈME 5.13. *Un espace topologique connexe et localement connexe par arcs admet un revêtement simplement connexe si et seulement s'il est semi-localement simplement connexe.*

DÉMONSTRATION. Soit X un espace topologique connexe et localement connexe par arcs.

\Rightarrow Soit x un point de X et $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un revêtement simplement connexe de X . Soit U un voisinage ouvert de x provenant du recouvrement associé à \tilde{X} . Soit $[f] \in \pi_1(U, x)$, on peut relever le lacet f en un lacet $\tilde{f} = p^{-1} \circ f$ dans un ouvert \tilde{U} contenant p^{-1} et homéomorphe à U par p . Comme \tilde{X} est simplement connexe, $[\tilde{f}] = 0$ dans $\pi_1(\tilde{X}, p^{-1}(x))$. Ainsi, la classe d'homotopie de f dans X est l'image par $\pi_1(p)$ de la classe d'homotopie de \tilde{f} dans \tilde{X} qui est nulle.

⇐ Soit x_0 un point de base de X . Ce choix n'influence rien puisque X est connexe par arcs. Posons

$$\tilde{X} = \{[\gamma] \mid \gamma \in C(I, X) \text{ avec } \gamma(0) = x_0\}$$

l'ensemble des classes d'homotopies de chemins dans X d'origine x_0 et définissons également l'application

$$\begin{aligned} p : \tilde{X} &\longrightarrow X \\ [\gamma] &\longmapsto \gamma(1) \end{aligned}$$

Comme les homotopies de chemins sont à extrémités fixées, cette application est bien définie. Elle est de plus surjective par connexité par arcs de X .

Afin de montrer que $p : \tilde{X} \rightarrow X$ est un revêtement simplement connexe de X , il nous faut d'abord donner une topologie à \tilde{X} . Posons

$$\mathcal{U} = \{U \text{ ouverts de } X \mid U \text{ est connexe par arcs et } \pi_1(U) \rightarrow \pi_1(X) \text{ est triviale}\}$$

I) \mathcal{U} est une base de la topologie de X . Il suffit pour cela que tout ouvert contienne un élément de \mathcal{U} . Soit x dans X et V un voisinage ouvert de x . Comme X est semi-localement simplement connexe, il existe un voisinage U de x tel que l'application $\pi_1(U) \rightarrow \pi_1(X)$ est triviale. X étant localement connexe par arcs, il existe un voisinage ouvert connexe par arcs W dans l'ouvert $U \cap V$. Ainsi, W est un ouvert dans \mathcal{U} puisque l'application

$$\pi_1(W) \rightarrow \pi_1(U \cap V) \rightarrow \pi_1(U) \rightarrow \pi_1(X)$$

est triviale.

Cette base de la topologie de X nous permet de construire une topologie sur \tilde{X} en remontant chaque ouvert par l'application p .

Soit $U \in \mathcal{U}$ et $[\gamma] \in \tilde{X}$ tel que $p([\gamma]) = \gamma(1) \in U$, posons

$$U_{[\gamma]} = \{[\gamma \cdot \eta] \mid \eta \in C(I, U) \text{ avec } \eta(0) = \gamma(1)\} \subseteq \tilde{X}$$

Nous allons montrer plus loin que \mathcal{U} est le recouvrement ouvert associé au revêtement \tilde{X} . On a déjà $p(U_{[\gamma]}) = U$ car U est connexe par arcs, montrons donc que l'application p restreinte à $U_{[\gamma]}$ est injective.

Soit $[\gamma \cdot \eta_1], [\gamma \cdot \eta_2]$ deux points dans $U_{[\gamma]}$ qui ont la même image par p , i.e. tels que $\gamma \cdot \eta_1(1) = \gamma \cdot \eta_2(1)$. Comme l'application $\pi_1(U) \rightarrow \pi_1(X)$ est triviale, on a $[\eta_1] = [\eta_2]$ dans X et donc $[\gamma \cdot \eta_1] = [\gamma \cdot \eta_2]$

Avant de montrer que les ensembles $U_{[\gamma]}$ sont disjoints pour des classes d'homotopie $[\gamma]$ distinctes, nous allons montrer qu'ils permettent de définir une topologie sur \tilde{X} . Posons

$$\tilde{\mathcal{U}} = \{U_{[\gamma]} \mid U \in \mathcal{U} \text{ et } [\gamma] \in \tilde{X}\}$$

II) $\tilde{\mathcal{U}}$ est une base d'une topologie sur \tilde{X} . En effet, pour tout point $[\gamma]$ de \tilde{X} , $U_{[\gamma]}$ contient $[\gamma]$ pour tout choix d'ouvert U dans \mathcal{U} . Il ne reste donc plus qu'à montrer que toute intersection d'éléments de $\tilde{\mathcal{U}}$ contient un élément de $\tilde{\mathcal{U}}$. Remarquons que si $[\gamma']$ appartient à $U_{[\gamma]}$, alors $U_{[\gamma]} = U_{[\gamma']}$

En effet, si $[\gamma'] = [\gamma \cdot \eta]$, les éléments de $U_{[\gamma']}$ sont de la forme

$$[\gamma' \cdot \mu] = [\gamma \cdot \eta \cdot \mu] \in U_{[\gamma]}$$

et les éléments de $U_{[\gamma]}$ de la forme

$$[\gamma \cdot \mu] = [\gamma' \cdot \bar{\eta} \cdot \mu] \in U_{[\gamma']}$$

Donc $U_{[\gamma]} = U_{[\gamma']}$.

Soit $[\gamma'']$ dans l'intersection $U_{[\gamma]} \cap V_{[\gamma']}$. On a donc $U_{[\gamma]} = U_{[\gamma'']}$ et $V_{[\gamma']} = V_{[\gamma'']}$. Comme $\gamma''(1) \in U \cap V$, il existe un voisinage ouvert W de $\gamma''(1)$ contenu dans $U \cap V$ et clairement

$$W_{[\gamma'']} \subseteq U_{[\gamma'']} \cap V_{[\gamma'']} = U_{[\gamma]} \cap V_{[\gamma']}$$

Nous pouvons maintenant montrer les dernières propriétés nécessaires à ce que \tilde{X} soit un revêtement de X .

III) Pour cette topologie, $p : \tilde{X} \rightarrow X$ est continue. Soit x un point de X et V un voisinage de x appartenant à \mathcal{U} . Comme X est connexe par arcs, il existe un chemin γ de x_0 vers x . On a alors $p(V_{[\gamma]}) = V$, i.e. $p^{-1}(V) \subseteq V_{[\gamma]}$.

IV) p est un homéomorphisme de $U_{[\gamma]}$ sur U pour tout ouvert $U \in \mathcal{U}$ et pour tout $[\gamma] \in \tilde{X}$. On a déjà vu que p est bijective dans ce cas et qu'elle est continue. Il ne reste plus qu'à montrer qu'elle est ouverte. Comme les ouverts de $U_{[\gamma]}$ sont les $V_{[\gamma]}$ où $V \in \mathcal{U}$ est un ouvert de U et que $p(V_{[\gamma]}) = V$, $p|_{U_{[\gamma]}}$ est ouverte et donc un homéomorphisme.

Tout ceci nous permet donc de conclure que

V) $p : \tilde{X} \rightarrow X$ est un revêtement de X . En effet, pour tout ouvert de la base \mathcal{U} , qui est un recouvrement de X , on a

$$p^{-1}(U) = \{U_{[\gamma]} \mid \gamma \in \mathcal{C}(I, X) \text{ avec } \gamma(1) \in U\}$$

où chaque $U_{[\gamma]}$ est homéomorphe à U et disjoint des autres, car si $[\gamma''] \in U_{[\gamma]} \cap U_{[\gamma']}$, alors $U_{[\gamma]} = U_{[\gamma']} = U_{[\gamma'']}$.

Il ne reste plus qu'à montrer que \tilde{X} est simplement connexe.

En effet, soit $[\gamma]$ dans \tilde{X} , posons

$$\begin{aligned} \gamma_t &: I \longrightarrow X \\ s &\longmapsto \gamma(st) \end{aligned}$$

c'est-à-dire, la restriction de γ à l'intervalle $[0, t]$. Alors,

$$\begin{aligned} \Gamma &: I \longrightarrow \tilde{X} \\ t &\longmapsto [\gamma_t] \end{aligned}$$

est un chemin dans \tilde{X} relevant γ , d'origine $[c_{x_0}]$, la classe d'homotopie du lacet trivial et d'extrémité $[\gamma]$. Ainsi, tout les points $[\gamma]$ de \tilde{X} sont reliés au point $[c_{x_0}]$, ce qui prouve que \tilde{X} est connexe par arcs.

Pour montrer que \tilde{X} est de groupe fondamental trivial, il suffit de prouver que son image par $\pi_1(p)$ est nulle puisque la proposition 5.5 nous garantit que $\pi_1(p)$ est injective. Soit $[f]$ dans l'image du groupe fondamental de $(\tilde{X}, [c_{x_0}])$ par $\pi_1(p)$, par la proposition 5.5,

f se relève en un lacet Γ basé en $[c_{x_0}]$. Puisque Γ est un lacet on a $[c_{x_0}] = [f_0] = \Gamma(0) = \Gamma(1) = [f_1] = [f]$, i.e. $[f] = 0$, ce qui achève la démonstration.

□

PROPOSITION 5.14. *Soit X un espace topologique connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe, alors, pour tout sous-groupe H du groupe fondamental de X , il existe un revêtement $p : X_H \rightarrow X$ tel que l'image par $\pi_1(p)$ du groupe fondamental de X_H est H , i.e.*

$$\pi_1(p)(\pi_1(X_H, \tilde{x}_0)) = H \quad \text{pour un point } \tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$$

DÉMONSTRATION. Soit \tilde{X} le revêtement simplement connexe construit dans le théorème précédent. On définit une relation \sim sur \tilde{X} par

$$[\gamma] \sim [\gamma'] \iff \gamma(1) = \gamma'(1) \text{ et } [\gamma \cdot \bar{\gamma}'] \in H$$

- I) \sim est une relation d'équivalence sur \tilde{X} . En effet, la réflexivité est claire car $[c_{x_0}]$ appartient à H . La symétrie découle de la stabilité de H pour l'inversion, car si $[\gamma \cdot \bar{\gamma}']$ appartient à H , alors son inverse également i.e. $[\gamma \cdot \bar{\gamma}']^{-1} = [\gamma' \cdot \bar{\gamma}] \in H$. Finalement, la transitivité découle de la stabilité de H pour la loi de composition. En effet, si $[\gamma \cdot \bar{\gamma}']$ et $[\gamma' \cdot \bar{\gamma}']$ sont des éléments de H , alors leur produit l'est aussi, i.e. $[\gamma \cdot \bar{\gamma}'][\gamma' \cdot \bar{\gamma}'] = [\gamma \cdot \bar{\gamma}'] \in H$.

Le revêtement que nous cherchons est alors le quotient de \tilde{X} par la relation d'équivalence définie ce-dessus. Posons donc,

$$X_H = \tilde{X} / \sim$$

- II) X_H est un revêtement. Remarquons d'abord que si deux chemins γ et γ' ont les mêmes extrémités, alors on a

$$[\gamma] \sim [\gamma'] \iff [\gamma \cdot \eta] \sim [\gamma' \cdot \eta]$$

pour tout chemin η d'origine $\gamma(1) = \gamma'(1)$. On en conclut que si deux points $[\gamma]$ et $[\gamma']$ de \tilde{X} sont en relation, alors tous les voisinages $U_{[\gamma]}$ et $U_{[\gamma']}$ sont identifiés dans le quotient X_H . Ainsi, l'application p_H induite par p sur X_H vérifie toutes les propriétés nécessaires à en faire un revêtement.

Nous pouvons finalement conclure :

- III) $\pi_1(p_H)(\pi_1(X_H, \tilde{x}_0)) = H$ où \tilde{x}_0 est la classe d'équivalence dans X_H du point de base $[c_{x_0}]$ de \tilde{X} . En effet, pour une classe d'homotopie $[f]$ dans X , on a vu dans la preuve du théorème précédent que le lacet f se relève dans \tilde{X} en un chemin d'origine $[c_{x_0}]$ et d'extrémité $[f]$. Ce chemin est un lacet dans X_H si et seulement si ces deux points sont en relation, c'est-à-dire, si et seulement si $[f] \in H$.

□

DÉFINITION 5.15. Un *isomorphisme de revêtement* entre deux revêtements $p_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow X$ et $p_2 : \tilde{X}_2 \rightarrow X$ est un homéomorphisme $f : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ tel que $p_1 = p_2 \circ f$.

Un isomorphisme de revêtement pointé conserve de plus les points de base. Ainsi, pour un espace pointé donné (\tilde{X}, \tilde{x}_0) , tout autre choix de point de base \tilde{x}_1 donne un espace pointé dont la classe d'isomorphie pointée est distincte.

Les isomorphismes de revêtements induisent une relation d'équivalence car l'inverse d'un isomorphisme de revêtement en est un, ainsi que la composition de deux isomorphismes de revêtements.

PROPOSITION 5.16. *Soit (X, x_0) un espace topologique connexe, localement connexe par arcs et $p_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow X$, $p_2 : \tilde{X}_2 \rightarrow X$ deux revêtements de X , alors ces deux revêtements sont isomorphes si et seulement si*

$$\pi_1(p_1)(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) = \pi_1(p_2)(\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$$

où \tilde{x}_i est un point de base de \tilde{X}_i appartenant à $p_i^{-1}(x_0)$.

DÉMONSTRATION.

\Rightarrow Soit f l'isomorphisme de revêtement entre p_1 et p_2 , on a $p_1 = p_2 \circ f$ et $p_2 = p_1 \circ f^{-1}$. Ainsi,

$$\pi_1(p_1)(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) = \pi_1(p_2) \circ \pi_1(f)(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) = \pi_1(p_2)(\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$$

\Leftarrow Les hypothèses sont suffisantes pour appliquer la propriété de relèvements d'applications, on peut donc relever les applications p_1 et p_2 en des applications

$$\tilde{p}_1 : (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \rightarrow (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2) \quad \text{et} \quad \tilde{p}_2 : (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2) \rightarrow (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)$$

telles que $p_2 \circ \tilde{p}_1 = p_1$ et $p_1 \circ \tilde{p}_2 = p_2$. Par unicité des relèvements, on a $\tilde{p}_1 \circ \tilde{p}_2 = \text{Id}_{\tilde{X}_2}$ et $\tilde{p}_2 \circ \tilde{p}_1 = \text{Id}_{\tilde{X}_1}$. Ainsi \tilde{p}_1 et \tilde{p}_2 sont des homéomorphismes inverses et clairement des isomorphismes de revêtements.

□

Pour un espace topologique connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe, nous avons donc prouvé la première moitié du théorème de classification suivant.

THÉORÈME 5.17 (Classification des revêtements connexes par arcs).

Soit X un espace topologique connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe, alors, il y a une bijection entre les sous-groupes du groupe fondamental de X , $\pi_1(X, x_0)$ et les classes d'isomorphie pointée de revêtements connexes par arcs de X . Cette bijection associe au revêtement $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ le sous-groupe $\pi_1(p)(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$.

Si on ignore les points de base, cette correspondance donne une bijection entre les classes d'isomorphie de revêtements connexes par arcs et les classes de conjugaison des sous-groupes du groupe fondamental de (X, x_0) .

DÉMONSTRATION. Par les propositions 5.14 et 5.16, il ne reste qu'à prouver la deuxième partie du théorème. Soit $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ un revêtement connexe par arcs de X et $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$ un autre point de base de \tilde{X} . Nous allons montrer que les sous-groupes associés aux revêtements de (\tilde{X}, \tilde{x}_0) et (\tilde{X}, \tilde{x}_1) sont conjugués. Soit $\tilde{\gamma}$ un chemin de \tilde{x}_0 vers \tilde{x}_1 , alors, le chemin $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$ est un lacet dans X . Posons $g = [\gamma]$ la classe d'homotopie dans X et notons $H_i = \pi_1(p)(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_i))$ les sous-groupes associés pour $i \in \{0, 1\}$.

On a $g^{-1}H_0g \subseteq H_1$ car si $[f]$ appartient à H_0 , on peut relever f sur \tilde{X} avec $f = p \circ \tilde{f}$ où \tilde{f} est un lacet dans \tilde{X} basé en \tilde{x}_0 . Ainsi

$$g^{-1}[f]g = [\bar{\gamma} \cdot f \cdot \gamma] = [p \circ (\tilde{\gamma} \cdot \tilde{f} \cdot \tilde{\gamma})] \in H_1$$

car $\tilde{\gamma} \cdot \tilde{f} \cdot \tilde{\gamma}$ est un lacet dans \tilde{X} basé en \tilde{x}_1 . De la même façon, on obtient que $gH_1g^{-1} \subseteq H_0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} H_1 &= g^{-1}gH_1g^{-1}g \subseteq g^{-1}H_0g \subseteq H_1 \\ H_0 &= gg^{-1}H_0gg^{-1} \subseteq gH_1g^{-1} \subseteq H_0 \end{aligned}$$

et donc, $H_1 = g^{-1}H_0g$ et $H_0 = gH_1g^{-1}$.

Réciproquement, soit H_0 et H_1 deux sous-groupes conjugués de $\pi_1(X, x_0)$ avec $H_1 = g^{-1}H_0g$. Soit $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ le revêtement tel que $\pi_1(p)(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = H_0$. Soit γ un lacet dans X basé en x_0 dans la classe d'homotopie g , i.e. $[\gamma] = g$. On relève γ dans \tilde{X} en un chemin $\tilde{\gamma}$ d'origine \tilde{x}_0 . Posons $\tilde{x}_1 = \tilde{\gamma}(1)$. L'argumentation précédente nous donne

$$H_0 = g\pi_1(p)(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1))g^{-1}$$

ainsi, $H_1 = \pi_1(p)(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1))$ et les espaces sont donc bien dans la même classe d'isomorphisme de revêtements si l'on ne tient pas compte des points de base. \square

Si \tilde{X} est un revêtement simplement connexe d'un espace X connexe, localement connexe par arcs, alors le critère d'existence des relèvements implique que \tilde{X} est un revêtement de tout autre revêtement connexe par arcs de X . Par le théorème de classification des revêtements connexes par arcs, \tilde{X} est de plus unique à isomorphisme près, on l'appelle alors le *revêtement universel* de X .

De manière plus générale, il y a un ordre partiel sur les revêtements connexes par arcs induit par la relation "être un revêtement de". Cette relation correspond à l'ordre partiel d'inclusion des sous-groupes de $\pi_1(X)$ ou d'inclusion des classes de conjugaisons de sous-groupes de $\pi_1(X)$ si les points de base sont ignorés.

Classification des revêtements localement connexes par arcs

Il est également possible de classer les revêtements localement connexes par arcs¹ d'un espace connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. Ces revêtements sont caractérisés par leur manière de faire permuer les pré-images du point de base de l'espace considéré. Par exemple, considérons les revêtements localement connexes par arcs à trois feuillets du cercle :

- (1) \tilde{X}_1 constitué d'un lacet s'enroulant comme un ressort mais qui revient à son point de départ au bout de trois tours.
- (2) \tilde{X}_2 constitué d'un cercle et d'un lacet s'enroulant comme un ressort mais qui revient à son point de départ au bout de deux tours.
- (3) \tilde{X}_2 constitué de trois cercles disjoints.

¹Remarquons que suite au lemme 5.11, la connexité par arcs locale des revêtements ne constitue en rien une restriction sur les revêtements considérés.

Nous allons regarder le relèvement d'un générateur f du groupe fondamental du cercle (i.e. un lacet faisant un tour du cercle) sur ces revêtements. Pour une pré-image \tilde{x}_0 du point de base x_0 du cercle S^1 , il existe un unique relèvement de f d'origine \tilde{x}_0 . L'extrémité de ce relèvement est également une pré-image du point de base du cercle. Dans nos trois exemples on constate que

- (1) Dans \tilde{X}_1 , les pré-images permutent toutes entre elles, i.e. elles forment un cycle.
- (2) Dans \tilde{X}_2 , la pré-image du cercle ne bouge pas et les deux autres permutent.
- (3) Dans \tilde{X}_3 , aucune pré-image ne permute, elles sont toutes fixes.

Nous allons généraliser cette observation, ceci nous permettra de classifier les revêtements en termes de permutations de pré-images du point de base.

DÉFINITION 5.18. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue et y_0 un point de Y . On appelle *fibres au-dessus de y_0* l'ensemble des préimages par f de y_0 .

DÉFINITION 5.19. Soit $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un revêtement de X , γ un chemin dans X d'origine x_0 et d'extrémité x_1 . Soit \tilde{x}_1 un élément de la fibre de x_1 et $\tilde{\gamma}_{\tilde{x}_1}$ l'unique relèvement de γ dans \tilde{X} d'origine \tilde{x}_1 , on définit alors l'application L_γ par

$$\begin{aligned} L_\gamma : p^{-1}(x_1) &\longrightarrow p^{-1}(x_0) \\ \tilde{x}_1 &\longmapsto \tilde{\gamma}_{\tilde{x}_1}(1) \end{aligned}$$

Il aurait été plus naturel de considérer l'application

$$\begin{aligned} L_\gamma : p^{-1}(x_0) &\longrightarrow p^{-1}(x_1) \\ \tilde{x}_0 &\longmapsto \tilde{\gamma}_{\tilde{x}_0}(1) \end{aligned}$$

Mais dans ce cas, nous aurions eu $L_{\gamma,\eta} = \eta \circ L_\gamma$ ce qui n'aurait pas été compatible avec la structure algébrique du groupe fondamental.

PROPOSITION 5.20. Soit $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un revêtement de X , alors, pour tout chemin γ dans X , l'application L_γ est une bijection entre les fibres des extrémités de γ d'inverse $L_{\bar{\gamma}}$.

DÉMONSTRATION. Posons $x_0 = \gamma(0)$ et $x_1 = \gamma(1)$. Comme $\bar{\gamma} \cdot \gamma \approx c_{x_1}$, par unicité des relèvements d'homotopie,

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_{\tilde{x}_1} \cdot \tilde{\gamma}_{(\tilde{\gamma}_{\tilde{x}_1}(1))} &\approx c_{\tilde{x}_1} \\ \text{i.e. } \tilde{\gamma}_{\tilde{x}_1} &= \tilde{\gamma}_{(\tilde{\gamma}_{\tilde{x}_1}(1))} \end{aligned}$$

c'est-à-dire, que l'inverse du relèvement de $\bar{\gamma}$ d'origine \tilde{x}_1 est égal au relèvement de γ dont l'origine est l'extrémité du relèvement de $\bar{\gamma}$ d'origine \tilde{x}_1 . On obtient donc,

$$\begin{aligned} L_{\bar{\gamma}} \circ L_\gamma(\tilde{x}_1) &= L_{\bar{\gamma}}\left(\tilde{\gamma}_{\tilde{x}_1}(1)\right) \\ &= \tilde{\gamma}_{(\tilde{\gamma}_{\tilde{x}_1}(1))}(1) \\ &= \tilde{\gamma}_{\tilde{x}_1}(1) \\ &= \tilde{\gamma}_{\tilde{x}_1}(0) \\ &= \tilde{x}_1 \end{aligned}$$

On procède de même en inversant γ et $\bar{\gamma}$ pour obtenir $L_\gamma \circ L_{\bar{\gamma}} = \text{Id}_{p^{-1}(x_0)}$. □

PROPOSITION 5.21. *Soit $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un revêtement de X , alors l'application*

$$L = L_{\tilde{X}} : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \text{Perm}(p^{-1}(x_0))$$

$$[\gamma] \longmapsto L_\gamma$$

est un homomorphisme de groupes.

DÉMONSTRATION. Commençons par montrer que L est bien définie. Soit γ et γ' deux lacets dans X homotopes, par unicité des relèvements d'homotopie, on a

$$\tilde{\gamma}_{\tilde{x}_0} \approx \tilde{\gamma}'_{\tilde{x}_0} \quad \forall \tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$$

ainsi,

$$L_\gamma(\tilde{x}_0) = \tilde{\gamma}_{\tilde{x}_0}(1)$$

$$= \tilde{\gamma}'_{\tilde{x}_0}(1)$$

$$= L_{\gamma'}(\tilde{x}_0)$$

Montrons maintenant que L est bien un homomorphisme, soit γ et η deux lacets dans X . On a $\overline{\gamma \cdot \eta} = \overline{\eta} \cdot \overline{\gamma}$ et donc,

$$\widetilde{(\gamma \cdot \eta)}_{\tilde{x}_0} = \widetilde{(\overline{\eta} \cdot \overline{\gamma})}_{\tilde{x}_0}$$

$$= \tilde{\eta}_{\tilde{x}_0} \cdot \tilde{\gamma}_{\tilde{\eta}_{\tilde{x}_0}(1)}$$

ainsi,

$$L(\gamma \cdot \eta)(\tilde{x}_0) = L_{\gamma \cdot \eta}(\tilde{x}_0)$$

$$= \tilde{\gamma}_{\tilde{\eta}_{\tilde{x}_0}(1)}(1)$$

$$= L_\gamma(\tilde{\eta}_{\tilde{x}_0}(1))$$

$$= L_\gamma \circ L_\eta(\tilde{x}_0)$$

ce qui achève la démonstration. □

COROLLAIRE 5.22. *Ainsi, tout revêtement $p : \tilde{X} \rightarrow X$ définit une action sur la fibre d'un point de base x_0 de X par l'application*

$$\mathcal{L}_{\tilde{X}} : \pi_1(X, x_0) \times p^{-1}(x_0) \longrightarrow p^{-1}(x_0)$$

$$([\gamma], \tilde{x}_0) \longmapsto L_\gamma(\tilde{x}_0)$$

PROPOSITION 5.23. *Soit X un espace topologique connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe ainsi qu'une action de groupes*

$$L : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \mathcal{S}_n$$

Alors, il existe un revêtement \tilde{X} , tel que L correspond à l'action induite par \tilde{X} . De plus, \tilde{X} est un quotient de $\tilde{X}_0 \times F$ où \tilde{X}_0 est le revêtement universel de X et où $F \cong \mathbb{N}_n$ est un ensemble à n éléments.

DÉMONSTRATION. Notons $L_\lambda : F \rightarrow F$ la permutation induite par la classe d'homotopie $[\lambda] \in \pi_1(X, x_0)$ par l'action L . Définissons une relation d'équivalence sur $\tilde{X}_0 \times F$ de la manière suivante :

$$([\gamma], \tilde{x}_0) \sim ([\lambda \cdot \gamma], L_\lambda(\tilde{x}_0))$$

où $F = \{\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_{n-1}\}$, $[\lambda] \in \pi_1(X, x_0)$ et $[\gamma] \in \tilde{X}_0^2$. Le fait que \sim est une relation d'équivalence découle directement du fait que L est une action du groupe fondamental de X sur F . On pose alors

$$\tilde{X} = \tilde{X}_0 \times F / \sim$$

et

$$\begin{aligned} p : \tilde{X} &\longrightarrow X \\ ([\gamma], \tilde{x}_0) &\longmapsto \gamma(1) \end{aligned}$$

L'application p est bien surjective et bien définie puisque $\lambda \cdot \gamma(1) = \gamma(1)$ pour tout lacet λ dans X . Soit U un ouvert de X , nous avons vu dans la preuve du théorème 5.13 que la pré-image d'un ouvert U dans le revêtement universel \tilde{X} est $U_{[\mu]}$ pour toutes les classes d'homotopies $[\mu] \in \pi_1(X, x_0)$. Ainsi, la pré-image de U dans $\tilde{X}_0 \times F$ peut s'écrire $U \times \pi_1(X, x_0) \times F$ et devient donc $U \times F$ dans le quotient \tilde{X} . Ainsi, $p^{-1}(U) = \coprod_{i=0}^{n-1} U \times \{\tilde{x}_i\}$ et chacun des ensembles de cette réunion disjointe est homéomorphe et ouvert. Ce qui prouve que p est continue et que $p : \tilde{X} \rightarrow X$ est un revêtement de X . □

Pour compléter l'étude de la relation entre les recouvrements à n feuillets d'un espace connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe et les homomorphisme du groupe fondamental de l'espace considéré dans le groupe des permutations de n éléments, il faut considérer dans quels cas deux actions donnent le même revêtement et réciproquement. Nous définissons pour cela une notion d'isomorphisme d'actions.

DÉFINITION 5.24. Soit X un espace topologique connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe, L et L' deux actions de $\pi_1(X, x_0)$ sur le groupe \mathcal{S}_n des permutations de l'ensemble F à n éléments. L et L' sont dites *isomorphes* s'il existe une bijection $h : F \rightarrow F$ telle que $L_\gamma(h(\tilde{x}_0)) = h(L'_\gamma(\tilde{x}_0))$ pour tout lacet γ de X et pour tout point \tilde{x}_0 de F .

Remarquons que deux actions L et L' sont isomorphes si et seulement si elles sont conjuguées dans \mathcal{S}_n , i.e. s'il existe $h \in \mathcal{S}_n$ telle que $L' = h^{-1} \circ L \circ h$.

LEMME 5.25. *Soit X un espace topologique connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe, ainsi que deux actions de groupes L et L' du groupe fondamental de X sur l'ensemble des permutations à n éléments. Alors, L et L' sont des actions isomorphes si et seulement si leurs revêtements associés sont isomorphes. Réciproquement, deux revêtements \tilde{X} et \tilde{X}' sont isomorphes si et seulement si leurs actions associées sont isomorphes.*

DÉMONSTRATION. Pour des raisons de temps, nous ne donnerons pas la preuve de ce lemme ici. Nous renvoyons le lecteur à [1] page 70 pour plus de détails. □

²On reprend la construction du revêtement universel donné dans la preuve du théorème 5.13

Nous pouvons donc résumer les résultats de cette section dans le théorème de classification suivant :

THÉORÈME 5.26 (Classification des revêtements localement connexes par arcs).

Soit (X, x_0) un espace topologique connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. Alors, il y a une bijection explicite entre les classes d'isomorphie de revêtements à n feuillets et les classes d'isomorphie d'homomorphisme (ou actions) de $\pi_1(X, x_0)$ dans \mathcal{S}_n .

Nous avons donc pu classier tous les revêtements d'un espace connexe, localement connexe par arcs et semi-localement connexe par arcs. Des trois hypothèses sur l'espace considéré, seule la dernière peut sembler contraignante. Une étude approfondie de tels espaces est suggérable. Le bon côté de la chose réside dans l'excellente compréhension que l'on a des revêtements de tels espaces. Les résultats de cette section sont extrêmement utiles dans la mesure où les homomorphisme d'un groupe dans un groupe de permutations sont bien connus. De plus, les résultats de la section précédente nous permettent même de comprendre plus en profondeur les revêtements connexes par arcs. Le lien qui a été établi entre les sous-groupes du groupe fondamental et les revêtements connexes par arcs est très puissant et permet de relier la théorie de Galois à la théorie des revêtements.

Transformations de revêtements

Pour conclure ce chapitre, nous parlerons brièvement des transformations de revêtements. Ces transformations forment un groupe et nous permettent de nous rapprocher de l'étude des sous-groupes normaux de groupe fondamental.

DÉFINITION 5.27. Soit $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un revêtement de X , les automorphismes de revêtements

$$\varphi : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{X} \quad \text{avec } p = p \circ \varphi$$

sont appelés des *transformations de revêtements* (*deck transformations en anglais*) et forment un groupe pour la composition que l'on note

$$\text{Deck}(\tilde{X}) \text{ ou } G(\tilde{X})$$

Par unicité des relèvements, une transformation de revêtement est déterminée par l'image d'un seul point. En particulier, la seule transformation de revêtement fixant un point est l'identité.

DÉFINITION 5.28. Un revêtement $p : \tilde{X} \rightarrow X$ est dit *normal* si pour tout point x de X et pour tout couple de points \tilde{x} et \tilde{x}' dans la fibre de x , il existe une transformation de revêtement envoyant \tilde{x} sur \tilde{x}' .

La remarque précédente implique naturellement que la transformation reliant les deux points est unique.

L'appellation "normale" est motivée par la proposition suivante.

PROPOSITION 5.29. Soit $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ un revêtement connexe par arcs d'un espace connexe, localement connexe par arcs. Posons $H = \pi_1(p)(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ et $G = \pi_1(X, x_0)$, alors,

- i) \tilde{X} est un revêtement normal si et seulement si H est normal.
- ii) $\text{Deck}(\tilde{X}) \cong N(H)/H$ où $N(H)$ est le normalisateur de H .

DÉMONSTRATION.

- i) Nous avons vu lors de la classification des revêtements connexes par arcs que changer le point de base \tilde{x}_0 en un autre point \tilde{x}_1 revient à conjuguer H par la classe d'homotopie $[\gamma]$ où le lacet γ se relève dans \tilde{X} en un chemin $\tilde{\gamma}$ de \tilde{x}_0 vers \tilde{x}_1 . Ainsi, pour $H' = \pi_1(p)(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1))$, on a $H' = [\gamma]H[\gamma]$ et donc

$$\begin{aligned} H \text{ est normal} &\iff N(H) = G \\ &\iff [\gamma] \in N(H) \quad \forall [\gamma] \in G \\ &\iff H = H' \quad \forall \tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0) \\ &\iff \tilde{X} \text{ est normal} \end{aligned}$$

La dernière équivalence découle du critère de relèvement d'applications, car si $H = H'$, alors il existe une transformation de revêtement f qui envoie \tilde{x}_0 sur \tilde{x}_1 .

- ii)

$$\begin{aligned} \varphi : N(H) &\longrightarrow \text{Deck}(\tilde{X}) \\ [\gamma] &\longmapsto \tau \end{aligned}$$

où τ est la transformation de revêtement qui envoie \tilde{x}_0 sur \tilde{x}_1 où \tilde{x}_1 est l'extrémité du relèvement de γ dans \tilde{X} d'origine \tilde{x}_0 . Par i), φ est un homomorphisme surjectif et son noyau consiste en tous les lacets se relevant dans \tilde{X} en des lacets, i.e. H . Le théorème d'isomorphie des groupes nous permet de conclure.

□

Ainsi, pour tout revêtement connexe par arcs normal $p : \tilde{X} \rightarrow X$ d'un espace connexe et localement connexe par arcs X , le groupe des transformations de revêtement est isomorphe au quotient $\pi_1(X)/\pi_1(p)(\pi_1(\tilde{X}))$.

Bibliographie

- [1] HATCHER, ALLEN. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge 2002
- [2] GODBILLON, CLAUDE. *Éléments de topologie algébrique*. Hermann, Paris 1971
- [3] JÄNICH, KLAUS. *Topology*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New-York 1984.
- [4] BURLET, OSCAR. *Groupe fondamental*. Cours donné à l'Université de Lausanne, Lausanne 2001
- [5] MACLANE, SAUNDERS. *Categories for the working mathematician*. Graduate Texts in Mathematics, vol. 5. Seconde édition, Springer-Verlag, New-York 1998.
- [6] MASSEY, WILLIAM S. *Algebraic topology : an introduction*. Harcourt & Brace, New-York 1967