Identification du dual topologique de $C[a,b]$

Louis Fauchier-Magnan, SMA - EPFL
Prof. Antoine Derighetti - IACS
juin 2005

Table des matières

Le dual topologique des fonctions continues

1. Notions preliminaires

Définition 1.1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. On pose

$$C[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : \text{f est continue sur } [a,b]\}.$$

Remarque 1.2. On munit $C[a,b]$ d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel en définissant : $\forall f, g \in C[a,b]$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

- $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$
- $(\lambda f)(x) := \lambda f(x), \;\; \forall x \in \mathbb{R}$

On munit $C[a,b]$ d'une structure d'espace vectoriel normé grâce à l'application :

$$\|\cdot\| : C[a,b] \longrightarrow [0,\infty)$$
$$\|f\| := \max_{x\in[a,b]} \left\{|f(x)|\right\}$$

Définition 1.3. On définit :

- le dual algébrique de $C[a,b]$ comme l'ensemble des formes linéaires sur $C[a,b]$, noté $C[a,b]^*$.

- le dual topologique de $C[a,b]$ comme l'ensemble des formes linéaires continues sur $C[a,b]$, noté $C[a,b]'$.

Remarque 1.4. $C[a,b]' \subset C[a,b]^*$

Remarque 1.5. L'analyse fonctionnelle nous assure que la propriété de continuité peut-être remplacée par le fait d'être borné, mais nous reprendrons ce point plus en détail.

Définition 1.6. Soit $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$.
f est dite monotone croissante si : $\forall x, y \in [a,b], x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
f est dite monotone décroissante si : $\forall x, y \in [a,b], x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

Définition 1.7. Soit un intervalle compact $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Un ensemble de points $\{x_0, \ldots, x_n\} \subset [a,b]$ vérifiant :

$$x_0 = a, x_n = b, x_i < x_{i+1} \; \forall \; 0 \leq i \leq n-1$$

est appelé une subdivision (d'ordre n) de $[a,b]$

Définition 1.8. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$ et $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$.
On dit que f est à variation bornée sur $[a,b]$ si $\exists K > 0$ tel que pour toute

subdivision $\{x_0, \ldots, x_n\}$ d'ordre n de $[a, b]$

$$\sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})| \ \leq K$$

Définition 1.9. L'ensemble des fonctions à variation bornée sur $[a, b]$ est noté $BV[a, b]$

Proposition 1.1. $BV[a, b]$ est un $\mathbb{R}$-sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{[a,b]}$

Preuve :
Soient $f, g \in BV[a, b]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\{x_0, \ldots, x_n\}$ une subdivision d'ordre n de $[a, b]$.
Alors

$$\sum_{j=1}^{n} |(\lambda f + \mu g)(x_i) - (\lambda f + \mu g)(x_{i-1})| \ \leq$$

$$|\lambda| \cdot \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \ |\mu| \cdot \sum_{i=1}^{n} |g(x_i) - g(x_{i-1})| \ < \infty$$

car $f, g \in BV[a, b]$.

Proposition 1.2. Toute fonction $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ monotone croissante ou décroissante est à variation bornée.

Preuve : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\{x_0, \ldots, x_n\}$ une subdivision d'ordre n de $[a, b]$.
Supposons f croissante. Alors :

$$\sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})| \ = \sum_{j=1}^{n} f(x_j) - f(x_{j-1}) = f(x_n) - f(x_0) = f(b) - f(a)$$

Supposons f décroissante. Alors :

$$\sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})| \ = \sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1}) - f(x_j) = f(x_0) - f(x_n) = f(a) - f(b)$$

Définition 1.10. Soit $f \in BV[a, b]$.
On appelle variation totale de f sur $[a, b]$ le nombre :

$$V_a^b(f) := \sup \left\{ \sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})| : n \in \mathbb{N}, \{x_0, \ldots, x_n\} \text{ subdivision de } [a, b] \right\}$$

Proposition 1.3. Soit $f \in BV[a, b]$ et $a \leq c < d \leq b$.
Alors $f_{|[c,d]} \in BV[c, d]$.

Preuve :
Soit $K > 0$ tel que $f \in BV[a, b]$.
Soit $\{x_0, \ldots, x_n\}$ une subdivision de $[c, d]$.
Ainsi $\{a, x_0, \ldots, x_n, b\}$ est une subdivision de $[a, b]$ et donc :

$$|f(c) - f(a)| + \sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})| + |f(b) - f(d)| \leq K$$

et donc

$$\sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})| \ \leq \ K$$

REMARQUE 1.11. Nous énonçons ci-dessous quelques résultats utilisés dans certaines démonstrations au chapitre suivant :

PROPOSITION 1.4. Soit $f \in \mathbb{R}^{[a,c]}$

- Si $f \in BV[a,c]$ et $a < b < c$, alors : $V_a^c(f) = V_a^b(f) + V_b^c(f)$

- Si $f_{|[a,b]} \in BV[a,b]$ et $f_{|[b,c]} \in BV[b,c]$, alors $f \in BV[a,c]$

PROPOSITION 1.5. Soit $f \in BV[a,b]$. On définit :

$$\pi(a) = 0 \text{ et } \pi(x) := V_a^x(f), \forall x \in (a.b]$$

Alors :

- $\pi \geq 0$ sur $[a,b]$
- π est croissante sur $[a,b]$
- Soit $c \in [a,b]$, alors f est continue en $c \Leftrightarrow \pi$ est continue en c

THÉORÈME 1.12. **Jordan**
Toute fonction continue à variation bornée peut s'écrire comme différence de deux fonctions continues monotones croissantes.

THÉORÈME 1.13. **Premier Théorème d'Helly**
Soit une collection quelconque de fonctions $F \subset \mathbb{R}^{[a,b]}$.
Si $\exists K > 0$ tel que

$$|f| \ \leq \ K \text{ et } V_a^b(f) \ \leq \ K \ , \ \forall f \in F$$

alors il existe une suite $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset F$ qui converge en chaque point de $[a,b]$ vers une fonction $\varphi \in BV[a,b]$.

DÉFINITION 1.14. Soit $f \in \mathbb{R}^{[0,1]}$. On appelle polynome de Bernstein de degré n de la fonction f la fonction :

$$B_n(x) := \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) C_n^i x^i (1-x)^{n-i}, \quad \forall x \in [0,1]$$

où

$$C_n^i := \frac{n!}{(n-i)! \ i!}, \quad i = 0, \ldots, n$$

THÉORÈME 1.15. **Bernstein**
Si $f \in C[0,1]$, alors $\|B_n - f\| \longrightarrow 0$ quand $n \to \infty$

2. L'integrale de Stieltjes

Définition 2.1. Soient $f, g \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ Soit $\{x_0, \dots, x_n\}$ une subdivision d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de $[a,b]$. On choisit un point $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}], \forall\ 0 \leq k \leq n-1$. On forme ensuite la somme

$$\omega := \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\big(g(x_{k+1}) - g(x_k)\big)$$

et on définit le pas $\lambda := \max\{x_{k+1} - x_k : 0 \leq k \leq n-1\}$.

Si la somme ω tend vers une limite finie Ω lorsque $\lambda \to 0$ indépendamment du choix de la subdivision et des ξ_k, on appelle Ω l'intégrale de Stieltjes de f par rapport à g

Plus techniquement, Ω est l'intégrale de Stieltjes de f par rapport à g si : $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que pour toute subdivision vérifiant $\lambda < \delta$, $\mid \omega - \Omega \mid < \epsilon$ pour tout choix des points ξ_k. On la note $\int_a^b f(x)dg(x)$

Proposition 2.1. Quelques propriétés fondamentales :

- $\int_a^b (f+g)(x)dh(x) = \int_a^b f(x)dh(x) + \int_a^b g(x)dh(x)$
- $\int_a^b f(x)d(g+h)(x) = \int_a^b f(x)dg(x) + \int_a^b f(x)dh(x)$
- $\int_a^b \alpha f(x)d(\beta g)(x) = \alpha\beta \int_a^b f(x)dg(x)$
- $\int_a^b f(x)d(g+C)(x) = \int_a^b f(x)dg(x)\ \forall \alpha, \beta, C \in \mathbb{R}$
- $\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^c f(x)dg(x) + \int_c^b f(x)dg(x)$,
  $\forall a < c < b, \forall f, g, h \in \mathbb{R}^{[a,b]}$

(On suppose ici que toutes ces intégrales existent.)

De plus, l'existence d'une des deux intégrales $\int_a^b f(x)dg(x)$ et $\int_a^b g(x)df(x)$ implique celle de l'autre et dans ce cas, on a *la formule d'intégration par parties* :

$$\int_a^b f(x)dg(x) + \int_a^b g(x)df(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

Théorème 2.2. L'intégrale de Stieltjes $\int_a^b f(x)dg(x)$ existe si $f \in C[a,b]$ et $g \in BV[a,b]$.

Preuve :
Supposons tout d'abord que g est monotone croissante sur $[a,b]$. Soit $\{x_0, \dots, x_n\}$ une subdivision d'ordre n de $[a,b]$.
$\forall\ 0 \leq k \leq n-1$, on définit

$$m_k := \min\big\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\big\}$$

et

$$M_k := \max\big\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\big\}$$

Ces nombres existent, car $f \in C[a,b]$. on forme les sommes inférieures de f et (respectivement) supérieures de f associées à cette subdivision :

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} m_k\big(g(x_{k+1}) - g(x_k)\big) \text{ et } S = \sum_{k=0}^{n-1} M_k\big(g(x_{k+1}) - g(x_k)\big)$$

Il est clair que $s \leq \omega \leq S$ pour tout choix des points $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$. De plus, on constate que si on rajoute des points à la subdivision, s ne décroît pas et S ne croît pas. Par conséquent, si on choisit deux subdivisions de $[a,b]$, et on note s_1, s_2 les sommes inférieures et respectivement S_1, S_2 les sommes supérieures associées à ces subdivisions, on peut obtenir une troisième subdivision de $[a,b]$ en combinant les deux premières. On note comme précédemment s_3 et S_3 les sommes obtenues. Ainsi, par la remarque ci-dessus, on observe que $s_1 \leq s_3 \leq S_3 \leq S_2$, et donc que $s_1 \leq S_2$. On observe que l'ensemble des sommes inférieures de f est borné, car $S_2 < \infty$. On peut alors considérer $I := \sup\{s\}$. Ainsi, pour toute subdivision de $[a,b]$, on aura $s \leq I \leq S$ et que $|\omega - I| \leq S - s$.

f est continue sur $[a,b]$ qui est compact, elle est donc uniformément continue, ie $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $\forall x, x' \in [a,b]$, $|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')|$. Ainsi, on constate que $M_k - m_k < \epsilon$, $0 \leq k \leq n-1$ pour $\lambda < \delta$ (rappel : λ est le pas de la subdivision).

Ainsi, $S - s < \epsilon \cdot (g(b) - g(a))$. On arrive par conséquent au résultat suivant :

$$\lambda < \delta \Rightarrow \mid \omega - I \mid < \epsilon\ (g(b) - g(a))$$

ce qui signifie

$$\lim_{\lambda \to 0} \omega = I$$

On voit donc que

$$I = \int_a^b f(x)dg(x)$$

En ce qui concerne le cas plus général où g est à variation bornée, selon le théorème 1.1.1, on peut écrire $g = g_1 - g_2$ où $g_1, g_2 \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ sont monotones croissantes sur $[a,b]$. On aura alors

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)dg_1(x) - \int_a^b f(x)dg_2(x)$$

THÉORÈME 2.3. Si $f \in C[a,b]$ et g est dérivable sur $[a,b]$ avec une dérivée Riemann-intégrable sur $[a,b]$, alors :

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

où le membre de droite est l'intégrale classique de Riemann.

Preuve :

Il découle des hypothèses que g' est bornée sur $[a,b]$ et donc, selon le théorème des accroissements finis, $g \in BV[a,b]$. Ainsi on sait que l'intégrale de gauche existe. De plus, on admet un résultat de théorie de l'intégration qui nous dit que, sous les hypothèses ci-dessus, la fonction f(x)g'(x) est continue presque partout, et donc qu'elle est intégrable. Les deux membres de l'égalité existent donc, il reste à voir qu'ils sont égaux. On suppose, comme dans le théorème précédent, que g est monotone croissante sur $[a,b]$. Considérons une subdivision d'ordre n $\{x_0,\ldots,x_n\}$ de $[a,b]$. On applique à chaque sous-intervalle $[x_k,x_{k+1}]$ le théorème des accroissements finis qui nous dit que

$\forall\, 0\leq k\leq n{-}1,\ \exists \nu_k\in(x_k,x_{k+1})$ tel que $g(x_{k+1})-g(x_k)=g'(\nu_k)\big(x_{k+1}-x_k\big)$

En formant la somme ω donnée par la construction de l'intégrale de Stieltjes, on peut choisir $\xi_k=\nu_k$, $\forall\, 0\leq k\leq n-1$, car la convergence de l'intégrale, par définition, ne dépend pas du choix des ξ_k. On arrive donc au résultat :

$$\omega=\sum_{i=0}^{n-1} f(\nu_k)g'(\nu_k)\big(x_{k+1}-x_k\big)$$

C'est une somme de Riemman pour la fonction f(x)g'(x). En redéfinissant la subdivision et en prenant la limite, on obtient que

$$\int_a^b f(x)dg(x)=\lim_{\lambda\to 0}\omega=\int_a^b f(x)g'(x)dx$$

Le résultat pour $g\in BV[a,b]$ se déduit comme dans la fin de la preuve du théorème précédent.

THÉORÈME 2.4. **Second Théorème d'Helly** *(sans preuve)*

Soient $f\in C[a,b]$ et $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}^{[a,b]}$ convergent point par point vers une fonction $g\in\mathbb{R}^{[a,b]}$. Si $\exists K>0$ tel que

$$V_a^b(g_n)\ <\ K,\ \forall n\in\mathbb{N}$$

alors

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)dg_n(x)=\int_a^b f(x)dg(x)$$

THÉORÈME 2.5. Soient $f,g\in\mathbb{R}^{[a,b]}$.
Soient $a<c_1<c_2<\cdots<c_m<b$, alors si g est constante sur tous les sous-intervalles $(a,c_1),(c_1,c_2),\ldots,(c_m,b)$, on a :

$$\int_a^b f(x)dg(x)=f(a)(g(a+0)-g(a))+$$
$$\sum_{i=1}^{m} f(c_i)(g(c_i+0)-g(c_i-0))+f(b)(g(b)-g(b-0))$$

où

$$g(x+0):=\lim_{\mu\to 0} g(x+\mu),\ \mu>0$$
$$g(x-0):=\lim_{\mu\to 0} g(x+\mu),\ \mu<0$$

Preuve :

Il est facile de voir que

$$V_a^b(g)=\ |g(a+0)-g(a)|+\sum_{i=1}^{n}\Big\{\,|g(c_i)-g(c_i-0)|+|g(c_i+0)-g(c_i)|\,\Big\}+|g(b)-g(b-0)|$$

On constate donc que $g \in BV[a,b]$, et par conséquent que g est à variation bornée sur tout sous-intervalle de $[a,b]$. Ainsi :

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \sum_{i=0}^{m} \int_{c_i}^{c_{i+1}} f(x)dg(x) \tag{1}$$

où nous avons posé $c_0 := a$ et $c_{m+1} = b$. Etudions à présent $\int_{c_i}^{c_{i+1}} f(x)dg(x)$. En subdivisant l'intervalle $[c_i, c_{i+1}]$, et en formant la somme ω pour cet intervalle, on obtient :

$$\omega = f(\xi_0)(g(c_i+0) - g(c_i)) \ + \ f(\xi_{n-1})(g(c_{i+1}) - g(c_{i+1}-0))$$

car les autres termes se compensent. Par conséquent, en passant à la limite, on obtient

$$\int_{c_i}^{c_{i+1}} f(x)dg(x) = f(c_i)(g(c_i+0) - g(c_i)) \ + \ f(c_{i+1})(g(c_{i+1}) - g(c_{i+1}-0))$$

Le résultat suit immédiatement en remplaçant terme à terme dans l'équation (1.1)

Théorème 2.6. Si $f \in C[a,b]$ et $g \in BV[a,b]$, alors

$$\left| \int_a^b f(x)dg(x) \right| \ \leq \ \|f\| \cdot V_a^b(g)$$

Preuve :

Soit un $n \in \mathbb{N}$ et une subdivision quelconque $\{x_0, \dots, x_n\}$ de $[a,b]$ d'ordre n. On choisit les $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ de manière arbitraire. Soit ω la somme dans la construction de l'intégrale de Stieltjes associée à cette subdivision et à ces ξ_k. On a alors

$$|\omega| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_k)(g(x_{k+1}) - g(x_k)) \right| \leq \|f\| \cdot \sum_{i=0}^{n-1} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| \leq \|f\| \cdot V_a^b(g)$$

Le résultat suit par passage à la limite.

Lemme 2.1. Soit $g \in BV[a,b]$ et $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C[a,b]$ qui converge uniformément vers f, ie $\|f_n - f\| \longrightarrow 0$. Alors

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)dg(x) = \int_a^b f(x)dg(x)$$

Preuve :

Notons tout d'abord que $f \in C[a,b]$ à cause de la convergence uniforme. On aura alors

$$\left| \int_a^b f_n(x)dg(x) - \int_a^b f(x)dg(x) \right| \leq \|f_n - f\| \cdot V_a^b(g)$$

et on sait que

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\| = 0$$

par la convergence uniforme.

Remarque 2.7. Ce lemme peut être reformulé de la manière suivante : Si on fixe $g \in BV[a,b]$, alors l'application

$$S_g : C[a,b] \longrightarrow \mathbb{R} : f \mapsto \int_a^b f(x)dg(x)$$

est une forme linéaire continue sur $(C[a,b], \|\cdot\|)$, ie $S_g \in C[a,b]'$ et de plus, on peut noter que S_g est Lipschitz de constante $V_a^b g$.

3. Le Théorème de Riesz

Comme expliqué au début du chapitre, nous nous intéressons à identifier $C[a,b]'$, c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires continues sur $C[a,b]$.

Le théorème suivant, classique en analyse fonctionnelle, nous sera très utile :

Une forme linéaire Φ est continue sur un domaine, si et seulement si elle est bornée sur ce domaine.

Nous donnons ici à "borné" la signification suivante :

$$\exists K > 0 \text{ tel que } |\Phi(f)| \ \leq \ K \cdot \|f\|, \ \forall f \in C[a,b]$$

Par conséquent, lorsque nous étudierons une forme linéaire sur $C[a,b]$, sa bornitude sera équivalente à sa continuité.

Le point capital de ce chapitre est le théorème de Frederic Riesz (1880-1956) qui dit la chose suivante :

Soit $\Phi \in C[a,b]'$. Alors $\exists g \in BV[a,b]$ telle que

$$\Phi(f) = \int_a^b f(x)\ dg(x), \ \forall f \in C[a,b]$$

Preuve :

Tout d'abord, on remarque qu'on peut restreindre l'étude à l'intervalle [0,1] sans perte de généralité. En utilisant les notations de Bernstein, on admet le résultat élémentaire de combinatoire

$$\sum_{i=1}^{n} C_n^i x^i (1-x)^{n-i} = 1$$

Ainsi, en posant $\epsilon_i = \pm 1$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, alors

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i C_n^i x^i (1-x)^{n-i} \right| \ \leq \ 1 \tag{2}$$

On sait, par continuité de Φ, que $\exists K > 0$ tel que

$$|\Phi(f)| \ \leq \ K \cdot \|f\| \tag{3}$$

De ces deux dernières équations, on arrive au résultat :

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \Phi(C_n^i x^i (1-x)^{n-i}) \right| \ \leq \ K \tag{4}$$

On définit par morceaux une fonction g_n de la façon suivante :

- $g_n(0) = 0$
- $g_n(x) = \Phi(C_n^0 x^0 (1-x)^{n-0})$, $x \in (0, \frac{1}{n})$
- $g_n(x) = \Phi(C_n^0 x^0 (1-x)^{n-0}) + \Phi(C_n^1 x^1 (1-x)^{n-1})$, $x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n})$
  ...
- $g_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \Phi(C_n^k x^i (1-x)^{n-i})$, $x \in [\frac{n-1}{n}, 1)$
- $g_n(1) = \sum_{i=0}^{n} \Phi(C_n^k x^i (1-x)^{n-i})$

Par l'équation (1.3), on sait que les fonctions g_n et leurs variations totales sont bornées par un seul nombre. Elles sont donc de variation bornée. Par le premier théorème de Helly, on sait qu'il existe une sous-suite $\{g_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une fonction $g \in BV[0,1]$.

Soit $f \in C[0,1]$, on sait par le théorème (2.5) que

$$\int_0^1 f(x)\ dg_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f\Big(\frac{i}{n}\Big)\Phi\big(C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\big)$$

et en posant

$$B_n(x) := \sum_{i=0}^{n} f\Big(\frac{i}{n}\Big) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

on obtient

$$\int_0^1 f(x) dg_n(x) = \Phi\big(B_n(x)\big)$$

Par le théorème de Bernstein,

$$\|B_n - f\| \longrightarrow 0$$

Par linéarité, on sait que

$$|\Phi\big(B_n\big) - \Phi\big(f\big)| \ = \ |\Phi\big(B_n - f\big)| \ \leq K \cdot \|B_n - f\|$$

et par conséquent :

$$\Phi\big(B_n\big) \longrightarrow \Phi\big(f\big) \text{ quand } n \to \infty$$

En reformulant ce résultat, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)\ dg_n(x) \ = \ \Phi\big(f\big)$$

Cependant, par le deuxième théorème de Helly, on sait que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)\ dg_n(x) \ = \int_0^1 f(x)\ dg(x)$$

Par conséquent

$$\Phi\big(f\big) \ = \ \int_0^1 f(x)\ dg(x)$$

4. Identification de $C[a,b]'$

Grâce aux résultats obtenus dans les paragraphes précédents, nous allons pouvoir étudier en détail l'espace $C[a,b]'$. Tout d'abord nous pouvons considérer l'application suivante :

$$S : BV[a,b] \to C[a,b]' : g \mapsto S_g$$

où $S_g(f) := \int_a^b f(x)dg(x),\ \forall f \in C[a,b]$

Nous savons d'après la remarque (2.7) que l'application S est bien définie, et, par le théorème de Riesz, qu'elle est surjective. Il est cependant facile de constater qu'elle n'est pas injective.

Nous introduisons les ensembles suivants :

$$\mathcal{L} := \{L \in C[a,b]' : L(f) \geq 0 \text{ si } f \geq 0\}$$
$$\mathcal{M} := \{p : [a,b] \to \mathbb{R} : p \text{ continue à droite, monotone croissante et } p(a) = 0\}$$

Nous allons étudier plus précisément ces deux ensembles afin d'arriver à une décomposition de $C[a,b]'$

4.1. L'ensemble $\mathcal{L}$.

Proposition 4.1. Soit $L \in C[a,b]^*$ telle que $f \geq 0 \Rightarrow L(f) \geq 0$
Alors L est continue.

Preuve : Soit $f \in C[a,b]$ On définit :

- $f^+ := \frac{|f|+f}{2}$
- $f^- := \frac{|f|-f}{2}$

On constate clairement que :

- $f^+, f^- \in C[a,b]$
- $f^+ - f^- = f$
- $f^+ + f^- = |f|$
- $f^+, f^- \geq 0$

Ensuite, $|L(f)| = |L(f^+ - f^-)| = |L(f^+) - L(f^-)| \leq |L(f^+)| + |L(f^-)| = L(f^+) + L(f^-) = L(f^+ + f^-) = L(|f|)$

Par conséquent,

$$|L(f)| \leq L(|f|)$$

On sait également que $g \leq h \Rightarrow L(g) \leq L(h)$.
En effet, $h - g \geq 0 \Rightarrow L(h) - L(g) = L(h-g) \geq 0$.

De plus, on voit facilement que, si $f \neq 0$, $0 \leq \frac{|f|}{\|f\|} \leq 1$, car $0 \leq |f| \leq \|f\|$

Par conséquent, $\frac{1}{\|f\|}|L(f)| = \left|L(\frac{f}{\|f\|})\right| \leq L(\left|\frac{f}{\|f\|}\right|) = L(\frac{|f|}{\|f\|}) \leq L(1)$

et donc,

$$|L(f)| \leq L(1) \cdot \|f\|$$

et donc L est continue, car elle est bornée.

De plus, on peut calculer la norme de L qui est définie comme :

$$\|L\| := \sup \left\{ |L(f)| : \|f\| = 1 \right\}$$

On a montré que

$$\|L\| \leq L(1)$$

Considérons la fonction $f \equiv 1$. $f \in C[a,b]$ et $\|f\| = 1$. Par définition, $\|L\| \geq |L(1)| = L(1)$. Ainsi,

$$\|L\| = L(1)$$

Proposition 4.2. On pose $C[a,b]^+ := \{f \in C[a,b] : f \geq 0\}$

Soit $l : C[a,b]^+ \longrightarrow [0,\infty)$ telle que :

- $l(f+g) = l(f) + l(g)$ additive
- $l(\alpha f) = \alpha \cdot l(f)$ $\forall f, g \in C[a,b]^+$, $\forall \alpha \geq 0$ homogène

Alors $\exists L \in C[a,b]'$ telle que $L(f) = l(f)$, $\forall f \in C[a,b]^+$, ie L "prolonge" l.

Preuve :

Soit $f \in C[a,b]$. On définit comme dans la proposition précédente f^+ et f^-.

On pose :

$$L(f) := l(f^+) - l(f^-)$$

qui est bien définie. Vérifions maintenant que $L \in C[a,b]'$:

Additive :

Soient $f, g \in C[a,b]$.

On sait alors que $(f+g)^+ - (f+g)^- = f + g = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-)$. Par conséquent, $(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$. En applicant l, on voit que

$$l((f+g)^+) + l(f^-) + l(g^-) = l((f+g)^-) + l(f^+) + l(g^+)$$

et donc

$$L(f+g) = l((f+g)^+) - l((f+g)^-) = (l(f^+) - l(f^-)) + (l(g^+) - l(g^-)) = L(f) + L(g)$$

ie

$$L(f+g) = L(f) + L(g)$$

Homogène :

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in C[a,b]$.

(1) Si $\alpha \geq 0$, alors $(\alpha f)^+ = \alpha(f)^+$ et $(\alpha f)^- = \alpha(f)^-$. Par conséquent, $L(\alpha f) = l((\alpha f)^+) - l((\alpha f)^-) = l(\alpha f^+) - l(\alpha f^-) = \alpha(l(f^+) - l(f^-)) = \alpha \cdot L(f)$

(2) $(-f)^+ = f^-$ et $(-f)^- = f^+$. Par conséquent, $L(-f) = l((-f)^+) - l((-f)^-) = l(f^-) - l(f^+) = -L(f)$

(3) Si $\alpha < 0$, alors $-\alpha > 0$ et donc $L(\alpha f) = L(-(-\alpha)f) = -L((-\alpha)f) = -(-\alpha)L(f) = \alpha \cdot L(f)$

Par conséquent,

$$L(\alpha f) = \alpha \cdot L(f),\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall f \in C[a,b]$$

On voit donc que $L \in C[a,b]^*$. Reste à prouver la continuité. On utilise pour cela la proposition précédente :

Soit $f \in C[a,b]^+$, alors $f^+ = f$ et $f^- = 0$. Or, $l(0) = 0$ (clairement), ainsi, $L(f) = l(f^+) - l(f^-) = l(f) \geq 0$, car $f \geq 0$. Ainsi, L est continue, ie $L \in C[a,b]'$.

Proposition 4.3. Soit $L \in C[a,b]'$. On appelle valeur absolue de L l' application $|L|$ définie par :

$$|L| : C[a,b]^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$|L|(f) := \sup \left\{ |L(g)| : |g| \leq f,\ g \in C[a,b] \right\}$$

Alors $|L|$ est additive et homogène.

Preuve :

On a tout d'abord besoin de prouver un petit lemme intermédiaire :

Lemme 4.1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$, alors $\exists \epsilon \in \{-1, 1\}$ tel que $|x+\epsilon \cdot y| = |x|+|y|$

Preuve :

Il faut distinguer tous les cas possibles :

- si $x, y \geq 0$, alors $|x| + |y| = x + y = |x + 1 \cdot y|$
- si $x \geq 0$ et $y < 0$, alors $|x| + |y| = x + \underbrace{(-y)}_{\geq 0} = |x + (-1) \cdot y|$
- si $x < 0$ et $y \geq 0$, alors $|x| + |y| = -x + y = -\underbrace{(x - y)}_{\leq 0} = |x - y| = |x + (-1) \cdot y|$
- si $x, y < 0$, alors $|x| + |y| = -x - y = -\underbrace{(x + y)}_{\geq 0} = |x + 1 \cdot y|$

On revient à notre proposition. Remarquons tout d'abord que notre définition est bien posée. En effet, l'ensemble $\{g \in C[a,b] : |g| \leq f\}$ est borné, car f est continue sur l'intervalle $[a,b]$ et donc bornée. Par conséquent, l'ensemble $\left\{ |L(g)| : |g| \leq f,\ g \in C[a,b] \right\}$ est borné par continuité de L. Son sup existe donc et la définition est bien posée.

Remarque 4.1. Si $f \leq g$, alors $|L|(f) \leq |L|(g)$, car

$$\left\{ |L(u)| : |u| \leq f, u \in C[a,b] \right\} \subset \left\{ |L(v)| : |v| \leq f, v \in C[a,b] \right\}$$

Par conséquent, comme $|L|(0) = 0$, $f \geq 0 \Longrightarrow |L|(f) \geq 0$,

Homogénéité :

Soit $\alpha > 0$ et $f \in C[a,b]$, alors :

$$|L|(\alpha f) := \sup \left\{ |L(g)| : |g| \leq \alpha f,\ g \in C[a,b] \right\} =$$

$$\sup\left\{\,|L(g)| : \frac{1}{\alpha}|g| \leq f,\ g \in C[a,b]\right\} = \sup\left\{\,|L(g)| : \left|\frac{1}{\alpha}g\right| \leq f,\ g \in C[a,b]\right\} =$$

$$\sup\left\{\,\left|L(\frac{\alpha}{\alpha}g)\right| : \left|\frac{1}{\alpha}g\right| \leq f,\ g \in C[a,b]\right\} =$$

$$\sup\left\{\,\left|\alpha L(\frac{g}{\alpha})\right| : \left|\frac{g}{\alpha}\right| \leq f,\ g \in C[a,b]\right\} = \sup\left\{|\alpha|\,|L(h)| : |h| \leq f,\ h \in C[a,b]\right\} =$$

$$\alpha \sup\left\{\,|L(h)| : |h| \leq f,\ h \in C[a,b]\right\} = \alpha\,|L|\,(f)$$

Ensuite :

$$|L|\,(0 \cdot f) = \sup\left\{\,|L(g)| : |g| \leq 0,\ g \in C[a,b]\right\} =$$

$$\sup\left\{\,|L(0)|\right\} = |L(0)| = 0 = 0 \cdot |L|\,(f)$$

car L est linéaire.

Par conséquent,

$$|L|\,(\alpha f) = \alpha \cdot |L|\,(f),\ \forall \alpha \geq 0,\ \forall f \in C[a,b]$$

Additivité :

Soient $f_1, f_2 \in C[a,b]^+$ et $g_1, g_2 \in C[a,b]$ telle que $|g_1| \leq f_1$ et $|g_2| \leq f_2$.

Alors pour $\epsilon \in \{-1,1\}$, $|g_1 + \epsilon \cdot g_2| \leq |g_1| + |g_2| \leq f_1 + f_2$ Ainsi,

$$|L(g_1) + \epsilon \cdot L(g_2)| = |L(g_1 + \epsilon \cdot g_2)| \leq |L|\,(f_1 + f_2)$$

Cependant, d'après le lemme 4.1, $\exists \epsilon \in \{-1,1\}$ tel que

$$|L(g_1)| + |L(g_2)| = |L(g_1) + \epsilon \cdot L(g_2)|$$

Ainsi,

$$|L(g_1)| + |L(g_2)| \leq |L|\,(f_1 + f_2)$$

Comme on a pris $|g_1| \leq f_1$ et $|g_2| \leq f_2$ quelconques, on peut passer au sup ce qui nous donne le résultat suivant :

$$|L|\,(f_1) + |L|\,(f_2) \leq |L|\,(f_1 + f_2)$$

Ensuite, soit $g \in C[a,b]$ telle que $g \leq f_1 + f_2$. On définit $\forall x \in [a,b]$:

$$g_i(x) := \begin{cases} g(x)\frac{f_i(x)}{f_1(x)+f_2(x)} & \text{si } f_1(x) + f_2(x) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad i = 1,2$$

On observe que $f_1(x) + f_2(x) = 0 \Rightarrow g(x) = 0$ et par conséquent,

$$|g_i(x)| \leq |g(x)|,\ \forall x \in [a,b],\ i = 1,2$$

Ainsi,

$$g_i \in C[a,b],\ i = 1,2$$

$$|g_i| \leq \left|g\frac{f_i}{f_1 + f_2}\right| \leq \frac{|g| \cdot |f_i|}{|f_1 + f_2|} \leq |f_i| = f_i,\ i = 1,2$$

et

$$g_1 + g_2 = g$$

Par conséquent :

$$|L(g)| = |L(g_1 + g_2)| = |L(g_1) + L(g_2)| \leq |L(g_1)| + |L(g_2)| \leq |L|\,(f_1) + |L|\,(f_2)$$

En passant au sup, on trouve que

$$|L|(f_1 + f_2) \leq |L|(f_1) + |L|(f_2)$$

On arrive par conséquent au résultat final :

$$|L|(f_1 + f_2) = |L|(f_1) + |L|(f_2),\ \forall f_1, f_2 \in C[a,b]^+$$

Théorème 4.2. Soit $L \in C[a,b]'$, alors $\exists L_1, L_2 \in C[a,b]'$ telles que :

- $L = L_1 - L_2$
- $\forall f \in C[a,b]^+$, $L_i(f) \geq 0$, $i = 1, 2$

Preuve :
On reprend l'application $|L| : C[a,b]^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie à la proposition 4.3. Par la proposition 4.2, on peut la prolonger en une forme linéaire continue $|\hat{L}|$ définie sur $C[a,b]$. On pose alors

$$L_1 : C[a,b] \longrightarrow \mathbb{R} : f \mapsto \frac{1}{2} \cdot \big(|\hat{L}|(f) + L(f)\big)$$

$$L_2 : C[a,b] \longrightarrow \mathbb{R} : f \mapsto \frac{1}{2} \cdot \big(|\hat{L}|(f) - L(f)\big)$$

Il est clair que $L_1, L_2 \in C[a,b]'$, car ce sont des combinaisons linéaires d'éléments de $C[a,b]'$.

De plus, on remarque que $L = L_1 - L_2$ Finalement, soit $f \in C[a,b]^+$. On sait donc que $|\hat{L}|(f) = |L|(f)$. De plus, comme $|f| = f \leq f$, alors

$$|L(f)| \leq |L|(f)$$

c'est-à-dire

$$-|L|(f) \leq L(f) \leq |L|(f)$$

Par conséquent

$$L_1(f) = \frac{1}{2} \cdot \big(|\hat{L}|(f) + L(f)\big) = \frac{1}{2} \cdot \big(|L|(f) + L(f)\big) \geq 0$$

et

$$L_2(f) = \frac{1}{2} \cdot \big(|\hat{L}|(f) - L(f)\big) = \frac{1}{2} \cdot \big(|L|(f) - L(f)\big) \geq 0$$

$\forall f \in C[a,b]$

Théorème 4.3.

$$C[a,b]' = \mathcal{L} - \mathcal{L} := \{f - g : f, g \in \mathcal{L}\}$$

Preuve :
Nous allons démontrer la double inclusion :

$\subset$:
Soit $L \in C[a,b]'$ Alors, par le théorème 4.3, $\exists L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ telles que

$$L = L_1 - L_2 \in \mathcal{L} - \mathcal{L}$$

$\supset$:
Soient $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ Alors $L_1, L_2 \in C[a,b]'$ et donc $L_1 - L_2 \in C[a,b]'$

4.2. L'ensemble $\mathcal{M}$.

DÉFINITION 4.4. On définit l'ensemble

$$BV[a,b]_0 := \{f \in BV[a,b] : \text{f continue à droite et } f(a) = 0\}$$

PROPOSITION 4.4.

$$BV[a,b]_0 = \mathcal{M} - \mathcal{M} := \{p - q : p, q \in \mathcal{M}\}$$

On procède de nouveau par double inclusion :

$\subset$:
Soit $f \in BV[a,b]_0$, d'après le théorème de Jordan, $\exists p, q \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ continues à droites et monotones croissantes. On remarque que $p(a) - q(a) = f(a) = 0$, par conséquent, $p(a) = q(a)$ On pose alors $p' := p - p(a)$ et $q' := q - q(a)$. Alors $p', q' \in \mathcal{M}$ et donc $f = p' - q' \in \mathcal{M} - \mathcal{M}$
$\supset$:
Soient $p, q \in \mathcal{M}$, alors $p - q$ est continue à droite et est à variation bornée, car toute fonction monotone croissante est à variation bornée (prop. 1.2) et $BV[a,b]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (prop. 1.1). Finalement, $(p-q)(a) := p(a) - q(a) = 0$ ainsi, $p - q \in BV[a,b]_0$

4.3. Bijection entre $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$.

PROPOSITION 4.5. Soit $p \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ monotone croissante. On définit

$$p^* : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \lim_{y \to x_+} p(y) = \inf\{p(y) : y > x\}$$

Alors p^* est une fonction monotone croissante, continue à droite, et qui est égale à p en tout point de continuité à droite de p.

Preuve :

Remarquons d'abord que p^* est bien définie, car p est monotone croissante. Ensuite, soit $\tilde{x} \in [a,b]$ un point de continuité à droite de p. Alors $p^*(\tilde{x}) = \lim_{y \to \tilde{x}_+} = p(\tilde{x})$ par définition.

Ensuite soient $x, y \in [a,b]$ tels que $x < y$. Alors

$$p^*(x) = \inf\{p(w) : w > x\} \leq p(y)$$

De plus, soit $z > y$, alors $p(z) \geq p(y)$ et donc, en passant à l'inf, $p^*(y) \geq p(y)$, par conséquent $p^*(x) \leq p^*(y)$. Ainsi p^* est monotone croissante.

Finalement, p^* est continue à droite par définition.

PROPOSITION 4.6. Soient p et p^* comme dans la proposition précédente. Alors

$$\int_a^b f(x)\ dp(x) = \int_a^b f(x)\ dp^*(x),\ \forall f \in C[a,b]$$

Preuve :

Soit $\epsilon > 0$ et $f \in C[a,b]$. On veut montrer que

$$\left| \int_a^b f(x)\ dp(x) - \int_a^b f(x)\ dp^*(x) \right| < \epsilon$$

Tout d'abord, pour cet $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que pour toute subdivision d'ordre $n \in \mathbb{N}$ $\{x_0, \ldots, x_n\}$ de $[a,b]$ avec

$$\lambda := \max\{x_{k+1} - x_k \mid 0 \leq k \leq n-1\} < \delta$$

et

$$\xi_k \in [x_k, x_{k+1}], \forall\ 0 \leq k \leq n-1 \text{ arbitraires}$$

on a, par le théorème de Stieltjes :

$$\left| \int_a^b f(x)\ dp(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(p(x_{k+1}) - p(x_k)) \right| < \frac{\epsilon}{3}$$

$$\left| \int_a^b f(x)\ dp^*(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(p^*(x_{k+1}) - p^*(x_k)) \right| < \frac{\epsilon}{3}$$

Cependant, par définition de p^*, $\forall\ i \in \{1,\ \ldots\ , n-1\}$, $\exists y_i > x_i$ tel que :

$$p(y_i) - p(x_i) < \frac{\epsilon}{6n \cdot (1 + \max\{f(\xi_k) : 1 \leq k \leq n\})}$$

et tel que le pas de la subdivision $\{y_o, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n\}$ soit $< \delta$, où on a posé $y_0 := a$ et $y_n := b$

Ainsi,

$$\left|\int_a^b f(x)dp(x) - \int_a^b f(x)dp^*(x)\right| =$$

$$\left|\int_a^b f(x)dp(x) + \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(p(y_{k+1}) - p(y_k)) - \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(p(y_{k+1}) - p(y_k)) - \int_a^b f(x)dp^*(x)\right| \leq$$

$$\left|\int_a^b f(x)dp(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(p(y_{k+1}) - p(y_k))\right| + \left|\int_a^b f(x)dp^*(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(p(y_{k+1}) - p(y_k))\right|$$

Comme le pas de $\{y_0, \dots, y_n\}$ est $< \delta$, on sait que

$$\left|\int_a^b f(x)dp(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\big(p(y_{k+1}) - p(y_k)\big)\right| < \frac{\epsilon}{3}$$

De plus,

$$\left|\int_a^b f(x)dp^*(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\big(p(y_{k+1}) - p(y_k)\big)\right| \leq$$

$$\left|\int_a^b f(x)dp^*(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\big(p^*(x_{k+1}) - p^*(x_k)\big)\right| +$$

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\big(p^*(x_{k+1}) - p^*(x_k)\big) - \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\big(p(y_{k+1}) - p(y_k)\big)\right| \leq$$

Or

$$\left|\int_a^b f(x)dp^*(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\big(p^*(x_{k+1}) - p^*(x_k)\big)\right| < \frac{\epsilon}{3}$$

Par conséquent,

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\big(p^*(x_{k+1}) - p^*(x_k)\big) - \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\big(p(y_{k+1}) - p(y_k)\big)\right| =$$

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\big(p^*(x_{k+1}) - p^*(x_k) - p(y_{k+1}) + p(y_k)\big)\right| =$$

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\big((p^*(x_{k+1}) - p(y_{k+1})) - (p(y_k) - p^*(x_k))\big)\right| \leq$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(\xi_k)| \left\{ |p^*(x_{k+1}) - p(y_{k+1})| + |p(y_k) - p^*(x_k)| \right\} \leq$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(\xi_k)| \left\{ \frac{\epsilon}{6n \cdot (1 + \max\{f(\xi_k) : 1 \leq k \leq n\})} + \frac{\epsilon}{6n \cdot (1 + \max\{f(\xi_k) : 1 \leq k \leq n\})} \right\} \leq \frac{\epsilon}{3}$$

Par conséquent

$$\left|\int_a^b f(x)\ dp(x) - \int_a^b f(x)\ dp^*(x)\right| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

et donc

$$\int_a^b f(x)\ dp(x) = \int_a^b f(x)\ dp^*(x)$$

THÉORÈME 4.5. Il existe une bijection

$$\Phi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{L}$$

$\underline{\Rightarrow :}$

Soit $p \in \mathcal{M}$. On peut alors construire

$$S_p : C[a,b] \longrightarrow \mathbb{R} : f \mapsto \int_a^b f(x)dp(x)$$

car p est monotone croissante. On sait que $S_p \in C[a,b]'$.

Soit $f \in C[a,b]^+$ et $\{x_0, \ldots, x_n\}$ une subdivision d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de $[a,b]$. Soit $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}], \forall 0 \leq k \leq n-1$ arbitraires.
On sait que, lorsque

$$\lambda := \max\{x_{k+1} - x_k \mid 0 \leq k \leq n-1\} \longrightarrow 0$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\big(g(x_{k+1}) - g(x_k)\big) \longrightarrow \int_a^b f(x)dp(x)$$

Or $f(\xi_k) \geq 0$, $\forall 0 \leq k \leq n-1$, car $f \in C[a,b]^+$
et $g(x_{k+1}) - g(x_k) \geq 0$, $\forall 0 \leq k \leq n-1$, car g est monotone croissante.

Ainsi, en passant à la limite, $S_p(f) = \int_a^b f(x)dp(x) \geq 0$.
Par conséquent $S_p \in \mathcal{L}$

On définit alors l'application

$$S : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{L} : p \mapsto S_p$$

$\underline{\Leftarrow :}$

Soit $L \in \mathcal{L}$. Par le théorème de Riesz, on sait que $\exists q \in BV[a,b]$ telle que $L = S_q$. Soit $f \in C[a,b]^+$ on sait donc que $S_q(f) = L(f) \geq 0$. Cependant, en examinant la construction de l'intégrale de Stieljes, on voit que $f \geq 0$ implique forcément que $q(x_{k+1}) - q(x_k) \geq 0$ pour toute subdivision $\{x_0, \ldots, x_n\}$ de $[a,b]$ suffisamment fine. Ainsi, on voit qu'il est nécessaire que $q(y) - q(x) \geq 0$, $\forall x \leq y$, ce qui signifie en fait que q est monotone croissante.

On considère ensuite la fonction q^* définie à la prop. 4.5. On sait qu'elle est monotone croissante et continue à droite. De plus, par la prop. 4.6, on sait que $S_q = S_{q^*}$.

Finalement, on définit $r := q^* - q^*(a)$. Alors on sait que $r \in \mathcal{M}$ et que $S_r = S_{q^*} = L$. On pose alors

$$R : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{M} : L \mapsto r$$

Reste maintenant à voir si R est bien définie. En effet, on se base sur le théorème de Riesz qui assure l'existence de la fonction génératrice de l'intégrale de Stieljes, mais rien ne nous garanti que le choix de cette fonction est bien défini.

Supposons alors que $\exists r_1, r_2 \in \mathcal{M}$ telles que $S_{r_1} = S_{r_2}$. Si nous montrons que $r_1 = r_2$, nous saurons alors que l'application R est bien définie.

Soient $x, y \in [a,b], x \leq y$. On pose

$$\mu_{r_1}\big((x,y]\big) := r_1(y) - r_1(x)$$
$$\mu_{r_2}\big((x,y]\big) := r_2(y) - r_2(x)$$

qui définissent deux mesures finies sur la tribu des boréliens de $[a,b]$. On admet à ce stade la construction de l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes, expliquée dans [1] et [3] qui généralise celle de Stieljes, car elle permet d'intégrer une plus grande classe de fonctions, comme par exemple les fonctions étagées (c'est-à-dire des fonctions mesurables admettant un nombre fini de valeurs).

Soient alors $c, d \in [a,b]$, $c \leq d$. On considère la fonction étagée :

$$\chi_{|[c,d]}(x) := \begin{cases} 1 & \text{, si } x \in [c,d] \\ 0 & \text{, si } x \notin [c,d] \end{cases}$$

Ainsi,

$$\int_c^d dr_1(x) = S_{r_1}(\chi_{|[c,d]}) = S_{r_2}(\chi_{|[c,d]}) = \int_c^d dr_2(x)$$

cependant, on sait, d'après la construction de l'intégrale de Stieltjes, que

$$\int_c^d dr_1(x) = r_1(d) - r_1(c)$$

et que

$$\int_c^d dr_2(x) = r_2(d) - r_2(c)$$

Par conséquent, on arrive au résultat :

$$r_1(d) - r_1(c) = r_2(d) - r_2(c),\ \forall c, d \in [a,b]\ c \leq d$$

et donc

$$(r_1 - r_2)(c) = (r_1 - r_2)(d),\ \forall c, d \in [a,b]\ c \leq d$$

par conséquent,

$$r_1 - r_2 = \text{ cte}$$

Or

$$(r_1 - r_2)(a) = r_1(a) - r_2(a) = 0$$

ainsi,

$$r_1 = r_2$$

Par conséquent, on sait que

$$R \circ S = id_{\mathcal{M}}$$
$$S \circ R = id_{\mathcal{L}}$$

$\mathcal{M}$ et $\mathcal{L}$ sont donc bien en bijection.

4.4. Bijection entre $C[a,b]'$ et $BV[a,b]_0$.

Remarque 4.6. On rappelle les résultats obtenus :

- $BV[a,b]_0 = \mathcal{M} - \mathcal{M}$
- $C[a,b]' = \mathcal{L} - \mathcal{L}$

où

$$BV[a,b]_0 := \{f \in BV[a,b] : \text{f continue à droite et } f(a) = 0\}$$
$$\mathcal{L} := \{L \in C[a,b]' : L(f) \geq 0 \text{ si } f \geq 0\}$$
$$\mathcal{M} := \{p : [a,b] \to \mathbb{R} : p \text{ continue à droite, monotone croissante et } p(a) = 0\}$$

Théorème 4.7. Il existe une bijection

$$S : BV[a,b]_0 \longrightarrow C[a,b]'$$

Preuve :

L'application

$$S : BV[a,b]_0 \longrightarrow C[a,b]' : p \mapsto S_p$$

sera une bijection par les propriétés énoncées dans la remarque précédente et le théorème (4.5). De plus, on sait par la proposition 2.1 que S est linéaire. Par conséquent, il s'agit d'un isomorphisme canonique.

Remarque 4.8. On a donc la représentation suivante :

Le dual topologique des fonctions continues sur un intervalle compact I est canoniquement isomorphe avec le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions à variation bornée, continues à droite, s'annulant sur la borne inférieure de I.

5. Conclusion

Il est intéressant de remarquer que notre étude a porté sur un espace vectoriel avec lequel nous sommes habitués à travailler, mais dont le dual topologique se révèle être beaucoup moins courant.

Je tiens à remercier le Prof. Antoine Derighetti pour son soutien durant tout ce travail.

Bibliographie

[1] I. P. Natanson *Theory of functions of a real variable* vol 1, Frederick Ungar Publishing, New York, 1955

[2] H. L. Royden *Real analysis, second edition* The Macmilan Company, Londres, 1970

[3] N. Bourbaki *Livre VI, intégration* Hermann, Paris, 1963

[4] Antoine Derighetti *Cours Séries Trigonométriques I*, EPFL, 2004-2005

[5] Marc Troyanov *Cours Mesure et Intégration*, EPFL, 2004-2005