



ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Projet de Semestre

# IFS et L-systèmes



REZZONICO Vittoria

HEBEISEN Christophe

-MA- 3 ème et 4 ème année

Responsable :

Professeur Peter BUSER

Chaire de Géométrie

Printemps 2000-2001

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Comprendre les fractales : la théorie des espaces métriques</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>L'espace métrique <math>(\mathcal{H}(\mathbf{X}), h)</math> : l'espace préféré des fractales</b>	<b>8</b>
3.1	La construction de l'espace $(\mathcal{H}(\mathbf{X}), h)$ . . . . .	8
3.2	La complétude de l'espace $\mathcal{H}(\mathbf{X})$ . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Les IFS : Iterated Function Systems</b>	<b>18</b>
<b>5</b>	<b>Les L-systèmes</b>	<b>23</b>
5.1	Extension au cas 3D et grammaire des L-systèmes . . . . .	23
5.2	L-systèmes stochastiques . . . . .	26
<b>6</b>	<b>Implémentation des algorithmes</b>	<b>28</b>
6.1	L-systèmes à deux dimensions . . . . .	28
6.1.1	Algorithme de calcul du fractale . . . . .	28
6.1.2	Algorithme de dessin . . . . .	28
6.2	Arbre ternaire (trois dimensions) . . . . .	29
6.3	Pyramide de Sierpinski . . . . .	30
6.4	Résultats . . . . .	30
<b>7</b>	<b>Logiciels utilisés</b>	<b>33</b>
7.1	Description détaillée des logiciels . . . . .	33
7.2	Arbre d'exécution . . . . .	33
<b>8</b>	<b>Conclusions</b>	<b>34</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>35</b>

# 1 Introduction

Il existe un certain nombre de mécanismes qui permettent de décrire de nombreux phénomènes de croissance et de développement. La technique est sensiblement toujours la même : on part d'un élément initial ou d'une configuration initiale, et on en remplace une partie en fonction d'un ensemble de règles.

Il existe plusieurs approches, ayant des liens d'ailleurs : les fractales, les IFS, les automates cellulaires (qui sont issus des systèmes logiques et qui se comportent, dans une certaine mesure, comme des cellules) et les L-systèmes. Le sujet est particulièrement intéressant, et a passionné de nombreux mathématiciens, informaticiens et biologistes.

Dans ce projet, nous avons voulu en savoir un peu plus sur ce qui se cache derrière les IFS et les L-systèmes, qui nous ont tout de suite fascinés à la fois par la «simplicité» de leur réalisation et par leur beauté.

Nous avons donc étudié à la fois le côté pratique de leur réalisation, en étudiant et créant des algorithmes basés sur ceux trouvés dans les livres étudiés et sur certains sites web, et d'autre part, nous nous sommes intéressés à l'aspect purement mathématique de ces phénomènes.

Et en effet, derrière les IFS (de l'anglais *Iterated Function System*) se cachent de nombreuses notions mathématiques, notamment celle de convergence dans un espace métrique complet.

Nous verrons qu'un IFS peut être décrit par un système très simple où l'on applique une transformation affine sur un objet quelconque, pour finalement parvenir, quel que soit l'objet de départ, à un «attracteur» du système en question (voir par exemple l'image de la page de garde, où l'attracteur est une fougère), d'où la nécessité de parler de convergence du système.

En ce qui concerne les L-systèmes (du nom d'Aristid LINDENMAYER (1925-1989), leur découvreur), il s'agit de modélisation de plantes par un système de récurrence, auquel on ajoute parfois des probabilités. Avec une grammaire très simple, on parvient ainsi à modéliser toutes les plantes connues (et même plus...), et le système d'itération est très proche de celui des IFS. C'est pourquoi nous avons tenu à traiter les deux sujets à la fois.

Dans le chapitre suivant, nous commençons d'abord par quelques petits rappels de notions de base sur les espaces métriques et les notions de convergence dans un tel espace.

Dans la deuxième partie, nous allons décrire en détail l'espace métrique préféré des fractales : l'espace  $(\mathcal{H}(\mathbf{X}), h)$ . C'est alors que nous verrons l'utilité de la théorie abordée jusqu'ici, comment elle aboutit finalement au théorème central de ce projet, et en quoi ce théorème est si important dans nos applications.

Dans la dernière partie, nous verrons les applications graphiques qui s'appuient sur cette théorie, et de quelle façon modéliser des objets auto-similaires. Nous décrirons également certains algorithmes utilisés pour la réalisation des images de ce projet.

## 2 Comprendre les fractales : la théorie des espaces métriques

Nous avons besoin d'un certain bagage mathématique avant de pouvoir aborder le sujet proprement dit. Entre autres, il nous faut développer un peu la théorie des espaces métriques, qui nous donnera les bases de la convergence et de la compacité dont nous aurons besoin.

### Définition 2.1 (Espace métrique)

Soit  $\mathbf{X}$  un espace quelconque. Une *espace métrique* est un espace muni d'une fonction  $d : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Cette fonction doit satisfaire aux trois points suivants :

$$\begin{aligned} (i) \quad & d(x, y) = d(y, x) && \forall x, y \in \mathbf{X} \\ (ii) \quad & d(x, y) > 0 && \forall x \neq y \\ & d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y && \forall x, y \in \mathbf{X} \\ (iii) \quad & d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) && \forall x, y, z \in \mathbf{X} \end{aligned}$$

Le point (iii) est appelé *inégalité du triangle*.

Une telle fonction est appelée une *métrique*, et on note l'espace métrique ainsi obtenu  $(\mathbf{X}, d)$ .

Des métriques courantes sur  $\mathbb{R}^n$  sont notamment :

$$\begin{aligned} (a) \quad & d(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \\ (b) \quad & d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \\ (c) \quad & d(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| \end{aligned}$$

La deuxième métrique est aussi appelée *métrique naturelle*, ou encore *métrique Euclidienne* sur  $\mathbb{R}^n$ .

Dans ce qui suit nous abrègerons «espace métrique» par «EM».

### Définition 2.2 (Équivalence de deux métriques)

On dit que deux métriques  $d_1$  et  $d_2$  sur un espace  $\mathbf{X}$  sont *équivalentes* s'il existe des constantes  $A, B \in \mathbb{R}_*^+$ , t.q.  $\forall (x, y) \in \mathbf{X} \times \mathbf{X}$  on ait :

$$\begin{aligned} d_1(x, y) &\leq A \cdot d_2(x, y) \\ \text{et} \quad d_2(x, y) &\leq B \cdot d_1(x, y) \end{aligned}$$

ou, de manière équivalente :

$$C \cdot d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq D \cdot d_1(x, y)$$

avec  $C \leq D$ , ( $C, D \in \mathbb{R}^+$ ). Nous noterons cette équivalence ainsi :  $d_1 \sim d_2$ . L'intérêt de cette définition est le suivant : si l'on a convergence pour l'une des métriques, alors on aura la convergence pour l'autre aussi ; plus clairement :

$$\begin{aligned} d_1(x_n, x) \longrightarrow 0 &\iff d_2(x_n, x) \longrightarrow 0 \\ \text{i.e. } x_n \xrightarrow{d_1} x &\iff x_n \xrightarrow{d_2} x \end{aligned}$$

Cette propriété découle immédiatement de la définition.

C'est un exercice simple de démontrer que les trois métriques (a), (b) et (c) ci-dessus sont équivalentes.

### Définition 2.3 (Suite de Cauchy)

Une suite de points  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  d'un EM  $(\mathbf{X}, d)$  est dite une *suite de Cauchy* si  $\forall \epsilon > 0, \exists$  un entier  $N > 0$  t.q.

$$d(x_n, x_m) \leq \epsilon \quad \forall n, m \geq N.$$

En d'autres termes, plus on avance dans la suite, plus les points sont proches (au sens de la métrique  $d$ ) les uns des autres.

### Définition 2.4 (Convergence d'une suite)

On dit qu'une suite de points  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  d'un EM  $(\mathbf{X}, d)$  *converge* vers un point  $x \in \mathbf{X}$  si  $\forall \epsilon > 0, \exists$  un entier  $N > 0$  t.q.

$$d(x_n, x) \leq \epsilon \quad \forall n \geq N.$$

Dans ce cas, le point  $x$  est appelé la *limite* de la suite, et on utilise la notation

$$x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n.$$

Avec l'inégalité du triangle on voit qu'une suite convergente est toujours une suite de Cauchy, mais il faut veiller à ne pas confondre les deux dernières définitions ; on pourrait être tenté de croire que les deux sont équivalentes. Et pourtant, ce n'est pas parce que des points se rapprochent les uns des autres qu'ils convergent forcément vers un point dans l'espace, car ce point n'existe peut-être pas !

### Exemple 2.5

Le meilleur exemple est certainement le suivant : prenons  $\mathbf{X} = \mathbb{Q}$  et  $d(p, q) = |p - q|$ . Soit  $z$  un nombre irrationnel et  $q_j \in \mathbb{Q}$ , avec  $|z - q_j| \leq 1/j$ .

Les  $q_1, q_2, \dots$  forment une suite de Cauchy : en effet

$$|q_m - q_n| \leq |z - q_m| + |z - q_n| \leq 1/m + 1/n$$

et donc  $|q_m - q_n| \leq \epsilon$  si  $m, n \geq 1/2\epsilon$ . Nous avons donc trouvé un  $N$  qui satisfait à notre définition d'une suite de Cauchy. Or cette suite ne converge pas dans  $\mathbb{Q}$ , sinon  $z$  serait un rationnel.

Nous venons de voir qu'une suite de Cauchy n'est pas forcément une suite convergente dans  $\mathbf{X}$ . La réciproque toutefois est vraie : toute suite convergente est une suite de Cauchy.

Il existe un cas particulier où convergence et suite de Cauchy sont intimement liées, c'est lorsque l'EM est complet, ce qui nous amène à la définition suivante :

### Définition 2.6 (Espace complet)

Un EM  $(\mathbf{X}, d)$  est dit *complet* si toute suite de Cauchy converge dans  $\mathbf{X}$ .

On sait par exemple de l'analyse que  $\mathbb{R}^n$  est complet, puisque toute suite de Cauchy de nombres réels est convergente. Par contre  $\mathbb{Q}$  ne l'est pas (exemple 2.5).

Cette notion sera fondamentale, et l'intérêt est évident : si nous montrons que notre espace est complet, nous sommes dès lors assurés que pour toute suite de Cauchy il existe un point limite vers lequel elle converge.

Nous pouvons gagner encore en simplicité en utilisant les propriétés du théorème suivant :

### Théorème 2.7 (Espace compact)

Soit  $S \subset \mathbf{X}$  un sous-ensemble d'un EM  $(\mathbf{X}, d)$ .  $S$  est *compact* si et seulement si de toute suite d'éléments de  $S$  on peut extraire une sous-suite convergente dans  $S$ .

Sans démonstration.

□

### Lemme 2.8

Un sous-ensemble compact d'un EM est complet.

**Démonstration :** Il nous suffit pour cela de montrer qu'une suite (de Cauchy)  $\{x_n\}$  dans un compact est convergente. Or par le théorème 2.7, on peut extraire de notre suite de Cauchy une sous-suite convergente : soit  $\{n_j\}$  la suite croissante des indices de cette sous-suite ( $0 < n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ ),  $x_{n_j}$  les éléments de celle-ci et  $x$  la limite. On a donc

$$\begin{aligned} (i) \quad d(x_m, x_n) &\leq \epsilon/2 \quad \text{si } m, n \geq M \\ (ii) \quad d(x, x_{n_j}) &\leq \epsilon/2 \quad \text{si } j \geq N \end{aligned}$$

par définition d'une suite de Cauchy (i) et d'une sous-suite convergente (ii). Mais par l'inégalité du triangle, nous avons encore le fait qu'à partir d'un certain  $n$ ,

$$\begin{aligned} d(x, x_n) &\leq d(x, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, x_n) \\ &\leq \epsilon/2 + \epsilon/2. \end{aligned}$$

En choisissant  $n$  suffisamment grand, nous avons bien  $d(x, x_n) \leq \epsilon$ , et donc la suite de Cauchy converge. La proposition est démontrée.

□

Il nous faut encore introduire deux autres notions importantes, qui sont celle de fermeture d'un sous-ensemble d'un EM et celle de boule dans un EM.

### Définition 2.9 (Fermeture)

Soit  $S \subset \mathbf{X}$  un sous-espace d'un EM  $(\mathbf{X}, d)$ . La *fermeture* de  $S$ , notée  $\overline{S}$ , est par définition

$$\overline{S} = S \cup \{\text{l'ensemble des points limites de } S\}$$

et on dit que  $S$  est *fermé* si  $S = \overline{S}$  (c'est-à-dire qu'il contient tous les points limites).

**Remarque :**  $\overline{S}$  est fermé  
(sans démonstration)

**Définition 2.10 (Boule ouverte)**

Soit  $\epsilon > 0$  et  $x \in \mathbf{X}$ . On appelle *boule ouverte de rayon  $\epsilon$  centrée en  $x$* , l'ensemble

$$B(x, \epsilon) = \{y \in \mathbf{X} \mid d(x, y) < \epsilon\},$$

et de la définition précédente, il apparaît que la boule fermée est l'ensemble

$$\overline{B}(x, \epsilon) = \{y \in \mathbf{X} \mid d(x, y) \leq \epsilon\}.$$

On peut maintenant donner un sens à la notion d'ensemble borné : un ensemble est *borné* s'il existe une boule ouverte dans lequel il est contenu.

Évidemment une boule fermée est bornée.

**Exemple 2.11**

Il convient de voir que la notion de boule n'a rien à voir avec l'idée géométrique que nous en avons. À titre d'exemple, nous donnons ici les représentations des boules unité, dans  $\mathbb{R}^2$ , pour les trois métriques vues au début de cette section.

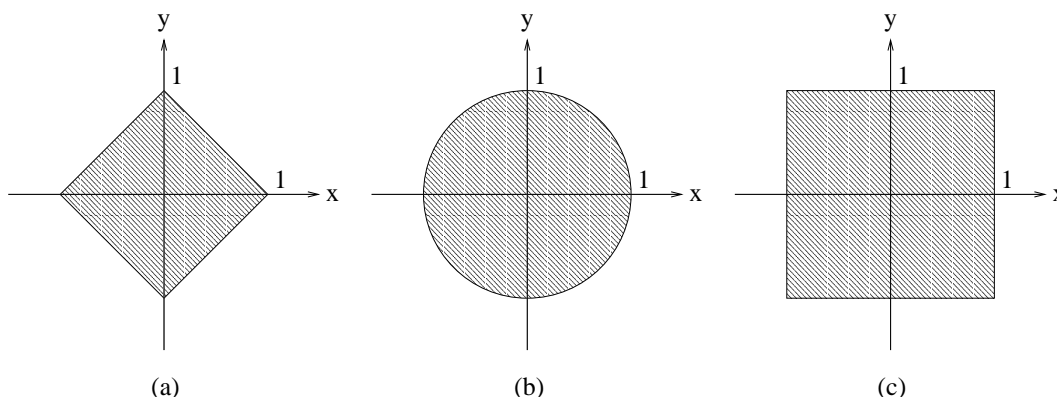


FIG. 1 –  $d(x, y) =$  (a)  $\sum_{i=1}^2 |x_i - y_i|$ ; (b)  $\sqrt{\sum_{i=1}^2 (x_i - y_i)^2}$ ; (c)  $\max_{1 \leq i \leq 2} |x_i - y_i|$

Les EM ont une propriété agréable (c'est même un théorème) : leurs sous-ensembles compacts sont *fermés* et *bornés*. Par contre la réciproque n'est pas vraie en général. Un contre-exemple sont les *espaces de Hilbert* de dimension infinie.

Cependant, si la dimension d'un espace de Hilbert est finie, alors la réciproque est vraie (théorème de Riesz).

Comme nous nous trouverons toujours dans ce cas-là, nous retiendrons donc surtout le théorème suivant :

**Théorème 2.12**

Pour des sous-ensembles  $S \subset \mathbb{R}^n$  on a

$$S \text{ compact} \iff S \text{ fermé et borné.}$$

**Sans démonstration.**

□



### 3 L'espace métrique $(\mathcal{H}(\mathbf{X}), h)$ : l'espace préféré des fractales

Les fractales sont souvent perçus par les gens comme de jolis dessins sur une feuille (ou éventuellement en 3D sur un ordinateur), mais lorsque nous voulons regarder en détail la géométrie fractale, nous avons besoin d'un espace particulier où l'étudier, un peu comme le biologiste qui met des petits vers sur une plaquette pour les observer en détail au microscope. Nous allons faire de même pour nos fractales en les plaçant dans un «endroit» qu'ils apprécient.

Cet «endroit» a de fortes chances d'être un sous-espace de  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ , puisqu'en fin de compte il s'agira de produire des dessins, et pour illustrer nos propos nous nous placerons souvent dans le cas  $\mathbf{X} = \mathbb{R}^2$  (avec la métrique Euclidienne).

Dans ce qui suit, sauf mention du contraire, nous considérerons toujours le cas où  $(\mathbf{X}, d)$  est un EM complet.

#### 3.1 La construction de l'espace $(\mathcal{H}(\mathbf{X}), h)$

Rassemblons différents éléments afin de pouvoir construire cet espace.

##### Définition 3.1

Nous définissons  $\mathcal{H}(\mathbf{X})$  comme l'espace dont les points sont les sous-ensembles compacts de  $\mathbf{X}$ , autres que l'ensemble vide. Désormais nous appellerons un *fractale* n'importe quel élément de  $\mathcal{H}(\mathbf{X})$ .

##### Exemple 3.2

Il est immédiat que si  $x$  et  $y \in \mathcal{H}(\mathbf{X})$ , alors  $x \cup y \in \mathcal{H}(\mathbf{X})$ , mais  $x \cap y$  n'est pas forcément dans  $\mathcal{H}(\mathbf{X})$ .

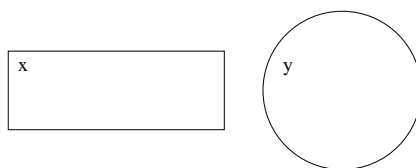


FIG. 2 – Deux ensembles compacts de  $\mathbb{R}^2$ . Ce sont donc deux points de  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ . Leur réunion est encore un ensemble compact, et donc  $z = x \cup y$  est un autre point de  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$  ! Par contre, si les ensembles sont disjoints (comme ici),  $x \cap y = \emptyset$  et par conséquent n'est pas un point de  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ .

##### Définition 3.3

Soit  $x \in \mathbf{X}$ , et  $B \in \mathcal{H}(\mathbf{X})$ . On définit la *distance d'un point  $x$  à l'ensemble  $B$* , et on la note  $d(x, B)$ , comme étant

$$d(x, B) = \min\{d(x, y) \mid y \in B\}$$

**Remarques :**

- cette définition est tout à fait générale et s'applique à n'importe quel sous-ensemble non vide de  $\mathbf{X}$ , en remplaçant  $\min$  par  $\inf$ ; mais dans le cas particulier, nous sommes intéressés à prendre précisément  $\mathcal{H}(\mathbf{X})$  comme sous-espace
- cette distance est bien définie (elle existe) du fait que  $B$  est non-vide et compact
- il est trivial de voir que si cette distance est nulle, alors  $x \in \overline{B}$

**Exemple 3.4**

Illustration dans le cas où  $\mathbf{X} = \mathbb{R}^2$

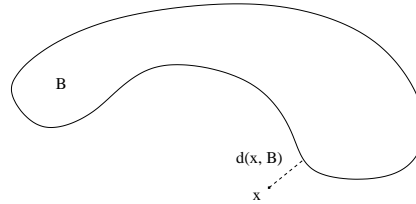


FIG. 3 – La distance  $d(x, B)$  dans  $\mathbb{R}^2$  est la plus petite distance du point  $x$  à l'ensemble  $B$ .

**Définition 3.5**

Soient  $A, B \in \mathcal{H}(\mathbf{X})$ . On définit la *distance de A à B*, et on la note  $d(A, B)$ , comme étant

$$d(A, B) = \max\{d(x, B) \mid x \in A\}$$

**Remarques :**

- comme avant, cette définition a un sens, et en particulier il existe deux points  $\hat{x} \in A$  et  $\hat{y} \in B$  t.q.  $d(A, B) = d(\hat{x}, \hat{y})$
- on constate que cette distance ne fournit pas de métrique sur  $\mathcal{H}(\mathbf{X})$  : en effet,  $d(A, B) \neq d(B, A)$  en général (prendre par exemple le cas où  $A \subset B$ ,  $A \neq B$ ; on aura alors  $d(A, B) = 0$ , mais  $d(B, A) > 0$ )

**Exemple 3.6**

Illustration dans le cas où  $\mathbf{X} = \mathbb{R}^2$

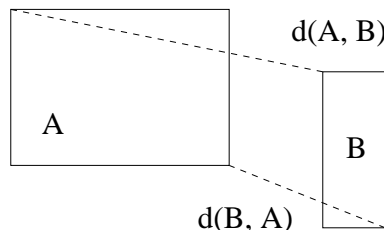


FIG. 4 – De toutes les distances des points de  $B$  à l'ensemble  $A$ , on prend la plus grande : ceci nous donne  $d(B, A)$ . Idem pour  $d(A, B)$ .

**Définition 3.7 (Distance de Hausdorff)**

Soient  $A, B \in \mathcal{H}(\mathbf{X})$ . On définit la *distance de Hausdorff* entre deux points  $A$  et  $B \in \mathcal{H}(\mathbf{X})$ , et on la note  $h(A, B)$ , comme étant

$$h(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}$$

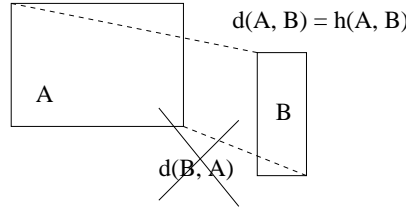


FIG. 5 – Illustration de la distance de Hausdorff : on prend  $h$  comme la plus grande des deux distances précédentes.

**Remarque :**

Cette fois-ci, nous avons bien une métrique sur  $\mathcal{H}(\mathbf{X})$ . En effet, vérifions les trois conditions : soit  $A, B, C \in \mathcal{H}(\mathbf{X})$ . Clairement nous avons

$$h(A, B) = h(B, A)$$

et  $h(A, A) = d(A, A) = 0$ .

De plus, comme  $A$  et  $B$  sont compacts,  $h(A, B) = d(a, b)$  pour un certain  $a \in A$  et un certain  $b \in B$ . Or puisque  $d(a, b) \geq 0$  par définition, et que le minimum est pris là-dessus,  $d(a, B) \geq 0$ ; et comme on prend le maximum sur cette quantité, alors nous aurons  $d(A, B) \geq 0$ , et finalement  $h(A, B) \geq 0$ .

Maintenant, si  $A \neq B$ , nous pouvons donc trouver un  $a \in A$  tel que  $a \notin B$  (ou bien  $b \in B$  tel que  $b \notin A$ ), et donc

$$h(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\} \geq d(A, B) = \max\{d(a, B) \mid a \in A\} \geq d(a, B) > 0$$

(puisque  $B$  est fermé). Ceci démontre les deux premières propriétés.

Pour la troisième propriété, l'inégalité du triangle, nous devons montrer que  $h(A, B) \leq h(A, C) + h(C, B)$ . Pour cela, nous commençons d'abord par montrer que  $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$  :

$$\begin{aligned} d(a, B) &= \min\{d(a, b) \mid b \in B\} \\ &\leq \min\{d(a, c) + d(c, b) \mid b \in B\} && \forall c \in C \\ &= d(a, c) + \min\{d(c, b) \mid b \in B\} && \forall c \in C \\ \text{donc } d(a, B) &\leq \min\{d(a, c) \mid c \in C\} + \min\{d(c, B) \mid c \in C\} && \forall c \in C \\ &= d(a, C) + \{d(c, B) \mid c \in C\} \\ \text{donc } d(a, B) &\leq d(a, C) + \max\{d(c, B) \mid c \in C\} \\ &= d(a, C) + d(C, B) \\ \text{donc } \max\{d(a, B) \mid a \in A\} &\leq \max\{d(a, C) \mid a \in A\} + d(C, B) \\ \text{et finalement } d(A, B) &\leq d(A, C) + d(C, B) \end{aligned}$$

De la même manière on montre que  $d(B, A) \leq d(B, C) + d(C, A)$ .

Avec ce résultat nous avons que

$$\begin{aligned}
 h(A, B) &= \max\{d(A, B), d(B, A)\} \\
 &\leq \max\{d(A, C) + d(C, B), d(B, C) + d(C, A)\} \\
 &\leq \max\{d(A, C), d(C, A)\} + \max\{d(B, C), d(C, B)\} \\
 &= h(A, C) + h(C, B)
 \end{aligned}$$

où pour la dernière égalité nous avons utilisé l'inégalité bien connue que si  $M, N, P, Q \in \mathbb{R}^+$ , alors  $\max\{M + N, P + Q\} \leq \max\{M, P\} + \max\{N, Q\}$ .

Donc  $h$  est bien une métrique sur  $\mathcal{H}(\mathbf{X})$ , ce qui fait de  $(\mathcal{H}(\mathbf{X}), h)$  un EM. C'est déjà un premier pas dans la direction souhaitée : nous avons désormais les moyens de comparer deux ensembles appartenant à  $\mathcal{H}(\mathbf{X})$  par la distance de Hausdorff qui les sépare. Si les deux ensembles ne sont «pas trop différents», alors intuitivement cette distance devrait être assez petite.

Nous donnons à titre d'exemple pour satisfaire notre curiosité la figure 6, tirée de BARNSELY (voir [1]) :

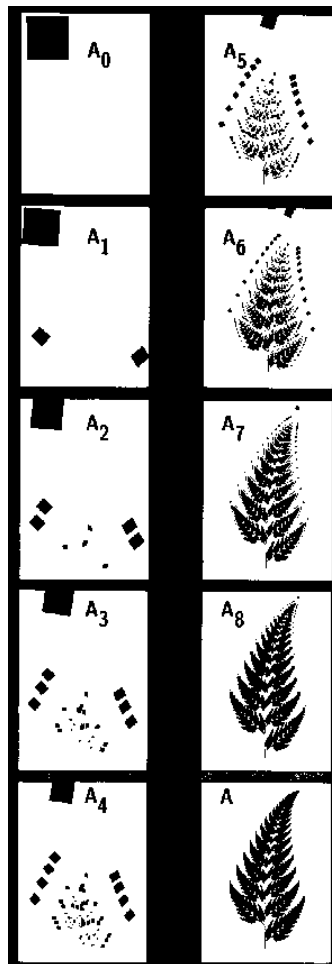


FIG. 6 – Exemple d'une suite  $\{A_n\}$  dans  $\mathcal{H}(\mathbf{X})$  convergeant vers un ensemble  $A$  en forme de fougère.

Mais même si notre intuition semble bonne, cela ne veut pas dire pour autant que cette suite de figures converge vers une figure déterminée ! Rappelons-nous que dans  $\mathbb{R}$  le  $n^{\text{ème}}$  terme de la série harmonique tend vers 0, mais que la série elle-même diverge.

Comment dès lors être sûrs d'avoir effectivement convergence dans notre espace  $(\mathcal{H}(\mathbf{X}), h)$  ? En montrant que nos figures forment une suite de Cauchy dans  $(\mathcal{H}(\mathbf{X}), h)$  et que celui-ci est complet !

Mais pour montrer que l'EM  $(\mathcal{H}(\mathbf{X}), h)$  est complet, il nous faut une notion supplémentaire : celle d'*extension de sous-suites* de suites de Cauchy. Pour ceci la définition suivante nous sera utile :

**Définition 3.8**

Soit un ensemble  $S \subset \mathbf{X}$  et soit  $\epsilon \geq 0$ . On définit l'ensemble  $S + \epsilon$  comme étant  $\{y \in \mathbf{X} \mid d(x, y) \leq \epsilon, \text{ pour un certain } x \in S\}$ , et on l'appelle *dilatation de S par une boule de rayon  $\epsilon$*  (illustration à la fig. 7).

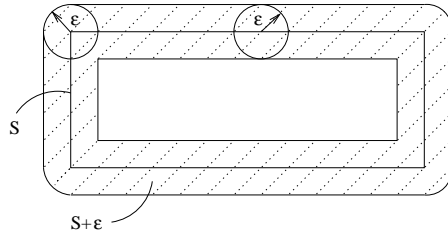


FIG. 7 – La dilatation du rectangle vide  $S \subset \mathbf{X} = \mathbb{R}^2$  est l'ensemble en pointillés.

Avec cette définition, nous pouvons maintenant observer une propriété intéressante de la distance de Hausdorff, qui fait l'objet du lemme suivant :

**Lemme 3.9**

Soient  $A$  et  $B \in (\mathcal{H}(\mathbf{X}), h)$ , où  $(\mathbf{X}, d)$  est un EM (pas forcément complet), et soit  $\epsilon > 0$ . Alors on a

$$h(A, B) \leq \epsilon \iff A \subset B + \epsilon \text{ et } B \subset A + \epsilon.$$

**Démonstration :**

( $\Rightarrow$ ) Supposons que  $h(A, B) \leq \epsilon$ . Comme  $h(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}$ , cela veut dire que  $d(A, B) \leq \epsilon$ . Or

$$\begin{aligned} d(A, B) &\leq \epsilon \\ \Leftrightarrow \max\{d(a, B) \mid a \in A\} &\leq \epsilon \\ \Rightarrow d(a, B) &\leq \epsilon \quad \forall a \in A \\ \Rightarrow a &\in B + \epsilon \quad \forall a \in A. \end{aligned}$$

Comme la démonstration est identique pour  $d(B, A)$ , on a finalement bien

$$h(A, B) \leq \epsilon \implies A \subset B + \epsilon \text{ et } B \subset A + \epsilon.$$

( $\Leftarrow$ ) Supposons maintenant que  $A \subset B + \epsilon$ . Alors pour n'importe quel  $a \in A$ ,  $\exists b \in B$  t.q.  $d(a, b) \leq \epsilon$ . Ainsi,  $\min d(a, b) \leq \epsilon \quad \forall b \in B$ , et donc  $d(a, B) \leq \epsilon$ . Mais ceci est vrai  $\forall a \in A$ , et donc également pour le maximum :

$$\max\{d(a, B) \mid a \in A\} \leq \epsilon, \text{ c'est-à-dire } d(A, B) \leq \epsilon.$$

Nous venons donc de montrer que  $A \subset B + \epsilon \Rightarrow d(A, B) \leq \epsilon$ , et la démonstration est identique pour  $d(B, A)$ , et par conséquent

$$A \subset B + \epsilon \text{ et } B \subset A + \epsilon \implies h(A, B) \leq \epsilon.$$

Le lemme est démontré. □

Ainsi, si nous considérons une suite de Cauchy d'ensembles (de points)  $\{A_n\}_{n=1}^\infty$  dans  $(\mathcal{H}(\mathbf{X}), h)$ , c'est-à-dire que  $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0$  t.q.

$$h(A_n, A_m) \leq \epsilon \quad \forall n, m \geq N,$$

avec le lemme, nous aurons que cette suite de Cauchy satisfait à la fois

$$A_m \subset A_n + \epsilon \quad \text{et} \quad A_n \subset A_m + \epsilon.$$

Nous allons maintenant observer une suite de Cauchy  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  dans  $\mathbf{X}$ , avec la propriété que  $x_n \in A_n \forall n$ . En particulier, il nous faut la propriété suivante, qui nous permettra d'étendre une sous-suite Cauchy  $\{x_{n_j} \in A_{n_j}\}_{j=1}^\infty$ , avec la propriété que  $x_{n_j} \in A_{n_j} \forall j$ , à une suite de Cauchy  $\{x_n \in A_n\}_{n=1}^\infty$  :

### Lemme 3.10 (Extension d'une sous-suite)

Soit  $(\mathbf{X}, d)$  un EM (pas forcément complet), et soit  $\{A_n\}_{n=1}^\infty$  une suite de Cauchy dans  $(\mathcal{H}(\mathbf{X}), h)$ .

Supposons que nous avons une sous-suite de Cauchy  $\{x_{n_j} \in A_{n_j}\}_{j=1}^\infty$  dans  $(\mathbf{X}, d)$ , avec  $\{n_j\}_{j=1}^\infty$  la suite croissante des indices de celle-ci ( $0 < n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ ).

Alors il existe une suite de Cauchy  $\{\tilde{x}_n \in A_n\}_{n=1}^\infty$  dans  $(\mathbf{X}, d)$  t.q.  $\tilde{x}_{n_j} = x_{n_j}$ , et ce  $\forall j = 1, 2, 3, \dots$

#### Démonstration :

Nous donnons d'abord la construction de la séquence  $\{\tilde{x}_n \in A_n\}_{n=1}^\infty$ , et ensuite nous montrerons qu'elle a bien les propriétés voulues.

Construction : pour chaque  $n \in \{1, 2, \dots, n_1\}$ , choisir

$$\tilde{x}_n \in \{x \in A_n \mid d(x, x_{n_1}) = d(x_{n_1}, A_n)\},$$

c'est-à-dire que l'on va choisir  $\tilde{x}_n$  comme le point (ou l'un des points s'il y en a plusieurs) de  $A_n$  le plus proche de  $x_{n_1}$  (ce point existe car  $A_n$  est compact).

On procède de manière semblable pour les points suivants : pour chaque  $j \in \{2, 3, \dots\}$  et chaque  $n \in \{n_{j-1} + 1, n_{j-1} + 2, \dots, n_j\}$ , on choisit

$$\tilde{x}_n \in \{x \in A_n \mid d(x, x_{n_j}) = d(x_{n_j}, A_n)\}.$$

Clairement, on a  $\tilde{x}_{n_j} = x_{n_j}$  et  $x_n \in A_n$ , par construction. Montrons que  $\{\tilde{x}_n\}_{n=1}^\infty$  est une suite de Cauchy : soit  $\epsilon > 0$  ; comme  $\{x_{n_j}\}$  et  $\{A_n\}$  sont des suites de Cauchy dans  $\mathbf{X}$ , respectivement  $\mathcal{H}(\mathbf{X})$ , on a que

$$\begin{aligned} \exists N_1 \text{ t.q. } n_k, n_j \geq N_1 &\Rightarrow d(x_{n_k}, x_{n_j}) \leq \epsilon/3 \\ \exists N_2 \text{ t.q. } m, n \geq N_2 &\Rightarrow h(A_m, A_n) \leq \epsilon/3 \end{aligned}$$

De plus, on a pour  $m, n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$

$$d(\tilde{x}_m, \tilde{x}_n) \leq d(\tilde{x}_m, x_{n_j}) + \underbrace{d(x_{n_j}, x_{n_k})}_{\leq \epsilon/3} + d(x_{n_k}, \tilde{x}_n)$$

où  $m \in \{n_{j-1} + 1, \dots, n_j\}$  et  $n \in \{n_{k-1} + 1, \dots, n_k\}$ .

Comme  $h(A_m, A_n) \leq \epsilon/3$ , il existe un certain  $y \in A_m \cap (\{x_{n_j}\} + \epsilon/3)$  de sorte que  $d(y, x_{n_j}) \leq \epsilon/3$ . Et donc à plus forte raison  $d(\tilde{x}_m, x_{n_j}) \leq \epsilon/3$ , puisque  $\tilde{x}_m$  est le point dans  $A_m$  le plus proche de  $x_{n_j}$  (voir dessin ci-dessous).

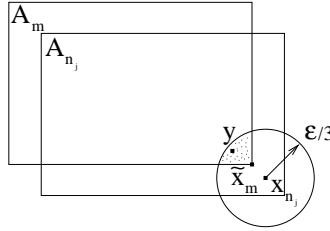


FIG. 8 – La situation de la démonstration.

Le raisonnement analogue peut être fait pour  $d(x_{n_k}, \tilde{x}_n)$ , de sorte qu'on a bien

$$d(\tilde{x}_m, \tilde{x}_n) \leq \underbrace{d(\tilde{x}_m, x_{n_j})}_{\leq \epsilon/3} + \underbrace{d(x_{n_j}, x_{n_k})}_{\leq \epsilon/3} + \underbrace{d(x_{n_k}, \tilde{x}_n)}_{\leq \epsilon/3} \leq \epsilon$$

et donc  $\{\tilde{x}_n\}_{n=1}^\infty$  est bien une suite de Cauchy. □

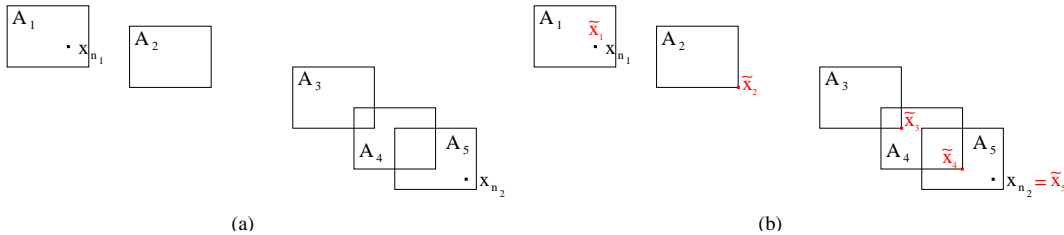


FIG. 9 – Comme on le voit, l'extension de la sous-suite de Cauchy à une suite de Cauchy est assez simple. En (a) nous avons une suite de Cauchy  $\{A_n\}$  dans  $\mathcal{H}(\mathbf{X})$ , et deux points de la sous-suite dans  $\mathbf{X}$  y sont représentés. L'extension à la suite de Cauchy dans  $\mathbf{X}$  est donnée en rouge.

À titre d'exercice, le lecteur peut essayer avec le dessin suivant, qui est un exemple donné par BARNSELY (voir [1]) :

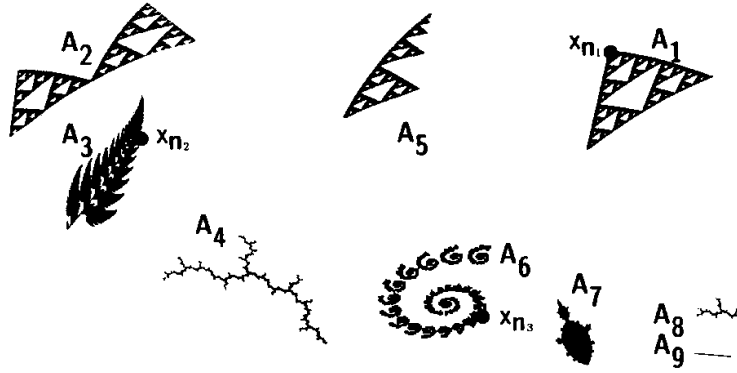


FIG. 10 – La suite  $\{A_n\}$  est très différente

### 3.2 La complétude de l'espace $\mathcal{H}(\mathbf{X})$

Pour simplifier la démonstration du théorème qui suit, on considère maintenant  $\mathbf{X}$  comme l'espace  $\mathbb{R}^n$ .

Nous avons désormais tous les éléments pour pouvoir aborder le théorème essentiel de cette partie.

#### **Théorème 3.11 (Complétude de l'espace des fractales)**

Soit  $(\mathbf{X}, d)$  un EM complet. Alors  $(\mathcal{H}(\mathbf{X}), h)$  est un EM complet.

De plus, si  $\{A_n \in \mathcal{H}(\mathbf{X})\}_{n=1}^{\infty}$  est une suite de Cauchy, alors la limite

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \in \mathcal{H}(\mathbf{X})$$

peut être caractérisée de la façon suivante :

$$A = \{x \in \mathbf{X} \mid \exists \text{ une suite de Cauchy } \{x_n \in A_n\} \text{ qui converge vers } x\}.$$

**Démonstration :** Soit  $\{A_n\}$  une suite de Cauchy dans  $\mathcal{H}(\mathbf{X})$  et soit  $A$  défini comme dans l'énoncé du théorème. La démonstration se fait en 5 parties :

- (a)  $A \neq \emptyset$ ;
- (b)  $A$  est fermé;
- (c)  $\forall \epsilon > 0, \exists N$  t.q.  $n \geq N \Rightarrow A \subset A_n + \epsilon$ ;
- (d)  $A$  est borné, et par conséquent, par (b) et la dernière remarque de la section 2,  $A$  est compact
- (e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ .

**Démonstration de (a) :** Comme  $\{A_n\}$  est une suite de Cauchy dans  $\mathcal{H}(\mathbf{X})$ , il existe certainement une suite de nombres  $N < N_1 < N_2 < \dots < N_k < \dots$  t.q.

$$h(A_m, A_n) \leq \frac{1}{2^i} \text{ dès que } m, n \geq N_i .$$



Prenons un  $x_{N_1} \in A_{N_1}$  ; comme  $h(A_{N_1}, A_{N_2}) \leq \frac{1}{2}$ , on peut facilement trouver un  $x_{N_2} \in A_{N_2}$  t.q.  $d(x_{N_1}, x_{N_2}) \leq \frac{1}{2}$ . Supposons que nous ayons trouvé une suite finie  $x_{N_i} \in A_{N_i}$ , ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), et t.q.  $d(x_{N_{i-1}}, x_{N_i}) \leq \frac{1}{2^{i-1}}$  ; alors comme  $h(A_{N_k}, A_{N_{k+1}}) \leq \frac{1}{2^k}$ , on peut trouver un  $x_{N_{k+1}} \in A_{N_{k+1}}$  t.q.  $d(x_{N_k}, x_{N_{k+1}}) \leq \frac{1}{2^k}$  (par exemple,  $x_{N_{k+1}}$  est le point de  $A_{N_{k+1}}$  le plus proche de  $x_{N_k}$ ).

Nous avons donc construit par induction une suite  $\{x_{N_i} \in A_{N_i}\}$  t.q.

$$d(x_{N_i}, x_{N_{i+1}}) \leq \frac{1}{2^i}.$$

C'est une suite de Cauchy : en effet, pour un  $\epsilon > 0$ , choisissons un  $N_\epsilon$  t.q.

$$\sum_{i=N_\epsilon}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \epsilon.$$

Alors  $m, n \geq N_\epsilon$  ( $m < n$ ) implique

$$\begin{aligned} d(x_{N_m}, x_{N_n}) &\leq \underbrace{d(x_{N_m}, x_{N_{m+1}})}_{\leq \frac{1}{2^m}} + \underbrace{d(x_{N_{m+1}}, x_{N_{m+2}})}_{\leq \frac{1}{2^{m+1}}} + \dots + \underbrace{d(x_{N_{n-1}}, x_{N_n})}_{\leq \frac{1}{2^{n-1}}} \\ &\leq \frac{1}{2^{N_\epsilon}} + \frac{1}{2^{N_\epsilon+1}} + \dots + \frac{1}{2^{N_\epsilon+n-1-m}} \\ &< \sum_{i=N_\epsilon}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \epsilon \end{aligned}$$

Donc par le lemme d'extension, il existe une suite de Cauchy  $\{a_n \in A_n\}_{n=1}^{\infty}$  t.q.  $a_{N_n} = x_{N_n} \forall n$ . Puisque  $\mathbf{X}$  est complet, sa limite existe dans  $\mathbf{X}$  et est dans  $A$  par définition de  $A$ . Donc  $A$  est non vide et le point (a) est démontré.

**Démonstration de (b) :** Supposons que nous ayons une suite  $\{a_i \in A\}_{i=1}^{\infty}$  qui converge vers un point  $a$  (attention, cette suite est dans  $A$ !). Si ce point  $a$  appartient à  $A$ , alors par la définition 2.9, nous aurons prouvé que  $A$  est fermé (puisque  $a$  peut *a fortiori* être n'importe quel point limite de cette suite).

Or par la définition de  $A$ , pour tout  $i$  il existe une suite de Cauchy  $\{x_{i,n} \in A_n\}_{n=1}^{\infty}$  qui converge vers le point  $a_i \in A$  (d'ailleurs nous avons trouvé explicitement cette suite au point (a)).

Mais pour tout  $n$  il existe un  $i(n)$  tel que

$$d(x_{i(n),n}, a_n) \leq d(a_n, a)$$

Par hypothèse, la suite  $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$  est elle-même une suite convergente. Pour  $n$  assez grand, nous aurons donc

$$d(x_{i(n),n}, a) \leq 2d(a_n, a)$$

et ainsi la suite  $\{x_{i,n}\}$  converge vers  $a$ , et par définition de  $A$ , ce point  $a$  est dans  $A$ , ce qu'il fallait montrer.

**Démonstration de (c) :** Comme  $\{A_j\}$  est une suite de Cauchy dans  $\mathcal{H}(\mathbf{X})$ , par le lemme 2, il existe un certain  $N$  t.q.  $A_m \subset A_n + \epsilon$  dès que  $m, n \geq N$  (en particulier  $a_m \in A_m$  implique que  $a_m \in A_n + \epsilon$ ). Nous voulons montrer que ceci implique aussi que  $A \subset A_n + \epsilon$ .

Supposons que nous ayons un point  $a \in A$ ; alors par (b) il existe une suite  $\{a_i \in A_i\}$  qui converge vers  $a$ . De plus,  $A_n$  est compact, puisque dans  $\mathcal{H}(\mathbf{X})$ .  $A_n$  est donc fermé, et donc  $A_n + \epsilon$  aussi. Or  $A_n + \epsilon$  étant fermé, cela veut dire que les points limites d'une suite dans  $A_n + \epsilon$  sont encore dans  $A_n + \epsilon$ . Et comme  $a_m \rightarrow a$  lorsque  $m \rightarrow \infty$ , et que  $a_m \in A_n + \epsilon$ , nous avons que  $a \in A_n + \epsilon$ , pour  $n$  assez grand. C'est-à-dire que  $A \subset A_n + \epsilon$ , ce qu'il fallait montrer.

**Démonstration de (d) :** Suivant la convention faite ( $\mathbf{X} = \mathbb{R}^n$ ),  $A_n$  est compact et donc  $A_n + \epsilon$  aussi. Par conséquent,  $A_n + \epsilon$  est borné. Or par (c),  $A \subset A_n + \epsilon$  dès que  $n \geq N$ ; donc  $A$  est borné. Mais par (b),  $A$  est également fermé. Donc  $A$  est compact.

**Démonstration de (e) :** Par (d), nous avons que  $A \in \mathcal{H}(\mathbf{X})$ . Il reste à montrer que  $A = \lim_{i \rightarrow \infty} A_i$ , ou autrement dit, que  $h(A, A_n) \leq \epsilon$ , à partir d'un certain  $n$ . Mais ceci sera fait si nous montrons que  $A_n \subset A + \epsilon$ , car nous avons déjà vu en (c) que  $A \subset A_n + \epsilon$ .

Comme en (a), on considère une suite d'entiers  $N < N_1 < N_2 < \dots < N_j < \dots$  t.q. pour  $k, l \geq N_i$ , on ait  $h(A_k, A_l) \leq \frac{\epsilon}{2^i}$ , et donc entre autres, par le lemme 2

$$A_k \subset A_l + \frac{\epsilon}{2^i}.$$

En particulier, pour  $k, l \geq N_1$  et  $k = n, l = N_1$ , nous avons  $A_n \subset A_{N_1} + \frac{\epsilon}{2}$ . Donc si nous avons un point  $y \in A_n$ , on peut trouver un point  $x_{N_1} \in A_{N_1}$  t.q.  $d(y, x_{N_1}) \leq \frac{\epsilon}{2}$ . De même,  $\exists x_{N_2} \in A_{N_2}$  t.q.  $d(x_{N_1}, x_{N_2}) \leq \frac{\epsilon}{2^2}$ , c'est-à-dire tel que  $A_{N_1} \subset A_{N_2} + \frac{\epsilon}{2^2}$ .

On continue ainsi pour former une suite de points  $\{x_{N_j}\}$  t.q

$$d(x_{N_{i-1}}, x_{N_i}) \leq \frac{\epsilon}{2^i}$$

et donc

$$\begin{aligned} d(y, x_{N_i}) &\leq d(y, x_{N_1}) + d(x_{N_1}, x_{N_2}) + \dots + d(x_{N_{i-1}}, x_{N_i}) \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2^2} + \dots + \frac{\epsilon}{2^i} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^i} \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Il est évident que cette suite est une suite de Cauchy; celle-ci converge vers un certain point  $x \in A$ .

Nous avons dès lors terminé, car  $d(y, x_{N_i}) \leq \epsilon \forall i$

$$\begin{aligned} \xRightarrow{i \rightarrow \infty} d(y, x) &\leq \epsilon \\ \implies d(A_n, A) &\leq \epsilon \\ \implies h(A_n, A) &\leq \epsilon \\ \implies \lim_{n \rightarrow \infty} A_n &= A \\ \implies (\mathcal{H}(\mathbf{X}), h) &\text{ est complet} \end{aligned}$$

□

## 4 Les IFS : Iterated Function Systems

Michael BARNSELY invente en 1987 les IFS lorsqu'il est professeur de mathématiques au Georgia Tech. Un IFS consiste en un EM complet  $(\mathbf{X}, d)$  et un ensemble fini de transformations.

Donnons-nous un point dans le plan  $(x_n, y_n)$ . Nous pouvons sans autres lui appliquer une transformation affine pour obtenir un nouveau point  $(x_{n+1}, y_{n+1})$  tel que

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= a x_n + b y_n + e \\y_{n+1} &= c x_n + d y_n + f\end{aligned}$$

où  $a, b, c, d, e$  et  $f$  sont des constantes quelconques, et  $(x_0, y_0)$  est donné.

Nous pouvons dès lors considérer une application  $W$  qui décrit notre transformation, et sous forme matricielle nous pouvons écrire le système précédent comme suit :

$$W \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

ou encore

$$W(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{b}.$$

De façon tout à fait générale, le vecteur  $\vec{b}$  décrit simplement une translation, et la matrice  $A$  est la composition de rotations et d'un changement d'échelle.

### Exemple 4.1 (Similitude)

Prenons un pur changement d'échelle de facteur 0.75, sans aucune translation. Alors l'équation (4.1) devient :

$$W \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75 & 0 \\ 0 & 0.75 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Appliquons-la à un carré centré à l'origine : le résultat est un carré, également centré à l'origine, mais de dimension  $3/4$  du carré original :

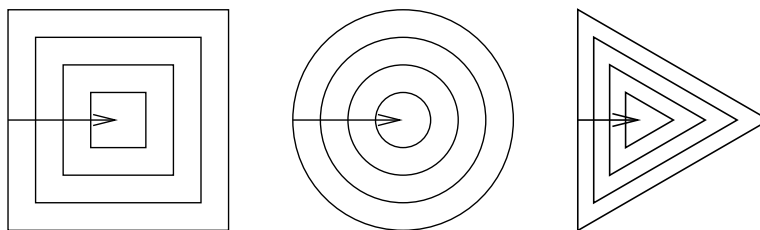


FIG. 11 – La transformation appliquée successivement trois fois sur des figures différentes.

En réappliquant la transformation beaucoup de fois, on voit que la figure tend vers un point : l'origine. Si maintenant on remplace le carré par un cercle, un triangle, ou n'importe quelle autre figure, le résultat sera le même !

Notre application définit donc une suite convergente dans  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ ,  $h$  dont la limite est l'origine !

Considérons maintenant les trois transformations affines suivantes :

$$W_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$W_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$W_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

et appliquons-les simultanément à notre carré centré, de côté de longueur 20, comme montré à figure ci-dessous :

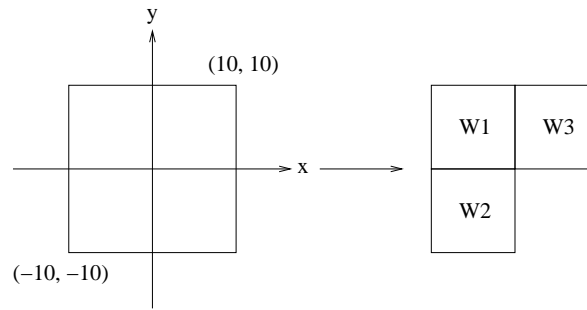


FIG. 12 – Le résultat des trois transformations  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$ .

En appliquant plusieurs fois les transformations, on obtient la suite de figures suivante :

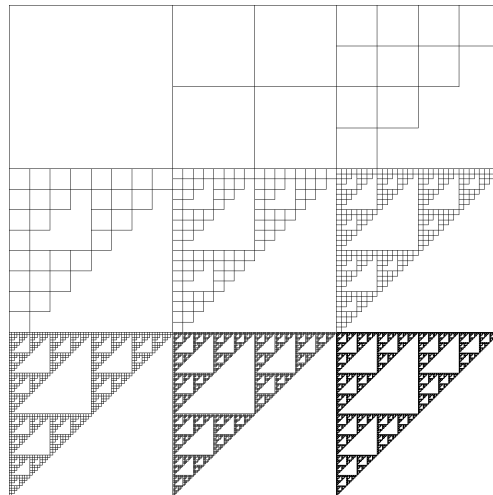


FIG. 13 – Le résultat après huit itérations.

On va maintenant calculer la distance de Hausdorff d'une itération à l'autre. Si  $l$  désigne le côté du carré initial, alors la distance de Hausdorff entre les itérations  $i$  et  $i + 1$  est  $\sqrt{2} \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{2^i}$ .

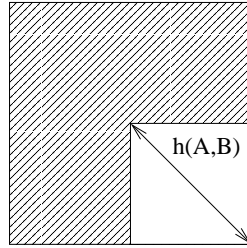


FIG. 14 – Illustration de la distance de Hausdorff entre deux itérations.

Donc, puisque la distance tend vers 0 lorsque  $i \rightarrow \infty$ , la suite converge et on appelle sa limite *triangle de Sierpinski*.

Si maintenant on opère ces mêmes transformations sur un triangle, le résultat est surprenant :

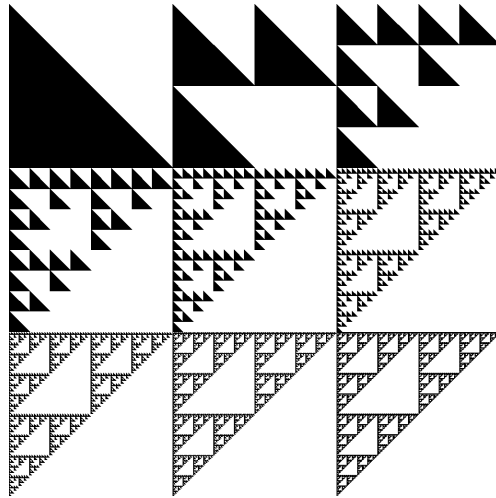


FIG. 15 – On retrouve la même figure désormais bien connue.

En fait, dans tous les cas, quelle que soit la forme de départ, on obtient le triangle de Sierpinski. Et cette image n'est décrite que par trois transformations affines ! Le triangle de Sierpinski est ainsi un attracteur fractal des équations données. Pour le lecteur qui connaît déjà les IFS nous remarquons encore que les équations constituent une version déterministe des IFS.

Nous aurions pu «deviner» que les deux exemples donnés allaient converger vers la même figure. En effet, la distance de Hausdorff entre le carré et le triangle correspond à la demi-diagonale du carré, comme montré sur la figure ci-après. À chaque itération, cette distance diminue exactement de moitié. Ainsi, quelle que soit la longueur du côté du carré, nous trouverons facilement un epsilon tel qu'à partir d'un certain nombre d'itérations, cette distance devient aussi petite que l'on veut.

Par le théorème 3.11 on a donc que la suite de triangles converge vers le même domaine que la suite de carrés.

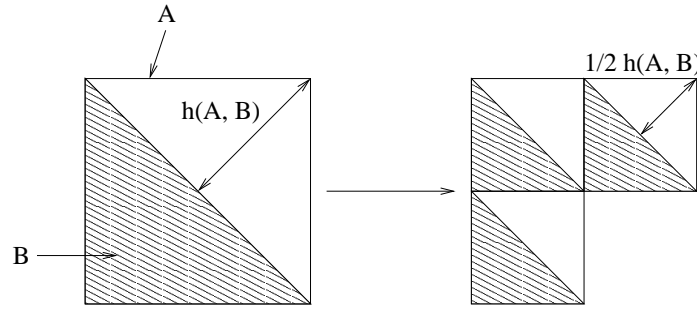


FIG. 16 – Illustration de la distance de Hausdorff entre les deux exemples

### Le jeu du chaos

On considère maintenant un petit jeu : on a un triangle de sommets par exemple  $A = (0, 0)$ ,  $B = (0, 1)$  et  $C = (1, 1)$ . On suppose avoir un dé avec deux faces  $A$ , deux faces  $B$  et deux faces  $C$ . On part d'un des trois sommets au hasard (par exemple en lançant le dé), et à chaque lancer de dé, on se déplace dans la direction du sommet sélectionné en parcourant la moitié de la distance. À chaque fois, on marque le point et on repart de celui-ci.

L'exemple ci-dessous nous donne une idée du principe du jeu.

#### Exemple 4.2

Commençons par exemple par le sommet  $A$ . Nous tirons le dé, et nous tombons sur  $C$  ; on va alors à mi-chemin en direction de  $C$  et on marque un point. On lance le dé, et on suppose qu'on tombe sur  $B$  ; on va à mi-chemin en direction de  $B$  et on marque un point, et ainsi de suite un certain nombre de fois.

La figure ci-après a été obtenue en partant du sommet  $A$  et en lançant cinq fois de suite le dé.

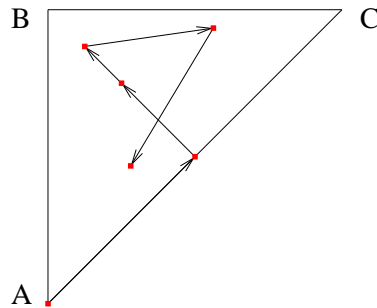


FIG. 17 – Illustration du jeu du hasard. Les flèches indiquent la direction et la distance parcourue, et les points sont marqués en rouge. Ici par exemple, en partant du sommet  $A$ , le dé est tombé successivement sur  $C, B, B, C, A$ .

L'expression mathématique de ce problème est la suivante :

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 0.5 x_n + 0.5 u_k \\y_{n+1} &= 0.5 y_n + 0.5 v_k\end{aligned}$$

où  $(x_0, y_0)$  est donné, et les points  $(u_k, v_k)$ ,  $k=1, 2, 3$ , sont les coordonnées des sommets du triangle.

La différence cette fois est que l'on attribue à chaque transformation une probabilité de succès  $p_k$  ( $=1/3$  ici) pour tout  $k$ .

On peut désormais voir un IFS comme un ensemble de transformations affines munies chacune d'une probabilité. Ceci constitue une version probabiliste des IFS.

## 5 Les L-systèmes

Dans les années 80, un professeur du MIT, Seymour PAPERT, désireux de trouver un moyen pédagogique d'apprendre la programmation aux enfants, eut l'idée géniale de créer la tortue LOGO, du nom du langage utilisé.

La tortue se déplace avec son propre système d'axes  $\{\vec{H}, \vec{L}\}$  sur le dos, et se promène librement dans le plan. Plusieurs commandes peuvent lui être données, comme par exemple :

- show turtle : affiche la tortue
- hide turtle : cache la tortue
- forward  $n$  : fait avancer la tortue de  $n$  pas
- back  $n$  : fait reculer la tortue de  $n$  pas
- right  $\alpha$  : fait pivoter la tortue autour de son axe, à droite, d'un angle  $\alpha$
- left  $\alpha$  : idem, mais en la faisant tourner à gauche
- setpos  $P$  : place la tortue en un point  $P$
- home : place la tortue en  $(0, 0)$

Si elle avance, la tortue trace un trait de la longueur du pas lorsqu'elle est visible, et n'en trace aucun sinon.

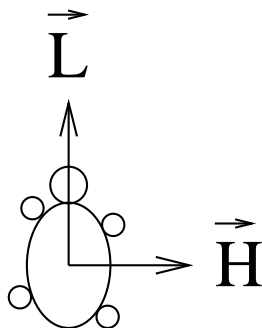


FIG. 18 – La tortue LOGO.

### 5.1 Extension au cas 3D et grammaire des L-systèmes

Dans le langage ASAS, le concept de tortue a été étendu à la troisième dimension, qui faisait défaut à notre tortue LOGO. On définit le vecteur  $\vec{U}$  comme étant  $\vec{U} = \vec{H} \wedge \vec{L}$ , et les commandes ont été adaptées au cas 3D :

- $s$  : définit la longueur du trait
- $\theta$  : définit l'angle (en degrés)
- $F(s)$  : avancer en traçant un trait de longueur  $s$
- $X(s)$  : même chose que  $F$ , mais sans tracer de trait
- $+(\theta)$  : tourner à gauche d'un angle  $\theta$  autour de  $\vec{U}$
- $-(\theta)$  : idem en tournant à droite
- $\&(\theta)$  : tourner à gauche d'un angle  $\theta$  autour de  $\vec{L}$
- $\wedge(\theta)$  : idem en tournant à droite
- $/(\theta)$  : tourner à gauche d'un angle  $\theta$  autour de  $\vec{H}$
- $\backslash(\theta)$  : idem en tournant à droite



La figure ci-dessous permet de se faire une meilleure idée géométrique des opérations sur les axes.

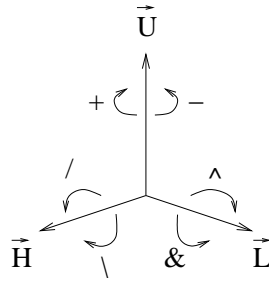


FIG. 19 – La représentation des trois axes.

Dans ce qui suit, si les arguments  $s$  et  $\theta$  sont fixés pour toute la production, nous les omettrons parfois, comme dans l'exemple suivant.

**Exemple 5.1 (Construction d'un carré)**

Commençons par construire un objet très simple : un carré. Nous posons par exemple  $s = 1$ , et  $\theta = 90^\circ$  : le carré sera engendré par la production  $F - F - F - F$

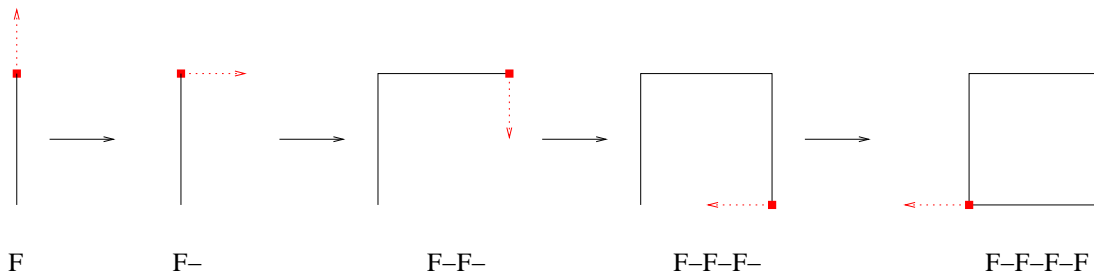
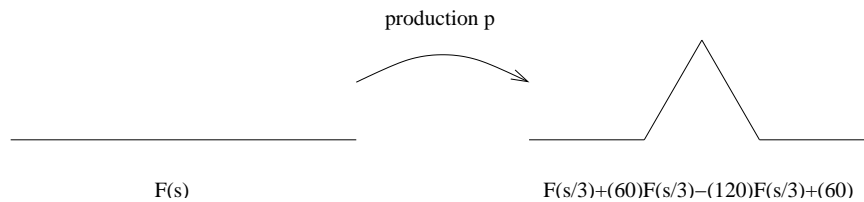


FIG. 20 – Différentes étapes de la production ; le point rouge donne l'emplacement de la tortue, la flèche rouge la direction où elle regarde.

Regardons maintenant un exemple plus complexe qui met en scène un *initiateur* (c'est-à-dire un élément initial), et un *générateur* (une suite de productions).

**Exemple 5.2 (Flocon de von Koch)**

Cette fois-ci, l'initiateur est une simple ligne de longueur  $s$ . La production  $p$  est  $F(s) \mapsto F(s/3) + (60) F(s/3) - (120) F(s/3) + (60) F(s/3)$ . Le résultat est montré ci-dessous :



Appliquons maintenant cette production plusieurs fois de suite à un triangle.

A chaque fois que l'on applique  $p$ , cela revient donc à remplacer chaque segment de droite par l'élément générateur, toutes proportions gardées. Nous avons représenté les premiers pas ci-dessous.

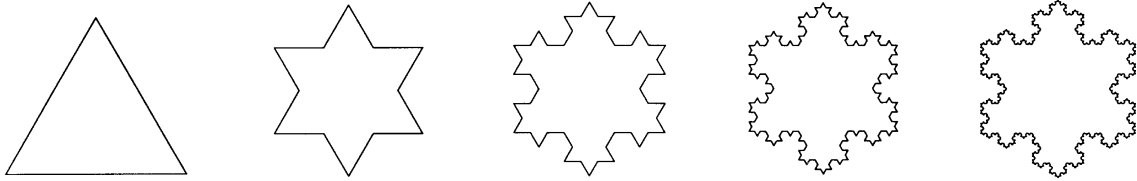


FIG. 21 – Le «flocon» résulte de l'application de la production  $p$  une infinité de fois.

La distance de Hausdorff entre les itérations  $i$  et  $i + 1$  est inférieure à  $\frac{1}{3^i}$ , comme on peut le voir à la fig. 22. On a donc convergence de la suite et on appelle sa limite *Flocon de von Koch*.

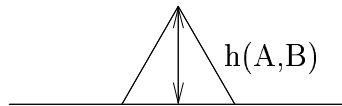


FIG. 22 – Illustration de la distance de Hausdorff entre deux itérations.

Le flocon de von Koch est un objet *auto-similaire* : on retrouve le générateur quel que soit le niveau de zoom auquel on observe la figure. Il convient de remarquer également que la longueur de la courbe est multipliée par  $4/3$  à chaque fois que l'on applique  $p$ , et donc la longueur (en restant sur le bord du flocon) entre deux points distincts quelconques tend vers l'infini !

Introduisons maintenant dans notre grammaire deux opérations qui joueront un rôle essentiel dans la création de structures arborescentes :

- [ : «empile» l'état de la tortue (positions, orientations, etc.)
- ] : «dépile» l'état

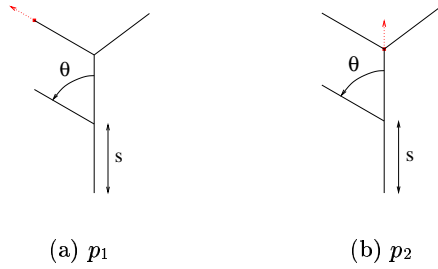
(voir également section 6.1.2 pour plus de détails)

Ainsi, lorsque l'on effectue l'opération «[», l'ordinateur garde en mémoire la position et l'orientation de la tortue juste avant l'opération. Lorsqu'on appelle ensuite l'opération «]», l'ordinateur replace la tortue au point gardé en mémoire et repart de ce point.

### Exemple 5.3 (Structures arborescentes)

Considérons  $s$  et  $\theta$  fixés, et regardons le système de production suivant :

$$\begin{array}{lll}
 \text{initiateur} & \omega & : F \\
 \text{productions} & p_1 & : F \mapsto F[+F]F[-F] + F \\
 & p_2 & : F \mapsto F[+F]F[-F][+F]
 \end{array}$$

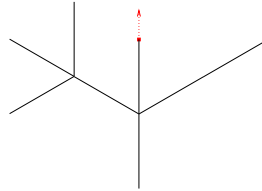


Graphiquement, l'ouverture par un «[» correspond donc au départ d'une «branche» de l'arbre, et la fermeture par «]» nous ramène au début de cette branche.

On peut bien évidemment utiliser plusieurs fois l'opération «[...]» à l'intérieur d'autres crochets. Ainsi le système

$$\begin{array}{ll} \text{initiateur } \omega & : F \\ \text{production } p & : F \mapsto F[+F[+F][F][-F]][-FF]F \end{array}$$

produira l'arbre suivant :



Plutôt que de décrire tout l'arbre par une longue production, il devient intéressant de réutiliser celle-ci plusieurs fois de suite. De la même façon que nous avons créé le flocon de von Koch, nous pourrions créer des arbres complexes avec une production très simple.

Pour cela considérons le système simple suivant

$$\begin{array}{ll} \text{initiateur } \omega & : F \\ \text{production } p & : F \mapsto F[+F][-F]F \end{array}$$

et appliquons la production  $p$  deux fois. Chaque opération  $F$  de  $p$  est alors remplacée par  $F[+F][-F]F$ , si bien que le résultat affiché sera

$$F[+F][-F]F[+F[+F][-F]F][-F[+F][-F]F]F[+F][-F]F$$

## 5.2 L-systèmes stochastiques

Afin de produire une variété d'arbres différents à l'aide d'un seul système, nous pouvons encore attribuer des probabilités aux différentes productions :

$$\begin{array}{ll} \text{initiateur } \omega & : F \\ \text{productions } p_1 & : F \xrightarrow{1/3} F[+F]F[-F]F \\ & p_2 : F \xrightarrow{1/3} F[+F]F \\ & p_3 : F \xrightarrow{1/3} F[-F]F \end{array}$$

À chaque itération une des trois productions est choisie, donc ce système générera un arbre différent à chaque fois.

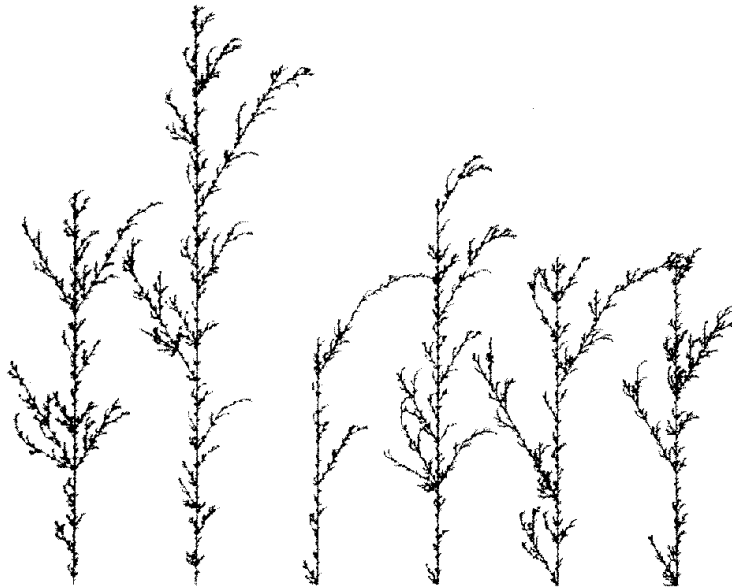


FIG. 23 – Les six arbres ci-dessus ont été obtenus avec la même production  $\omega$  décrite auparavant ; on voit bien l'influence des différentes probabilités.

Un autre opérateur intéressant est l'opérateur  $!(w)$ , qui fixe l'épaisseur du trait tracé à  $w$ . On peut ainsi gérer l'épaisseur des branches en la faisant diminuer à chaque itération.

## 6 Implémentation des algorithmes

### 6.1 L-systèmes à deux dimensions

L'algorithme pour créer des images représentant un L-système se divise en deux : premièrement on décide du type de fractale en choisissant (dans notre cas) trois paramètres : la chaîne de début et les deux substitutions. On itère et on obtient une longue chaîne. Après on passe au dessin, dont la façon est décidée par la chaîne calculée au début, l'angle et le rapport entre les longueurs des branches.

Cet algorithme a été mis en pratique dans le programme *Lsys*.

#### 6.1.1 Algorithme de calcul du fractale

Chaque L-système est donné par une chaîne de départ et  $n$  algorithmes de substitution.

Chaîne	F
F →	F[+FX][-XF]
X →	X[+XF][-FX]

FIG. 24 – Chaîne et Algorithme pour la représentation d'un arbre

Dans l'exemple ci-dessus on a deux algorithmes de substitution : le premier sur  $F$ , et le deuxième sur  $X$ . Aucune instruction ne correspond à  $X$  : ce symbole est là juste pour rendre l'arbre irrégulier, puisqu'il ne sera pas utilisé lors du dessin de l'arbre. En utilisant l'applet on peut remarquer comme les algorithmes qui utilisent  $X$  donnent lieu à des arbres asymétriques.

Donnés une chaîne et un algorithme, on décide du nombre d'itérations  $n$ . Pour  $n \rightarrow \infty$  on obtiendra un fractale. En général pour un dessin sur écran d'ordinateur, on se contente d'un nombre d'itérations allant de cinq à huit.

Maintenant l'ordinateur se met à travailler. On va montrer les premières deux itérations.

On part de la chaîne et on applique  $F \rightarrow \dots$  et  $X \rightarrow \dots$ . Puisque dans notre cas la chaîne est  $F$ , après une itération on va avoir la nouvelle chaîne  $F[+FX][-XF]$ . Maintenant le jeu devient intéressant : on va appliquer les deux substitutions à la nouvelle chaîne à la fois. Le résultat est  $F[+FX][-XF][+F[+FX][-XF]X[+XF][-FX]][-X[+XF][-FX]F[+FX][-XF]]$ .

Dans le programme en Java on a utilisé une méthode itérative, tandis que dans la première version du programme en C++, on a utilisé une méthode récursive, à laquelle on a renoncé ensuite a cause de l'incontrôlabilité de la récursion.

Les deux morceaux de code sur la page suivante produisent un mot qui va être interprété par une autre procédure.

#### 6.1.2 Algorithme de dessin

Maintenant que l'on a une longue chaîne, on doit la dessiner. Les instructions de dessin (tortue LOGO) sont pratiquement identiques à celles décrites dans la section 5.

```

StringBuffer tree;

private void substitute()
{
    StringBuffer temp = new StringBuffer();

    for (int i=0; i<tree.length();i++)
    {
        if (tree.charAt(i) == 'F')
            temp.append(fStr);
        else if (tree.charAt(i) == 'X')
            temp.append(xStr);
        else
            temp.append(tree.charAt(i));
    }
    tree = temp;
}

for (int i=0;i<nSubs;i++)
    substitute();

```

FIG. 25 – Le code JAVA

```

char *substitute(char *string) {
    iter--;
    char *temp;
    int x_len = strlen(x); int f_len = strlen(f);
    int max = x_len > f_len ? x_len : f_len;
    int str_len = strlen(string);
    int i, j;
    /* setup temp to be the appropriate size */
    temp = new char[(max * str_len) + 1];
    for (j = i = 0; i < str_len; i++) {
        switch (string[i]) {
            case 'X':
                memcpy(&(temp[j]), x, x_len);
                j += x_len;
                break;
            case 'F':
                memcpy(&(temp[j]), f, f_len);
                j += f_len;
                break;
            default:
                temp[j] = string[i];
                j++;
                break;
        }
    }
    temp[j] = '\0';
    if (iter == 0) return temp;
    else return substitute(temp);
}

```

FIG. 26 – Le code C++

## 6.2 Arbre ternaire (trois dimensions)

Ceci a été réalisé dans *Lsys* aussi, même si l'algorithme pour le créer est bien différent de celui en deux dimensions.

F	fait un trait selon la direction enregistrée (forward)
+	tourne dans le sens antihoraire de $\alpha$ degrés
-	tourne dans le sens horaire de $\alpha$ degrés
[	début d'une branche : à ce point il faut se souvenir de la position et de l'angle avant la parenthèse, qui seront relus dès que la parenthèse sera fermée.
]	fin de la branche
X (ou autre lettre)	ne rien faire

FIG. 27 – Instructions de dessin

On peut comparer cet algorithme à celui utilisé pour les figures 13 et 15 (triangle de Sierpinski) : d'abord on définit une figure de base, ici un segment (par ses deux extrémités), et après cela, on applique une transformation affine, qui dans ce cas est une rotation de  $\alpha$  degrés d'axe perpendiculaire au segment "parent" suivie d'une rotation autour du segment "parent" de 0, 120, 240 degrés. On continue à appliquer cette transformation en enregistrant tous les segments que l'on calcule (avec Sierpinski au contraire, on effaçait les carrés/triangles de l'itération précédente).

L'image générée par ce programme se trouve à la section 6.4.

### 6.3 Pyramide de Sierpinski

L'algorithme utilisé est identique à celui utilisé pour les figures 13 et 15. En voici les détails :

- Image initiale : tétraèdre de sommets  $p_0 = (0, 0, 1)$ ,  $p_1 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{1}{2})$ ,  $p_2 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{2})$ ,  $p_3 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2})$
- Transformations :

$$W_i \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{pmatrix}$$

où  $a_i, b_i, c_i$  sont les coordonnées du  $i^{eme}$  sommet du tétraèdre de l'itération précédente. L'image générée par ce programme se trouve à la section 6.4.

### 6.4 Résultats

On montre ici les résultats statiques – avec les applications on peut même créer des animations.

Tous les fichiers sont accessibles à l'adresse <http://dmawww.epfl.ch/~rezzonic/proj/pri2001/>.

#### Triangle de Sierpinski

Chaîne F-F-F  
 F→ F-F+F+F-F  
 Angle : 120

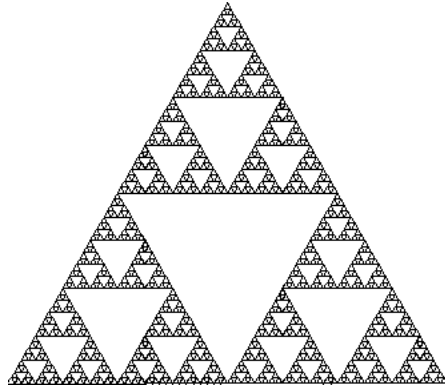


FIG. 28 – Triangle de Sierpinski créé avec le programme *Lsys*

### Flocon de Koch

Chaîne F-F-F  
F→ F+F-F+F  
Angle : 60

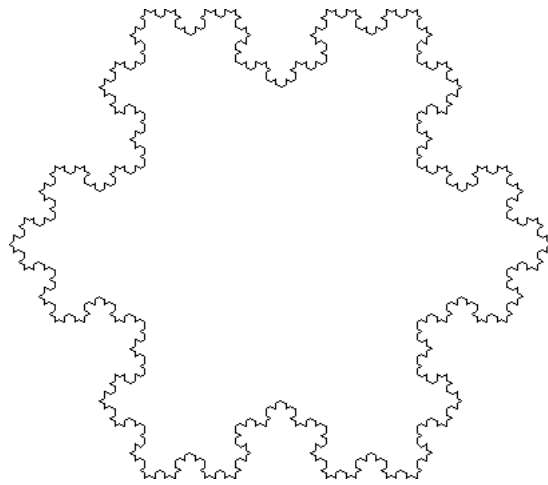


FIG. 29 – Flocon de Koch créé avec le programme *Lsys*



### Arbre ternaire (3D)



FIG. 30 – Arbre ternaire créé avec le programme *Lsys*

### Pyramide de Sierpinski

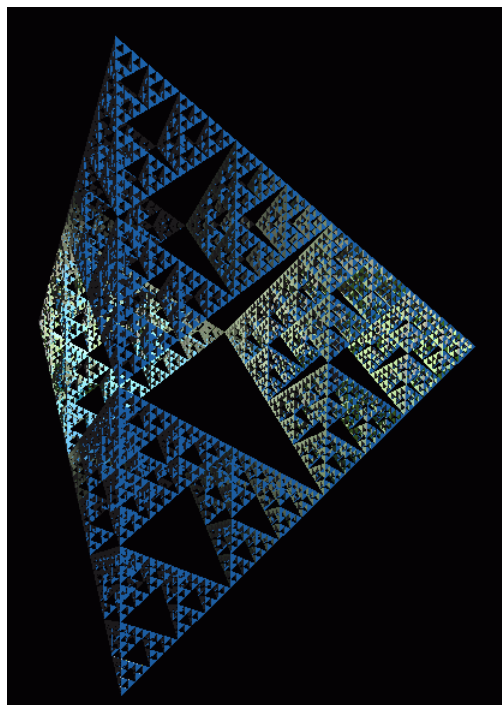


FIG. 31 – Pyramide de Sierpinski créée avec le programme *Sier*

## 7 Logiciels utilisés

L'applet a été développée en Java avec *Sun JDK 1.1*, les autres programmes sont en *C++*. Les programmes en *C++* utilisent des nombreux outils de développement libres : bibliothèques *Mesa* pour la visualisation en temps réel, *FLTK* pour la création d'interface (l'outil *Fluid* nous a permis de générer une partie du code). On a aussi la possibilité d'enregistrer les images en format *POV*, c'est-à-dire les programmes génèrent du code qui peut être interprété par *PovRay*. On peut aussi créer des animations, mais pour cela il faut avoir installé *imageMagick* et *gifsicle*.

### 7.1 Description détaillée des logiciels

**Sun JDK** (<http://java.sun.com>) : paquetage complet pour la création et la visualisation d'applications et applets Java.

**Compilateur g++** (<http://gcc.gnu.org>) : compilateur *C++*.

**Bibliothèques Mesa** (<http://www.mesa3d.org>) : cette bibliothèque est indispensable si l'on veut faire du graphisme en temps réel. Pour l'utiliser il faut avoir des bonnes notions de géométrie puisque les commandes correspondent à des opérations matricielles.

**FLTK** (<http://www.fltk.org>) : cette bibliothèque permet de créer des interfaces utilisateur d'une façon très simple grâce à l'application **Fluid**, qui génère du code *C++*.

**Povray** (<http://www.povray.org>) : puissant raytracer qui génère des images à partir de fichiers texte.

**ImageMagick** (<http://www.imagemagick.org>) : collection d'outils pour la création, l'édition et la conversion d'images.

**Gifsicle** (<http://www.lcdf.org/~eddieltwo/gifsicle>) : outils pour créer des gifs animées à partir des images séparées.

### 7.2 Arbre d'exécution

Pas tous les programmes sont utilisés directement par les programmes principaux (*Lsys* et *Sier*). Voici un arbre qui illustre la succession des programmes lors de l'exécution de *Lsys*. L'arbre est le même que dans le cas du programme *Sier*.

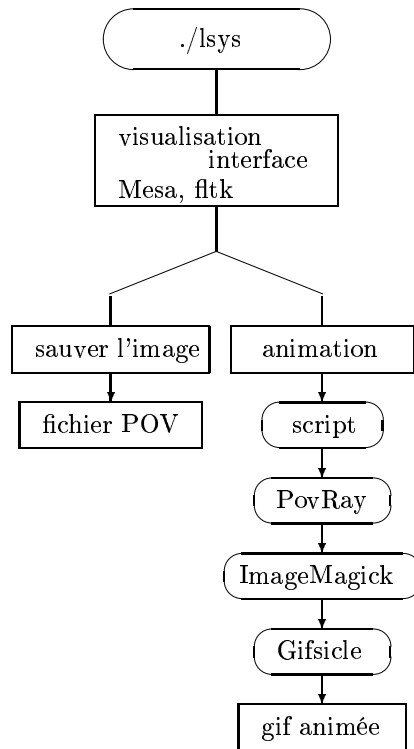


FIG. 32 – Arbre d’exécution du programme *Lsys*

## 8 Conclusions

Dans notre optique de départ, le but du projet était de produire des jolis dessins. Nous nous sommes finalement plongés en premier lieu dans la théorie qui régit ces dessins avec une certaine angoisse, pour découvrir de nombreux éléments de mathématique dont nous ne soupçonnions pas l’existence et l’importance pour ce projet.

La découverte de l’espace des fractales était bien sûr intéressante à plusieurs niveaux : comprendre la convergence vers la même limite d’objets appartenant à cet espace, et qui graphiquement ne se ressemblent pas du tout, était notamment au sommet de cette recherche.

La partie programmation était assez importante, mais les résultats dépassèrent nos espérances. Après l’aspect en deux dimensions, nous nous sommes attaqués au cas 3D, et nous sommes fiers d’avoir pu réaliser des arbres utilisant les algorithmes itératifs créés, et que l’on voit «pousser» depuis la fenêtre...

Nous tenons à remercier Mr. Buser pour son soutien inconditionnel tout au long de ce projet on-line, puisqu’une moitié du projet a débuté aux États-Unis. Malgré quelques rendez-vous ratés, il nous a aidés à progresser dans notre démarche théorique et a partagé notre émerveillement devant les structures auto-similaires qui se dessinaient sur notre écran.

## Références

- [1] Michael BARNSELY, *Fractals Everywhere*, Academic Press, San Diego, 1988.
- [2] Aristid LINDENMAYER, Przemyslaw PRUSINKIEWICZ, *The Algorithmic Beauty of Plants*, Springer-Verlag, 1990.