

Introduction à la théorie de Morse

Louis Fauchier-Magnan, SMA - EPFL

Prof. Peter Buser - IGAT
Assistant responsable : Olivier Guichard

février 2005

Table des matières

1	Introduction	2
2	Notions préliminaires	3
3	Divers théorèmes	11
3.1	Théorème de la fonction inverse	11
3.2	Existence et unicité d'une solution à une équation différentielle sur une variété	11
3.3	Lemme de Morse	13
4	Théorie de Morse	18
4.1	Idée de la preuve	19
4.2	Rétracte par déformation	19
4.3	Opération de collage	24
4.4	Dernier point critique	26
4.5	Vue générale	26
5	Conclusion	28

Chapitre 1

Introduction

Le but du présent travail est d'étudier la théorie de Morse (Marston Morse, 1892 - 1977), et plus précisément d'expliquer le processus qui permet de voir une variété compacte comme un rétracte par déformation d'un CW-complexe.

Ces différentes notions font l'objet du début de ce travail.

Chapitre 2

Notions préliminaires

Définition 2.0.1. Une **Variété C^∞** est un espace topologique M , tel que :

- tout point de M est contenu dans un ouvert homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^n .

Le couple (U, ψ) formé d'un ouvert U de M et d'un homéomorphisme ψ de U sur un ouvert de \mathbb{R}^n est une **carte** de la variété M .

- Si deux cartes (U_1, ψ_1) et (U_2, ψ_2) vérifient $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ alors l'application :

$$\psi_2 \circ \psi_1^{-1} : \psi_1(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \psi_2(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}^n$$

(dite **fonction de transition**) est un difféomorphisme C^∞ .

On définit également la **dimension de M** $\dim M := n$.

Cette définition est bien posée, car on a le résultat suivant :

$$\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m \iff n = m$$

Définition 2.0.2. Soit C_m^M l'ensemble des courbes C^∞ $c : I \rightarrow M$ définies sur un intervalle ouvert I contenant 0 et telles que $c(0) = m$.

Deux courbes $c_1, c_2 \in C_m^M$ sont **tangentes en m** si :

$$\text{Il existe une carte } (U, \psi) \text{ telle que } m \in U \text{ et } (\psi \circ c_1)'(0) = (\psi \circ c_2)'(0)$$

Cette condition ne dépend pas du choix de la carte, car si (V, ϕ) est une deuxième carte définie au voisinage de m , le théorème de dérivation des fonctions composées donne

$$(\phi \circ c_i)'(0) = d(\phi \circ \psi^{-1})_{\psi(m)} \cdot (\psi \circ c_i)'(0), \quad i = 1, 2$$

On a donc la relation d'équivalence : $c_1 \sim c_2$ si c_1 et c_2 sont tangentes, avec $c_1, c_2 \in C_m^M$ (la vérification est facile)

Finalement, on définit un **vecteur tangent à M en m** comme une classe d'équivalence pour la relation \sim définie ci-dessus.

L'ensemble des vecteurs tangents en m est appelé **espace tangent à M en m** et noté $T_m M$.

Lemme 2.0.1. Soit M une variété C^∞ et $m \in M$

Soit $\Omega_m M = \{f : V \rightarrow \mathbb{R} \mid V \text{ un voisinage de } m\}$

Une application $D : \Omega_m M \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- $D(\lambda f) = \lambda D(f) \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f \in \Omega_m M$
- $D(f + g) = D(f) + D(g) \forall f, g \in \Omega_m M$
- $D(fg) = f(m)D(g) + g(m)D(f) \forall f, g \in \Omega_m M$

est appelée une **dérivation** en $\Omega_m M$.

Soit $Der_m M$ l'ensemble des dérivations en $\Omega_m M$.

On voit qu'en posant :

- $(D + E)(f) := D(f) + E(f)$
- $(\lambda D)(f) := \lambda \cdot D(f) \forall D, E \in Der_m M, \forall f \in \Omega_m M, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$Der_m M$ a une structure naturelle de \mathbb{R} -espace vectoriel

Lemme 2.0.2. Soit $X \in T_m M$, ie $\exists c \in C_m^M$ telle que X est la classe d'équivalence de c .

Soit l'application :

$$D_X : \Omega_m M \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto X \cdot f := (f \circ c)'(0)$$

Alors cette application est bien définie.

Preuve :

Il faut vérifier que si $c_1, c_2 \in C_m^M$ et $c_1 \sim c_2$, alors $(f \circ c_1)'(0) = (f \circ c_2)'(0)$

Soit (U, ψ) une carte de M telle que $m \in M$. Par le théorème de dérivation des fonctions composées, on trouve :

$$\begin{aligned} (f \circ c_1)'(0) &= d(f \circ c_1)_0 = d(f \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ c_1)_0 = \\ &= d(f \circ \psi^{-1})_{(\psi \circ c_1)(0)} \cdot d(\psi \circ c_1)_0 = d(f \circ \psi^{-1})_{\psi(m)} \cdot d(\psi \circ c_2)_0 = \\ d(f \circ \psi^{-1})_{(\psi \circ c_2)(0)} \cdot d(\psi \circ c_2)_0 &= d(f \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ c_2)_0 = d(f \circ c_2)_0 = (f \circ c_2)'(0) \end{aligned}$$

Lemme 2.0.3. Soit l'application :

$$D : T_m M \rightarrow \text{Der}_m M : X \mapsto D_X$$

On vérifie facilement que $D_X \in \text{Der}_m M$, $\forall X \in T_m M$. L'application D est donc bien définie.

Alors D est une bijection. (*sans preuve*)

Remarque 2.0.1. On peut donc voir $T_m M$ comme un \mathbb{R} -espace vectoriel et on peut choisir de travailler avec $\text{Der}_m M$ ou $T_m M$ de façon équivalente.

Définition 2.0.3. Une **Métrique riemannienne C^∞** est la donnée d'applications

$$g_m : T_m M \times T_m M \rightarrow \mathbb{R}, \forall m \in M$$

vérifiant les deux propriétés :

- g_m est une forme bilinéaire, symétrique, définie positive $\forall m \in M$
- g_m varie de manière C^∞ par rapport à m .

Définition 2.0.4. Une **Variété Riemannienne** M est une variété C^∞ M , telle que $\forall m \in M$, il existe une métrique riemannienne g_m .

Définition 2.0.5. Soit X un espace topologique et $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction. On définit le **support de f** par :

$$\text{supp } f := \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}$$

Définition 2.0.6. Etant donné un recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ d'une variété M , une **partition de l'unité subordonnée au recouvrement** est :

Une famille $(p_i)_{i \in I}$ de fonctions lisses, positives, vérifiant :

- $\text{supp } p_i \subset U_i, \forall i \in I$
- au voisinage de chaque point de M , il y a un nombre fini de fonctions p_i non nulles
- $\sum_{i \in I} p_i = 1$

Lemme 2.0.4. Soit M une variété C^∞ compacte et $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement fini de cette variété. Alors on peut lui associer une partition de l'unité. (*sans preuve*)

Lemme 2.0.5. Soit M une variété C^∞ compacte munie d'une partition de l'unité. Alors on peut munir M d'une métrique riemannienne.

Preuve :

Soient $(U_i)_{1 \leq i \leq n}$ un recouvrement fini de M et $(\psi_i)_{1 \leq i \leq n}$ les homomorphismes associés. On note \langle, \rangle le produit scalaire euclidien dans \mathbb{R}^n .

Soient $x \in U_i$. et $X, Y \in T_x M$. On définit

$$g_i(X, Y) = \langle (d\psi_i)_x(X), (d\psi_i)_x(Y) \rangle$$

g_i est un produit scalaire. (*sans preuve*).

Soient $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$ les fonctions correspondantes de la partition de l'unité associée. On définit alors

$$g(X, Y) := \sum_{1 \leq i \leq n} g_i(X, Y) \cdot p_i(x), \quad \forall X, Y \in T_x M$$

qui est une métrique riemannienne.

Lemme 2.0.6. Toute variété C^∞ compacte M peut être vue comme sous ensemble de \mathbb{R}^m pour un certain $m \in \mathbb{N}$.

Preuve :

Soient un recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ de M et $m := \dim M$. Comme M est compacte, il existe un sous-recouvrement fini $(U_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Soient

- $(\psi_i)_{1 \leq i \leq n}$ les homéomorphismes correspondants aux $(U_i)_{1 \leq i \leq n}$
- $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$ les fonctions correspondantes de la partition de l'unité associée.

On définit

$$\psi : M \rightarrow (\mathbb{R}^m)^n \times \mathbb{R}^m \simeq \mathbb{R}^{m(n+1)}$$

$$x \mapsto (p_1(x)\psi_1(x), \dots, p_n(x)\psi_n(x), p_1(x), \dots, p_n(x))$$

qui est bien définie, C^∞ et injective.

Définition 2.0.7. Soit M et N deux variétés C^∞ , D un ouvert de M , $m \in D$ et $f : D \rightarrow N$. f est **différentiable en m** si il existe une carte (U, ψ) de M avec $m \in U \subset D$ et une carte (V, φ) de N avec $f(U) \subset V$ telles que l'application

$$\varphi \circ f \circ \psi^{-1} : \psi(U) \rightarrow \varphi(V)$$

soit différentiable.

Il est important de noter que cela ne dépend pas de (U, ψ) et (V, φ) .

L'application f est **différentiable sur D** si elle est différentiable en m , $\forall m \in D$.

Définition 2.0.8. Soit M et N deux variétés C^∞ , D un ouvert de M , $m \in D$ et $f : D \rightarrow N$ différentiable. On définit l'**application tangente à f en m** , notée df_m par :

- $df_m : T_m M \rightarrow T_{f(m)} N$
- $df_m(A)[u] = A[u \circ f]$, pour $A \in T_m M$ et $u \in \Omega_{f(m)} N$

Lemme 2.0.7. L'application $df_m : T_m M \rightarrow T_{f(m)} N$ est linéaire.

Preuve : On va utiliser ici la deuxième définition de l'espace tangent.

Soit $A, B \in Der_m M$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in \Omega_{f(m)} N$. On a alors :

- $df_m(A + B)[u] := (A + B)[u \circ f] = A[u \circ f] + B[u \circ f] = df_m(A)[u] + df_m(B)[u] = (df_m(A) + df_m(B))[u]$
- $df_m(\lambda A)[u] = (\lambda A)[u \circ f] = \lambda(A)[u \circ f] = \lambda df_m(A)[u]$.

Ceci démontre que :

- $df_m(A + B) = df_m(A) + df_m(B)$
- $df_m(\lambda A) = \lambda df_m(A)$

Définition 2.0.9. On appelle **fibré tangent de M** l'ensemble

$$TM := \bigcup_{m \in M} T_m M$$

On remarque que, par définition, cette union est disjointe.

Soit $m \in M$ et $X \in T_m M$, l'application :

$$\begin{aligned} \pi : TM &\rightarrow M \\ \pi(X) &= m \end{aligned}$$

s'appelle le **pied** de X .

Proposition 2.0.1. Soit M une variété C^∞ compacte. Alors on peut munir TM d'une structure de variété C^∞

Preuve :

1. Tout d'abord, il s'agit de montrer que l'on peut munir TM d'une topologie.

Soit $X \in TM$, et $\pi(X) := p$ son pied. Alors, par définition, $X \in T_pM$. Or M est une variété C^∞ , donc $\exists(U, \psi)$ une carte de M et V un ouvert de \mathbb{R}^n , tels que $p \in U$ et $\psi : U \rightarrow V$ soit un homéomorphisme. Remarquons d'abord que si $W \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert, alors $TW \simeq W \times \mathbb{R}^n$. En effet, $\forall w \in W$, $T_wM \simeq \{w\} \times \mathbb{R}^n$.

Soit $U \subset M$ un ouvert. Alors $TU \subset \mathbb{R}^{2n}$ grâce à l'application suivante

$$\Psi : TU \rightarrow \psi(U) \times \mathbb{R}^n : X \mapsto (\psi(q), d\psi_q(X)), \text{ avec } \pi(X) = q$$

qui sera l'homéomorphisme associé à la carte TU . On définit ainsi une topologie induite sur TM :

$$\Omega \subset TM \text{ ouvert} \Leftrightarrow \Omega \cap TU \text{ ouvert } \forall U \text{ ouvert de carte}$$

Ainsi (TU, Ψ) est une carte de TM , car Ψ est un homéomorphisme et TU est homéomorphe à $\psi(U) \times \mathbb{R}^n$ qui est un ouvert, car ψ est un homéomorphisme.

Supposons maintenant que $X \in TU \cap TW$ avec $(U, \psi), (W, \varphi)$ des cartes de M , $\pi(X) = p \in U \cap W$ et Ψ, Φ les applications correspondantes définies comme ci-dessus. Ainsi $TU \cap TW \neq \emptyset$, on cherche donc à montrer que la fonction de transition

$$\Lambda : \Psi(TU \cap TW) \subset \psi(U) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \Phi(TU \cap TW) \subset \varphi(W) \times \mathbb{R}^n$$

est bien C^∞ .

Soit $(u, v) \in \Psi(TU \cap TW)$, ψ est un homéomorphisme, c'est donc en particulier une bijection. Ainsi, $\exists p \in U \cap W$, tel que $\psi(p) = u$. On sait aussi que $v \in T_u\mathbb{R}^n \cong \{u\} \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$. Si on pose $w_v := d(\psi^{-1})_u(v)$, on a alors que $(u, v) = (\psi(p), d\psi_p(w_v)) = \Psi(w_v)$ avec $w_v \in T_pM \subset TU$. On a donc $\Lambda(u, v) = \Phi(w_v) = (\varphi(p), d\varphi_p(w_v)) = (\varphi(\psi^{-1}(u)), d(\varphi \circ \psi^{-1})_u(v))$ qui est clairement C^∞ , car c'est une composition d'applications C^∞ .

TU possède donc une structure de variété C^∞ .

Définition 2.0.10. Soit $D \subset M$ un ouvert.

On appelle **champ de vecteurs** une application

$$Y : M \rightarrow TM : p \mapsto Y_p, \text{ vérifiant } \pi(Y_p) = p$$

Définition 2.0.11. Soient M une variété C^∞ et $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur M . Un **point critique de f** est un point $p_0 \in M$ tel que $df_{p_0} \equiv 0$.

Définition 2.0.12. On définit la **matrice hessienne de f en p₀** comme :

$$H_f(p_0) := (h_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \text{ avec } h_{ij} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p_0)$$

par rapport au système de coordonnées (x_1, \dots, x_n) .

On remarque que $H_f(p_0)$ est une matrice symétrique.

Définition 2.0.13. Un point critique p_0 de f est **non dégénéré** si

$$\det H_f(p_0) \neq 0$$

Lemme 2.0.8. La propriété d'un point critique p_0 d'être non-dégénéré ne dépend pas du choix du système de coordonnées.

Preuve : Soient

$H_f(p_0)$ la matrice hessienne de f en p_0 selon les coordonnées (x_1, \dots, x_n) et $\mathcal{H}_f(p_0)$ la matrice hessienne de f en p_0 selon les coordonnées (X_1, \dots, X_n) .

Les matrices sont alors reliées par la relation suivante :

$$\boxed{\mathcal{H}_f(p_0) = J_f^t(p_0) \cdot H_f(p_0) \cdot J_f(p_0)}$$

où

$$J_f(p_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial X_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial X_n} \end{pmatrix}$$

est la matrice jacobienne de (x_1, \dots, x_n) vers (X_1, \dots, X_n) .

Il est essentiel ici que p₀ soit un point critique de f

On sait d'après l'analyse vectorielle que $J_f(p_0)$ est inversible (car il s'agit d'un changement de coordonnées). Ainsi :

$$\boxed{\det H_f(p_0) \neq 0 \iff \det \mathcal{H}_f(p_0) \neq 0}$$

Définition 2.0.14. Soit M une variété C^∞ .

$f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est une **fonction de Morse** si tous ses points critiques sont non dégénérés.

Définition 2.0.15. Un espace topologique X est un **CW-complexe** si :

$$X = \bigcup_{n \geq 0} X_n$$

avec :

- X_0 est un espace discret
- Pour chaque $n > 0$, $\exists \{f_\alpha : S_\alpha^{n-1} \rightarrow X_{n-1} \mid \alpha \in J_n\}$ une famille d'applications telles que X_n est l'espace quotient :

$$X_n := X_{n-1} \cup \bigcup_{\alpha \in J_n} D_\alpha^n / \sim$$

où $f_\alpha(z) \sim z \forall z \in S_\alpha^{n-1} \forall \alpha \in J_n$ et où X est doté de la topologie faible :

$$U \subset X \text{ est ouvert} \iff U \cap X_n \text{ est ouvert dans } X_n \forall n.$$

Chapitre 3

Divers théorèmes

3.1 Théorème de la fonction inverse

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n , $a \in U$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application C^k , $k \geq 1$. Si df_a est inversible, alors il existe un voisinage ouvert $V \subset U$ de a tel que $f|_V : V \rightarrow f(V)$ soit un difféomorphisme de classe C^k . (*sans preuve*)

3.2 Existence et unicité d'une solution à une équation différentielle sur une variété

Soit $X : M \rightarrow TM$ un champ de vecteurs, $p_0 \in M$ et (U, ψ) une carte de M telle que $p_0 \in U$

On sait donc que

$$\psi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n \text{ et } d\psi_{p_0} : T_{p_0}M \subset TU \rightarrow \mathbb{R}^n$$

on pose

$$F : V \rightarrow \mathbb{R}^n : x \mapsto (d\psi)_{\psi^{-1}(x)} \cdot X(\psi^{-1}(x))$$

F est donc une application dans \mathbb{R}^n continue, car c'est la composée d'applications continues.

Alors, d'après le théorème d'existence des solutions d'équations différentielles, $\exists \epsilon > 0$ et $\exists ! \varphi : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow V$ vérifiant :

- $\varphi(0) = \psi(p_0)$
- $\varphi'(t) = F(\varphi(t)) \forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$

On pose alors

$$\mu : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M : t \mapsto \psi^{-1}(\varphi(t))$$

$\Rightarrow \mu$ est donc uniquement déterminée. Il reste à montrer qu'elle vérifie les conditions voulues, à savoir :

- $\mu(0) = p_0$
- $\mu'(t) = X(\mu(t)), \forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$

Nous trouvons donc :

- $\mu(0) := \psi^{-1}(\varphi(0)) = \psi^{-1}(\psi(p_0)) = p_0$
- $\mu'(t) = (\psi^{-1} \circ \varphi)'(t) = (d\psi^{-1})_{\varphi(t)} \cdot \varphi'(t)$, or $\varphi'(t) = F(\varphi(t))$, ainsi
- $$\mu'(t) = (d\psi^{-1})_{\varphi(t)} \cdot (d\psi)_{\psi^{-1}(\varphi(t))} \cdot X(\psi^{-1}(\varphi(t))) = \underbrace{d(\psi^{-1} \circ \psi)}_{id_U} \mu(t) \cdot X(\mu(t)) = X(\mu(t))$$

Remarque 3.2.1. On admet que si $x \in U$ ouvert de M , tel que le champ de vecteurs X est continu sur TU , alors l'application qui envoie x sur μ , la courbe solution passant par x , est continue. (une illustration en sera donnée plus bas)

On a donc des solutions "stables".

Lemme 3.2.1. Soit M une variété riemannienne **compacte**.

Soit $x \in M$ et $g_x : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ une métrique riemannienne en x .

Soit $X_x \in T_x M$, alors l'application :

$$\|\cdot\|^2 : M \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto g_x(X_x, X_x) := \|X_x\|^2$$

est continue sur un compact, son image est ainsi compacte et donc bornée. Donc, $\forall x \in M$, X_x est borné.

Lemme 3.2.2. Soit M une variété riemannienne, $x \in M$ et $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable.

On sait que

- $df_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ est une application linéaire.
- $T_x M$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.
- $g_x : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ est un produit scalaire.

Selon l'algèbre linéaire, $\exists ! X_x \in T_x M$ tel que $g_x(X_x, X) = df_x \cdot X$,
 $\forall X \in T_x M$

On le note dorénavant $\text{grad}f(x)$. Alors, si φ est la courbe solution locale du système avec le champ de vecteurs $\text{grad}f$, on sait que :

$$f \circ \varphi : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R} \text{ et}$$

$$(f \circ \varphi)'(t) = (df)_{\varphi(t)} \cdot (\varphi'(t)) = (df)_{\varphi(t)} \cdot (\text{grad}f(\varphi(t))) = g_{\varphi(t)}(\text{grad}f(\varphi(t)), \text{grad}f(\varphi(t)))$$

On remarque que la valeur de $(f \circ \varphi)'(t)$ varie en fonction de t . On re-normalise donc $\text{grad}f$ afin que la variation de la valeur de f sur la courbe solution soit constante.

On pose donc $\nabla f(x) := \frac{\text{grad}f(x)}{g_x(\text{grad}f(x), \text{grad}f(x))}$ qui est bien définie quand $\text{grad}f \neq 0$, car g_x est définie positive $\forall x \in M$.

Alors, si ψ est la courbe solution locale du système avec le champ de vecteurs $\nabla f(x)$, on sait que :

$$(f \circ \psi)'(t) = g_{\psi(t)}(\text{grad}f(\psi(t)), \nabla f(\psi(t))) =$$

$$g_{\psi(t)}(\text{grad}f(\psi(t)), \frac{\text{grad}f(\psi(t))}{g_{\psi(t)}(\text{grad}f(\psi(t)), \text{grad}f(\psi(t))}) = \frac{g_{\psi(t)}(\text{grad}f(\psi(t)), \text{grad}f(\psi(t)))}{g_{\psi(t)}(\text{grad}f(\psi(t)), \text{grad}f(\psi(t)))} = 1$$

On a donc que : $(f \circ \psi)'(t) = 1$. Ainsi, en posant $x_0 := \psi(0) \in M$, on a :

$$\int_0^h (f \circ \psi)'(t) dt = \int_0^h 1 dt$$

et donc

$$f(\psi(h)) = f(x_0) + h$$

avec $h > 0$ suffisamment petit.

3.3 Lemme de Morse

Soit p_0 un point critique non dégénéré d'une fonction $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. On peut alors choisir un système de coordonnées locales (X_1, \dots, X_n) de p_0 telle que la représentation de f par rapport à ce système de coordonnées est de la forme suivante :

$$f = -X_1^2 - X_2^2 - \dots - X_\lambda^2 + X_{\lambda+1}^2 + \dots + X_n^2 + c$$

où $c = f(p_0)$.

On appelle λ **l'index de f en p_0** .

Preuve :

On peut tout d'abord admettre, sans perte de généralités, que $f(p_0) = 0$ et que $p_0 = 0$.

Tout d'abord, si \mathcal{U} n'est pas étoilé de centre 0, on restreint notre étude à un ouvert $U \subset \mathcal{U}$ étoilé de centre 0, de préférence assez grand pour que l'étude soit intéressante, et qui existe car $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ (si \mathcal{U} est étoilé de centre 0, on choisit évidemment $U = \mathcal{U}$)

On peut alors définir la fonction, pour $x \in U$ fixé :

$$h_x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto f(tx)$$

On sait alors que :

$$h'_x(t) = \frac{\partial h_x}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) \cdot \frac{\partial tx_i}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) \cdot x_i$$

$$h''_x(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) \right) \cdot x_i = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(tx) \cdot x_i x_j$$

par le théorème de dérivations des fonctions composées.

On sait donc que : $h_x(0) = 0$ et $h'_x(0) = 0$.

En effectuant une intégration par parties, on a le résultat suivant :

$$f(x) = h_x(1) = \int_0^1 (1-t) h''_x(t) dt$$

On a donc :

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(tx) dt$$

Or, en posant

$$m_{ij}(x) := \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(tx) dt$$

$$M(x) = (m_{ij}(x))_{1 \leq i,j \leq n}$$

qui est une matrice symétrique réelle C^∞ , on arrive au résultat :

$$f(x) = {}^t x \cdot M(x) \cdot x.$$

On notera dorénavant $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles de taille $n \in \mathbb{N}$ et Sym_n l'ensemble des matrices réelles symétriques de taille $n \in \mathbb{N}$.

Il est utile de remarquer qu'on peut identifier $M_n(\mathbb{R})$ avec \mathbb{R}^{n^2} et Sym_n avec $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

On utilise le lemme de géométrie différentielle suivant :

Lemme 3.3.1. Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $x \in \mathbb{R}^n$ tel que df_x est surjective. Alors :

- $\exists V$ voisinage de $f(x)$ dans \mathbb{R}^p .
- $\exists s : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $f \circ s = id_{\mathbb{R}^p}$

On a donc une application :

$$M : U \rightarrow Sym_n : x \mapsto M(x)$$

définie comme précédemment avec U un voisinage ouvert de 0.

Il y a deux cas à traiter :

1) $\exists \lambda \in \{0, \dots, n\}$ tel que $M(0) = \underbrace{diag(-1, \dots, -1, 1, \dots, 1)}_{\lambda \text{ fois}}$

On peut alors définir une application :

$$K : M_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{C^\infty} Sym_n : P \mapsto {}^t A \cdot M(0) \cdot A$$

On montre que dK_I est surjective, en effet, $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$:

$$dK_I(A) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left(K(I + sA) - K(I) \right)$$

$$\text{Or } \frac{1}{s} \left(K(I + sA) - K(I) \right) = sK(A) + M(0) \cdot A + {}^t(M(0) \cdot A)$$

Ainsi $dK_I(A) = M(0) \cdot A + {}^t(M(0) \cdot A)$ qui est clairement surjective, car comme $\det M(0) \neq 0$, il suffit de voir que $\forall B \in Sym_n$,

$$B = \frac{1}{2}B + {}^t\left(\frac{1}{2}B\right) = M(0) \cdot (M(0)^{-1} \cdot \frac{1}{2}B) + {}^t\left(M(0) \cdot (M(0)^{-1} \cdot \frac{1}{2}B)\right)$$

Alors d'après le lemme ci-dessus,

- $\exists V$ voisinage de $M(0)$ et
- $\exists s : V \xrightarrow{C^\infty} M_n(\mathbb{R})$ tels que

$$K \circ s = id_{Sym_n}$$

ce qui veut dire que

$${}^t s(A) \cdot M(0) \cdot s(A) = A, \forall A \in V.$$

On définit alors

$$P := s \circ M : U' \xrightarrow{C^\infty} M_n(\mathbb{R}), \text{ avec } 0 \in U' \subset U \text{ tel que } M(U') \subset V$$

$$\varphi : U' \rightarrow \mathbb{R}^n : x \mapsto P(x) \cdot x$$

On voit que $\varphi(0) = 0$.

En revenant au raisonnement plus haut, on arrive à :

$$f(x) = {}^t\varphi(x) \cdot M(0) \cdot \varphi(x), \forall x \in U'$$

On montre que $d\varphi_0$ est inversible, en effet :

$$d\varphi_0(X) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (\varphi(0 + sX) - \varphi(0))$$

Or $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(sX) = P(sX) \cdot sX$, ainsi :

$$d\varphi_0(X) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} P(sX) \cdot sX = \lim_{s \rightarrow 0} P(sX) \cdot X = P(0) \cdot X$$

Alors $d\varphi_0 = P(0)$ qui est inversible, car $\det P(0) \neq 0$.

Ainsi, selon le théorème de la fonction inverse, il existe un voisinage ouvert $U'' \subset U'$ tel que $\varphi|_{U''}$ soit un difféomorphisme, et donc en particulier un changement de coordonnées locales.

Ainsi, en posant :

$$(X_1, \dots, X_n) := \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n)$$

on aura :

$$f(X_1, \dots, X_n) = -X_1^2 - X_2^2 - \dots - X_\lambda^2 + X_{\lambda+1}^2 + \dots + X_n^2$$

2) Dans le cas où $M(0) \in \text{Sym}_n$ quelconque, le théorème de Sylvester nous dit que $\exists \lambda \in \{0, \dots, n\}$ et $\exists Q \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que

$$M(0) = {}^tQ \cdot \underbrace{\text{diag}(-1, \dots, -1, 1, \dots, 1)}_{\lambda \text{ fois}} \cdot Q$$

On peut alors définir

$$M'(x) := {}^t(Q^{-1}) \cdot M(x) \cdot Q^{-1}, C^\infty$$

On aura alors que $M'(0) = \text{diag}(\underbrace{-1, \dots, -1}_{\lambda \text{ fois}}, 1, \dots, 1)$ et que

$$f(x) = {}^t(Q \cdot x) \cdot M'(x) \cdot (Q \cdot x)$$

Comme la matrice Q est inversible, on peut se ramener au cas 1) et la démonstration est achevée.

Remarque 3.3.1. Une conséquence importante de ce lemme est que tous les points critiques d'une fonction de Morse sont isolés.

En effet, soit a un point critique de f . D'après le lemme de Morse, il existe un voisinage V de a , $\lambda \in \{0, \dots, n\}$ et un système de coordonnées (x_1, \dots, x_n) tels que $f = -x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2 + f(a)$ sur V .

Ainsi, $a = (0, \dots, 0)$ dans ce système de coordonnées. Nous savons d'après l'analyse vectorielle que $\text{grad}f(x) = 0$ est une condition nécessaire pour que x soit un point critique de f .

Or $\text{grad}f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right)_{1 \leq i \leq n} = (-2x_1, \dots, -2x_\lambda, 2x_{\lambda+1}, \dots, 2x_n)$ sur V .

On voit donc clairement que pour $x \in V$,

$$\text{grad}f(x) = 0 \Leftrightarrow x = (0, \dots, 0), \text{ ie } x = a$$

Ainsi, il existe un voisinage ouvert de a sur lequel f admet a comme unique point critique.

Chapitre 4

Théorie de Morse

Théorème de Morse

Toute variété C^∞ compacte munie d'une fonction de Morse est un rétracte par déformation d'un CW-Complexe.

Remarque 4.0.2. Voici l'exemple que nous suivrons durant ce travail : Il s'agit d'un tore, vu verticalement, dans \mathbb{R}^3 (il s'agit donc d'une variété de dimension 2) et la fonction de Morse associée est la fonction de hauteur. Il est clair qu'elle possède quatre points critiques isolés, qu'on appellera désormais A, B, C et D . On admet sans preuve qu'ils sont non-dégénérés.

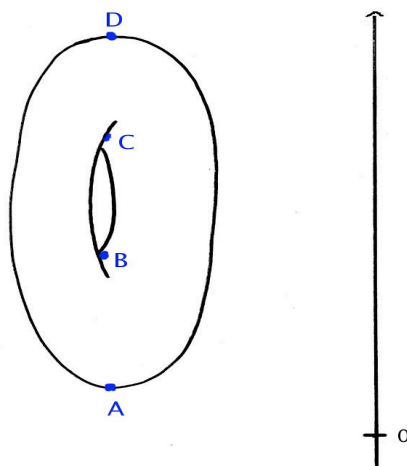


FIG. 4.1 – Le tore avec sa fonction de hauteur

4.1 Idée de la preuve

Le travail que nous allons effectuer peut être divisé en plusieurs étapes. On a tout d'abord besoin des définitions suivantes :

- Soit M une variété C^∞ compacte et $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse.
- Soient $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. On définit $M_a := f^{-1}((-\infty, a])$
- $M_{ab} := f^{-1}([a, b]) = M_b \setminus \text{int}(M_a)$ et $L_a := f^{-1}(\{a\})$

La première partie consiste en étudier M_a et M_b quand M_{ab} ne contient aucun point critique de f . On construira une rétraction par déformation de M_b vers M_a , dont l'idée sera de "tirer" les points de M_{ab} vers M_a le long de courbes dont le vecteur tangent est $-\nabla f$, c'est-à-dire dans le sens où f décroît.

La seconde partie est plus compliquée, on étudie à nouveau M_a et M_b , mais cette fois quand M_{ab} contient un point critique de f (qui sera isolé d'après le lemme de Morse). Comme indiqué dans le lemme 3.2.2, le champ de vecteurs $-\nabla f$ n'est pas défini en un point critique de f . C'est à ce moment qu'apparaîtra la structure de CW-complexe.

4.2 Rétracte par déformation

Supposons que M_{ab} ne contient pas de point critique de f . Alors M_a est un rétracte par déformation de M_b .

Preuve :

Rappel :

$r : M_b \rightarrow M_a$ est une rétraction par déformation si

- r est une application continue surjective
- $r \circ i_{M_a} = \text{id}_{M_a}$ ($i_{M_a} : M_a \hookrightarrow M_b$ est ici l'inclusion.)
- $i_{M_a} \circ r$ est homotope à id_{M_b}

Soit $x \in M_{ab}$, on sait que :

$\exists \epsilon > 0$ et $\exists ! \varphi_x : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M_{ab}$ vérifiant :

- $\varphi_x(0) = x$
- $\varphi'_x(t) = -\nabla f(\varphi_x(t)), \forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$

Or, d'après le Lemme 3.2.2, on sait que $f(\varphi_x(h)) = f(x) - h$ pour $h > 0$ suffisamment petit. Ainsi, φ_x , parcourue dans le sens positif, indique en quelque sorte la décroissance de f .

Deux cas sont alors possibles :

- $\exists \xi \in [0, \epsilon)$ tel que $\varphi_x(\xi) \in L_a$. On définit alors

$$\boxed{\mu_x : [0, 1] \longrightarrow M_{ab} : \mu_x(\tau) := \varphi_x(\xi \cdot \tau)}$$

- $\varphi_x([0, \epsilon)) \subset M_{ab}$, ie $f(\varphi_x(t)) > a$, $\forall t \in [0, \epsilon)$

On étudie alors sa restriction au sous-intervalle $[0, \epsilon)$.

Grâce aux propriétés suivantes :

- φ_x est continue sur $[0, \epsilon)$
- M_{ab} est compact, car fermé dans M
- $\varphi'(t) = \nabla f(\varphi(t))$ est borné $\forall t \in [0, \epsilon)$

On sait que φ_x peut être prolongée par continuité en ϵ . Par unicité de la solution à une équation différentielle, on peut prolonger φ_x en ϵ pour obtenir $\delta > \epsilon$ et une nouvelle courbe $\tilde{\varphi}_x : [0, \delta] \longrightarrow M_{ab}$ vérifiant $\tilde{\varphi}_x|_{[0, \epsilon]} = \varphi_x$.

Ainsi, en procédant de cette manière autant de fois que nécessaire, on obtiendra finalement $\eta > 0$ et une courbe $\tilde{\mu}_x : [0, \eta] \longrightarrow M_b$ telle que $\exists \zeta \in [0, \eta]$ avec $\tilde{\mu}_x(\zeta) \in L_a$. On définit alors

$$\boxed{\mu_x : [0, 1] \longrightarrow M_{ab} : \mu_x(\tau) := \tilde{\mu}_x(\zeta \cdot \tau)}$$

D'après la démarche précédente, on obtient dans les deux cas une courbe $\mu_x : [0, 1] \rightarrow M_{ab}$ continue vérifiant :

- $\mu_x(0) = x$
- $\mu_x(1) \in L_a$

On définit alors $r : M_b \rightarrow M_a$ par

$$r(x) = \begin{cases} \mu_x(1) & \text{si } x \in M_{ab} \\ x & \text{si } x \in M_a \end{cases}$$

- r est clairement surjective. En ce qui concerne la continuité, elle découle de la continuité de l'application qui envoie x vers μ_x , cette dernière étant une conséquence du théorème sur les équations différentielles. Une illustration de cette assertion est donnée dans la prochaine figure.
- $r \circ i_{M_a} = id_{M_a}$ par définition de r .
- On définit l'homotopie de id_{M_b} vers $i_{M_a} \circ r$:

$$H : M_b \times [0, 1] \rightarrow M_a$$

$$H(x, t) = \begin{cases} \mu_x(t) & \text{si } x \in M_{ab} \\ x & \text{si } x \in M_a \end{cases}$$

qui vérifie $H(-, t)|_{M_a} = id_{M_a}, \forall t \in [0, 1]$, ie qui laisse M_a fixe.

On voit ainsi que l'application r est une rétraction par déformation de M_b vers M_a . Ainsi, topologiquement parlant, M_b et M_a sont essentiellement le même objet.

On voit sur la figure 4.3 une illustration de la continuité de μ_x en fonction de x , ie pour x et y suffisamment "proches", les courbes μ_x et μ_y le sont aussi.

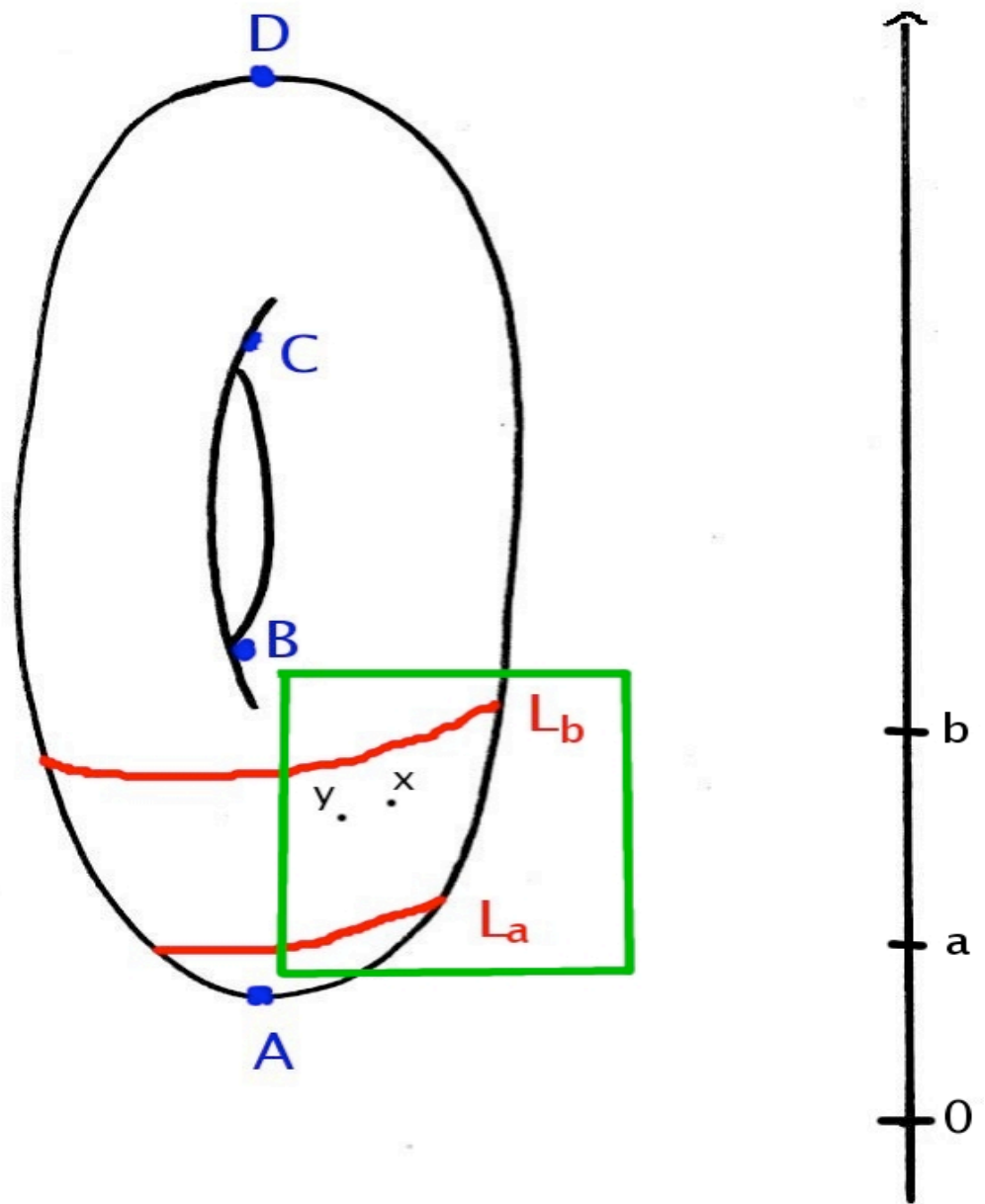


FIG. 4.2 – vue générale

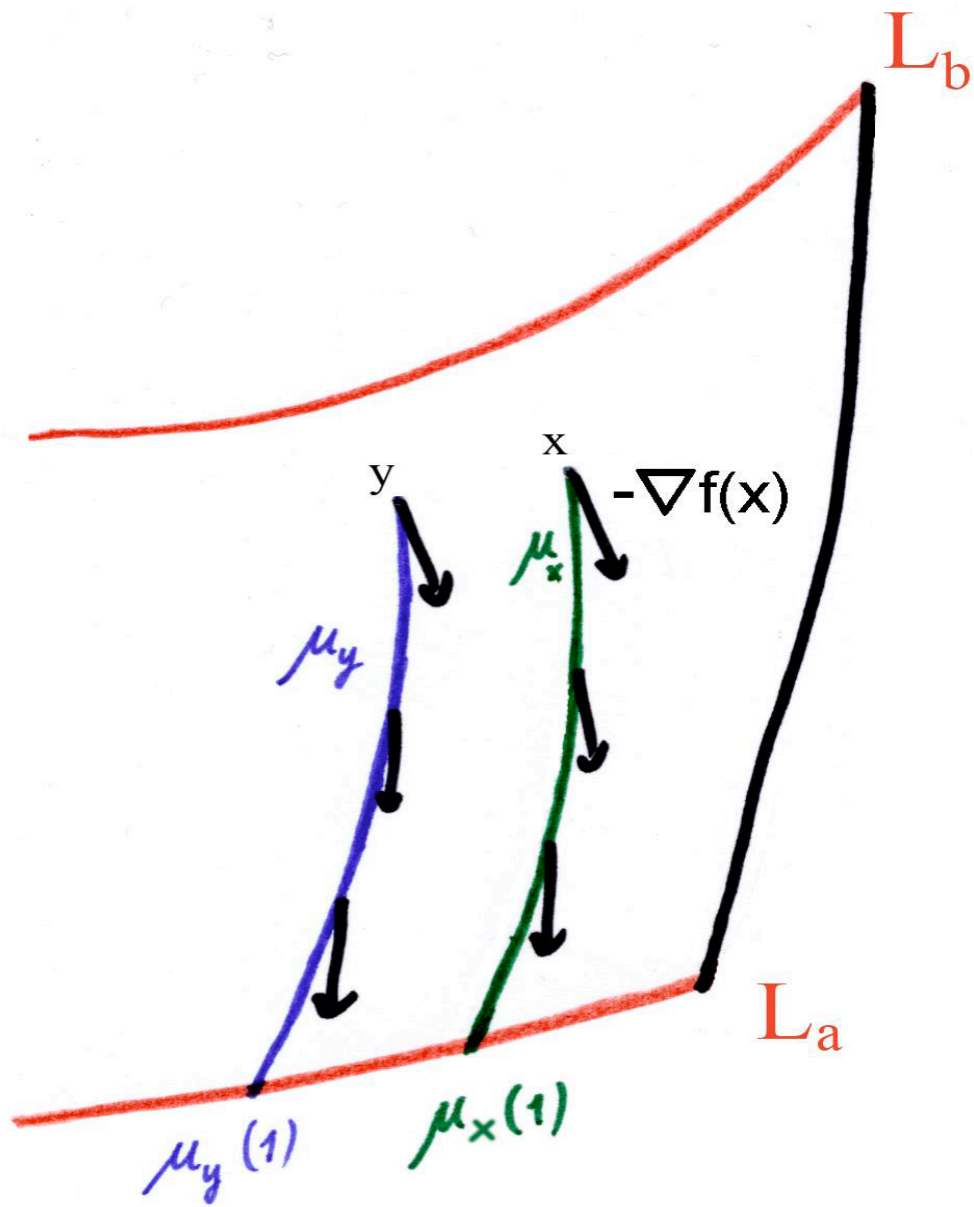


FIG. 4.3 – détail

4.3 Opération de collage

Supposons que M_{ab} contienne un unique point critique de f , que l'on nomme x_0 . Soit λ l'indice de f en x_0 .

Alors il existe une application $g : D^\lambda \rightarrow M_{ab}$ telle que M_b est un rétracte par déformation de

$$M_a \cup D^\lambda / \sim := M_a \cup_g D^\lambda$$

où

$$g(z) \sim z, \forall z \in S^\lambda$$

On reconnaît ici la structure sous-jacente de CW-Complexe. Dans le cas présent, nous ne donnerons pas de preuve. Nous nous contenterons d'expliquer la démarche dans l'exemple de l'illustration précédente.

Ici, nous prenons le point critique B situé en bas du "trou". Nous avons ici $\lambda = 1$ et posons $p := f(B)$.

La démarche est la suivante : On choisit $\epsilon > 0$ suffisamment petit. On sait alors que $M_{p-\epsilon}$ est un rétracte par déformation de M_a et ressemble visuellement à un bol.

Ensuite, en fixant une "bande" Δ à $M_{p-\epsilon}$, $B \in \Delta \subset M_{ab}$, on obtient un rétracte par déformation de $M_{p+\epsilon}$ et visuellement, le résultat ressemble à un panier avec une poignée. (La rétraction suit les mêmes courbes que la rétraction du point précédent, la différence est qu'on bloque ici les points arrivant sur Δ).

Cependant, $\Delta \simeq D^1$, et l'application de collage g est clairement définie. Ainsi, comme M_b est un rétracte par déformation de $M_{p+\epsilon}$, on obtient que M_b est un rétracte par déformation de $M_a \cup_g D^1$

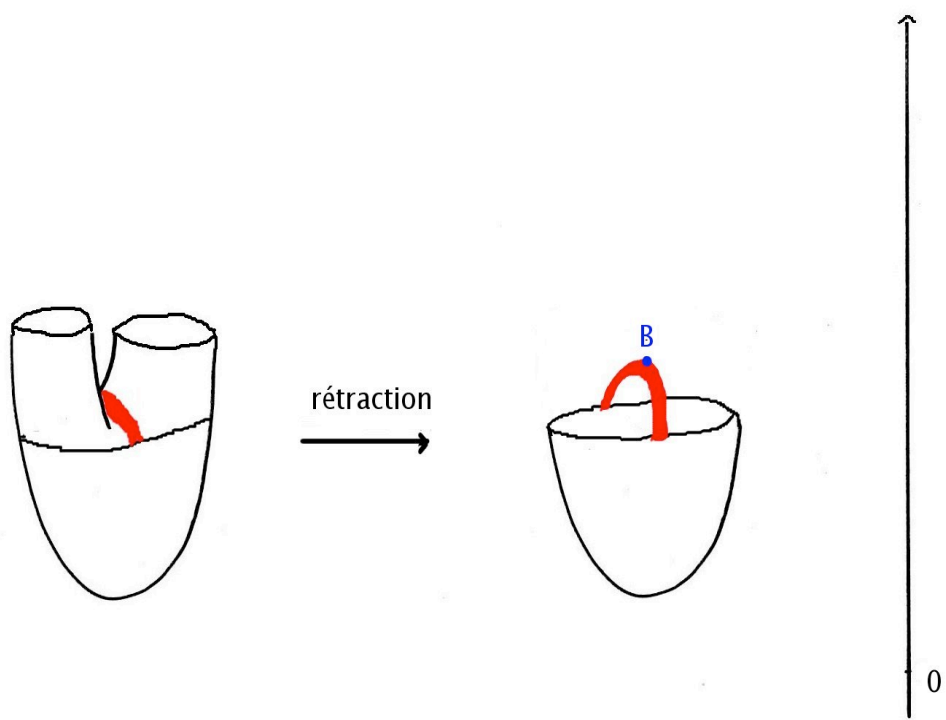


FIG. 4.4 – M_b se rétracte sur $M_a \cup_g D^1$

4.4 Dernier point critique

Lorsqu'on arrive au dernier point critique D , il s'agit dans notre cas d'un maximum. On sait donc que son indice vaut 2. On va donc coller, de façon assez intuitive, D^2 à $M_{f(D)-\epsilon}$ par son bord, c'est-à-dire par S^1 . Visuellement, on va poser un "chapeau" sur $M_{f(D)-\epsilon}$.

4.5 Vue générale

La démarche est, dans l'exemple, visuellement parlante, cependant le fonctionnement peut être vu de façon plus générale :

On fixe, autour du point critique x qui est isolé, car il s'agit d'une fonction de Morse, un système de coordonnées donné par le lemme de Morse. On fixe ensuite un voisinage V de x (la bande dans l'exemple) et on rétracte (comme dans la première partie de la preuve), de M_b sur $M_{f(x)-\epsilon} \cup_g D^\lambda$ pour une certaine fonction $g : D^\lambda \rightarrow M_b$ avec λ l'indice de f en x . Finalement, on observe que $V \simeq S^\lambda$ et le tour est joué.

Le point essentiel de cette étape est de bien appliquer le lemme de Morse, car l'indice de f en x détermine le système de coordonnées en x et par conséquent détermine la dimension de la cellule du CW-complexe.

On note également au passage que le nombre de cellule de dimension λ du CW-complexe est égal au nombre de point critique d'indice λ .

Voici une illustration de la démarche :

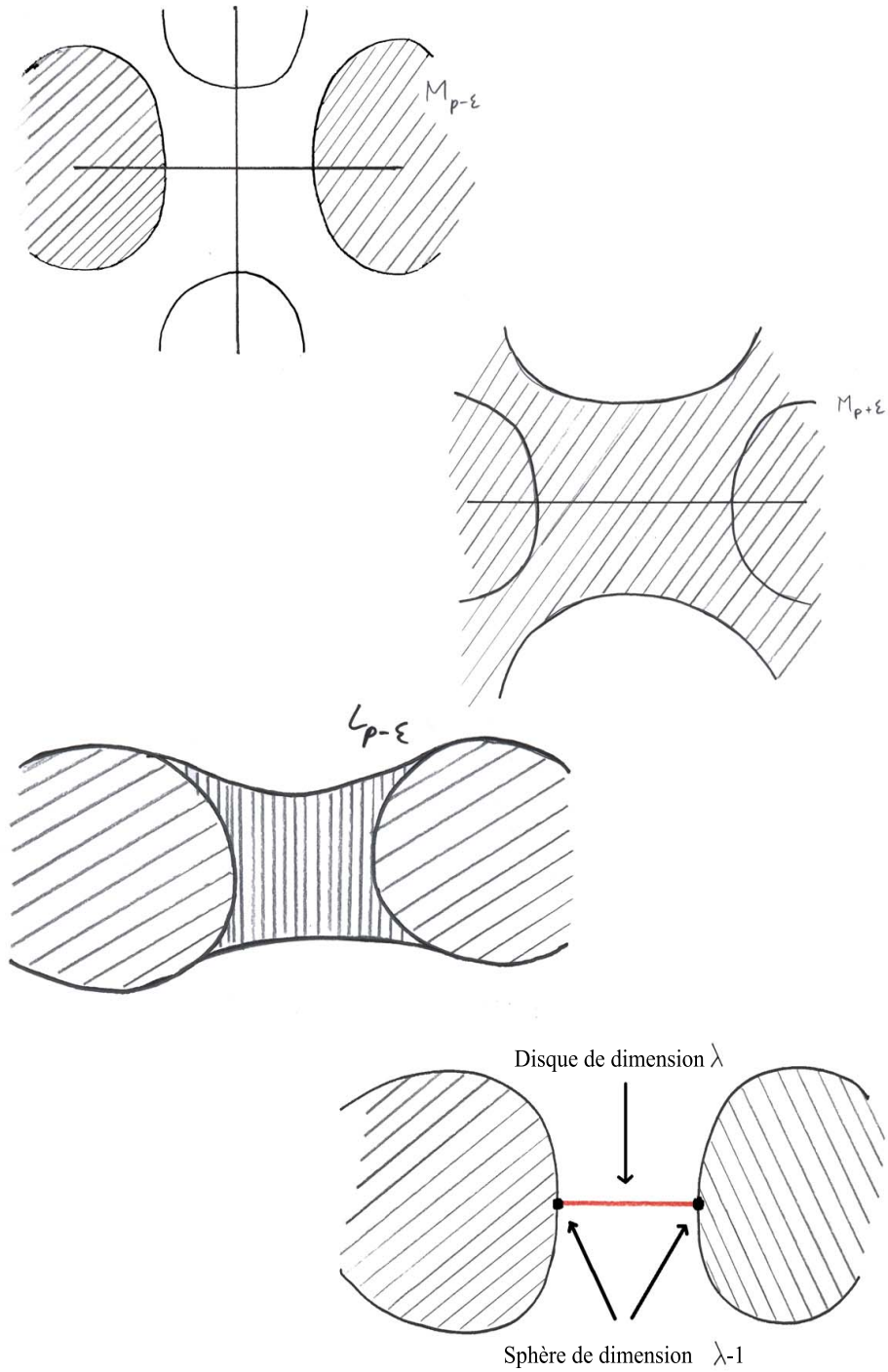


FIG. 4.5 – Lignes de niveau de f au voisinage du point critique

Chapitre 5

Conclusion

Les notions de géométrie utilisées dans ce travail (variété, carte, etc.) m'étaient complètement inconnues, mais la théorie de Morse m'a permis de les découvrir en pouvant les ramener à des objets connus, comme par exemple des CW-complexes, des rétractions, bref à de la topologie algébrique élémentaire, que je connais un peu.

Ce travail comporte cependant quelques lacunes comme par exemple :

- l'existence de fonctions de Morse
- la preuve du lemme 2.0.3 qui exhibe une bijection entre T_mM et Der_mM

Je tiens à remercier Olivier Guichard de l'IGAT pour son soutien et son aide.

Bibliographie

- [MAT] Yukio Matsumoto, *An Introduction to Morse Theory*, American Mathematical Society, 2000
- [MIL] John Milnor, *Morse Theory*, Princeton University Press, 1968
- [LAF] Jacques Lafontaine, *Introduction aux variétés différentiables*, Presses Universitaires de Grenoble, 1996
- [DER] Antoine Derighetti, *Cours d'Analyse IV*, EPFL, 2004