GROUPES TOPOLOGIQUES

PETER JOSSEN

RÉSUMÉ. On établira, à partir des notions fondamentales de groupe, espace topologique et espace mésuré la dualité de Pontriagin - van Kampen.

Date: 17 juin 2004.

1. Préliminaires et Notations

On admette les notations suivantes (les chiffres indiquant le numero de la première page ≥ 3 sur laquelle la notation en question apparait) :

$\oplus$	somme directe
$\mathbb{C}$	Les nombres complexes
$\mathfrak{C}_{00}$	Fonctions à support compact
$\mathfrak{C}_{00}^+$	Fonctions nonnégatives à support compact
G'	Groupe de caractères
$\widehat{G}$	Groupe dual
$\mathfrak{L}^p$	Fonctions p-intégrables
m	mesure de Haar
$\mathbb{N}$	$\{1, 2, 3, ...\}$
$\mathfrak{P}$	Combinaisons $\mathbb{C}$-lineaires de fonctions de type positive
$\mathfrak{P}_0$	Fonctions de type positive
$\mathbb{Q}$	Les nombres rationnels
$\mathbb{R}$	Les nombres réels
$\mathbb{T}$	Le tore de dimension 1, i.e. les nombres complexes de module 1

2. Groupes

Définition 2.1. Soit G un groupe. On appelle caractère sur G tout homomorphisme $\chi : G \to \mathbb{T}$. On munit l'ensemble des caractères sur G du produit ponctuel : $\chi_1\chi_2(x) = \chi_1(x)\chi_2(x)$ pour tout caractères χ_1, χ_2 et tout $x \in G$.

On note χ_0 le caractère trivial qui vaut 1 sur tout G. L'inverse d'un caractère est donné par $\chi^{-1}(x) = \overline{\chi(x)}$.
Voilà un lemme qui va être d'une importance majéure pour la démonstration du théorème de dualité (surtout en forme du corrolaire qui lui suit). Pontriagin, comme aussi d'autres auteurs le démontrent par récurrence transfinie. Cette version n'utilise pas ce concepte, mais fait intervenir le lemme de Zorn.

Définition 2.2. Un groupe G et dit divisible si pour tout $g \in G$ et tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un $r \in G$ tel que $r^n = g$.

On remarque qu'un groupe fini divisible est nécessairement trivial. $\mathbb{T}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont divisibles, $\mathbb{Z}$ ne l'est pas.

Lemme 2.3. *Soit G un groupe Abélien, H un sous-groupe de G et φ un homomorphisme de H dans un groupe divisible Abélien D. Alors il existe un homomorphisme de G dans D qui coincïde sur H avec φ.*

Démonstration. J'affirme que la famille des sous-groupes de G conteanant H satisfait les hypothèses du lemme de Zorn pour l'ordre suivant :

$$H_1 \leq H_2 \iff H_1 \subseteq H_2, \text{ et tout homomorphisme } H_1 \to D \text{ s'etend sur } H_2$$

En effet, supposons qu'on ait une chaine de telles sous-groupes emboités de G :

$$H = H_0 \supseteq H_1 \supseteq H_2 \supseteq H_3 \supseteq H_4 \supseteq ...$$

tout munis d'un homomorphisme $\psi_n : H_n \to D$ et tel que ψ_n est un prolongement de ψ_{n-1} pour tout $1 \leq n$. Désignons avec H_∞ leur réunion. Comme pour tout

$x \in H_\infty$, il existe un H_n avec $x \in H_n$, on peut poser $\psi_\infty(x) = \psi_n(x)$. L'application ψ_∞ est bien définie, et un homomorphisme sur H_∞ qui prolonge n'importe un ψ_n. Donc $H_n \leq H_\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les les hypothèses du lemme de Zorn sont ainsi satisfaites.
Il existe alors un élément maximal M parmi tout les sous-groupes de G sur lesquels on peut prolonger φ. Si $M = G$ on a terminé. Si cela ne serait pas le cas, on termine une contradiction : choisissons $x \in G \backslash M$, et considerons le sous-groupe de G engendre par M et le singleton $\{x\}$.

$$M_x = \{x^n h \mid h \in H, n \in \mathbb{Z}\}$$

et montrons que φ peut être étendu sur M_x, ce qui contredira la maximalité de M.
Cas I : $x^n \notin M$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Posons alors $\psi(x^n m) = \psi_\infty(m)$. Cela est clairement bien défini, et un homomorphisme sur M_x qui étend ψ_∞, et donc qussi φ.
Cas II : $x^n \in M$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}$. Soit dans ce cas k le plus petit nombre naturel tel que $x^k m \in M$. Comme D est divisible, on peut trouver une k-ème racine de $\psi_\infty(x^k) = d \in D$, cet à dire un $f \in D$ tel que $f^k = d$. Posons $\psi(x^n m) = f^n \psi_\infty(m)$. De nouveau, ψ est bien défini, et un homomorphisme sur M_x qui étend ψ_∞ et φ. □

Corollaire 2.4. *Soit G un groupe Abélien, $g, h \in G$. Si $g \neq h$, alors il existe un caractère φ sur G tel que $\varphi(g) \neq \varphi(h)$*

Démonstration. Vérifions d'abord que pour tout $g \neq e$ on peut trouver un caractère φ sur G avec $\varphi(g) \neq 1$. Pour cela considerons le sous-groupe de G engendré par g. Ce sous-groupe est soit un groupe fini cyclique, disons d'ordre $k \geq 2$, soit isomorphe à $\mathbb{Z}$. Choisissons dans le premier cas une k-ème racine de l'unité ω differente de 1, ou bien, dans le deuxième cas n'importe un $\omega \in \mathbb{T}$ different de 1, et posons $\varphi(g^n) = \omega^n$. Cela nous définit un caractère sur le sous-groupe engendré par g, qu'on peut, vu le lemme précedent étendre sur G tout entier.
Dans le cas général fixons $g, h \in G$ avec $g \neq h$. Comme $gh^{-1} \neq e$, il existe un caractère φ avec $\varphi(gh^{-1}) \neq 1$, ce qui est $\varphi(g)\varphi(h)^{-1} \neq 1$ ou bien $\varphi(g) \neq \varphi(h)$. □

3. Topologie

Proposition et Définition 3.1. *Les conditions suivantes sont équivalentes pour tout espace topologique X, et on dira que X est T_3 si ils sont vraies pour X.*

- **I:** *Tout point de $x \in X$ admette un système fondamental de voisinages fermés.*
- **II:** *Pour tout fermé F de X et tout point $x \in X \backslash F$ il existent des voisinages V_F et V_x de F et x respectivement, qui sont disjointes.*

Démonstration. I $\implies$ II : Soit F fermé dans X et $g \in X \backslash F$. L'ensemble $X \backslash F$ est un ouvert de X contenant x, et donc un voisinage de x. Par hypothèse, on peut trouver un voisinage fermé V_x de x contenu dans $X \backslash F$. L'ensemble $V_F = X \backslash V_x$ est un ouvert qui contient F. Clairement $V_x \cap V_F = \emptyset$.
II $\implies$ I : Il suffit de voir que tout voisinage ouvert O de x contient un voisinage fermé. Comme $F = X \backslash O$ est fermé et $x \notin F$, on peut trouver par hypothèse un voisinage V_F de F et un voisinage V_g de g tels que $V_x \cap V_F = \emptyset$. On peut supposer que V_F est ouvert. Ainsi on a $V_g \subseteq X \backslash V_F \subseteq O$. L'ensemble $X \backslash V_F$ est donc un voisinage fermé de x contenu dans O, ce qui termine la preuve. □

Définition 3.2. Un espace topologique est dit T_0, si pour tout points distincts $x, y \in X$ il existe un voisinage de x ne contenant pas y ou bien un voisinage de y ne contenant pas x.

Proposition et Définition 3.3. *Les conditions suivantes sont équivalentes pour tout espace topologique X, et on dira que X est T_1 si ils sont vraies pour X.*

- **I:** *Tout singleton $\{x\} \subseteq X$ est fermé.*
- **III:** *Pour tout point x et tout point $y \neq x$ de X il existe un voisinage de x ne contenant pas y.*
- **II:** *L'intersection de tout les voisinages de x consiste en $\{x\}$ seulement, pour tout $x \in X$.*

Démonstration. (I) $\Longrightarrow$ (II) : Soient $x, y \in X$. Par hypothèse y est fermé. $X \backslash \{y\}$ est alors un ouvert contenant x mais pas y, et donc un voisinage de x ne contenant pas y.
(II) $\Longrightarrow$ (III) : Soit $x \in X$, $y \in X$ et $y \neq x$. Il existe alors un voisinage de x ne contenant pas y. y n'est donc pas dans l'intersection de tout les voisinages de x. Ceci etant vrai pour tout $y \neq x$, on a que l'intersection de tout les voisinages de x consiste en $\{x\}$ seulement.
(III) $\Longrightarrow$ (I) : Supposons que y adhère à x. Tout voisinage de y contient donc x, et x se trouve alors dans l'intersection de tout les voisinages de y. L'hypothèse permet de conclure que $x = y$, ce qui montre que $y \in \{x\}$. $\{x\}$ est donc fermé. $\square$

Définition 3.4. Un espace topologique X est apellé T_2 ou de Hausdorff si pour tout points $x, y \in X$ avec $x \neq y$ il existent des voisinages V_x de x et V_y de y disjointes.

Proposition et Définition 3.5. *Tout espace topologique T_0 et T_3 est de Hausdorff. (La réciproque est fausse). Un tel espace est appellé régulier.*

Démonstration. Prenons $x, y \in X$, et supposons sans perte de généralisation qu'il existe un voisinage V_x de x qui ne contient pas y (quitte à permuter x et y). Par régularité, V_x contient un voisinage fermé F_x de x. Le complement de F_x ext un ouvert qui contient y, donc un voisinage de y, qui est clairement disjoint du voisinage F_x de x. $\square$

Voici le célèbre lemme d'Urysohn, qu'on démontra pour être plus complet.

Lemme et Definition 3.6. *Les conditions suivantes sont équivalentes pour tout espace topologique X, et on dira que X est complétement régulier ils sont vraies pour X.*

- **I:** *Pour tout paire de fermés disjoints F, G dans X il existent des voisinages V_F de F et V_G de G disjointes.*
- **II:** *Pour tout ouvert O de X et tout fermé F contenu dans O, il existe un voisinage fermé de F contenu dans U*
- **III:** *Pour tout paire de fermés disjoints F, G dans X il existe une fonction continue sur X à valeurs dans $[0, 1]$ qui vaut 0 sur F et 1 sur G.*

Démonstration. (I) $\Longrightarrow$ (II) : Soit F un fermé contenu dans l'ouvert U. F et $X \backslash U$ sont donc des fermés disjoints, ce qui entraine par hypothèse qu'il existent des voisinages ouvertes O_1 de F et O_2 de $X\backslash U$ qui sont disjointes. Ainsi on a comme désiré :

$$F \subseteq O_1 \subseteq \overline{O_1} \subseteq X\backslash O_2 \subseteq U$$

(III) $\implies$ (I) : Soient F et G fermés disjointes dans X. Par hypothèse, il existe une fonction continue $f : X \to \mathbb{R}$ qui vaut identiquement 1 sur F et identiquement 0 sur G. Considerons $V_F = f^{-1}(]\frac{1}{2}, \infty[)$ et $V_G = f^{-1}(]-\infty, \frac{1}{2}[)$. Ces deux ensembles sont disjointes, ouverts par continuité de f et $F \subseteq V_F$ et $G \subseteq V_G$, donc tout ce qu'on voulait.

Reste à voir la partie essentielle de ce lemme, à savoir

(II) $\implies$ (III) : On commence par une construction, qui attribue à chaque nombre rationnel p un ouvert O_p de X de telle sorte que

$$q < p \text{ entraine } \overline{O_q} \subseteq O_p \tag{3.1}$$

Notons $P = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ et choisissons un dénombrement $(p_n)_{n=0}^{\infty}$ de P tel que $0 = p_0$, $1 = p_1$. Par P_n on désigne les n premiers éléments de cette suite. Definissons $O_1 = X\backslash G$. F est un fermé contenu dans l'ouvert O_1, donc par normalité de X il existe un ouvert O_0 tel que $F \subseteq O_0$ et $\overline{O_0} \subseteq O_1$.

Supposons maintenant que $p_n \neq 0, 1$, que O_p est défini pour $p \in P_{n-1}$, et que la famille $(O_p)_{p\in P_{n-1}}$ satisfait 3.1. Car l'ensemble P_n est un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}$, chaque élément de P_n sauf 0 et 1 a un successeur et un predecesseur, en particulier p_n. Soit q le predecesseur et p le successeur de p_n dans $(P_n, \leq)$. Comme $\overline{O_q} \subseteq O_p$, on peut trouver (car X est normal) un ouvert O_{p_n} tel que $\overline{O_q} \subseteq O_{p_n}$ et $\overline{O_{p_n}} \subseteq O_p$. Clairement, la famille $(O_p)_{p\in P_n}$ satisfait 3.1. Ainsi on définit O_p pour $p \in P$. Posons $O_p = \emptyset$ si $p < 0$ et $O_p = X$ si $p > 1$. La famille $(O_p)_{p\in\mathbb{Q}}$ satisfait toujours 3.1.

J'affirme que

$$f(x) = \inf\{p \in \mathbb{Q} \mid x \in O_p\}$$

a toutes les propriétés demandées. Vu que pour tout $p > 1$ tout $x \in X$ est contenu dans $O_p = X$, et que pour tout $p < 0$ aucun $x \in X$ est contenu dans $O_p = \emptyset$, f est bien défini et $f(X) \subseteq [0, 1]$. Si $x \in F \subseteq O_0$, on a $f(x) = 0$. Si $x \in G$ on a pour tout $p \in P$ que $x \notin O_p \subseteq O_1 = X\backslash G$ et donc $f(x) = 1$.

Reste à voir que f est continue. Remarquons qu'on a

$$x \in \overline{O_q} \implies f(x) \leq q \tag{3.2}$$

car si $x \in O_q$ on a $x \in O_p$ pour tout rationnel $p > q$ et donc $f(x) \leq q$, et que

$$x \notin O_p \implies f(x) \geq p \tag{3.3}$$

car si $x \notin O_p$ on a $x \notin O_q$ pour tout rationnel $q < p$ et donc $f(x) \geq p$. Soit maintenant x_0 in X et $\varepsilon > 0$, et construisins un voisinage V de x_0 tel que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ pour tout $x \in V$. Choisissons deux nombres rationnels p et q tels que

$$f(x_0) - \varepsilon < q < f(x_0) < p < f(x_0) + \varepsilon$$

Soit $V = O_p\backslash\overline{O_q}$. Car $f(x_0) < p$ on a par 3.3 que $x_0 \in O_p$, et car $f(x_0) > q$ on a par 3.2 que $x \notin \overline{O_q}$. Par consequent $x_0 \in V$. V est ouvert, et donc un voisinage de x_0. Soit $x \in V$. Alors $x \in \overline{O_p}$ donc $f(x) \leq p$ par 3.2 et $x \notin O_q$ donc $f(x) \geq q$ par 3.3. En résumé on a $q \leq f(x) \leq p$ pour tout $x \in V$ ou bien que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ pour tout $x \in V$. f est donc continue en x_0, ce qui termine la preuve. $\square$

Le resultat suivant, le "théorème des partitions de l'unité" due à Dieudonné est une généralisation du lemme d'Urysohn.

Theorème 3.7. *Soit X un espace topologique normal, F une partie fermée dans X et $U_1, U_2, ..., U_n$ un recouvrement ouvert fini de F. Alors il existent des fonctions continues $h_1, h_2, ..., h_n$ sur G à valeurs dans $[0,1]$ tels que*

I: $\sum_{k=1}^n h_k(x) = 1$ *pour tout $x \in F$*

II: $h_k(x) = 0$ *pour tout $x \notin U_k$ et tout $1 \leq k \leq n$*

Démonstration. En trois étapes.
(I) Soit $(O_i)_{1\leq k\leq n}$ un recouvrement ouvert fini de X. J'affirme l'existence d'une famille de fermés $(F_i)_{1\leq k\leq n}$ telle que $F_k \subseteq O_k$ et $\bigcup_{1\leq k\leq n} F_k = X$. Cela ce montre par induction sur n. Pour $n = 1$, l'assertion est triviale. Voyons le cas $n = 2$: On a $O_1 \cup O_2 = X$. Les fermés $X\backslash O_1$, $X\backslash O_2$ etant disjoints, on peut trouver des ouverts V_1, V_2 disjoints tels que $O_1 \subseteq V_1$ et $O_2 \subseteq V_2$. En posant $F_1 = X\backslash V_1$, $F_2 = X\backslash V_2$ on obtient le résultat désiré pour le cas $n = 2$.
Supposons maintenant que le résultat est correct pour $n-1$, et soit $(O_i)_{1\leq k\leq n}$ un recouvrement ouvert de X. Comme $X = \left(\bigcup_{1\leq k<n} O_k\right) \cup O_n$, il existent des fermés F et F_n tels que $F \subseteq \bigcup_{k=1}^{n-1} O_k$, $F_n \subseteq O_n$ et $F \cup F_n = X$. Pour $1 \leq k < n$ définissons $V_k = O_k \cap F$. Les $(V_k)_{1\leq k<n}$ recouvrent F. Par hypothèse il existent donc des fermés $(F_k)1 \leq k < n$ dans F qui récouvrent F et tels que $F_k \subseteq V_k \subseteq O_k$ pour $1 \leq k < n$. Car F est fermé dans X, les F_k (qui sont fermés dans F) sont fermés dans X. On termine en observant que $X \subseteq F \cup F_n \subseteq \bigcup_{1\leq k<n} F_k \cup F_n \subseteq \bigcup_{1\leq k\leq n} F_k \subseteq X$.
(II) On montre le théorème pour le cas $F = X$. Dans ce cas $(O_k)_{1\leq k\leq n}$ recouvre X. Prenons $(F_k)_{1\leq k\leq n}$ une famille de fermés recouvrant X et telle que $F_k \subseteq O_k$ pour tout k. Par le lemme d'Urysohn 3.6, il existent des fonctions $(f_k)_{1\leq k\leq n}$ continus sur X à valeurs dans $[0,1]$ tels que f_k vaut 1 sur F_k et nul en dehors de O_k pour $k = 1, 2, ..., n$. Posons

$$h_k(x) = \frac{f_k(x)}{\sum_{j=1}^n f_j(x)} \qquad \text{pour tout } x \in X$$

Comme $\sum_{j=1}^n f_j(x) \geq 1$ sur tout X, les h_k sont bien definis et continus. Clairement ils satisfont les deux conditions demandés.
(III) Soit F fermé dans X et $(O_k)_{1\leq k\leq n}$ un recouvrement fini de F. Definissons $U_0 = X\backslash F$. Ainsi $(O_k)_{0\leq k\leq n}$ recouvre X. Il existent donc des fonctions continus $(h_k)_{0\leq k\leq n}$ à valeurs dans $[0,1]$ tels que $\sum_{k=0}^n f_k(x)$ vaut 1 sur X et telles que h_k s'annulle en dehors de O_k pour $0 \leq k \leq n$. En particulier on a que h_0 est identiquement 0 sur F, et donc $\sum_{k=0}^n f_k(x) = 1$ pour tout $x \in F$. Les fonctions $(f_k)_{1\leq k\leq n}$ ont donc toutes les propriétés demandées. □

Le théorème suivant est connu sous le nom de "Théorème des Categories de Baire" (Baire category theorem).

Theorème 3.8. *Un espace topologique régulier et localement compact X n'est pas réunion dénombrable de fermés ayant tous un interieur non-vide.*

Démonstration. Supposons par absurde que $X = \cup_{n=1}^\infty F_n$ ou chaque F_n est fermé et à interieur vide. Posons $D_n = X\backslash F_n$, ce qui nous fournit des ouverts partout denses dans X. Montrons que $\cap_{n=1}^\infty F_n \neq \emptyset$ ce qui contredira l'hypothèse que $X = \cup_{n=1}^\infty F_n$. Soit U_0 un ouvert non vide de X d'adhérence compacte. Car D_1 est ouvert et dense dans X, $U_0 \cap D_1$ est ouvert et non-vide. Par régularité de X, il existe un ouvert U_1 tel que $\overline{U_1} \subseteq U_0 \cap D_1$. Definissons ainsi la suite de fermés emboités

$$\overline{U_0} \supseteq \overline{U_1} \supseteq \overline{U_2} \supseteq ...$$

où U_n est non vide et $\overline{U_n} \subseteq U_{n-1} \cap D_n$. Comme $\overline{U_0}$ est compact, et tous les $\overline{U_n}$ non vides, on a que

$$\emptyset \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U_n} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$$

□

4. Mesure et Integration

Pour ce chapitre, on se fixe un espace topologique de Hausdorff localement compact X.

Définition 4.1. On note $\mathfrak{C}_{00}^{+}(X)$ l'ensemble des fonctions continus à valeurs réels nonnégatifes sur X, qui s'annullent en dehors d'un ensemble compact (qui depend de la fonction en question). On appelle "intégrale de Radon" toute forme $I : \mathfrak{C}_{00}^{+}(X) \to \mathbb{R}_+$ satisfaisant

I: $I(f)$ est réel positif pour $f \neq 0$

II: $I(f+g) = I(f) + I(g)$ pour tout $f, g \in \mathfrak{C}_{00}^{+}(X)$

III: $I(\alpha f) = \alpha I(f)$ pour tout $f \in \mathfrak{C}_{00}^{+}(X)$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$

On doit remarquer que I n'est pas une forme linéaire, car $\mathfrak{C}_{00}^{+}(X)$ n'est pas un espace véctoriel. Mais une mesure de Radon se prolonge d'une façon evidente en une forme linéaire sur le $\mathbb{C}$-espace véctoriel $\mathfrak{C}_{00}(X)$ des fonctions continus à valeurs complexes s'annullant en dehors d'une partie compacte.

Définition 4.2. On appelle "integrale de Radon complexe" toute forme linéaire $I : \mathfrak{C}_{00}(X) \to \mathbb{C}$ pour laquelle existent des mésures de Radon I_1, I_2, I_3, I_4 tels que $I = I_1 - I_2 + i(I_3 - I_4)$.

Définition 4.3. On appelle une fonction f sur X "intégrable sur tout compact" si fg est intégrable quelque soit $g \in \mathfrak{C}_{00}^{+}$.

5. Definition et propriétés élémentaires des groupes topologiques

Définition 5.1. On appelle "groupe topologique" un triple $(G, \cdot, \mathfrak{T})$ tel que

GT1) : $(G, \cdot)$ est un groupe
GT2) : $(G, \mathfrak{T})$ est un espace topologique
GT3$_I$) : Les applications $(x, y) \mapsto xy$ et
GT3$_{II}$) : $x \mapsto x^{-1}$ sont continues.

Si aucune confusion n'est possible on parlera d'un groupe topologique G, cet à dire on identifie le groupe topologique $(G, \cdot, \mathfrak{T})$ avec son ensemle sous-jacent G. On remarque que au lieu de demander la continuité de $(x, y) \mapsto xy$ et $x \mapsto x^{-1}$ on pourrait simplement demander la continuité de $(x, y) \mapsto xy^{-1}$.

Proposition 5.2. *Soient G un groupe topologique $n \in \mathbb{N}$, $r_1, r_2, ..., r_n \in \mathbb{Z}$, et $a_1, a_2, ..., a_n \in G$. Soit U un voisinage de $b = a_1^{r_1} a_2^{r_2} ... a_n^{r_n}$. Alors il existent des voisinages V_i de a_i pour $1 \leq i \leq n$ tels que $V_1^{r_1} V_2^{r_2} ... V_n^{r_n} \subseteq U$. Si $a_i = a_j$ on peut choisir $V_i = V_j$*

Démonstration. L'application $f : (x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto x_1^{r_1} x_2^{r_2} ... x_n^{r_n}$ est continue, car elle est composition d'applications continues. Ainsi pour tout voisinage de U de $b = f(a_1, a_2, ..., a_n)$ il existent des voisinages V_i de a_i pour $1 \leq i \leq n$ de telle manière que $f(V_1, V_2, ..., V_n) \subseteq U$.
Si $a_i = a_j$, on peut choisir $V_i = V_j$ en prenant l'intersection. $\square$

Proposition 5.3. *Soit G un groupe topologique. Les applications $\varphi : x \mapsto x^{-1}$, $f_a : x \mapsto xa$ et ${}_af : x \mapsto ax$ sont des homéomorphismes de G sur lui même quelque soit $a \in G$*

Démonstration. φ, f_a et ${}_af$ sont continus par GT3 et des bijections. Les applications inverses sont données par $x = \phi(x^{-1}) = f_a(xa^{-1}) =_a f(a^{-1}x)$. $\square$

Proposition 5.4. *Tout groupe topologique G est homogène vu comme espace topologique, cet à dire quelque soient a, $b \in G$ il existe un homéomorphisme $h : G \to G$ avec $f(a) = b$.*

Démonstration. L'homéomorphisme $h : x \mapsto a^{-1}xb$ fait l'affaire. $\square$

Corollaire 5.5. *Soit $f : G \to H$ un homomorphisme entre groupes topologiques G et H. Si f est continu en e_G, alors f est continu partout.*

Démonstration. Soit $f : G \to H$ un homomorphisme continu en e_G, choisissons $x \in G$ et montrons que f est continu en x. Soit V un voisinage de $f(x)$. Comme f est continu en e_G, on a que $f^{-1}(f(x)^{-1}V)$ est un voisinage de e, et par consequent

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(f(x)f(x)^{-1}V) = f^{-1}(f(x))\, f^{-1}(f(x)^{-1}V) \supseteq xf^{-1}(f(x)^{-1}V)$$

un voisinage de x. $\square$

Proposition 5.6. *Soient G un groupe topologique P une partie quelconce, O un ouvert, C un compact et F un fermé de G. Alors les ensembles PO, OP et O^{-1} sont ouverts et CF, FC et F^{-1} sont fermés dans G.*

Démonstration. L'ensemble O^{-1} est ouvert, car il est image de l'ouvert O par un homéomorphisme. Idem pour l'ensemble F^{-1}, qui est fermé car il est image du fermé F par un homéomorphisme.
PO est ouvert car $PO = \bigcup_{\{p \in P\}} pO$, ce qui est une réunion d'ouverts, vu que les pO sont tous images d'un homéomorphisme de l'ouvert O et donc tous ouverts. Le même argumet montre que OP est ouvert dans G.
Il reste à montrer que CF et FC sont fermés dans G. Prenons pour cela une suite généralisée $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ dans CF avec un point de limite $x \in G$, et montrons que $x \in F$. Tout x_α s'écrit comme $c_\alpha f_\alpha$ avec $c_\alpha \in C$ et $f_\alpha \in F$. La suite généralisée $\{c_\alpha\}_{\alpha \in I}$ admette au mois un point de limite $c \in C$, car C est compact. La suite généralisée $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I} = \{c_\alpha^{-1} x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ dans F admette donc $f := c^{-1}x$ comme point de limite car elle est image par une application continue des deux suites généralisées $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ et $\{c_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Mais F est fermé, et donc $f \in F$. Ainsi $f = c^{-1}x \in F$ ou bien $x = cf \in CF$.
De la même façon on montre que FC est fermé. $\square$

Proposition 5.7. *Soient G un groupe topologique et C, D des parties compactes dans G. Alors CD et DC sont compacts dans G.*

Démonstration. C et D sont compacts dans G, d'ou (par Tychonoff) $C \times D$ est compact dans $G \times G$. CD est image par une application continue du compact $C \times D$ et donc compact. Idem pour DC. $\square$

Proposition 5.8. *Soit G un groupe topologique et A, B des parties de G. Alors les assertions suivantes sont vraies :*

I: $\bar{A}\bar{B} \subseteq \overline{AB}$

II: $\overline{A}^{-1} = \overline{A^{-1}}$

III: $x\overline{A}y = \overline{xAy}$ *pour tout* $x, y \in G$

Si de plus G est T_1, et si $ab = ba$ pour tout $a \in A$, $b \in B$, alors on a aussi $ab = ba$ pour tout $a \in \overline{A}$, $b \in \overline{B}$.

Démonstration. (I) Prenons $x \in \overline{A}$ et $y \in \overline{B}$, et un voisinage U de e. Il suffit de montrer que $xyU \cap AB \neq \emptyset$. On peut trouver un voisinage V de e tel que $xVyV \subseteq xyU$. Choisissons $a \in A \cap xV$ et $b \in B \cap yV$, ce qui est tout a fait possible, vu que x adhère à A et vu que y adhère à B. Ainsi $ab \in AB \cap xVyV \subseteq AB \cap xyU$.
(II) L'application $f : x \mapsto x^{-1}$ est un homéomorphisme de G. Donc $\overline{A^{-1}} = \overline{f(A)} = f(\overline{A}) = \overline{A}^{-1}$.
(III) L'application $f : z \mapsto xzy$ est un homéomorphisme de G. Donc $x\overline{A}y = \overline{f(A)} = f(\overline{A}) = \overline{x}Ay$.
Supposons maintenant que $ab = ba$ pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$, et considerons l'application $f : (x, y) \mapsto xyx^{-1}y^{-1}$. f est continue sur G^2 et $f(A, B) = \{e\}$. Par hypothèse, G est T_1 et alors $\{e\}$ fermé. $f^{-1}(e)$ est donc un fermé de G^2, et $A \times B \subseteq \overline{A} \times \overline{B} = \overline{A \times B} \subseteq f^{-1}(e)$. Cela montre qu'on a aussi $ab = ba$ pour tout $a \in \overline{A}$, $b \in \overline{B}$. $\square$

Proposition 5.9. *Tout groupe topologique est T_3.*

Démonstration. On montre que tout point d'un groupe topologique G admet un système fondamental de voisinages fermés. Comme G est homogène, il suffit de montrer que l'unité $1_G = e \in G$ en admet. Prenons pour cela un voisinage U de e, et montrons que U contient un voisinage fermé de e. Car $e = ee^{-1}$, il existe un voisinage V de e tel que $VV^{-1} \subseteq U$. J'affirme que $\bar{V} \subseteq U$. Soit $v \in \bar{V}$. Car vV est un voisinage de v on a que $vV \cap V \neq \emptyset$. Il existe donc un élément $b \in V$ tel que $vb = a \in V$, ce qui est $v = ab^{-1} \in VV^{-1} \subseteq U$ $\square$

Corollaire 5.10. *Un goupe topologique qui est T_0 est réguler et de Hausdorff.*

Démonstration. Clair, régulier est par définition T_0 et T_3, et car par 3.5 tout espace topologique régulier et T_0 est de Hausdorff. $\square$

Proposition 5.11. *Soit $(G, \cdot, \mathfrak{T})$ un groupe topologique, $\mathfrak{V}$ un système fondamental de voisinages ouverts de l'unité et D une partie partout dense dans G. Alors $\mathfrak{B} := \{dV \mid d \in D$ et $V \in \mathfrak{V}\}$ est une base pour $\mathfrak{T}$.*

Démonstration. Car $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{T}$, il suffit de montrer que pour tout ouvert O, et tout $x \in O$ on peut trouver un $dV \in \mathfrak{B}$ tel que $x \in dV \subseteq O$. L'ensemble $x^{-1}O$ est un voisinage de e. On peut trouver un $V \in \mathfrak{V}$ tel que $V^2 \subseteq x^{-1}O$. Car $xV \cap xV^{-1}$ est ouvert et D partout dense, on peut trouver $d \in (xV \cap xV^{-1}) \cap D$. J'affirme que $x \in dV \subseteq O$. D'une part on a $d \in xV^{-1}$ où bien $d^{-1} \in Vx^{-1}$ donc $x \in dV$. D'autre part $d \in xV$ et donc $dV \subseteq xV^2 \subseteq O$, ce qui termine la preuve. $\square$

Theorème 5.12. *Soit $(G, \cdot)$ un groupe (algèbrique) et $\mathfrak{V}$ une famille de parties de G telle que les conditions suivantes sont satisfaits*

I: *$e \in V$ pour tout $V \in \mathfrak{V}$*

II: *$\mathfrak{V}$ est filtrant à droite pour la relation $\subseteq$*

III: *pour tout $V \in \mathfrak{V}$ il existe un $U \in \mathfrak{V}$ tel que $UU^{-1} \subseteq V$*

IV: *pour tout $V \in \mathfrak{V}$ et tout $a \in U$ il existe un $U \in \mathfrak{V}$ tel que $aU \subseteq V$*

V: *pour tout $V \in \mathfrak{V}$ et tout $a \in G$ il existe un $U \in \mathfrak{V}$ tel que $aUa^{-1} \subseteq V$*

Alors il existe une unique topologie $\mathfrak{T}$ sur G qui est compatible avec la structure algèbrique de G et pour laquelle $\mathfrak{V}$ est un système fondamental de voisinages ouvertes de e. On dira que $\mathfrak{T}$ prolonge $\mathfrak{V}$. De plus, une base pour cette topologie $\mathfrak{T}$ est donnée par la famille $\{gV \mid g \in G, V \in \mathfrak{V}\}$.

Si inversement $\mathfrak{V}$ est un système fondamental de voisinages ouvertes de e pour une topologie donnée $\mathfrak{T}$, alors $\mathfrak{V}$ satisfait les conditions (I), (II), (III), (IV), (V), et la topologie prolongeant $\mathfrak{V}$ coincïde avec $\mathfrak{T}$.

Démonstration. Verifions d'abord que $\mathfrak{B} = \{gV \mid g \in G, V \in \mathfrak{V}\}$ est base pour une topologie sur G. Pour cela il suffit de monter que $\mathfrak{B}$ satisfait
$\cup\mathfrak{B} = X$
$\forall B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ et $\forall x \in B_1 \cap B_2$ il existe un $B_3 \in \mathfrak{B}$ tel que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$
La première condition est remplie, car pour tout $a \in G$ et n'importe un $V \in \mathfrak{V}$ on a $a \in aV \in \mathfrak{B}$ et donc $a \in \cup\mathfrak{B}$.
Soient $B_1 = a_1V_1$, $B_2 = a_2V_2$ deux éléménts de $\mathfrak{B}$ et $x \in B_1 \cap B_2$. Pour $i = 1, 2$ on a que $a_i^{-1}x \in V_i$. Selon la quatrième condition, il existe $U_i \in \mathfrak{V}$ tel que $a_i^{-1}xU_i \subseteq V_i$. Par la deuxième condition, il existe un $U \in \mathfrak{V}$ tel que $U \subseteq U_1 \cap U_2$. Ainsi $xU \subseteq xU_i \subseteq a_iV_i$ pour $i = 1, 2$ et donc $x \in xU \subseteq B_1 \cap B_2$. $\mathfrak{B}$ est donc base d'une topologie sur G, qu'on notera $\mathfrak{T}$.
Voyons maintenant que $\mathfrak{V}$ est un système fondamental de voisinages ouverts de e pour la topologie $\mathfrak{T}$. Comme $\mathfrak{V} \subseteq \mathfrak{B}$ il suffit de verifier que pour tout $aV \in \mathfrak{B}$ contenant e on peut trouver un $U \in \mathfrak{V}$ tel que $U \subseteq V$. Car $a^{-1} \in V$, il existe d'après la quatrième condition un $U \in \mathfrak{V}$ tel que $a^{-1}U \subseteq V$ ou bien $e \in U \subseteq aV$.
Montrons que la topologie $\mathfrak{T}$ est compatible avec la strucutre algèbrique de G. Prenons, pour vérifier la continuité du produit deux éléments $y, x \in G$ et un voisinage $xyU \in \mathfrak{B}$ de xy. On peut trouver selon la troisième condition un $V \in \mathfrak{V}$ tel que $V^2 \subseteq U$, et selon la dernière un $W \in \mathfrak{V}$ tel que $y^{-1}Wy \subseteq V$. Ainsi $xWyV = xyy^{-1}WyV \subseteq xyV^2 \subseteq xyU$, ce qui montre que le produit est continu.
Pour vérifier la continuité de l'inversion prenons un $x \in G$ et un voisinage $x^{-1}U \in \mathfrak{B}$ de x^{-1}. Selon la dernière condition on trouve $V \in \mathfrak{V}$ tel que $xVx^{-1} \subseteq U$ et selon la troisième un $W \in \mathfrak{V}$ tel que $W^{-1} \subseteq WW^{-1} \subseteq V$. Ainsi $(xW)^{-1} = W^{-1}x^{-1} \subseteq Vx^{-1} = x^{-1}xVx^{-1} \subseteq x^{-1}U$, ce qui nous montre la continuité de l'inversion.
$(G, \cdot, \mathfrak{T})$ est donc un groupe topologique. Par construction, la topologie $\mathfrak{T}$ est la topologie la moins fine pour laquelle $\mathfrak{V}$ est un système fondamental de voisinages ouverts de e et qui est rend continue les opérations dans G. Si $\mathfrak{T}'$ est une autre topologie qui a ces propriétés, on a necessairement $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{T}'$. Pour avoir l'unicité, montrons que $\mathfrak{T}' \subseteq \mathfrak{T}$. Prenons un ouvert non vide $O \in \mathfrak{T}'$. Pour tout $x \in O$, on peut trouver un $V_x \in \mathfrak{V}$ tel que $xV_x \subseteq O$, car $x^{-1}O$ est un voisinage ouvert de e pour $\mathfrak{T}'$. Ainsi $O = \cup_{x \in O} xV_x$. Par définition tout les xV_x sont des ouverts de $\mathfrak{T}$, et alors aussi O.

Il est une consequence immediate des définitions qu'un système fondamental $\mathfrak{V}$ de voisinages ouverts de e dans un groupe topologique $(G,\cdot,\mathfrak{T})$ a les propriétés (I), (II), (III), (IV) et (V). Par l'unicité qu'on vient de montrer, la topologie prolongeant $\mathfrak{V}$ est $\mathfrak{T}$. □

Proposition 5.13. *Si un groupe topologique G agit continument sur un espace topologique X, et si $x \in X$ est un point fixe pour cette action, alors x admet un système fondamental de voisinages G-invariantes. Plus explicitement, si U est un voisinage de x, alors*

$$V = \bigcap_{g\in G} gU$$

est un voisinage G-invariant de x contenu dans U.

Démonstration. Choissisons x un point fixe, U un voisinage ouvert de x, et construisons V comme ci-dessus. Si V n'est pas un voisinage de x, alors on trouve pour tout voisinage W de x un élément g_W tel que $W\backslash g_W U \neq \emptyset$, et donc aussi un point $x_W \in W$ tel que $g_W^{-1}x_W \notin U$. Par compacité de G, la limite générgalisée des g_W admette une sous-suite $(g_{W(j)})_{j\in J}$ convergeante vers un certain $g \in G$. Par construction, et par le fait que X est de Hausdorff, la suite $(x_{W(j)})_{j\in J}$ converge et a comme unique limite x. Par continuité de l'action, la suite $(g_{W(j)}^{-1}x_{W(j)})_{j\in J}$ converge vers $g^{-1}x$. On a $g^{-1}x = x$, vu que x est un point fixe. Aaaber : $g_{W(j)}^{-1}x_{W(j)} \notin U$ und so $g^{-1}x = x \notin U$. Widerspruch ! □

Corollaire 5.14. *Si G est un groupe topologique compact, et U un voisinage de e dans G, alors*

$$V = \bigcap_{g\in G} gUg^{-1}$$

est un voisinage de e invariant sous tout les automorphismes interieurs de G.

Démonstration. e est un point fixe pour l'action continue $(g,x) \to gxg^{-1}$ de G sur lui même. □

6. Sous-groupes topologiques, quotients et produits

Deux définitions de "sous-groupe d'un groupe topologique" sont courantes. La première appelle $(H,\cdot,\mathfrak{T}')$ un sous groupe topologique du groupe topologique $(G,\cdot,\mathfrak{T})$ si $(H,\cdot)$ est un sous groupe de $(G,\cdot)$, $\mathfrak{T}'$ designant la topologie induite (p.ex. Hewitt & Ross). D'autres auteurs (p.ex. Pontriagin) exigent de plus que H est fermé dans G pour $\mathfrak{T}$.
Il faut remarquer qu'il est possible d'avoir un sous groupe H de G non fermé. (Par exemple $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$). Pour pouvoir formuler aisement les résultats les plus générals, on choisit la première version :

Définition 6.1. Soit $(G,\cdot,\mathfrak{T})$ un groupe topologique. On appelle $(H,\cdot,\mathfrak{T}')$ un sous groupe topologique de $(G,\cdot,\mathfrak{T})$ si $(H,\cdot)$ est un sous groupe de $(G,\cdot)$ et $\mathfrak{T}'$ la topologie induite par $\mathfrak{T}$ sur H. On dira que le sous groupe H est ouvert / fermé / compact / ... si le sous-ensemble H de G est ouvert / fermé / compact / ... dans G pour $\mathfrak{T}$.

Proposition 6.2. *Soit G un groupe topologique et H un sous groupe de G. Alors H muni de la topologie induite par G est un groupe topologique.*

Démonstration. Il suffit de voir que les applications $(x, y) \mapsto xy$ et $x \mapsto x^{-1}$ sont continues dans H. Mais cela est clair, car il s'agit de réstrictions de fonctions continus. □

Proposition 6.3. *Soit H un sous-groupe d'un groupe topologique G. Alors $\overline{H}$, la fermeture de H est aussi un sous-groupe de G.*

Démonstration. Clair, car $\overline{H}\,\overline{H} \subseteq \overline{H}$ et $\overline{H^{-1}} = \overline{H}^{-1}$, par la proposition 5.8. □

Proposition 6.4. *Un sous-groupe ouvert d'un groupe topologique est aussi fermé.*

(non, ce n'est pas une contradiction)

Démonstration. Soit G un groupe topologique et H un sous-groupe ouvert de G. $G \backslash H$ est la réunion de toutes les classes à gauche de H differentes de H, donc un ouvert. H est alors fermé. □

Proposition 6.5. *Soit G un groupe topologique de Hausdorff et H un sous-groupe localement compact de G. Alors H est fermé. En particulier tout sous-groupe discret de G est fermé.*

Démonstration. Choisissons un voisinage compact C de e dans H. Il existe un voisinage V de e dans G tel que $C = V \cap H$. L'ensemble $C = V \cap H$ est fermé dans G (car dans un espace de Hausdorff tout compact est fermé). Choisissons de plus un voisinage U de e dans G tel que $U^2 \subseteq V$.
Pour tout $x \in \overline{H}$ on a $x^{-1} \in \overline{H}$, car $\overline{H}$ est un sous-groupe de G. Par consequent il existe $y \in Ux^{-1} \cap H \neq \emptyset$. Il suffit maintenant de montrer que $yx \in H$, car, comme $y \in H$, cela implique $x \in H$, et par suite que $H = \overline{H}$.
Pour cela, montrons que yx adhére à $V \cap H$. Comme $V \cap H$ est fermé, on aura $xy \in V \cap H \subseteq H$. Soit donc W n'importe un voisinage de yx. L'ensemble $y^{-1}W \cap xU$ est un voisinage de x, et comme $x \in \overline{H}$, on peut trouver $z \in y^{-1}W \cap xU \cap H$. En multipliant avec y cela donne $yz \in W$, mais aussi $yz \in Ux^{-1}xU = U^2 \subseteq V$ et $yz \in H$. En résumé $yh \in W(\cap V \cap H) \neq \emptyset$, ce qui termine la preuve. □

Définition 6.6. On dira qu'un groupe topologique G est généré par un voisinage de l'unité V, si

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n$$

et que G est compactement généré, si G est généré par un voisinage compact de l'unité.

Proposition 6.7. *Soit G un groupe topologique et V un voisinage de e. Alors l'emsemble*

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n$$

est un sous-groupe ouvert et fermé de G.

Démonstration. Il suffit de voir que H est un sous-groupe ouvert. H est stable par construction, et pour tout $h \in H$, hV est un voisinage de h contenu dans H par construction. H est ainsi voisinage de tout ses points, donc ouvert. □

Proposition 6.8. *Tout groupe topologique connexe est généré par n'importe un voisinage de l'unité.*

Démonstration. Soit V un voisinage de e dans le groupe topologique connexe G. Vu la proposition precedente, V engendre un sous-groupe ouvert et fermé de G, donc G tout entier. □

Corollaire 6.9. *Tout groupe topologique connexe et localement compact est compactement généré.*

Proposition 6.10. *La composante connexe de l'unité e dans un groupe topologique G est un sous-groupe normal et fermé de G*

Démonstration. Notons C cette composante connexe. Quelque soit $c \in C$, on a $c^{-1}C = C$, car $c^{-1}C$ est image de C par un homéomorphisme et contient e. Par consequent $C^{-1}C = C$, ce qui montre que C est un sous-groupe de G. De même, C est normal : Pour tout $x \in G$, l'ensemble xCx^{-1} est image de C par un homéomorphisme et contient l'unité, donc $xCx^{-1} = C$. Finalement on a que C est fermé, car une composante connexe. □

Proposition 6.11. *Designons avec $\mathfrak{F}$ un filtre de voisinages de e dans G. Alors $\cap\mathfrak{F}$ est un sous-groupe normal fermé de G, egal à l'adherence de e, et la topologie induite sur ce sous-groupe est la topologie grossière.*

Démonstration. Clairement $\cap\mathfrak{F}$ ne depend pas du choix du système fondamental. On suppose desormais que $\mathfrak{F}$ est un système fondamental de voisinages fermés. Comme $\overline{\{e\}}$ est l'intersection de tout les fermés qui contiennent e, on a

$$\overline{\{e\}} \subseteq \cap\mathfrak{F}$$

D'autre part, si un point $x \in G$ n'adhère pas à e, on peut trouver un voisinage fermé de x ne rencontrant pas e. Le complement de ce voisinage sera un ouvert contenant e, donc un voisinage de e ne contenant pas x. Ainsi $x \notin \cap\mathfrak{F}$, ce qui montre

$$\cap\mathfrak{F} \subseteq \overline{\{e\}}$$

d'où égalité. Comme $\{e\}$ est un sous-groupe normal de G, $\overline{\{e\}}$ aussi. □

Passons maintenant aux quotients (au niveau du sujet). La motivation de Pontriagin de ne considérer que les sous-groupes fermés est donnée dans cette partie de la proposition suivante : G/N est de Hausdorff ssi N est fermé. Comme il connait seulement des topologies qui sont de Hausdorff, il doit imposer qu'un sous-groupe topologique est fermé pour pouvoir considérer des quotients G/N.
Je rappelle que les ouverts dans un quotient G/N sont donnés par les ensembles de classes modulo H de la forme NO où O parcourt les ouverts de G. C'est en même temps la topologie la plus fine sur G/H qui laisse continue la projéction canonique π, et dans ce sens elle est appelée topologie finale sur G/H par π.

Proposition 6.12. *Soit G un groupe topologique et N un sous groupe normal de G. Alors G/N muni de la topologie quotient est un groupe topologique, et la projéction canonique π de G sur G/N est un homomorphisme ouvert continu.*
G/N est discret si et seulement si N est ouvert, et G/N est de Hausdorff si et seulement si N est fermé.

Démonstration. Vérifions d'abord que G/N est un groupe topologique en montrant la continuité de $(xN, yN) \mapsto xy^{-1}N$. Fixons $xN, yN \in G/N$, et prenons un voisinage de $xy^{-1}N$ qui s'écrira comme $xy^{-1}UN$ pour un certain voisinage U de e. Il existent un voisinage symmetrique V de e tel que $V^2 \in U$ et un voisinage W de e tel que $y^{-1}Wy \in V$. xWN et VyN sont des voisinages de xN et yN respectivement. Ainsi

$$xW(Vy)^{-1}N = xWy^{-1}V^{-1}N \subseteq xy^{-1}Vyy^{-1}VN = xy^{-1}V^2N \subseteq xy^{-1}UN$$

ce qui montre que l'operation dans G/H est compatible avec la topologie quotient. π est continu vu que la topologie sur G/N est la topologie finale par π. Reste à voir que π est ouverte : Prenons un ouvert $O \subseteq G$. On a $\pi^{-1}(\pi(O)) = NO$. Mais NO est ouvert, et alors aussi $NO = \pi(NO) = \pi(O)$.
G/N est discret si et seulement si l'unité de G/N, à savoir N est ouvert, et de Hausdorff si et seulement si l'unité de G/N est fermée. □

Proposition 6.13. *Soit G un groupe topologique et N un sous groupe normal compact de G. La projéction canonique est alors fermée.*

Démonstration. Soit F fermé dans G. Alors $\pi(F) = NF$, ce qui est un ensemble fermé de G/H vu la proposition 5.6 □

Proposition 6.14. *Soit G un groupe topologique et C la composante connexe de e. Alors G/C est totalement disconnexe.*

Démonstration. Ce quotient est bien défini, car C est un sous-groupe normal de G. □

Proposition 6.15. *Soit G un groupe topologique localement compact et N normal dans G. Alors G/N est localement compact.*

Démonstration. Soit V un voisinage compact de e dans G. Alors $\pi(V)$ est compact car image d'un compact par une application continue, et un voisinage de N, unité de G/N, car image d'un voisinage par une application ouverte. □

Lemme 6.16. *Soit G un groupe topologique normal, et H un sous-groupe fermé de G (non nécessairement normal). Alors le semi-groupe G/H est un espace topologique normal.*

Ceci est le Théorème 10 de Pontriagin.

Démonstration. Soit U un ouvert de G/H et F un fermé de G/H contenu dans U. Notons f la projéction canonique de G sur G/H. Comme U est ouvert et f continu, $f^{-1}(U)$ est ouvert dans G. □

Voyons maintenant quelques propriétes des produite de groupes topologiques. Je rappelle que la topologie produit sur un produit d'espaces topologiques $\prod_{j\in J} X_j$ est définie à partir de la base

$$\mathfrak{B} = \left\{ \prod_{j\in J} O_j \,\middle|\, O_j \text{ ouvert dans } X_j \text{ et } \{j \in J \mid V_j \neq X_j\} \text{ fini} \right\}$$

Lorsque dans la suite on parlera d'ouverts ou de voisinages dans un produit, on suppose dans perte de généralisation qu'ils sont de cette forme, afin d'éviter des "...OestouvertetcontientdoncunélémentdelabaseBquiestdelaforme...".

Définition 6.17. Soit $(G_j)_{j\in J}$ une famille de groupes topologiques. On appelle "produit de la famille $(G_j)_{j\in J}$" l'ensemble

$$\prod_{j\in J} G_j = \left\{ f : J \to \bigcup_{j\in J} Gj \;\middle|\; f(j) \in G_j \text{ pour tout } j \in J \right\}$$

On le munit de la topologie produit (les G_j vus comme espages topologiques), et de l'opération qui consiste à multiplier "point par point", idem est $(fg)(j) = f(j)g(j)$. On écrira plustot f_j au lieu de $f(j)$.

Définition 6.18. Soit $(G_j)_{j\in J}$ une famille de groupes topologiques. On appelle "somme directe de la famille $(G_j)_{j\in J}$" l'ensemble

$$\bigoplus_{j\in J} G_j = \left\{ f \in \prod_{j\in J} Gj \;\middle|\; \{j \in J \mid f_j \neq e_{G_j}\} \text{ est fini} \right\}$$

On le munit de la topologie induite par la topologie produit.

Il est clair que le produit et la somme directe coincïdent si et seulement si tous, sauf un nombre fini des G_j sont triviaux. La proposition suivante met en evidence les propriétés les plus importantes de ces deux façons de former des produits.

Proposition 6.19. *Le produit et la somme directe d'une famille de groupes topologiques $(G_j)_{j\in J}$ sont des groupes topologiques, et*

I: $\bigoplus_{j\in J} G_j$ *est dense dans* $\prod_{j\in J} G_j$

II: $\bigoplus_{j\in J} G_j$ *et* $\prod_{j\in J} G_j$ *sont de Hausdorff si et seulement tout les G_j sont de Hausdorff.*

III: $\prod_{j\in J} G_j$ *est localement compact si et seulement si tout les G_j sont localement compacts et tous sauf un nombre fini entr'eux sont compacts.*

IV: $\bigoplus_{j\in J} G_j$ *est localement compact si et seulement si touts les G_j sont localement compacts touts sauf un nombre fini des G_i sont munis de la topologie grossière.*

Démonstration. (I) : Soit $x \in \prod_{j\in J} G_j$ et V un voisinage de x. V s'écrit comme $V = \prod_{j\in J} V_j$ où les V_j sont des voisinage des x_j dans G_j et où l'ensemble

$$K = \{j \in J \mid V_j \neq G_j\}$$

est fini. Definissons un $y \in \bigoplus_{j\in J} G_j$ par

$$y_j = \begin{cases} x_j & \text{si } j \in K \\ e_{G_j} & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme K est fini on a bien que $y \in \bigoplus_{j\in J} G_j$, et aussi que $y \in V$, par construction. Ainsi $V \cap \bigoplus_{j\in J} G_j \neq \emptyset$ ce qui montre que $\bigoplus_{j\in J} G_j$ est dense dans $\prod_{j\in J} G_j$

(II) Si $x \neq y$ sont deux éléments differents de $x \in \prod_{j\in J} G_j$, il existe un $k \in J$ tel que $x_k \neq y_k$. Il suffit maintenant de prendre des voisinages disjointes de U_x de x_k et U_y de y_k dans G_k, et de former les produits $V = \prod_{j\in J} V_j$ où $V_k = U_x$

respectivement U_y et $V_j = G_j$ pour $j \neq k$ pour obtenir des voisinages disjointes de x et y. Si inversement G_k n'est pas de Hausdorff pour un $k \in J$, il suffit de considerer $x, y \in G$ tels que $x_j = y_j$ pour tout $j \neq k$ et tels que x_k et y_k sont deux éléments non-séparables de G_k. Ces éléments $x \neq y$ seront forcement eux mèmes non-séparables.

(III) Clair, vu qu'un produit d'espaces topologiques est compact si et seulement si tout les facteurs le sont (Tychonoff), et vu qu'un voisinage de l'unité dans le produit s'ecrit comme produit de voisinages des unités dans les facteurs, tous sauf eventuellement un nombre fini entr'eux egales au facteur tout entier.

(IV) Suposons que la somme directe $\bigoplus_{j \in J} G_j$ est localement compacte, et posons

$$K = \{j \in J \mid G_j \text{ n'a pas la topologie grossière}\}$$

A voir que K est fini. Comme $\bigoplus_{j \in J} G_j$ est localement compact, $\bigoplus_{k \in K} G_k$ doit être localement compact. Choisissons alors un voisinage compact V de l'unité dans $\bigoplus_{k \in K} G_k$. Ce voisinage s'écrira comme

$$V = \prod_{k \in K} V_k \quad \cap \quad \bigoplus_{k \in K} G_k$$

où $L = \{k \in K \mid V_k = G_k\}$ est à complement fini dans K. Il suffit maintenant de montrer que L est fini. Comme V est compact, on a que

$$\prod_{l \in L} V_l \quad \cap \quad \bigoplus_{l \in L} G_l = \quad \bigoplus_{l \in L} G_l$$

est compact. Comme aucun des G_l est muni de la topologie grossière, je peux trouver un élément $x \in \prod_{l \in L} G_l$ tel que x_l n'adhère pas à l'unité pour tout $l \in L$. Le filtre de voisinages de x a, par compacité de $\bigoplus_{l \in L} G_l$ au mois un point adherent y dans $\bigoplus_{l \in L} G_l$, avec $y_l \in \overline{\{x_l\}}$, et donc $y_l \neq e_{G_l}$. Ainsi L doit être fini, par définition de $\bigoplus_{l \in L} G_l$. $\square$

Pour un groupe topologique G, et une famille $(P_j)_{j \in J}$ de parties de G, notons

$$\sum_{j \in J} P_j$$

le sous-groupe de G engendré par la réunion de la famille $(P_j)_{j \in J}$, ce qui est l'ensemble de tout les produits finis à facteurs dans $\cup_{j \in J} P_j$. Avec cette notation nous pouvons aisement formuler la proposition suivante :

Proposition 6.20. *Soit G un groupe topologique et $(N_j)_{j \in J}$ une famille de sous-groupes normaux de G satisfaisant*

I: $\displaystyle\sum_{j \in J} N_j = G$

II: $\displaystyle N_{j_0} \cap \sum_{\substack{j \in J \\ j \neq j_0}} N_j = \{e\}$ *pour tout* $j_0 \in J$

III: *Dans le cas où J est infini : Tout voisinage de e dans G contient un ensemble de la forme $\displaystyle\sum_{j \in J} V_j$ où V_j est un voisinage de e dans N_j (pour la topologie induite) pour un nombre fini d'indices j et $V_j = N_j$ autrement*

Alors G est canoniquement isomorphe à la somme directe des $(N_j)_{j\in J}$ (comme groupe topologique bien entendu).

$$G \cong \bigoplus_{j\in J} N_j$$

Dans cette situation, on écrit souvent une égalité au lieu d'un isomorphisme, et on parle d'une somme directe intérieure. La condition (III) est bien necessaire ! (Considerer $G = \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$ muni de la topologie des boites pour un contre exemple).

Démonstration. Les deux premiers conditions impliquent que G est algèbriquement isomorphe à $\bigoplus_{j\in J} N_j$. L'isomorphisme $\varphi : \bigoplus_{j\in J} N_j \to G$ est naturellement donné par $\varphi(x) = \prod_{j\in J} x_j$ (c'est un produit fini d'éléments de G). φ est clairement une application ouverte, et la troisième condition, si elle est remplie fournit la continuité de φ. Ainsi φ est un homéomorphisme.
La condition (III) est toujours remplie si J est fini : Prenons un voisinage U de e et posons $J = \{1, 2, ..., n\}$. Il existe un voisinage V de e tel que $V^n \subseteq U$. Posons $V_j = V \cap N_j$. Ainsi

$$V_1 V_2 \cdots V_n = (V \cap H_1)(V \cap H_2) \cdots (V \cap H_n) = V^n \subseteq U$$

□

Proposition 6.21. *Soit G un groupe topologique, et H un sous-groupe normal de G. Considerons la suite exacte courte de groupes topologiques*

$$0 \longrightarrow H \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} G/H \longrightarrow 0$$

Alors on a equivalence

- **I:** *$G \cong H \oplus G/H$ comme groupe topologique.*
- **II:** *π admet une section continue*
- **III:** *ι admet une retraction continue*

Démonstration. (II) $\Longrightarrow$ (I) Supposons que π admette une section continue σ. Posons $L = \sigma(G/H)$. J'affirme que $G = H \oplus L$. L est isomorphe à G/H via l'isomorphisme σ : En effet σ est surjéctif par définition de L et aussi injéctif car $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_{G/H}$. σ est continu par hypothèse. Son inverse est $\pi|_L$, qui est continu comme restriction d'une fonction continue. Pour tout $x \in G$ on a

$$x = \underbrace{\sigma(\pi(x))}_{\in L}\ \underbrace{\sigma(\pi(x))^{-1}x}_{\in H = \ker \pi} \qquad \in LH = HL$$

car $\pi(\sigma(\pi(x))^{-1}x) = \pi(x)^{-1}\pi(x) = e$. Ainsi $HL = LH = G$. De plus on a clairement $H \cap G = \{e\}$, ce qui montre que G est isomorphe à $H \oplus L$.

(III) $\Longrightarrow$ (I) Soit ρ une retraction continue de ι, et notons $L = \ker \rho$. J'affirme que $G = H \oplus L$. Clairement $L \cap H = \{e\}$.Pour tout $x \in G$ on a

$$x = \underbrace{\rho(x)}_{\in H}\ \underbrace{\rho(x)^{-1}x}_{\in L = \ker \rho} \qquad \in HL = LH$$

car $\rho(\rho(x^{-1})x) = \rho(\rho(x^{-1}))\rho(x) = e$. Ainsi $G = HL = LH$. On a donc bien que $G \cong H \oplus L$. Reste à voir que L est isomorphe à G/H via l'isomorphisme $\pi|_L$: En effet $\pi|_L$ est continue et ouverte car c'est une projéction. $\pi|_L$ est injéctif, car pour tout $l \in L$ on a $\pi(l) = 0 \implies l \in H$ et donc $l = e$. $\pi|_L$ est aussi surjéctif, car $\pi|_L^{-1}(xH) = xH \cap L \neq \emptyset$.

(III) $\implies$ (I) et (II) : Si H est facteur direct dans G, il existe un complement $L \subseteq G$ tel que $G = H \oplus L$. Le quotient G/H est ainsi canoniquement isomorphe à L. La section de π est l'injéction de L dans $H \oplus L$, la retraction de ι la projéction de $H \oplus L$ sur H. □

Définition 6.22. Soit J un ensemble muni d'un ordre partiel $\leq$ filtrant à droite, $(G_j)_{j\in J}$ une famille de groupes topologiques indicée par J, et supposons donné pour tout $j, k \in J$ avec $j < k$ un homomorphisme de groupes topologiques $f_{jk} : G_k \to G_j$ telles que

$$i < j < k \implies f_{ik} = f_{ij} \circ f_{jk}$$

Alors on appelle $\big(J_\leq, (G_j)_{j\in J}, (f_{jk})_{j<k, j\in J, k\in J}\big)$ un système projéctif, et on appelle "limite projective" l'ensemble

$$\lim_{j\in J} G_j = \left\{ g \in \prod_{j\in J} \;\middle|\; j < k \implies f_{jk}(g_k) = g_j \text{ pour tout } j, k \in J \right\}$$

Les applications f_{jk} sont appellées liaisons [1]. Soit $\pi_j : \prod_{j\in J} \to G_j$ la projéction canonique et $\iota : \lim_{j\in J} G_j \to \prod_{j\in J} G_j$ l'inclusion. Les applications $f_j = \pi_j \circ \iota : \lim_{j\in J} G_j \to G_j$ sont appellées homomorphismes de limite.

Un exemple pour cette construction, qui d'ailleurs est essentiellement la même si on travaille avec des autres structures (groupes, espaces topologiques, anneaux, etc...) se trouve dans le dernier chapitre.

Proposition 6.23. *Soit* $\big(J_\leq\,,\ (G_j)_{j\in J}\,,\ (f_{jk})_{j<k, j\in J, k\in J}\big)$ *un systéme projéctive. Alors les assertions suivantes sont vraies :*

- **I:** $\lim\limits_{j\in J} G_j$ *est un sous groupe fermé de* $\prod\limits_{j\in J} G_j$.
- **II:** *Les* f_j *sont des homomorphismes de groupes topologiques, et* $j < k \implies f_j = f_{jk} \circ h_k$
- **III:** $\lim\limits_{j\in J} G_j$ *est compact si tout les* G_j *le sont.*

Démonstration. (I) Notons $P = \prod_{j\in J} G_j$. Prenons deux éléments $j < k$ dans J, et posons $G_{jk} = \{g \in P \mid f_{jk}(g_k) = g_j\}$. Comme f_{jk} est un homomorphisme, G_{jk} est un sous-groupe de P, et car f_{jk} est continue, G_{jk} est fermé. Mais on a

$$\lim_{j\in J} G_j = \bigcap_{j<k} G_{jk}$$

ce qui démontre le premier point.
(II) Immediat.
(III) Si tout les G_j sont compacts, alors aussi P (Tychonoff) et comme $\lim_{j\in J} G_j$ est fermé dans P, il doit être compact. □

Proposition et Définition 6.24. *Soit* $G = \lim_{j\in J} G_j$ *pour un système projéctif de groupes compacts. Alors tout les liaisons* f_{jk} *sont surjéctives si et seulement si toutes les applications de limite* f_j *le sont. On dira alors que G est limite projéctive stricte du système projéctif.*

[1]Une terminologie privée de l'auteur. En anglais : "bonding maps"

Démonstration. $\Longrightarrow$ Supposons que tout les liaisons f_{jk} sont surjéctives. Fixons $i \in J$ et $h \in G_i$, et montrons qu'il existe un élément $g = (g_j)_{j\in J} \in G$ tel que $h = f_i(g) = g_i$. Pour cela, definissons pour tout $k \in J$ avec $i \leq k$ l'ensemble

$$C_k = \{x \mid x_j = f_{jk}(x_k) \text{ et } x_i = h \quad \text{pour tout } j \leq k\} \quad \subseteq \quad \prod_{j\in J} G_j$$

C_k n'est pas vide, car les f_{jk} sont tous surjéctives. J'affirme que $j \leq k < k'$ implique $C_{k'} \subseteq C_k$: En effet $x \in C_{k'} \implies f_{jk}(x_k) = f_{jk}(f_{kk'}(x_{k'})) = f_{jk'}(x_{k'})$ et $h = x_i$, donc $x \in C_k$. La famille

$$\{C_k \mid k \in J \text{ et } i \leq k\}$$

est un filtre constitué d'ensembles fermés dans le compact $\prod_{j\in J} G_j$, et admet donc (au mois) un point de limite g. Cette limite g marche, car $g_i = h$! Reste à verifier que $g \in \lim_{j\in J} G_j$. On a pour tout k avec $j \leq k$ un k' tel que $i, k \leq k'$. g est un élément de $C_{k'}$, d'où $g_j = f_{jk'}(g_{k'}) = f_{jk}(f_{kk'}(g_{k'})) = f_{jk}(g_k)$ par définition de $C_{k'}$. g est donc bien un élément de la limite projéctive.
$\Longleftarrow$ Soit $j < k$. Alors $f_j = f_{jk} f_k$. La surjéctivité de f_j implique donc celle de f_{jk}. □

Proposition 6.25. *Soit $G = \lim_{j\in J} G_j$ pour un système projéctif de groupes compacts, avec applications de limite f_j. Soit $\mathfrak{V}_j$ un système fondamental de voisinages ouvertes de l'unité dans G_j, $\mathfrak{V}$ un système fondamental de voisinages ouvertes de l'unité de G et $\mathfrak{N} = \{\ker f_j \mid j \in J\}$. Alors*

- **I:** $\{f_j^{-1}(V) \,|\, j \in J, V \in \mathfrak{V}\}$ *est un système fondamental de voisinages ouvertes de e dans G.*
- **II:** $\mathfrak{N}$ *est base d'un filtre constitué de sous-groupes normaux compactes convergeant vers $\overline{\{e_G\}}$.*

Réciproquement, supposons que G soit un groupe compact et qu'un ait une base d'un filtre $\mathfrak{N}$ constitué de sous-groupes compactes convergeant vers $\overline{\{e_G\}}$. Pour $M, N \in \mathfrak{N}$ aver $M \subset N$ notons $f_{NM} : G/M \to G/N$ la projection canonique. Les f_{NM} sont liaisons pour le système projéctif strict

$$\big(\mathfrak{N}_{\subset}\ ,\ \ (G/N)_{N\in\mathfrak{N}}\ ,\ \ (f_{NM})_{M\subset N, M\in\mathfrak{N}, N\in\mathfrak{N}}\big)$$

et on a

- **III:** $\lim\limits_{n\in\mathfrak{N}} G/N \cong G/\overline{\{e_G\}}$
- **IV:** *Avec cet isomorphisme, les applications de limite pour ce système projéctif sont exactement les projéctions $f_n : G \to G/N$.*

Démonstration. (I) : Soit $V \in \mathfrak{V}$. Comme $f_j^{-1}(V_j)$ est ouvert, il suffit de trouver un $k \in J$ et un $V_k \in \mathfrak{V}_k$ tel que $f_k^{-1}(V_k) \subseteq V$. Par la définition de la topologie sur la limite projéctive, V s'écrit comme

$$V = \lim_{j\in J} G_j \cap \prod_{j\in J} W_j$$

avec $W_j \in \mathfrak{V}_j$ pour tout $j \in J$, et où $F = \{j \in J \mid W_j \neq G_j\}$ est fini. Lensemble $F \subseteq J_{\leq}$ admet une borne superieure k. Dans $\mathfrak{V}_k$ il existe un V_k tel que $f_{jk}(V_k) \subseteq W_j$ pour tout $j \in J$ (c'est un nombre fini de conditions). Ainsi

$$f_k^{-1}(V_k) \subseteq \lim_{j\in J} G_j \cap \prod_{j\in J} W_j = V$$

(II) Tout les $\ker f_j$ sont des sous-groupes normaux fermés et donc compacts de G. Les relations $i, j \leq k$ impliquent $\ker f_k \subseteq \ker f_i \cap \ker f_j$. L'ensemble $\mathfrak{N}$ est donc base d'un filtre. Pour tout $j \in J$ nous avons $\ker f_j = f_j^{-1}(e_{G_j} \subseteq f_j^{-1}(V_j)$ pour tout $V_j \in \mathfrak{V}_j$. Comme la famille $\{f_j^{-1}(V_j) \mid j \in J \text{ et } V_j \in \mathfrak{V}_j\}$ est un système fondamental de voisinages de e_G, on a que $\overline{\{e_G\}}$ est exactement la limite du filtre $\mathfrak{N}$.

(III) : Definissons $\varphi : G \to \prod_{N\in\mathfrak{N}} G/N$ par $\varphi(g)_N = gN$. C'est clairement une application ouverte continue. Pour qu'un élément $x \in \prod_{N\in\mathfrak{N}} G/N$ est dans $\lim_{n\in\mathfrak{N}} G/N$ il faut et il suffit que pour tout paire $M \subset N$ on a $f_{NM}(x_M M) = x_N N$, ce qui est $x_N^{-1}x_M \in N$. Cela montre que φ atterrit dans le bon ensemble, cet à dire $\varphi : G \to \lim_{N\in\mathfrak{N}} G/N$. Comme $\ker\varphi = \cap\mathfrak{N} = \overline{\{e_G\}}$ on a injéctivité de φ.
Prenons $x \in \lim_{N\in\mathfrak{N}} G/N$. La famille $\{x_N N \mid N \in \mathfrak{N}\}$ est base d'un filtre constitué d'ensembles fermés dans G, car $M \subset N$ implique $x_N^{-1}x_M \in N$ et donc aussi que $x_M \in x_N N \cap x_M M$. Vu la compacité de G, il existe un point de limite g pour ce filtre. Pour ce point de limite, on a l'équivalence $g \in g_N N \iff gN = g_N N$, et ainsi $\varphi(g) = x$, ce qui montre la surjéctivité de φ.

(IV) Si nous définissons $f_N(x) = x_N N$, alors nous avons $\pi_N = f_N \circ \varphi$ comme il le faut, ce qui démontre le dernier point. $\square$

Theorème 6.26. *Soit G un groupe topologique localement compact de Hausdorff. Alors on a equivalence entre (I) et (II). Si G est compact, on a de plus équivalence avec (III) et (IV) :*

- **I:** *Il existe un système fondamental de voisinages ouvertes de e constitué de sous-groupes ouvertes.*
- **II:** *G est totalement disconnect.*
- **III:** *Il existe un système fondamental de voisinages ouvertes de e constitué de sous-groupes ouvertes normaux.*
- **IV:** *G est limite projéctive stricte de groupes finis (discrètes).*

Démonstration. (I) $\implies$ (II) : Comme tout sous-groupe ouvert est aussi fermé, on a que $\{e\}$ esi intersection d'ensembles ouverts et fermés, donc une composante connexe, ce qui montre que G est totalement disconnect.
(II) $\implies$ (I) : Fixons un voisinage compact W de e. Comme la composante connexe de e est $\{e\}$ seulement, e admet un système fondamental de voisinages ouvertes et fermés, contenus dans W, qu'on appellera $\mathfrak{U}$. Un tel $U \in \mathfrak{U}$ est donc ouvert, fermé et compact. J'affirme qu'il existe dans ce cas un voisinage V de e, tel que $UV \subseteq U$: En effet si cela ne serait pas le cas, la famille

$$\{UV \backslash U \mid V \in \mathfrak{U}\}$$

sera base du'un filtre d'ensembles compactes non vides. Un point de limite g de ce filtre n'est jamais dans U. Mais d'autre part on a $g \in U$, vu que pour tout voisinage V de e, on a $g \in UV^{-1} \implies gV \cap U \neq \emptyset$, et donc $g \in \overline{U} = U$. Cela montre l'assertion faite.
Si on a $UV = U$, on a aussi $UV^n = U$, ce qui montre que le sous-groupe $H = \bigcup_{n=0}^{\infty} V^n$ de G généré par V est contenu dans U (car $H \subseteq UH = U$). Ainsi, tout voisinage U de e contient un sous-groupe ouvert.

(I) $\implies$ (III) Si H est un sous-groupe ouvert de G, alors

$$\bigcap_{g\in G} gHg^{-1}$$

est un sous-groupe ouvert normal dans H, car invariant sous tout les automorphismae interieurs (5.14).
(III) $\implies$ (IV) Soit $\mathfrak{N}$ un système fondamental de voisinages ouvertes de e constitué de sous-groupes ouvertes normaux. Tout $N \in \mathfrak{N}$ est aussi fermé. Ainsi G/N est compact et discret, donc fini. Par 6.25, G est limite projéctive stricte des quotients G/N.
(IV) $\implies$ (I) Si $G = \lim_{j\imath J} G_j$ est limite d'un système projéctif strict de groupes finis, alors G est sous-groupe de $\prod_{j\in J} G_j$. Produits d'espaces totalement disconnects sont totalement disconnects, et sous-espaces d'espaces totalement disconnects sont totalement disconnects. G est donc totalement disconnect. $\square$

Plusieurs propositions (en particulier 6.25) sugèrent qu'un groupe topologique G qui n'est pas de Hausdorff n'est pas essentiellement different de $G/\overline{\{e\}}$. Cela devient encore plus clair lorsque on considère des espaces de fonctions continus sur un tel groupe G, car l'espace des fonctions continus $G \to X$ est canoniquement isomorphe à l'espace $G/\overline{\{e\}} \to X$, vu qu'une fonction continue sur G doit être constante sur les classes de $\overline{\{e\}}$.
Un bon exemple pour cette situation est le suivant : Considerons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ défini par $f(t) = e^{2\pi it}$ et munissons $\mathbb{T}$ de la topologie habituelle et $\mathbb{R}$ avec la topologie initiale par f. Ainsi $\overline{\{0\}} = \mathbb{Z}$, et les fonctions continues $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$ avec cette topologie sont les fonctions periodiques de periode 1, continus sur $\mathbb{R}$ pour la topologie usuelle.

À PARTIR DE CE POINT, ON SOUSENTEND QUE TOUS LES GROUPES TOPOLOGIQUES SONT T_0 ET DONC COMPLETEMENT REGULIERS

7. Existence et unicité de la mesure de Haar

Theorème 7.1. *Soit G un groupe topologique localement compact. Alors il existe une integrale de Radon invariante par translation, cet à dire une forme I sur $\mathfrak{C}_{00}^+$ telle que :*

- **I:** *$I(f)$ est réel positif pour $f \neq 0$*
- **II:** *$I(f+g) = I(f) + I(g)$ pour tout $f, g \in \mathfrak{C}_{00}^+$*
- **III:** *$I(\alpha f) = \alpha I(f)$ pour tout $f \in \mathfrak{C}_{00}^+$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$*
- **IV:** *$I({}_a f) = I(f)$ pour $f \in \mathfrak{C}_{00}^+$, $a \in G$*

Si de plus J est une autre forme sur $f \in \mathfrak{C}_{00}^+$ satisfaisant les conditions II, III, IV, alors il existe un nombre réel c tel que $J = cI$

On appellera I une intégrale de Haar à gauche (condition IV) sur $\mathfrak{C}_{00}^+$. Bien sûr on peut aussi construire des intégrales de Haar à droite, qui eux aussi ne diffèrent que par facteur constant.

Démonstration. La preuve se partage en cinq étapes. Après une étape préliminaire I, on enoncera deux lemmes techniques, l'étape IV prouve l'existence, V l'unicité de I.

(I) Commencons avec deux fonctions f et φ dans $\mathfrak{C}_{00}^+$, avec $\varphi \neq 0$. On cherche à éstimer f en fonction de φ. Considerons pour cela tout les suites finies $\{s_1, s_2, ..., s_m\}$ dans G et tout les suites finies $\{c_1, c_2, ..., c_m\}$ de nombres réels positifs tels qu'on a

$$f(x) \leq \sum_{j=1}^{m} c_j \varphi(s_j x) \qquad \text{pour tout } x \in G \tag{7.1}$$

Voyons que ça existe :
Comme f est continue à support compact, elle est bornée. Soit F une partie compacte de G telle que f est nul en dehors de F. Soient de plus $a \in G$ et U un voisinage de e et μ un nombre réel positif tel que $\varphi(x) > \mu$ pour tout $x \in aU$. (Tout cela existe car φ est continue et non nulle.) Comme F est compact, il existent des $y_1, y_2, ..., y_{m_0} \in F$ tels que $y_1U, y_2U, ..., y_{m_0}U$ recouvrent F. Si $x \notin \text{supp}(f)$, l'inégalité est triviale. Si $x \in \text{supp}(f) \subseteq F$, x se trouve dans un y_{j_0}. Il est maintenant façile à voir que

$$f(x) \leq \frac{\|f\|_\infty}{\mu} \varphi(a y_{j_0}^{-1} x) \leq \sum_{j=1}^{m_0} \frac{\|f\|_\infty}{\mu} \varphi(a y_j^{-1} x)$$

pour tout x dans G.
Definissons $(f : \varphi)$ comme etant l'infimum de tout les sommes $\sum_{j=1}^m c_j$ de réels c_j pour lesquels l'inégalité 7.1 a lieu. D'après ce qui prècede $(f : \varphi)$ est bien defini et inferieur à $\frac{m_0}{\mu} \|f\|_\infty$. D'autre part on a, si 7.1 a lieu que $\|f\|_\infty \leq \sum_{j=1}^m c_j ||\varphi||_\infty$, ce qui donne en résumé

$$\frac{||f||_\infty}{||\varphi||_\infty} \leq (f : \varphi) \leq \frac{m_0 ||f||_\infty}{\mu} \tag{7.2}$$

Les trois assertions suivantes sont triviales :

$$({}_a f : \varphi) = (f : {}_a\varphi) = (f : \varphi) \qquad \text{pour tout} \quad a \in G; \tag{7.3}$$

$$(\alpha f : \varphi) = \alpha(f : \varphi) \qquad \text{pour tout} \quad \alpha \in \mathbb{R}; \tag{7.4}$$

$$(f_1 + f_2 : \varphi) \leq (f_1 : \varphi) + (f_2 : \varphi) \qquad \text{pour tout} \quad f_1, f_2 \in \mathfrak{C}_{00}^+ \tag{7.5}$$

De plus, si φ et ψ sont des fonctions non nuls de $\mathfrak{C}_{00}^+$, on a que

$$(f : \psi) \leq (f : \varphi)(\varphi : \psi) \tag{7.6}$$

ce qui se montre de façon directe : Si $f(x) \leq \sum_{j=1}^m c_j \varphi(s_j x)$ pour tout $x \in G$ et $\varphi(y) \leq \sum_{k=1}^m d_k \psi(t_k y)$ pour tout $y \in G$, alors

$$f(x) \leq \sum_{j=1}^{m} c_j \sum_{k=1}^{m} d_k \psi(t_k s_j y) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} c_j d_k \psi(t_k s_j y) \qquad \text{pour tout} x \in G$$

Ainsi

$$(f : \psi) \leq \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} c_j d_k = \left(\sum_{j=1}^{m} c_j \right) \left(\sum_{k=1}^{m} d_k \right)$$

ce qui montre 7.6.
Fixons maintenant une fonction f_0 dans $\mathfrak{C}_{00}^+$ (qui restera la même au cours du reste

de la preuve), et definissons

$$I_\varphi(f) = \frac{(f : \varphi)}{(f_0 : \varphi)} \tag{7.7}$$

pour toute fonction non nulle φ dans $\mathfrak{C}_{00}^+$. Clairement $I_\varphi(0) = 0$ car $(0 : \varphi) = 0$, et pour $f \neq 0$ on a d'après 7.2 que

$$\frac{1}{(f_0 : f)} \leq I_\varphi(f) \leq (f : f_0) \tag{7.8}$$

A partir des relations 7.3, 7.4 et 7.5 on deduit que

$$I_\varphi({}_af) = I_\varphi(f) \quad \text{pour tout} \quad a \in G, f \in \mathfrak{C}_{00}^+ \tag{7.9}$$

$$I_\varphi(\alpha f) = \alpha I_\varphi(f) \quad \text{pour tout} \quad \alpha \in \mathbb{R}, f \in \mathfrak{C}_{00}^+ \tag{7.10}$$

$$I_\varphi(f_1 + f_2) \leq I_\varphi(f_1) + I_\varphi(f_2) \quad \text{pour tout} \quad f_1, f_2 \in \mathfrak{C}_{00}^+ \tag{7.11}$$

$$I_\varphi(f_1) \leq I_\varphi(f_2) \quad \text{pour tout} \quad f_1, f_2 \in \mathfrak{C}_{00}^+, f_1 \leq f_2 \tag{7.12}$$

On utilisera ces propriétés, l'invariance par translation, la sous-linéarité et la monotonie de I_φ tout au long de la preuve.
L'idée de la preuve est de regarder tout les formes I_φ où φ s'annulle en dehors d'un voisinage U_φ de e. Lorsque on impose des U_φ de plus en plus petits, les formes I_φ s'approchent à une forme limite I, qui satisfait tout les propriétés demandés. L'unicité sera une consequence immediate de cette construction.
Les deux lemmes techniques, les points II et III de notre preuve, suivent pour rendre formel tout ce raisonnement. Le premier exprime, que la sous-linéarité de I_φ, i.e. l'inégalité 7.11, s'approche à la "vraie" linéarité, lorsque le support de φ devient de plus en plus petit.

(II) Soient $f_1, f_2, ..., f_m$ des fonctions non nuls dans $\mathfrak{C}_{00}^+$, et Δ, δ des nombres réels positifs. J'affirme qu'il existe un voisinage U de e tel que

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j I_\varphi(f_j) \leq I_\varphi\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_j\right) + \delta \tag{7.13}$$

quelque soit φ non nul dans $\mathfrak{C}_{00}^+$ s'annulant en dehors de U et quelque soient les $0 \leq \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m \leq \Delta$.
Pour prouver cette assertion, prenons E une partie compacte de G telle que tout les fonctions f_i s'annullent en dehors de E, et prenons V un voisinage compact de e. (G est supposé localement compact). Choissisons de plus une fonction g dans $\mathfrak{C}_{00}^+$ à valeurs dans $[0, 1]$ qui vaut 1 sur tout le compact EV. (cf. lemme d'Urysohn 3.6 pour l'existence de g). Notons $M = \Delta \max\{||f_j||_\infty | 1 \leq j \leq m\}$. Soit ε un nombre positif, avec

$$\varepsilon \leq \text{Min}\left\{M, \frac{\delta}{2\Delta\sum_{j=1}^{m}(f_j : f_0)}, \frac{\delta}{2(1+M)(g : f_0)}\right\}$$

Les fonctions $f_1, f_2, ..., f_m$ sont uniformement continus à droite d'après **??**. Quitte à prendre une intersection, il existe un voisinage symmetrique U de e ayant les trois propriétés

$$U \subseteq V$$

et

$$|f_j(s) - f_j(x)| < \frac{\varepsilon^2}{4Mm\Delta} \qquad \text{si } s^{-1}x \in U \quad j = 1, 2, ..., m \tag{7.14}$$

et

$$|g(s) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{4M} \qquad \text{si } s^{-1}x \in U \tag{7.15}$$

Voyons que le voisinage U satisfait l'assertion 7.13. On choisit alors $\varphi \in \mathfrak{C}_{00}^{+}$ non nul, s'annullant en dehors de U, et des nombres $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ dans $[0, \Delta]$. Definissons Φ comme etant la fonction $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_j + \varepsilon g$, et definissons les fonctions $h_1, h_2, ..., h_m$ par

$$h_j(x) = \begin{cases} \frac{\lambda_j f_j(x)}{\Phi(x)} & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases}$$

Il est clair que $\Phi \in \mathfrak{C}_{00}^{+}$, avec $||\Phi||_\infty \leq \sum_{j=1}^{m} \lambda_j ||f_j||_\infty + \varepsilon \leq M + \varepsilon < 2M$, que $h_j \Phi = \lambda_j f_j$ et que $\sum_{j=1}^{m} h_j \leq 1$. Si $s^{-1}x \in U$, on a a fortiori par 7.14 et 7.15 que

$$\begin{aligned} |\Phi(s) - \Phi(x)| &\leq \sum_{j=1}^{m} \lambda_j |f_j(s) - f_j(x)| - \varepsilon |g(s) - (g(x)| \\ &< m\Delta \frac{\varepsilon^3}{4Mm\Delta} + \varepsilon \frac{\varepsilon^2}{4m} \\ &= \frac{\varepsilon^3}{2M} \end{aligned} \tag{7.16}$$

Voyons maintenant que

$$|h_j(s) - h_j(x)| < \frac{\varepsilon}{m} \qquad \text{si } s^{-1}x \in U \quad j = 1, 2, ..., m \tag{7.17}$$

En effet on a, si x et s sont les deux dans EV, en utilisant 7.14 et 7.16 que

$$\begin{aligned} |h_j(s) - h_j(x)| &= \left| \frac{\lambda_j f_j(s)}{\Phi(s)} - \frac{\lambda_j f_j(x)}{\Phi(x)} \right| \\ &= \left| \frac{\lambda_j f_j(s)\Phi(x) - \lambda_j f_j(x)\Phi(s)}{\Phi(s)\Phi(x)} \right| \\ &\leq \frac{\Delta}{\varepsilon^2} \left(|f_j(s)\Phi(x) - f_j(s)\Phi(s)| + |f_j(s)\Phi(s) - f_j(x)\Phi(s)| \right) \\ &\leq \frac{\Delta}{\varepsilon^2} \left(||f_j||_\infty \frac{\varepsilon^3}{2M} + ||\Phi||_\infty \frac{\varepsilon^3}{4Mm\Delta} \right) \\ &< \frac{\Delta}{\varepsilon^2} \left(\frac{M}{m\Delta} \frac{\varepsilon^3}{2M} + \frac{2M\varepsilon^3}{4Mm\Delta} \right) \\ &= \frac{\varepsilon}{m} \end{aligned}$$

Si, par contre, $x \notin EV$, et $s^{-1}x \in U$, on a $s \notin E$, car autrement on aurait $x = ss^{-1}x \in EU \subseteq EV$. Par consequent, si soit x soit s n'est pas dans EV, on a que $|h_j(s) - h_j(x)| = 0$. La relation 7.17 est donc établie.

Estimons maintenant $(\Phi : \varphi)$. Si nous avons

$$\Phi(x) \leq \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi(s_k x) \qquad \text{pour tout } x \in G$$

alors, car φ s'annulle en dehors de U, nous avons aussi pour x fixé

$$\Phi(x) \leq \sum_{k \geq 1}^{*} c_k \varphi(s_k x) \tag{7.18}$$

la somme étant restreinte sur tout k tels que $s_k x \in U$. En combinaisant 7.17 avec 7.18 on obtient

$$\Phi(x)h_j(x) \leq \sum_{k\geq 1}^{*} c_k \varphi(s_k x) \left[h_j(s_k^{-1}) + \frac{\varepsilon}{m}\right]$$

et donc

$$\lambda_j(x)f_j(x) \leq \sum_{k=1}^{m} c_k \left[h_j(s_k^{-1}) + \frac{\varepsilon}{m}\right] \varphi(s_k x) \qquad \text{pour tout } x \in G$$

ce qui implique que

$$(\lambda_j f_j : \varphi) \leq \sum_{k=1}^{m} c_k \left[h_j(s_k^{-1}) + \frac{\varepsilon}{m}\right]$$

On somme maintenant sur $j = 1, 2, ..., m$ cette inégalité. Comme $\sum_{j=1}^{m} h_j \leq 1$ on obtient

$$\sum_{j=1}^{m} (\lambda_j f_j : \varphi) \leq (1+\varepsilon) \sum_{k=1}^{m} c_k$$

Cette inégalité est vraie quelque soient les $c_1, c_2, ..., c_m$. On prend l'infimum de tous ces sommes $\sum_{k=1}^{m} c_k$, ce qui est par définition $(\Phi : \varphi)$:

$$\sum_{j=1}^{m} (\lambda_j f_j : \varphi) \leq (1+\varepsilon)(\Phi : \varphi)$$

et en divisant par$(f_0 : \varphi)$

$$\sum_{j=1}^{m} I_\varphi(\lambda_j f_j) \leq (1+\varepsilon) I_\varphi(\Phi) \tag{7.19}$$

Par la définition de Φ et par la sous-linéarité de I_φ i.e. les propriétés 7.10 et 7.11, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} \lambda_j I_\varphi(f_j & \leq (1+\varepsilon)\left[I_\varphi\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_j\right) + \varepsilon I_\varphi(g)\right] \\
& \leq I_\varphi\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_j\right) + \varepsilon \sum_{j=1}^{m} \lambda_j I_\varphi(f_j) + \varepsilon(1+\varepsilon) I_\varphi(g) \\
& \leq I_\varphi\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_j\right) + \varepsilon\Delta \sum_{j=1}^{m} (f_j : f_0) + \varepsilon(1+M)(g : f_0)
\end{aligned}$$

où la dernière inégalité est obtenue en utilisant la relation 7.8. Vu les conditions sur ε on a

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j I_\varphi(f_j) \leq I_\varphi\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_j\right) + \delta$$

ce qui est notre premier lemme.

(III) Soient $\varepsilon > 0$, f une fonction non nulle dans $\mathfrak{C}_{00}^{+}$ et U un voisinage de e dans G tel que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ pour tout $x, y \in G$ avec $y^{-1}x \in U$. Admettons que f s'annulle en dehors du compact E. Soit g une fonction non nulle dans $\mathfrak{C}_{00}^{+}$ nulle en dehors de U. Alors pour tout $\alpha > \varepsilon$ on peut trouver $m \in \mathbb{N}$, des nombres réels non négatives $c_1, c_2, ..., c_m$ non tous nuls et des éléments $t_1, t_2, ..., t_m$ dans E^{-1} tels que

$$\left| f(x) - \sum_{j=1}^{m} c_j g(t_j x) \right| \leq \alpha \qquad \text{pour tout } x \in G \tag{7.20}$$

Pour le prouver, notons d'abord que pour tout $x \in G$ on a

$$(f(x) - \varepsilon) g(s^{-1}x) \leq f(s) g(s^{-1}x) \leq (f(x) + \varepsilon) g(s^{-1}x) \tag{7.21}$$

car si $s^{-1}x \in U$ on a $|f(x) - f(s)| < \varepsilon$, et si $s^{-1}x \notin U$ on a $g(s^{-1}x) = 0$. Choisissons maintenant un nombre réel η tel que $0 < \eta < \frac{\alpha - \varepsilon}{(f:g)}$, et un voisinage compact V de e tel que $|g(u) - g(v)| < \eta$ pour tout $u, v \in G$ tels que $uv^{-1} \in V$. Comme f s'annulle en dehors du compact E, on peut trouver des éléments $s_1, s_2, ..., s_m \in E$ tels que $\bigcup_{j=1}^{m} s_j V \supset E \supset \operatorname{supp}(f)$. Par 3.7 (Partitions de l'Unité) il existent des fonctions $h_1, h_2, ..., h_m \in \mathfrak{C}_{00}^{+}$ telles que $\operatorname{supp}(h_j) \subset s_j V$ pour tout $1 \leq j \leq m$ et telles que $\sum_{j=1}^{m} h_j(x) = 1$ si $f(x) \neq 0$. On a pour tout $x, s \in G$ et pour tout $1 \leq j \leq m$

$$h_j(s) f(s) (g(s^{-1}x) - \eta) \leq h_j(s) f(s) g(s_j^{-1}x) \leq h_j(s) f(s) (g(s^{-1}x) + \eta) \tag{7.22}$$

car si $s_j^{-1}s = (s_j^{-1}x)(s^{-1}x)^{-1} \in V$, alors $\left| g(s^{-1}x) - g(s_j^{-1}x) \right| < \eta$ et si $s_j^{-1}s \notin V$ on a $s \notin s_j V$ et alors $h_j(s) = 0$.
On somme l'inégalité 7.22 sur j pour obtenir

$$f(s)(g(s^{-1}x) - \eta) \leq \sum_{j=1}^{m} h_j(s) f(s) g(s_j^{-1}x) \leq f(s)(g(s^{-1}x) + \eta)$$

et en vertu de 7.21

$$(f(x) - \varepsilon) g(s^{-1}x) - \eta f(s) \leq \sum_{j=1}^{m} h_j(s) f(s) g(s_j^{-1}x) \leq (f(x) + \varepsilon) g(s^{-1}x) + \eta f(s)$$

Considerons maintenant $\psi \in \mathfrak{C}_{00}^{+}$ non nul. D'apres les propriétés 7.9 à 7.12 de I_ψ on a

$$(f(x) - \varepsilon) I_\psi(\breve{g}) - \eta I_\psi(f) \leq I_\psi \left(\sum_{j=1}^{m} h_j f g(s_j^{-1}x) \right) \leq (f(x) + \varepsilon) I_\psi(\breve{g}) + \eta I_\psi(f) \tag{7.23}$$

Les relations 7.6 et 7.7 impliquent que

$$\frac{I_\psi(f)}{I_\psi(\breve{g})} \leq (f : \breve{g}) = \frac{\beta - \alpha}{\eta}$$

où $\beta = \eta(f : \breve{g}) + \varepsilon < \alpha$. Si on divise 7.23 par $I_\psi(\breve{g})$, on arrive à

$$f(x) - \beta \leq I_\psi \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{g(s_j^{-1}x)}{I_\psi(\breve{g})} h_j f \right) \leq f(x) + \beta \tag{7.24}$$

Utilisons maintenant le résultat de la deuxème étape de la preuve, à savoir 7.13, en choisissant $\delta = \alpha - \beta$, $\Delta = (f_0 : \breve{g}) \|g\|_\infty$, $\lambda_j = \frac{g(s_j^{-1}x)}{I_\psi(\breve{g})}$, et $f_j = h_j f$. On peut donc trouver un voisinage W de e tel que, si ψ s'annulle en dehors de W, l'inégalité suivante a lieu :

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{g(s_j^{-1}x)}{I_\psi(\breve{g})} I_\psi(h_j f) \leq I_\psi\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{g(s_j^{-1}x)}{I_\psi(\breve{g})} I_\psi(h_j f)\right) + \alpha - \beta$$

ou bien

$$\left| I_\psi\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{g(s_j^{-1}x)}{I_\psi(\breve{g})} I_\psi(h_j f)\right) - \sum_{j=1}^{m} \frac{I_\psi(h_j f)}{I_\psi(\breve{g})} g(s_j^{-1}x)\right| \leq \alpha - \beta \tag{7.25}$$

On insère 7.24 dans 7.25 pour conclure que

$$\left| f(x) - \sum_{j=1}^{m} \frac{I_\psi(h_j f)}{I_\psi(\breve{g})} g(s_j^{-1}x)\right| \leq \alpha$$

ce qui est exactememt 7.20 pour

$$c_j = \frac{I_\psi(h_j f)}{I_\psi(\breve{g})} \tag{7.26}$$

et $t_j = s_j^{-1}$. Notre deuxième lemme est démontré.

(IV) Montrons enfin l'existence d'une intégrale de Haar. Le filtre des voisinages de e , qu'on notera $\mathfrak{F}$, muni de la relation $\subseteq$ est un ensemble partialement ordonné filtrant à droite. Pour chaque voisinage $U \in \mathfrak{F}$, choisissons une fonction $\varphi_U \in \mathfrak{C}_{00}^{+}$ non nulle telle que $\operatorname{supp}(\varphi_U) \subseteq U$, et notons l'ensemble de ces fonctions Φ. L'ordre sur $\mathfrak{F}$ induit un ordre sur Φ via $\varphi_{U_1} \preceq \varphi_{U_2}$ par définition si et seulement si $U_2 \subseteq U_1$. On peut donc voir $(I_\varphi)_{\varphi\in\Phi}$ comme etant une suite généralisée dans les formes sur $\mathfrak{C}_{00}^{+}$. On montre qu'elle converge (pour la topologie de la convergence ponctuelle) vers une forme I qui sera l'integrale de Haar cherchée. Vu les points 7.8, 7.10 et 7.9, I va satisfaire les conditions I, III et IV demandées, mais aussi la condition II par le resultat de l'étape II de la preuve.

Pour montrer la convergence ponctuelle, on se choisit un $f \in \mathfrak{C}_{00}^{+}$ arbitraire et montre que la suite $(I_\varphi(f))_{\varphi\in\Phi}$ converge. C'est une suite généralisée dans $\mathbb{R}$, et il suffit donc de monrer qu'elle est de Cauchy, i.e. que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un φ_0 tel que $\varphi_1, \varphi_2 \preceq \varphi_0$ implique que $|I_{\varphi_1}(f) - I_{\varphi_2}(f)| < \varepsilon$.

Prenons un voisinage compact U_0 de e et ω une fonction dans $\mathfrak{C}_{00}^{+}$ qui vaut 1 sur le compact $F = \operatorname{supp}(f + f_0)U_0$. Soit ε un nombre réel avec $0 < \varepsilon < 1$, et

$$\gamma = \frac{\varepsilon}{4(1 + (\omega : f_0))(1 + (f : f_0))}$$

Soit $U \subseteq U_0$ un voisinage de e tel que à la fois $|f(x) - f(y)| < \frac{\gamma}{2}$ et $|f_0(x) - f_0(y)| < \frac{\gamma}{2}$ si $y^{-1}x \in U$. Choisissons une fonction non nulle $g \in \mathfrak{C}_{00}^{+}$ qui s'annulle en dehors de U. Le deuxième lemme, appliqué avec $\alpha = \gamma$ fournit des $t_1, t_2, ..., t_m \in (\operatorname{supp}(g))^{-1}$ et des réels non négatifs $c_1, c_2, ..., c_m$, donnés par 7.26, tels que

$$\left| f(x) - \sum_{j=1}^{m} c_j g(t_j x)\right| \leq \gamma \qquad \text{pour tout } x \in G$$

Comme f et tout les fonctions ${}_{t_j}g$ s'annullent en dehors de F, on a aussi

$$\left| f(x) - \sum_{j=1}^{m} c_j g(t_j x) \right| \leq \gamma\omega(x) \qquad \text{pour tout } x \in G \tag{7.27}$$

Pour chaque $\varphi \in \mathfrak{C}_{00}^{+}$ non nul, on obtient à partir de l'inégalité précedente en la scindant en deux parties et en utilisant la sous-linéarité de I_φ

$$\begin{cases} I_\varphi(f) & \leq & \gamma I_\varphi(\omega) + I_\varphi(\sum_{j=1}^m c_j\ {}_{t_j}g) \\ I_\varphi(\sum_{j=1}^m c_j\ {}_{t_j}g) & \leq & \gamma I_\varphi(\omega) + I_\varphi(f) \end{cases}$$

ce qui donne

$$\left| I_\varphi(f) - I_\varphi\left(\sum_{j=1}^{m} c_j\ {}_{t_j}g\right)\right| \leq \gamma I_\varphi(\omega) \leq \gamma(\omega : f_0) \tag{7.28}$$

la deuxième inégalite provenant de 7.8. On choisissait les c_j à partir de 7.26, et comme $h_j f \leq f$ on a

$$0 < c_j = \frac{I_\psi(h_j f)}{I_\psi(\check{g})} \leq \frac{I_\psi(f)}{I_\psi(\check{g})} \leq (f : \check{g})$$

On applique maintenant le premier lemme avec $f_j = {}_{t_j}g$, $\lambda_j = c_j$, $\Delta > (f : \check{g})$ et $\delta = \gamma$. Il nous fournit un voisinage V de e dans G tel que, si $\varphi \in \mathfrak{C}_{00}^{+}$, $\varphi \neq 0$ s'annulle en dehors de V, l'inégalite suivante a lieu :

$$\left| I_\varphi\left(\sum_{j=1}^{m} c_j\ {}_{t_j}g\right) - I_\varphi(g)\left(\sum_{j=1}^{m} c_j\right)\right| < \gamma \tag{7.29}$$

Notons $c = \sum_{j=1}^m c_j$. Il faut combiner 7.28 et 7.29 pour aboutir à

$$|I_\varphi(f) - cI_\varphi(g)| < \gamma(1 + (\omega : f_0)) \tag{7.30}$$

Cette inégalité est vraie pour tout $f \in \mathfrak{C}_{00}^{+}$ non nul, donc en particulier pour la "fonction de base" f_0. Par consequent il existent un voisinage V_0 de e et un $d > 0$ tels que (on n'oublira pas que $I_\varphi(f_0) = 1$)

$$|1 - dI_\varphi(g)| < \gamma(1 + (\omega : f_0)) \tag{7.31}$$

pour tout $\varphi \in \mathfrak{C}_{00}^{+}$ non nul à support dans V_0. On combine maintenant 7.30 et 7.31 "in an obvious way" :

$$\left|\frac{I_\varphi(f)}{c} - I_\varphi(g)\right| + \left|-\frac{1}{d} + I_\varphi(g)\right| < \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)\gamma(1 + (\omega : f_0))$$

ce qui fait

$$\left|\frac{c}{d} - I_\varphi(f)\right| < \gamma(1 + (\omega : f_0))\left(1 + \frac{c}{d}\right) \tag{7.32}$$

sous la condition que $\varphi \in \mathfrak{C}_{00}^{+}$, $\varphi \neq 0$ et $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq V \cap V_0$. Ainsi

$$\frac{c}{d}\left(1 - \gamma(1 + (\omega : f_0))\right) < I_\varphi(f) + \gamma(1 + (\omega : f_0))$$

et

$$\frac{c}{d} < \frac{I_\varphi(f) + \gamma(1 + (\omega : f_0))}{1 - \gamma(1 + (\omega : f_0))}$$

et

$$\frac{c}{d}+1<\frac{I_\varphi(f)+1}{1-\gamma(1+(\omega:f_0))}$$

Vu que $(f:f_0)=\frac{(f:f_0)(f_0:\varphi)}{(f_0:\varphi)}\geq\frac{(f:\varphi)}{(f_0:\varphi)}=I_\varphi(f)$ on a

$$\frac{I_\varphi(f)+1}{1-\gamma(1+(\omega:f_0))}\leq\frac{(f:f_0)+1}{1-\frac{\varepsilon}{4(1+(f:f_0))}}\leq 2(1+(f:f_0))$$

ce qui donne en résumé

$$\frac{c}{d}+1<\frac{I_\varphi(f)+1}{1-\gamma(1+(\omega:f_0))}\leq 2(1+(f:f_0))$$

Cette éstimation, combinée avec 7.32 donne

$$\left|I_\varphi(f)-\frac{c}{d}\right|<\gamma(1+(\omega:f_0))2(1+(f:f_0))=\frac{\varepsilon}{2}$$

Pour tout $\varphi\in\mathfrak{C}_{00}^+$, $\varphi\neq 0$ et $\mathrm{supp}(\varphi)\subseteq V\cap V_0$. Pour n'importe deux fonctions φ_1, φ_2 satisfaisant cette condition, on a

$$|I_{\varphi_1}(f)-\varphi_2(f)|\leq\varepsilon$$

comme demandé. La suite $(I_\varphi(f))_{\varphi\in\Phi}$ converge donc vers une (et une seule) limite I, qui a toutes les propriétés demandées, comme éxpliqué au début de cette étape.

(V) oyons encore que deux intégrales de Haar à gauche ne diffèrent que par un facteur constant. Soit J une forme nonnégative satisfaisant les conditions (II), (III) et (IV) de l'énoncé, et montrons que $J=cI$. C'est trivial pour $J=0$. Supposons donc que $J(f_1)>0$ pour un $f_1\in\mathfrak{C}_{00}^+$ (sans perte de généralisation, quitte à considerer $-J$ au lieu de J). Pour tout $f\neq 0$ dans $\mathfrak{C}_{00}^+$ on a pour des $s_1,s_2,...,s_m\in G$ et des $c_1,c_2,...,c_m\in\mathbb{R}_+$ suitables que $f_1\leq\sum_{j=1}^m c_j\ {}_{s_j}f$, et donc $J(f_1)\leq J(f)\sum_{j=1}^m c_j$ ce qui nous montre que $J(f)>0$ pour tout $f\in\mathfrak{C}_{00}^+$.
Choisissons un $g\in\mathfrak{C}_{00}^+$ non nul, des s_j et des c_j tels qu'on ait ces deux inégalités : $f_1\leq\sum_{j=1}^m c_j\ {}_{s_j}g$ et $J(f_1)\leq J(g)\sum_{j=1}^m c_j$. Par consequent

$$(f_1:g)\geq\frac{J(f_1)}{J(g)}\tag{7.33}$$

Appliquons le deuxième lemme : Pour tout $\varepsilon>0$ et tout $f\in\mathfrak{C}_{00}^+$ non nul il existe un voisinage U de e avec la propriété suivante : Si g est une fonction non nulle dans $\mathfrak{C}_{00}^+$ à support contenu dans U, alors il existent des $t_1,t_2,...,t_m\in G$ et des $c_1,c_2,...,c_m\in\mathbb{R}_+$ tels que

$$f(x)\leq\varepsilon+\sum_{j=1}^m c_jg(t_jx)\qquad\text{et}\qquad f(x)+\varepsilon\geq\sum_{j=1}^m c_jg(t_jx)$$

pour tout $x\in G$. La réunion des supports de f et des ${}_{t_j}g$ est une partie compacte de G car c'est une réunion finie de compacts. Choisissons un $\omega\in\mathfrak{C}_{00}^+$ qui vaut 1 sur cette réunion. On ne change rien aux inégalités precedents si on pose

$$f(x)\leq\varepsilon\omega(x)+\sum_{j=1}^m c_jg(t_jx)\tag{7.34}$$

et

$$f(x) + \varepsilon\omega(x) \geq \sum_{j=1}^{m} c_j g(t_j x) \tag{7.35}$$

ce qui tient pour tout $x \in G$. 7.34 implique

$$(f : g) \leq \varepsilon(\omega : g) + \sum_{j=1}^{m} c_j \tag{7.36}$$

En appliquant J aux deux côtes de 7.35 on obtient

$$J(f) + \varepsilon J(\omega) \geq J(g) \sum_{j=1}^{m} c_j$$

Avec 7.36 et 7.6 on a

$$J(f) + \varepsilon J(\omega) \geq \left(1 - \varepsilon \frac{(\omega : f)}{(f : g)}\right)(f : g)J(g) \geq (1 - \varepsilon(\omega : f))\,(f : g)J(g) \tag{7.37}$$

Considerons une fonction non nulle $f_1 \in \mathfrak{C}_{00}^+$, et divisons 7.37 par $J(f_1)$.

$$\frac{J(f)}{J(f_1)} + \varepsilon \frac{J(\omega)}{J(f_1)} \geq (1 - \varepsilon(\omega : f))\frac{(f : g)}{(f_1 : g)} = (1 - \varepsilon(\omega : f))\frac{I_g(f)}{I_g(f_1)} \tag{7.38}$$

Cela est vrai pour tout les $g \in \mathfrak{C}_{00}^+$ tels que $\mathrm{supp}(g) \subseteq U$. Comme montré dans (IV), on peut faire un passage à la limite, ce qui donne

$$\frac{J(f)}{J(f_1)} + \varepsilon \frac{J(\omega)}{J(f_1)} \geq (1 - \varepsilon(\omega : f))\frac{I(f)}{I(f_1)}$$

et en faisant $\varepsilon \to 0$

$$\frac{J(f)}{J(f_1)} \geq \frac{I(f)}{I(f_1)}$$

pour tout f et $f_1 \in \mathfrak{C}_{00}^+$. Comme f et f_1 sont arbitraires, on peut changer les rôles de f et f_1, pour conclure que

$$J(f) = \frac{J(f_1)}{I(f_1)} I(f)$$

pour tout $f \in \mathfrak{C}_{00}^+$. □

Il y a une unique extension de I en une forme linéaire sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathfrak{C}_{00}$. Cette extension est nécessairement invariant par translation à gauche. On note cette extension toujours avec I et on l'appelle "intégrale de Haar sur G à gauche".

8. Théorèmes de Structure

Lemme 8.1. *Soit G un groupe topologique Abélien, H un sous-groupe ouvert de G et D un groupe Abélien divisible. Soit φ un homomorphisme de H dans D. Alors φ se prolonge sur G tout entier.*

Démonstration. Par le lemme 2.3 on sait que φ s'étend en un homomorphisme ψ défini sur tout G. Tout ces prolonguements sont aussi continus, car ils sont des homomorphismes continus sur un voisinage de e, à savoir H. □

Lemme 8.2. *Soit G un groupe topologique et dénombrable, localement compact et de Hausdorff. Alors G est discret.*

Démonstration. G est la réunion de tout ses éléments, qui sont (vus comme singletons) tous fermés par hypothèse. C'est une réunion dénombrable. Comme G est régulier et localement compact, le théorème de Baire (3.8) permet de conclure que au mois un parmi les singletons a un intérieur non vide. Il est donc ouvert, et par homogénéité de G, tout singleton est ouvert, idem est G est discret. □

Définition 8.3. Un groupe topologique est apellé "monothetic" s'il contient un sous-groupe cyclique dense.

Lemme 8.4. *Soit G un groupe topologique localement compact et monothetic, cet a dire que le sous-groupe cyclique engendré par un $x \in G$ est dense dans G. Alors ou bien G est compact ou bien isomorphe à $\mathbb{Z}$. Dans le premier cas, $\{g, g^2, g^3, ...\}$ est dense dans G.*

Démonstration. Supposons que G n'est pas isomorphe à $\mathbb{Z}$, et montrons que dans ce cas G est compact. Cela se fait en deux étapes.
(I) $g^{\mathbb{N}}$ est dense dans G. Soit U un ouvert non-vide de G. Comme par hypothèse $g^{\mathbb{Z}}$ est dense dans G, on peut trouver $n \in \mathbb{Z}$ avec $g^n \in U$. Soit V un voisinage symmetrique de e tel que $g^n V \subseteq U$. Si on aurait un $K \in \mathbb{N}$ tel que

$$\{k \in \mathbb{N} \mid n > K \text{ et } g^k \in V\} = \emptyset$$

alors $g^{\mathbb{Z}} \cap V = g^{\mathbb{Z} \cap [-K,K]} \cap V$ par symmetrie de V. Contrairement à l'hypothèse, $g^{\mathbb{Z}}$ contiendra un ouvert fini, sera donc discret et isomorphe à $\mathbb{Z}$. On conclut qu'un tel K n'existe pas, et en particulier qu'on a un $m \in \mathbb{N}$ avec $m > |n|$ et $g^m \in V$. Cela termine la première étape, car ainsi $n + m \in \mathbb{N}$ et $g^{n+m} \in g^n V \subseteq U$, et donc $U \cap g^{\mathbb{N}} \neq \emptyset$.
(II) Pour montrer la compacité de G, choisissons un vosinage compact C de e dans G, et trouvons une partie finie $F \subset \mathbb{N}$ telle que $g^F C = G$, ce qui terminera la preuve, car une réunion finie de compacts est compacte. Soit U un voisinage symmetrique de e contenu dans C. Vu que $g^{\mathbb{N}}$ est dense dans G, on a que $g^{\mathbb{N}} U$ recouvre G. Cette famille est aussi un recouvrement ouvert de C, et comme C est compact, il existe un sous-ensemble fini $F = \{1, 2, ..., k\} \subset \mathbb{N}$ tel que $g^F U$ recouvre C. Ayant ceci, prenons un élement arbitraire $x \in G$, et posons

$$m = \min\{n \in \mathbb{N} \mid g^n \in xU\}$$

Ainsi $x^{-1} g^m \in U \subseteq C \subseteq g^F U$. Il existe donc un $f \in F$ tel que $x^{-1} g^m \in g^f U$, idem est $g^{m-f} \in xU$. Par minimalité de m on a $m - f \leq 0$, ce qui donne $m \leq f \leq k$, et $x \in g^m U^{-1} = g^m U \subseteq g^F C$. □

9. Le groupe dual

L'ensemble $\{x \in \mathbb{C} | \, |x| = 1\}$ est un sous - groupe topologique du groupe topologique $\mathbb{C}^*$ pour la topologie usuelle. On le note $\mathbb{T}$, et on l'appelle tore de dimension 1. Il est vite verifié que $\mathbb{T} \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. La topologie sur $\mathbb{T}$, qu'on peut voir comme etant la topologie induite par $\mathbb{C}^*$ ou bien comme topologie venant du quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est métrisable. On munit le tore de la métrique suivante, qui est compatible avec sa topologie :

$$d(x, y) = \inf \left\{ \frac{1}{2\pi} |\arg(x) - \arg(y) + 2k\pi| \quad | \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$

On remarque que $d(x,y) \leq \frac{1}{2}$ pour tout $x, y \in \mathbb{T}$. Pour $\delta \geq 0$ on note B_δ la boule ouverte de centre 1 er de rayon δ dans l'espace métrique $\mathbb{T}$. Il est tout a fait clair que pour tout $\delta, \delta' \in \mathbb{R}$ on a $B_\delta B_{\delta'} = B_{\delta+\delta'}$, et que ${B_\delta}^{-1} = B_\delta$.
Comme déjà défini, un caractère sur un groupe est un homomorphisme de ce groupe vers $\mathbb{T}$. Il est tout a fait possible de définir un caractère comme homomorphisme dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, vu l'isomorphisme. Le seul avantage ou désavantage selon la situation est qu'on est habitué de noter $\mathbb{T}$ multiplicativement et $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ additivement.
Retenons le fait utile que

Proposition 9.1. *Un sous-groupe de $\mathbb{T}$ contenu dans $B_{\frac{1}{3}}$ est trivial.*

ce qui est facil à voir. En effet, $\frac{1}{3}$ est le plus grand nombre pour lequel cette assertion est vraie.

Définition 9.2. Soit G un groupe topologique. On appelle l'ensemble de tout les caractères continus sur G, muni du produit ponctuel, le groupe dual de G. On le note $\widehat{G}$

Il est tout a fait clair que l'ensemble de tout les caractères continus sur G, muni du produit ponctuel, forme un groupe Abélien. C'est un sous-groupe du groupe des caractères sur G. L'unité de $\widehat{G}$ est donc le caractère trivial qui vaut 1 sur tout G (ce qui montre en passant que l'ensemble n'est pas vide).
On aimerait maintenant construire une topologie avec des bonnes propriétés sur $\widehat{G}$. Une, qui est compatible avec les operations dans $\widehat{G}$, i.e. telle que $\widehat{G}$ devient un groupe topologique, et qui contient un maximum d'information possible sur la strucure de G. La nature des choses le veut qu'il n'y a qu'un choix : C'est la topoloqie de la convergence locale uniforme. (A expliciter...)

Theorème 9.3. *Soit G un groupe topologique Abélien localement compact. La famille*

$$\mathfrak{V} = \bigcup_{A,U} \Big\{ \{\chi \in \widehat{G} \quad | \quad \chi(A) \subseteq U\} \Big\}$$

ou A parcourt les parties compactes de G et U un système fondamental $\mathfrak{U}$ de 1 dans $\mathbb{T}$ est un système fondamental de l'unité pour une topologie sur $\widehat{G}$. $\widehat{G}$ muni de la topologie prolongeant $\mathfrak{V}$ (selon 5.12) est un groupe topologique Abélien localement compact.

Démonstration. Vérifions que $\mathfrak{V}$ satisfait les conditions du théorème 5.12. Pour cela, il est commode de noter

$$W(A,U) = \{\chi \in \widehat{G} \quad | \quad \chi(A) \subseteq U\}$$

On remarque que $W(A,U_1)W(A,U_2) \subseteq W(A,U_1+U_2)$ et que $W(A,U)^{-1} = W(A,U^{-1})$. Il est aussi une consequence directe de la définition de W que $A_1 \subseteq A_2$ entraine $W(A_1,U) \supseteq W(A_2,U)$ et que $U_1 \subseteq U_2$ entraine $W(A,U_1) \subseteq W(A,U_2)$
Avec ça, on vérifie aisement les points (I) à (V) du théorème 5.12 :

I: est clair car $\chi_0(G) = \{1\} \subset U$ pour tout $U \in \mathfrak{U}$

II: aussi, car $W(A_1 \cup A_2, U_1 \cap U_2) \subseteq W(A_1,U_1) \cap W(A_2,U_2)$

III: est vrai car $W(A,\frac{\delta}{2})W(A,\frac{\delta}{2})^{-1} \subseteq W(A,\delta)$

IV: car $\chi W(A, \delta - \max\{\chi(A)\}) \subseteq W(A,\delta)$ pour tout $\chi \in W(A,\delta)$

V: automatiquement, car $\widehat{G}$ est commutatif.

Le maximum dans (IV) est justifié, et inferieur à δ car χ est continu et A compact. Reste à voir que $\widehat{G}$ est localement compact. Montrons cela d'abord dans le cas ou G est discret et apres dans le cas général.
(I) Si G est discret, tout les caractères sur G sont continus. La topologie sur $\widehat{G}$ est la topologie de la convergence ponctuelle, vu que les seuls ensembles compacts d'un espace discret sont les ensembles finis. Par Tichonov, l'espace $\mathbb{T}^G$ de tout les fonctions de G vers $\mathbb{T}$ muni de la topologie de la convergence ponctuelle est compact. Il nous suffit ainsi de montrer que $\widehat{G}$ est fermé dans $\mathbb{T}^G$. Soit $f \in \mathbb{T}^G \backslash \widehat{G}$. Il existent alors $x_1, x_2 \in G$ tels que $f(x_1)f(x_2) \neq f(x_1x_2)$. Choisissons $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}d(f(x_1)f(x_2), f(x_1x_2))$ pour obtenir $f(x_1)B_\varepsilon f(x_2)B_\varepsilon \cap f(x_1x_2)B_\varepsilon = \emptyset$. L'ensemble

$$\left\{g \in \mathbb{T}^G \mid d(g(y), f(y)) < \varepsilon \text{ pour } y \in \{x_1, x_2, x_1x_2\}\right\}$$

est un voisinage de f dans $\mathbb{T}^G$ ne rencontrant pas $\widehat{G}$, ce qui montre que $\mathbb{T}^G \backslash \widehat{G}$ est ouvert et $\widehat{G}$ fermé.
(II) Il suffit de trouver un voisinage compact de χ_0. Notons $\widehat{G}_{alg}$ le groupe dual algébrique de G, i.e. l'ensemble de tout les caractères sur G, continus ou non, et definissons

$$W'(A, \delta) = \{\chi \in \widehat{G} \mid \chi(A) \subseteq \overline{B_\delta}\}$$
$$W'_{alg}(A, \delta) = \{\chi \in \widehat{G}_{alg} \mid \chi(A) \subseteq \overline{B_\delta}\}$$

J'affirme que $W'_{alg}(A, \delta) = W'(A, \delta)$. L'inclusion $\supseteq$ etant claire, il suffit de vérifier que $W'_{alg}(A, \delta) \subseteq W'(A, \delta)$ i.e. que tout $\chi \in W'_{alg}(A, \delta)$ est continu. Choisissons alors $\chi \in W'_{alg}(A, \delta)$ et $\varepsilon > 0$. Prenons V un voisinage de e dans G tel que $V^k \subseteq A$. Ainsi pout tout $x \in V$ on a $k\,|\chi(x) - 1| \leq \left|\chi(x^k) - 1\right| \leq \delta$ □

Sauf mention du contraire, on parlera de LA topologie sur $\widehat{G}$ pour faire référence à la topologie qu'on vient de décrire.

Corollaire 9.4. *Un système fondamental de la topologie sur $\widehat{G}$ est donné par*

$$\{W(C, U) \mid C \textit{ compact dans } G, U \textit{ ouvert dans } \mathbb{T}\}$$

Cela est facile à voir. Le thèorème suivant est un premier par vers le théorème de dualité :

Theorème 9.5. *Le groupe dual d'un groupe discret est compact, et le groupe dual d'un groupe compact est discret.*

Démonstration. Supposons d'abord que G soit discret, et montrons que $\widehat{G}$ est compact. Comme les parties compactes de G sont exactement les parties finies, la topologie sur $\widehat{G}$ a comme base les

$$\{W(C, U) \mid C \text{ fini dans } G, U \text{ ouvert dans } \mathbb{T}\}$$

ce qui n'est rien d'autre que la topologie de la convergence ponctuelle. $\mathbb{T}$ etant compact, le théorème de Tychonoff permet de conclure que l'ensemble de toutes les fonctions de G dans $\mathbb{T}$, qu'on notera $\mathbb{T}^G$ est compact. Il suffit donc de voir que l'ensemble des caractères (automatiquement continus) sur G est fermé dans $\mathbb{T}^G$. Posons pour cela $M(x, y) = \{f \in \mathbb{T}^G \mid f(ab) = f(a)f(b)\}$ pour tout $x, y \in G$. Comme f est continu, $M(x, y)$ est fermé. Ainsi on obtient que

$$\widehat{G} = \bigcap_{x,y \in G} M(x, y)$$

est fermé.
Supposons maintenant que G est compact, et montrons que $\widehat{G}$ est discret. Pour cela il suffit de voir que l'ouvert $W(G, B_{\frac{1}{3}})$ ne contient que le caractère trivial. Mais cela est evident car pour tout $x \in G$, le sous-groupe de $\mathbb{T}$ donné par

$$\{\chi(x) \mid \chi \in W(G, B_{\frac{1}{3}})\} \subseteq B_{\frac{1}{3}}$$

est trivial, et donc $\chi(x) = 1$ pour tout $\chi \in W(G, B_{\frac{1}{3}})$ et tout $x \in G$. □

Nous avons déjà maintenant tout les moyennes en main pour décrire le groupe dual d'un groupe discret, idem est le groupe des caractères d'un "groupe algèbrique". Prenons un groupe discrèt G, et désignons avec $\mathfrak{F}$ la famille de toutes les sous-groupes de type fini de G. Cet ensemble est ordonné de manière naturelle par l'inclusion, et cet ordre est filtrant à droite, vu que EF est de type fini si E et F le sont. Pour tout sous-groupes de type finis avec $E \subset F$, on a un homomorphisme $f_{EF} : \widehat{F} \to \widehat{E}$ via $f_{EF}(\chi) = \chi|_E$. On a donc un système projéctif de groupes compacts

$$\big(\mathfrak{F}_{\subseteq}\ ,\ (\widehat{F})_{F\in\mathfrak{F}}\ ,\ (f_{EF})_{E\subset F}\big)$$

Ce système projéctif est même strict, car tout caractère sur $E \subset F$ peut être étendu en un caractère sur F, ce qui montre que f_{EF} est surjéctif. Pour tout F posons $f_F : \widehat{G} \to \widehat{F}$ via $f_F(\chi) = \chi|_F$. J'affirme que l'application $\varphi : \widehat{G} \to \lim_{F\in\mathfrak{F}} \widehat{F}$ définie par $\varphi(\chi)_F = f_F(\chi)$ est un isomorphisme. Dans ce sens :

Theorème 9.6. *Le groupe dual $\widehat{G}$ d'un groupe discret G est isomorphe à la limite projéctive stricte des groupes duaux des sous-groupes de type finis de G :*

$$\widehat{G} \cong \lim_{F \text{ de type fini}} \widehat{F}$$

Démonstration. L'application φ est clairement un homomorphisme de $\widehat{G}$ dans la limite projéctive $\lim_{\mathfrak{F}} \widehat{F}$. Un caractère $\chi \in \widehat{G}$ est dans le noyeau de φ si $\chi|_F$ est trivial pour tout $F \in \mathfrak{F}$. Mais comme $G = \cup\mathfrak{F}$, on a dans ce cas que $\chi = \chi_0$, ce qui nous montre l'injéctivité de φ. Reste à voir la surjéctivité. Choisissons $\psi \in \lim_{\mathfrak{F}} \widehat{F}$. Par la définition des bonding maps on a pour tout paire $E, F \in \mathfrak{F}$ avec $E \subset F$ que $\psi_F|_E = \psi_E$. Cela nous permet de construire une préimage χ de ψ comme suit : Choisissons pour tout $g \in G$ un $F \in \mathfrak{F}$ tel que $g \in F$. Par ce qui précède, $\psi_F(g)$ ne depend pas du choix de F. On peut donc définir $\chi(g) = \psi_f(g)$. Pour vérifier que χ est un caractère, prenons $g, h \in G$, et un sous-groupe F de G de type fini contenant g et h. Ainsi $\chi(gh) = \psi_F(gh) = \psi_F(g)\psi_F(h) = \chi(g)\chi(h)$. Clairement on a $\chi|_F = \psi_F$, et donc $\varphi(\chi) = \psi$. Ainsi φ est bijéctive et un isomorphisme de groupes.
La continuité de φ et φ^{-1} est une consequence immediate des définitions. □

Supposons maintenant que G est limite projéctive stricte de groupes Abéliens compacts : $G = \lim_{j\in J} G_j$, avec applications de limite $h_j : G \to G_j$. Tout caractère $\chi : G_j \to \mathbb{T}$ donne un caractére sur G par composition avec l'appplication limite $\chi \circ h_j : G \to \mathbb{T}$. Car h_j est surjéctive, on a injéctivité de

$$\iota : \widehat{G_j} \to \widehat{G} \qquad \text{défini par} \qquad \chi \mapsto \chi \circ h_j$$

Dans ce sens, nous identifions $\widehat{G_i}$ à un sous-groupe de $\widehat{G}$, et osons écrire $\widehat{G_j} \subseteq \widehat{G}$. Avec cette convention, nous avons

Proposition 9.7. *Soit G une limite projéctive stricte : $G = \varprojlim_{j\in J} G_j$. Alors*

$$\widehat{G} = \bigcup_{j\in J} \widehat{G_j}$$

Démonstration. Avec l'identification de $\widehat{G_j}$ comme sous-groupe de $\widehat{G}$, il suffit de montrer que $\widehat{G} \subseteq \bigcup_{j\in J} \widehat{G_j}$. Choisissons donc un $\chi \in \widehat{G}$, et posons $U = \chi^{-1}(B_{\frac{1}{3}})$. Par coutinuité de χ, U est un ouvert. Par 6.25, il existe un $j \in J$ tel que $\ker h_j \subseteq U$. Ainsi, $\chi(\ker h_j)$ est un sous-groupe de $\mathbb{T}$ contenu dans $B_{\frac{1}{3}}$, donc réduit à $\{1\}$.
Par consequent $\ker h_j \ker \chi$, et on a un unique homomorphisme $\chi_j : G_j \to \mathbb{T}$ tel que $\chi = \chi_j \circ h_j$. Avec la convention faite, cela n'est rien d'autre que $\chi \in \widehat{G_j}$, et donc $\widehat{G} \subseteq \bigcup_{j\in J} \widehat{G_j}$. □

Proposition 9.8. *Soient $(G_i)_{i\in I}$ une famille de groupes topologiques. Alors un a un isomorphisme canonique*

$$\widehat{\bigoplus_{i\in I} G_i} \cong \bigoplus_{i\in I} \widehat{G_i}$$

Démonstration. Associons à tout caractère χ sur $\bigoplus_{i\in I} G_i$ la famille $\phi(\chi) \in \bigoplus_{i\in I} \widehat{G_i}$ définie par

$$\varphi(\chi)_i = \chi|_{G_i}$$

Clairement φ est un homomorphisme de groupes injéctif. φ est aussi surjéctif : Etant donné une famille de caractères $(\chi_i)_{i\in I}$ dans $\bigoplus_{i\in I} \widehat{G_i}$, definissons

$$\varphi^{-1}((\chi_i)_{i\in I})(g)$$

□

Définition 9.9. Soit G un groupe topologique et $H \subseteq G$. On appelle annihilateur de H l'ensemble

$$\mathrm{Ann}(H) = \{\chi \in \widehat{G} \mid \chi(h) = 1 \text{ pour tout } h \in H\}$$

Proposition 9.10. *$Ann(H)$ est un sous groupe fermé de $\widehat{G}$.*

Définition 9.11. Soient G et H des groupes topologiques, $f : G \to H$ un homomorphisme continu. On note $\widehat{f}$ l'application $\widehat{f} : \widehat{H} \to \widehat{G}$ donnée par $\widehat{f}(\psi) = \psi \circ f$, et on appelle $\widehat{f}$ l'homomorphisme dual de f.

Theorème 9.12. *Soient G et H des groupes topologiques localement compacts, et $f : G \to H$ un homomorphisme continu. Alors les assertions suivantes sont vraies :*

I: *$\widehat{f}$ est un homomorphisme continu de $\widehat{H}$ dans $\widehat{G}$.*

II: *Si f est surjéctif, alors $\widehat{f}$ est injéctif et bicontinu.*

III: $\ker f = Ann_G(\widehat{f}(\widehat{H}))$.

IV: *Si f est surjéctif, alors $\widehat{f}(\widehat{H}) = Ann_{\widehat{G}}(\ker f)$*

V: *Si f est injéctif*

Démonstration. Un point après l'autre, sans pitié...
(I) Quelque soit $\psi \in \widehat{H}$, l'application $\widehat{f}(\psi) = \psi \circ f$ est un homomorphisme

continu de G dans $\mathbb{T}$, car c'est une composition d'homomorphismes continus. On a donc bien que $\widehat{f}(\psi) \in \widehat{G}$. Vu que

$$\widehat{f}(\psi_1\psi_2)(x) = \psi_1(f(x))\psi_2(f(x)) = \widehat{f}(\psi_1)(x)\widehat{f}(\psi_2)(x)$$

pour tout $x \in G$ on a $\widehat{f}(\psi_1\psi_2) = \widehat{f}(\psi_1)\widehat{f}(\psi_2)$. De même on a

$$\widehat{f}(\psi_0)(x) = \psi_0(f(x)) = 1$$

pour tout $x \in G$ ce qui montre que $\widehat{f}(\psi_0) = \chi_0$. $\widehat{f}$ est donc un homomorphisme. Pour établir la continuité de $\widehat{f}$, prenons un ouvert $W(C,U)$ dans $\widehat{G}$. J'affirme que $\psi \in W(f(C),U)$ entraine que $\widehat{f}(\psi) \in W(C,U)$. En effet

$$\psi \in W(f(C),U) \implies \psi(f(C)) \subseteq U \implies \widehat{f}(\psi(C)) \subseteq U \implies \widehat{f}(\psi)) \in W(C,U)$$

ce qui montre la continuité de $\widehat{f}$, car les $W(C,U)$ forment un système fondamental de la topologie sur $\widehat{G}$.

(II) Supposons que f est surjéctif. Alors $\widehat{f}$ est injéctif, vu que

$$\widehat{f}(\psi) = \chi_0 \implies \psi(f(x)) = 1 \quad \forall x \in G \implies \psi(y) = 1 \quad \forall y \in H \implies \psi = \psi_0$$

Reste à voir la continuité de $\widehat{f}^{-1}$. Prenons un ouvert $W(C',U)$ dans $\widehat{H}$, et choisissons un compact C dans G tel que $C' \subseteq f(C)$. J'affirme que $\widehat{f}(\psi) \in W(C,U)$ entraine que $\psi \in W(C',U)$. En effet

$$\widehat{f}(\psi) \in W(C,U) \implies \psi(f(C)) \subseteq U \implies \psi(C') \subseteq U \implies \psi \in W(C',U)$$

ce qui montre la continuité de $\widehat{f}$, car les $W(C',U)$ forment un système fondamental de la topologie sur $\widehat{H}$

(III) $\subseteq$: Choisissons un $x \in \ker f$. A voir que pour tout $\psi \in \widehat{H}$ on a $\widehat{f}(\psi)(x) = 1$. Mais evidamment $\widehat{f}(\psi)(x) = \psi(f(x)) = \psi(e) = 1$.
$\supseteq$: Choisissons un $x \in \mathrm{Ann}_G(\widehat{f}(\widehat{H}))$. A voir que $x \in \ker f$. Or $\widehat{f}\psi(x) = \psi(f(x)) = 1$ pour tout $\psi \in \widehat{H}$ on a d'après 10.13 que $f(x) = e$, i.e. $x \in \ker f$.

(IV) $\subseteq$: Choisissons $\psi \in \widehat{H}$ et montrons que $\widehat{f}(\psi)(x) = 1$ pour tout $x \in \ker f$. Effectivement $\widehat{f}(\psi)(x) = \psi(f(x)) = \psi(e) = 1$.
$\supseteq$: Choisissons $\chi \in \mathrm{Ann}(\ker f)$. χ est donc constant sur les classes modulo $\ker f$, ce qui permet de définir $\psi(y) = \chi(f^{-1}(y))$ □

Lemme 9.13. *Soit H un sous-groupe topologique de G. Alors on a des isomorphismes canoniques*

$$\widehat{H} \cong \widehat{G}/Ann(H)$$
$$\widehat{G/H} \cong Ann(H)$$

10. Analyse harmonique

Pour ce chapitre on se fixe un groupe topologique localement compact G. On écrira $\mathfrak{C}_{00}^{+}, L^1, ...$ au lieu de $\mathfrak{C}_{00}^{+}(G), L^1(G), ...$
Le resultat principal du chapitre précédent est que le groupe dual de G est localement compact. Dans ce cas, les deux groupes G et $\widehat{G}$ admettent une integrale de Haar. Le théorème d'inversion de Fourier, resultat central de ce chapitre, exprime comment ces deux intégrales sont liées.

Définition 10.1. Soient f, g deux fonctions intégrables sur tout compact de G pour une mesure de Haar dy sur G. On définit le produit de convolution

$$f * g(x) = \int f(y)g(y^{-1}x)dy$$

pour tout $x \in G$ pour lesquels cette quantité existe.

Proposition 10.2. *Les assertions suivantes sont vraies :*

I: *Si $f * g(x)$ existe, alors $g * f(x)$ aussi et $f * g(x) = f * g(x)$.*

II: *Si $f \in L^1$ et $g \in L^\infty$, alors $f * g$ est borné et uniformement continu.*

III: *Si $f, g \in \mathfrak{C}_{00}$, alors $f * g \in \mathfrak{C}_{00}^+$ et supp$(f * g) \subseteq$ supp(f)supp(g)*

IV: *Pour $0 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$, $f \in L^p, g \in L^q$ on a $f * g \in \mathfrak{C}_0$.*

V: *Si $f, g \in L^1$, alors $f * g$ existe Haar-presque partout et de plus on a l'inégalité $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.*

VI: *Si $f, g, h \in L^1$, alors $(f * g) * h = f * (g * h)$.*

VII: *Si G est Abélien et $f * g(x)$ existe, alors $f * g(x) = g * f(x)$*

Démonstration. Tout par calcul direct. □

Définition 10.3. On appelle une fonction ϕ sur G "définie positive" si elle est continue, et si pour tout $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{C}$ et tout $x_1, x_2, ..., x_n \in G$ on a

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i \phi(x_i^{-1} y_j) \overline{c_j} \geq 0$$

On note $\mathfrak{P}_0$ l'ensemble des fonctions ϕ de type positif avec $\|\phi\|_\infty \leq 1$, et $\mathfrak{P}$ l'ensemble de tout les combinaisons linéaires complexes de fonctions définies positifes.

Voyons tout de suite les propriétés fondamentales de ces fonctions :

Proposition 10.4. *Soit ϕ, ψ des fonctions définies positives sur G, et $c \geq 0$ un nombre réel. Alors les assertions suivantes sont vraies :*

I: *Les fonctions $\phi + \psi$, $\overline{\phi}$ et $c\phi$ sont definies positives.*

II: $\phi(x^{-1}) = \overline{\phi(x)}$

III: $|\phi(x)| \leq \phi(0)$ *pour tout* $x \in G$

IV: $\iint f(x)\phi(x^{-1}y)\overline{f(y)}dxdy \geq 0$

Démonstration. La première assertion s'obtient par calcul direct. Pour la deuxième, il suffit de choisir $x_1 = x$ et $x_2 = e$, car ainsi

$$c_1\phi(e)\overline{c_1} + c_1\phi(x^{-1})\overline{c_2} + c_2\phi(x)\overline{c_1} + c_2\phi(e)\overline{c_2} \geq 0$$
$$c_1\overline{\phi(e)}\overline{c_1} + c_1\overline{\phi(x^{-1})}\overline{c_2} + c_2\overline{\phi(x)}\overline{c_1} + c_2\overline{\phi(e)}\overline{c_2} \geq 0$$

□

Les fonctions définies positives ont plusieurs aspects interessants. Un premier est celui-ci : Pour deux fonctions f et $g \in \mathfrak{C}_{00}$, et une fonction définie positive ϕ fixée écrivons

$$[f, g]_\phi = \iint f(x)\phi(x^{-1}y)\overline{g(y)}dxdy$$

C'est une forme sésquilinéaire définie positive sur l'espace vectoriel $\mathfrak{C}_{00}$. Notons K_ϕ le sous-espace vectoriel $\{f \in \mathfrak{C}_{00} \mid [f, f]_\phi = 0\}$, et notons $\overline{f}$ la classe de la fonction $f \in \mathfrak{C}_{00}$ dans le quotient $\mathfrak{C}_{00}/K_\phi$. Dans ce quotient, on obtient par cette construction une véritable norme de Hilbert, donnée par

$$\sqrt{[f,f]_\phi} = \left\|\overline{f}\right\|_\phi \qquad \text{pour tout } f \in \mathfrak{C}_{00}/K_\phi$$

(C'est d'ailleurs une seminorme sur $\mathfrak{C}_{00}$.) Lorsque on complète $\mathfrak{C}_{00}/K_\phi$ pour la norme $\|\cdot\|_\phi$, on obtient un espace de Hilbert, qu'on notera $\mathcal{H}_\phi$.
Considerons les opérateurs U_s sur $\mathcal{H}_\phi$, définis par $U_s f = {}_s f$ pour tout $s \in G$. Les U_s sont des opérateurs unitaires, car evidamment $U_s U_{s^{-1}} = U_{s^{-1}} U_s = 1$, ce qui nous fournit une représentation unitaire de G dans $\mathcal{H}_\phi$, donnée par

$$s \to U_s$$

Le théorème suivant est du à Gelfand et Raïkov.

Theorème 10.5. *Toute fonction définie positive égale à une fonction de la forme $\phi(x) = [X, U_s X]$, ou $[\cdot,\cdot]$ designe un produit scalaire dans un espace de Hilbert convenanble.*

Démonstration. Notons $\mathfrak{V}$ le filtre de voisinages de e. Choisissons pour tout voisinage V de e une fonction $g_V \in \mathfrak{C}_{00}^+$ à support dans V et telle que $\int g(x)dx = 1$. La suite de mesures positives $(g_V dx)_{V\in\mathfrak{V}}$ converge ponctuellement vers la masse de Dirac en e, notée δ_e. La suite des $(\overline{g}_V)_{V\in\mathfrak{V}}$ dans $\mathcal{H}_\phi$ converge ponctuellement vers un élément $\varepsilon \in \mathcal{H}_\phi$ car $[g,g]_\phi$ reste borné. On obtient :

$$\begin{aligned}[f, U_s\varepsilon]_\phi = \lim_{V\in\mathfrak{V}} [f, U_s g_V]_\phi = \lim_{V\in\mathfrak{V}} \iint f(x)\phi(x^{-1}y)\overline{g_V(s^{-1}y)}dxdy \\ = \iint f(x)\phi(x^{-1}y)dx\delta_s(y) = \int f(x)\overline{\phi(s^{-1}x)}dx\end{aligned}$$

Pour tout f, g dans $\mathfrak{C}_{00}$ on a

$$\begin{aligned}[f,g]_\phi = \iint f(x)\phi(x^{-1}y)\overline{g(y)}dxdy = \\ \iint f(x)\overline{\phi(y^{-1}x)}dx\overline{g(y)}dy = \int [f, U_y\varepsilon]_\phi \overline{g(y)}dy\end{aligned}$$

Or les termes dans cette dernière equation dependend uniformement continument de f et de g, elle subsiste pour des f, g dans $\mathcal{H}_\phi$. Lorsque on fait la spécialisation $f = \varepsilon$, on obtient :

$$\int \phi(x)\overline{g(x)}dx = [\varepsilon, g]_\phi = \int [\varepsilon, U_y\varepsilon]_\phi \overline{g(y)}dy$$

pour tout $g \in \mathfrak{C}_{00}$, ce qui entraine que

$$\phi(x) = [\varepsilon, U_x\varepsilon]_\phi \qquad \text{Haar-presque partout}$$

Comme ϕ est continue, on a égalité. □

Le théorème de Bochner fait une première liaison entre les fonctios définies positifes et les caractères continus.

Theorème 10.6. *Une fonction ϕ sur G est définie positive si et seulement si elle est égale à une fonction de la forme $\phi(x) = \int \chi(x)d\mu(\chi)$ pour une certaine mesure non-négative μ sur $\widehat{G}$.*

Démonstration. Fixons une fonction de type positive ϕ et définisonns une forme linéaire $T_\phi : \mathfrak{C}_{00} \to \mathbb{C}$ par

$$T_\phi(f) = \int f(x)\phi(x)dx$$

pour tout f continu à support compact. Observons que, avec les notations introduites dans la preuve du théorème précédent $[f,g]_\phi = T_\phi(f * \widetilde{g})$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz, appliquée aux "vecteurs" f et ε fournit

$$|T_\phi(f)|^2 = [f,\varepsilon]_\phi^2 \leq [f,f]_\phi[\varepsilon,\varepsilon]_\phi = T_\phi(f * \widetilde{f})$$

Posons maintenant $h = f * \widetilde{f}$ et recursivement $h^{*n} = h^{*(n-1)} * h$. Comme $\|\phi\|_\infty = 1$ on obtient, avec l'inégalité précédente

$$|T_\phi(f)|^2 \leq T_\phi(h) \leq T_\phi(h^{*2})^{\frac{1}{2}} \leq T_\phi(h^{*4})^{\frac{1}{4}} \cdots \leq T_\phi(h^{*2^n})^{2^{-n}} \leq \left\| h^{*2^n} \right\|^{2^{-n}}$$

Si $n \to \infty$, cette dernière quantité converge vers le rayon spectral de h, à savoir $\left\|\widehat{h}\right\|_\infty$. On a donc les inégalités

$$|T_\phi(f)|^2 \leq \left\|\widehat{h}\right\|_\infty = \left\|\widehat{f}\right\|_\infty^2 \qquad \text{ou bien} \qquad |T_\phi(f)| \leq \left\|\widehat{f}\right\|_\infty$$

Cela dit que T_ϕ est une forme linéaire bornée sur $A(\widehat{G})$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Nous pouvons étendre T_ϕ sur $C_0(\widehat{G})$, en préservant la norme. Par le théorème de Riesz, il existe une unique mesure μ sur $\widehat{G}$ avec $\|\mu\| \leq 1$ et telle que

$$T_\phi(f) = \int \widehat{f}(\overline{\chi})d\mu(\chi) = \int f(x)dx \int \chi(x)d\mu(\chi)$$

pour tout $f \in C_0(\widehat{G})$ On remplace T_ϕ par sa définition pour aboutir à

$$\int f(x)\phi(x)dx = \int f(x)\left(\int \chi(x)d\mu(\chi)\right)dx$$

pour tout $f \in C_0(\widehat{G})$, ce qui montre que $\phi(x) = \int \chi(x)d\mu(\chi)$ Haar presque partout. Par continuité des deux membres on a égalité stricte.
Observons finalement qu'on obtient lorsque on spécialise $x = e$

$$1 = \phi(0) = \int d\mu(\chi) = \mu(\widehat{G}) \leq \|\mu\| = 1$$

ce qui montre que $\mu(\widehat{G}) = 1$, donc que μ est une mesure non-négative. □

Définition 10.7. On appelle une fonction définie positive ϕ "élémentaire" si $\phi(e) = 1$ et si elle jouit de la propriété suivante : Pour tout fonctions ϕ_1, $\phi_2 \in \mathfrak{P}_0$, la relation $\phi = \phi_1 + \phi_2$ entraine que $\phi_1 = \lambda\phi$ et $\phi_1 = (1-\lambda)\phi$ pour un nombre réel $0 \leq \lambda \leq 1$.

Theorème 10.8. *Pour qu'une fonction définie positive ϕ avec $\phi(e) = 1$ soit élémentaire, il faut et il suffit que la représentation unitaire de G dant $\mathcal{H}_\phi$ soit irréductible.*

Démonstration. Il faut voir qu'une fonction de type positif ϕ avec $\phi(e) = 1$ est est élémentaire si et seulement si $\{0\}$ et $\mathcal{H}_\phi$ sont les seuls sous-espaces véctoriels fermés de $\mathcal{H}_\phi$ invariants par tout opérateur U_s.
$\Longrightarrow$: Si ϕ est élémentaire, tout opérateur de projéction orthogonale A permutable

avec les U_s est nécessairement l'identité I dans $\mathcal{H}_\phi$ (personne ne bouge) ou 0 (tout le monde sur 0). Permutons :

$$\phi(x) = [\varepsilon, U_x\varepsilon]_\phi = [A\varepsilon, U_x\varepsilon]_\phi + [\varepsilon - A\varepsilon, U_x\varepsilon]_\phi$$
$$= [A\varepsilon, U_xA\varepsilon]_\phi + [\varepsilon - A\varepsilon, U_x(\varepsilon - A\varepsilon)]_\phi$$

Le dernier membre est une somme de deux fonctions se trouvant dans $\mathfrak{P}_0$, donc, par hypothèse $[A\varepsilon, U_x\varepsilon]_\phi = \lambda[\varepsilon, U_x\varepsilon]_\phi$, et alors $A = \lambda I$. Or $A^2 = A$, ceci exige que $\lambda = 1$ ou $\lambda = 0$, ce qu'il fallait voir.
Supposons maintenant irreductible la representation $s \to U_s$ dans $\mathcal{H}_\phi$, et décomposons ϕ en $\phi_1+\phi_2$, avec $\phi_1, \phi_2 \in \mathfrak{P}_0$. On aura, pour tout $f \in \mathfrak{C}_{00}$ que $[f, f]_{\phi_1} \quad \leq \quad [f, f]_\phi$. La forme $[\cdot, \cdot]_{\phi_1}$ est donc une forme Hermitienne (car continue), et définit opérateur Hermitien A, tel que

$$[Af, f]_\phi = [f, f]_{\phi_1} \qquad \text{pour tout } f \in \mathfrak{C}_{00}$$

On aura donc

$$[A\varepsilon, U_x\varepsilon]_\phi = [\varepsilon, U_x\varepsilon]_{\phi_1} = \phi_1(x)$$

Comme A est permutable a tout U_x, on a nécessairement $A = \lambda I$, ce qui est $\phi_1 = \lambda\phi$. ϕ est donc élémentaire. □

Theorème 10.9. *Si G est Abélien, alors les fonctions élémentaires sont exactement les caractères continus sur G.*

Démonstration. Un caractère continu χ sur G est evidamment une fonction définie positive telle que $\chi(e) = 1$, car pour tout $f \in \mathfrak{C}_{00}$

$$[f, f]_\chi = \iint f(x)\chi(x^{-1}y)\overline{f(y)}dxdy = \iint f(x)\overline{\chi(x)}\overline{f(y)\overline{\chi(y)}}dxdy$$
$$= \int f(x)\overline{\chi(x)}dx\overline{\int f(y)\overline{\chi(y)}dy} = \left|\int f(x)\overline{\chi(x)}dx\right|^2 \geq 0$$

Il reste à montrer que la représentation $s \to U_s$ de G dans $\mathcal{H}_\phi$ est irréductible si et seulement si ϕ est un caractère sur G. □

Définition 10.10. A chaque $f \in L^1(G)$ un associe sa "transformée de Fourier" $\widehat{f} : \widehat{G} \to \mathbb{T}$ par la formule

$$\widehat{f}(\chi) = \int \chi(x)f(x^{-1})dx = \chi * f(e_G)$$

Proposition 10.11. *$f \to \widehat{f}$ est une application continue de $L^1(G)$ vers $L^\infty(G)$.*

Theorème 10.12. *Soit G un groupe topologique localement compact. Alors il existe une mesure de Haar $d\chi$ sur $\widehat{G}$ telle que pour tout $f \in \mathfrak{C}_{00}^+ \cap L^1$ on ait l'égalite de mesures*

$$d\widehat{\mu}_f(\chi) = \widehat{f}(\chi)d\chi$$

Une consequence très importante du théorème d'inversion est que $\widehat{G}$ vu comme ensemble de fonctions sur G separe les points de G, ou (dans le jargon des analystes) qu'il y a "assez" de caractères. Précisement :

Corollaire 10.13. *Soient $x, y \in G$. Si $x \neq y$, alors il existe un $\chi \in \widehat{G}$ tel que $\chi(x) \neq \chi(y)$.*

Démonstration. Il est commode d'adopter la notation suivante, ou C est un compact dans $\widehat{G}$ es U un voisinage de 1 dans $\mathbb{T}$:

$$W(C,U) = \{x \in G \mid \chi(x) \in U \quad \forall \chi \in C\}$$

Ces ensembles ne sont jamais vides, car ils contiennent tous e. Montrons qu'ils sont un système fondamental de voisinages ouverts de e.
Pour cela, prenons V un voisinage de e et choisissons un voisinage conpact W de e tel que $WW^{-1} \subseteq V$. Soit f la fonction sur G définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{m(W)}} & \text{si } x \in W \\ 0 & \text{si } x \notin W \end{cases}$$

et posons $g = f * \widetilde{f}$. Alors g est une fonction réelle, continue, definie positive, et à support dans WW^{-1}. Le théorème d'inversion s'applique à g. On calcule

$$\int \widehat{g}(\chi) d\chi = g(e) = f * \widetilde{f}(e) = \int f(x) \overline{\widetilde{f}}(e-x) = \int f(x)^2 dx = 1$$

Il existe alors une partie compacte C de $\widehat{G}$ telle que

$$\int_C \widehat{g}(\chi) d\chi > \frac{2}{3}$$

Choisissons $x \in W(C, B_{\frac{1}{9}})$. Pour un tel x on aura necessairement que $\mathrm{Re}(\chi(x)) > \cos(\frac{2\pi}{9}) > \frac{2}{3}$, quelque soit $\chi \in C$. Par le théorème d'inversion :

$$g(x) = \int \widehat{g}(\chi)\chi(x) d\chi = \int_C \widehat{g}(\chi)\chi(x) d\chi + \int_{\widehat{G}\setminus C} \widehat{g}(\chi)\chi(x) d\chi$$

ce qui donne

$$g(x) \geq \left| \int_C \widehat{g}(\chi)\chi(x) d\chi \right| - \left| \int_{\widehat{G}\setminus C} \widehat{g}(\chi) d\chi \right| \geq \left| \frac{2}{3} \int_C \widehat{g}(\chi) d\chi \right| - \frac{1}{3} \geq \frac{4}{9} - \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

On a en particulier que $x \in \mathrm{supp}(g) \subseteq WW^{-1} \subseteq V$. Ceci etant vrai quelque soit $x \in W(C, B_{\frac{1}{9}}$, on a $W(C, B_{\frac{1}{9}}) \subseteq V$.

□

11. La dualité de Pontriagin - van Kampen

Définition 11.1. Soit G un groupe topologique et $g \in G$. On note avec $\epsilon(g)$ ou ϵ_g l'application $\epsilon_g : \widehat{G} \to \mathbb{T}$ définie par $\epsilon_g(\chi) = \chi(g)$. On appelle ϵ homomorphisme naturel de G dans son bidual.

La définition fait ce qu'elle promette :

Lemme 11.2. *Soit G un groupe topologique. Alors l'homomorphisme naturel de G dans son bidual est un homomorphisme de G dans son bidual.*

Démonstration. Il faut vérifier que ϵ_g est un caractère sur $\widehat{G}$ pour tout $g \in G$, que ϵ est un homomorphisme dans le sens algébrique et que ϵ est continu.
D'abord $\epsilon_g(\chi_1\chi_2) = \chi_1\chi_2(g) = \chi_1(g)\chi_2(g) = \epsilon_g(\chi_1)\epsilon_g(\chi_2)$ et $\epsilon_g(\chi_0) = \chi_0(g) = 1$ pour tout $\chi_1, \chi_2 \in \widehat{G}$ et tout $g \in G$, ce qui montre que ϵ_g est un caractère algèbrique sur $\widehat{G}$ pour tout $g \in G$. Mais ϵ_g est aussi continu car $d(\epsilon_g(\chi_1), \epsilon_g(\chi_2)) < \varepsilon$ si $\chi_1, \chi_2 \in W(\{g\}, \varepsilon)$.

Puis on a $\epsilon_{gh}(\chi) = \chi(gh) = \chi(g)\chi(h) = \epsilon_g(\chi)\epsilon_h(\chi)$ et que $\epsilon_e(\chi) = \chi(e) = 1$ pour tout $\chi \in \widehat{G}$, ce qui montre que $\epsilon_{gh} = \epsilon_g\epsilon_h$ et que ϵ_e est le caractère trivial de $\widehat{G}$. ϵ est donc un homomorphisme algèbrique.
Reste à voir la continuité de ϵ. Par 5.5, il suffit de montrer la continuité en e. Prenons un voisinage V de e dans $\widehat{\widehat{G}}$. V contient un ouvert du type $W(C, \varepsilon)$ pour une partie compacte C de $\widehat{G}$ et $\varepsilon > 0$. Prenons maintenant un voisinage compact A de e dans G. $W(A, \frac{\varepsilon}{2})$ est un voisinage ouvert de 1 dans $\widehat{G}$. C etant compact, on peut trouver un recouvrement ouvert fini $\chi_1 W(A, \frac{\varepsilon}{2}), \chi_2 W(A, \frac{\varepsilon}{2}), ..., \chi_n W(A, \frac{\varepsilon}{2})$ de C. Soit maintenant U un voisinage de e dans G tel que $U \subseteq A$ et tel que $d(\chi_i(x), 1) < \frac{\varepsilon}{2}$ si $x \in U$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Si $x \in U$ et $\chi \in C$, alors on a

$$d(\chi_j(x), \chi(x)) \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{pour un } j$$
$$d(\chi_j(x), 1) \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{pour tout } j$$

donc $d(\chi(x), 1) < \varepsilon$, ou bien $d(\epsilon_x(\chi), 1) < \varepsilon$ pour tout $\chi \in C$, ce qui est $\epsilon_U \subseteq V$. ϵ est donc continu. □

Lemme 11.3. *Si G admet assez de caractères, alors l'homomorphisme de G dans son bidual est injectif et bicontinu, et l'image de G dans $\widehat{\widehat{G}}$ est fermée.*

Démonstration. Prenons $g \in \ker \epsilon$, cet à dire $\epsilon_g(\chi) = 1$ pour tout $\chi \in \widehat{G}$ ou bien, par définition de ϵ que $\chi(g) = 1 = \chi(e)$ pour tout $\chi \in \widehat{G}$, ce qui montre que $g = e$. ϵ est donc injectif.
Posons pour un compact C dans $\widehat{G}$ et un voisinage U de 1 dans $\mathbb{T}$:

$$\begin{aligned} V &= \{x \in G \quad | \quad \epsilon_x(C) \subseteq U\} \\ W &= \{\epsilon_x \in \widehat{\widehat{G}} \quad | \quad \epsilon_x(C) \subseteq U\} \end{aligned}$$

Ces ensembles fournissent, lorsque C parcourt tous les compacts de $\widehat{G}$ et U tous les voisinages de 1 des systèmes fondamentales de voisinages de e, respectivement de ϵ_e. Par la définition de ϵ on a

$$\epsilon_V = W \cap \epsilon_G$$

ce qui entraine que non seulement ϵ est continu, mais aussi ϵ^{-1}.
L'image de G dans $\widehat{\widehat{G}}$ est donc un sous-groupe localement compact de $\widehat{\widehat{G}}$, vu qu'il est isomorphe à G. Car $\widehat{\widehat{G}}$ est de Hausdorff, 6.5 permet de conclure qu'il est fermé. □

Voilà le théorème de dualité dans la forme donnée par Pontriagin. Je donne d'abord la démonstration "usuelle" de ce fait, et apres, pour le cas discret une démonstration alternative, qui contient essentiellement les mêmes éléments,mais qui utilise le langage les limites projéctives.

Lemme 11.4. *Soit G un groupe discret ou compact. Alors l'homomorphisme naturel de G dans son bidual est un isomorphisme.*

Démonstration. Traitons d'abord le cas ou G est discret. Choisissons pour cela un sous-groupe de type fini $F \subseteq G$. Par **??** on a $\widehat{\widehat{H}} = \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(F))$, et ϵ restreint à F est exactememnt l'homomorphisme de F dans son bidual. Mais comme F est Abélien de type fini, donc produit de groupes cycliques : $F \cong \mathbb{Z}^k \oplus Z$, pour un naturel k et un groupe Abélien fini Z on a que $\epsilon|_F$ est un isomorphisme.

Voyons maintenant le cas où G est compact. Par 10.13 et 11.3, nous savons que ϵ est injéctif. Reste à voir la surjéctivité de ϵ. Car $\widehat{G}$ est discret, on a, par la première partie isomorphisme

$$\widehat{\epsilon} : \widehat{G} \to \widehat{\widehat{\widehat{G}}}$$

Pour tout $\chi \in \widehat{G}$ et tout $x \in G$ on a $\widehat{\epsilon}_\chi(\epsilon_x) = \epsilon_x(\chi) = \chi(x)$, ce qui montre que

$$\mathrm{Ann}(\widehat{\widehat{G}}) \cong \mathrm{Ann}(G) = \{\chi_0\}$$

Mais par **??** on a

$$\mathrm{Ann}(\widehat{\widehat{G}}) \cong \widehat{\widehat{\widehat{G}}/\epsilon(G)}$$

Le dual de $\widehat{\widehat{G}}/\epsilon(G)$ est alors trivial, et, de nouveau par 10.13, $\widehat{\widehat{G}}/\epsilon(G)$ est trivial lui même. ϵ est donc surjéctif, ce qui termine la démonstration. □

Deuxième démonstration. Soit G discret. Par le théorème 9.6 on a que $\widehat{G}$ est limite projéctive stricte

$$\widehat{G} \cong \lim_{F \text{ de type fini}} \widehat{F}$$

l'ensemble d'indices etant les sous-groupes de type fini de G ordonnées par l'inclusion. Les applications limites $h_F : \widehat{G} \to \widehat{F}$ sont données par $h_F(\chi) = \chi|_F$. Ces applications sont surjéctives, et induisent des homomorphismes injéctives

$$h_F^* : \widehat{\widehat{F}} \to \widehat{\widehat{G}} \qquad \textit{par} \qquad h_F^*(\chi) = \chi \circ h_F$$

La proposition 9.7 montre que $\mathrm{Hom}(\widehat{G}, \mathbb{T})$ est réunion des images de ces homomorphismes. Pour tout $\chi \in \widehat{G}$ □

ce qui se résume dans le diagram suivant :

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\epsilon} & \widehat{\widehat{F}} \\ {\scriptstyle\iota}\big\downarrow & & \big\downarrow \\ G & \xrightarrow{\epsilon} & \widehat{\widehat{G}} \end{array}$$

Voilà la dualité de Pontriagin - van Kampen dans sa forme classique. La démonstration est celle donnée par Henri Cartan et Roger Godement.

Theorème 11.5. *Soit G un groupe topologique Abélien localement compact. Alors l'homomorphisme naturel de G dans son bidual est un isomorphisme.*

Démonstration. De nouveau, vu 10.13 et 11.3, il suffit de montrer la surjéctivité de ϵ. Pour cela, montrons que l'image de ϵ est dense. Cela suffit, car elle est aussi fermée, es sera donc egale à $\widehat{\widehat{G}}$ tout entier

Si ϵ_G n'est pas dense dans $\widehat{\widehat{G}}$, alors on peut trouver une fonction $f \in A(\widehat{\widehat{G}})$ qui est nulle sur ϵ_G mais pas identiquement nulle (**??**). Nous avons donc pour une fonction integrable $h \in L^1(\widehat{G})$

$$f(\Psi) = \int h(\chi)\overline{\Psi(\chi)}d\chi$$

pour tout $\Psi \in \widehat{\widehat{G}}$. Comme $f(\epsilon_x) = 0$ pour tout $x \in G$, on deduit que

$$\int h(\chi)\overline{\chi(x)}d\chi = \int h(\chi)\overline{\epsilon_x(\chi)}d\chi = 0$$

et donc que $h = 0$ par **??**. Mais cela dit que $f = 0$, contrairement à l'hypothèse. L'image de ϵ est donc dense dans $\widehat{\widehat{G}}$. □

Corollaire 11.6. *Soit G un groupe topologique Abélien localement compact et H un sous-groupe de G. Alors $\widehat{\widehat{H}} = Ann(Ann(H))$.*

Démonstration. □

Lemme 11.7. *Soit H un sous-groupe topologique Abélien localement compact G. Alors on a des isomorphismes canoniques*

$$\widehat{H} \cong \widehat{G}/Ann(H)$$

$$\widehat{G/H} \cong Ann(H)$$

Démonstration. La situation se résume dans le diagramme suivant, où la ligne en bas est duale à celle en haut.

$$0 \longrightarrow H \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} G/H \longrightarrow 0$$

$$0 \longleftarrow \widehat{G}/\mathrm{Ann}(H) \xleftarrow[\widehat{\pi}]{} \widehat{G} \xleftarrow[\widehat{\iota}]{} \mathrm{Ann}(H) \longleftarrow 0$$

ι est l'injéction naturelle de H dans G et π désigne la projéction canonique de G sur G/H. $\widehat{\iota}$ est l'adjoint de ι, ce qui est la même chose que la projéction canonique de G sur $\widehat{G}/Ann(H)$, et $\widehat{\pi}$ l'adjoint de π, ce qui est la même chose que l'injéction naturelle de Ann(H) dans $\widehat{G}$.

(I) Prenons $h \in H$ et $\overline{\chi} \in \widehat{G}/\mathrm{Ann}(H)$. J'affirme que pour tout représentant χ de $\overline{\chi}$ la valeur $\chi(h)$ est la même, et que l'expression $\overline{\chi}(h)$ est donc bien définie pour tout $h \in H$, et que dans ce sens, $\overline{\chi}$ est un caractère sur H, et que $\widehat{G}/\mathrm{Ann}(H)$ est précisement le dual de H.

(II) Prenons $\chi \in \mathrm{Ann}(H)$ et $\overline{g} \in G/H$. J'affirme que pour tout représentant g de $\overline{g}$ la valeur $\chi(g)$ est la même, et que l'expression $\chi(\overline{g})$ est donc bien définie pour tout $\chi \in \mathrm{Ann}(H)$, et que dans ce sens, χ est un caractère sur G/H, et que Ann(H) est précisement le dual de G/H.

Notons π la projéction canonique de G sur G/H et $\widehat{\pi}$ son adjoint : $\widehat{\pi} : \widehat{G/H} \to \widehat{G}$ □

12. Consequences

Définition 12.1. Soit G un groupe discret et H un groupe compact, et donnons une application de $G \times H$ vers $\mathbb{T}$ notée $(g, h) \mapsto < g, h >$, telle que

$$< h_1 h_2, g >=< h_1, g >< h_2, g > \qquad \text{et} \qquad < h, g_1 g_2 >=< h, g_1 >< h, g_2 >$$

et telle que pour tout $g \in G$ et tout voisinage V de 1 dans $\mathbb{T}$ il existe un voisinage U de e_H tel que $gU \subseteq V$.

On appelle le couple (G, H) muni du produit $< \cdot, \cdot >$ une paire de groupes topologiques.

Définition 12.2. Soit (G, H) une paire de groupes topologiques, $A \subseteq G$, $B \subseteq H$. On notera

$$\mathrm{Ann}_G(B) = \{g \in G \mid gb = 0 \quad \forall b \in B\}$$
$$\mathrm{Ann}_H(A) = \{h \in H \mid ah = 0 \quad \forall a \in A\}$$

On dit que la paire (G, H) est orthogonale si $\mathrm{Ann}_G(H) = \{e_G\}$ et $\mathrm{Ann}_H(G) = \{e_H\}$.

Proposition 12.3. *Soit (G, H) une paire de groupes topologiques Abéliens orthogonals. Alors les applications $G \to \mathbb{T}$ definies par $g \mapsto < g, h >$ pour $h \in H$ fixé sont précisement les caractères sur G, et similairement les applications $H \to \mathbb{T}$ definies par $h \mapsto < g, h >$ pour $g \in G$ fixé sont précisement les caractères sur H.*

Démonstration. Notons $\omega_g : H \to \mathbb{T}$ l'application $h \mapsto < g, h >$. On a immediatement que $\omega_g \in \widehat{H}$ pour tout $g \in G$, et que ω est un homomorphisme de G dans $\widehat{H}$. La condition $\mathrm{Ann}_G(H) = \{e_G\}$ dit que $\ker(\omega) = \{e_G\}$, i.e. que ω est injectif. On a $\mathrm{Ann}_X(\omega(G)) = \mathrm{Ann}_X(G) = \{e_H\}$, et donc $\omega(G) = \mathrm{Ann}_{\widehat{H}} = \widehat{H}$ ce qui montre que ω est un isomorphisme.
En résumé $G \cong \omega(G) = \widehat{H}$ et par le théorème de dualité $\widehat{G} \cong H$. □

13. Exemples

Les corps $\mathfrak{p}$-adiques. Soit $\mathfrak{p}$ un nombre premier (qui restera fixé au cours de cet exemple). Tout nombre rationnel non nul q s'écrit de façon unique comme

$$q = \frac{a}{b}\mathfrak{p}^n$$

avec des nombres naturels a et b coprimes à $\mathfrak{p}$, et avec un nombre entier n. Posons dans cette situation

$$|q|_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{-n}$$

et $|0|_\mathfrak{p} = 0$. Cela s'appelle "valuation $\mathfrak{p}$-adique sur $\mathbb{Q}$. Elle nous définit une distance sur $\mathbb{Q}$, et donc une topologie métrisable. En effet $\delta(x, y) = |x - y|_\mathfrak{p}$ est nonnégatif, nul si et seulement si $x = y$ et

La mesure de Haar sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$

Les sous-groupes fermés de $\mathbb{R}^n$:

Proposition 13.1. *Tout sous-groupe fermé H de $\mathbb{R}^n$ est de la forme*

$$H = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r + m_1 f_1 + \cdots + m_s f_s$$

où $e_1, ..., e_r, f_1, ..., f_s$ sont des vecteurs independants dans $\mathbb{R}^n$, les $\lambda_1, ..., \lambda_r$ parcourant $\mathbb{R}$ et les $m_1, ..., m_s$ parcourant $\mathbb{Z}$.

Démonstration. On procède par récurrence sur n. La proposition est trivialement juste pour $n = 0$. On suppose desormais qu'elle est vraie pour $n - 1$. Choisissons un sous-groupe fermé H de $\mathbb{R}^n$, et montrons que H est de la forme indiquée.

Cas (I) : H n'est pas discret. 0 est donc un point d'accumulation, et on peut trouver une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'élements de H qui converge vers 0. Considerons la suite

$$y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$$

Comme $\overline{B(0,1)}$ est compact dans $\mathbb{R}^n$ et $y_n \in \overline{B(0,1)}$, on peut extraire de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous suite convergeante $(y_{\alpha(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Soit e la limite de cette suite.
J'affirme que la droite $V = \{\lambda e | \lambda \in \mathbb{R}\}$ est contenue dans H. Pour le montrer, fixons $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $\lambda_0 \neq 0$ et montrons que $\lambda_0 e$ adhère à H (pour $\lambda_0 = 0$ c'est clair). Cela suffit, car H est supposé fermé. Soit donc $\varepsilon > 0$. Il existent des nombres naturels N_1, N_2 tels que

$$n \geq N_1 \implies \left\| y_{\alpha(n)} - e \right\| < \frac{\varepsilon}{2\,|\lambda_0|}$$

$$n \geq N_2 \implies \left\| x_{\alpha(n)} \right\| < \varepsilon$$

Prenons $n \geq \max\{N_1, N_2\}$, et voyons que $B(\lambda_0 e, \varepsilon) \cap \{m x_{\alpha(n)} \mid m \in \mathbb{Z}\} \neq \emptyset$. En effet on a

$$\begin{aligned}
\inf_{m\in\mathbb{Z}} \left\| \lambda_0 e - m x_{\alpha(n)} \right\| &\leq \inf_{\lambda\in\mathbb{R}} \inf_{m\in\mathbb{Z}} \left(\left\| \lambda_0 e - \lambda x_{\alpha(n)} \right\| + \left\| \lambda x_{\alpha(n)} - m x_{\alpha(n)} \right\| \right) \\
&\leq \inf_{\lambda\in\mathbb{R}} \left\| \lambda_0 e - \lambda x_{\alpha(n)} \right\| + \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \inf_{m\in\mathbb{Z}} \left\| \lambda x_{\alpha(n)} - m x_{\alpha(n)} \right\| \\
&\leq |\lambda_0| \left\| e - y_{\alpha(n)} \right\| + \left\| x_{\alpha(n)} \right\| \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \inf_{m\in\mathbb{Z}} |\lambda - m| \\
&< |\lambda_0| \frac{\varepsilon}{2\,|\lambda_0|} + \varepsilon \frac{1}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

La droite V est donc contenue dans H. Désignons avec π la projéction orthogonale sur V dans $\mathbb{R}^n$. Clairement π est un homomorphisme continu sur son image, et $\pi|_D = \mathrm{id}_D$. La proposition 6.21 s'applique :

$$H = \{d + k \ \mid d \in D, k \in (\ker \pi \cap H)\}$$

Mais $\ker \pi \cap H$ est un sous-groupe fermé du complement orthogonal de V dans $\mathbb{R}^n$, donc un sous-groupe fermé d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n-1$ qu'on identifie à $\mathbb{R}^{n-1}$. Il existent donc par l'hypothèse de recurrence des vecteurs linéairement independants dans W : $e_1, ..., e_r, f_1, ..., f_s$, tels que

$$\ker \pi \cap H = \{\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r + m_1 f_1 + \cdots + m_s f_s\}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r\in\mathbb{R}; m_1,\ldots,m_s\in\mathbb{Z}}$$

Les derniers deux équations mis ensemble donnent finalement que

$$H = \{\lambda e + \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r + m_1 f_1 + \cdots + m_s f_s\}$$

ou $\{e, e_1, ..., e_r, f_1, ..., f_s\}$ sont des vécteurs linéairement indépendents, les scalaires $\lambda, \lambda_1, ..., \lambda_r$ parcourant $\mathbb{R}$, et les $m_1, ..., m_s$ parcourant $\mathbb{Z}$.

Cas (II) : H est discret. L'assertion est triviale si $H = \{0\}$. Si $H \neq \{0\}$, il existe un élément non nul de norme minimale dans H : Si $h \in H, h \neq 0$ on considère $\overline{B(0, \|h\|)} \cap (H \backslash 0)$. C'est l'intersection d'une partie discrète avec une partie conpacte de $\mathbb{R}^n$, donc un ensemble fini. Il est non vide car h est dedans. Dans cet ensemble on se choisit un f de norme minimale. Il est clair que $0 < \|f\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in H$.
Désignons avec D la droite $\{\lambda f \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Clairement $D \cap H = \{m h_0 \mid m \in \mathbb{Z}\}$. J'affirme que

$$\inf_{d\in D} \|h - d\| \geq \frac{\|f\|}{2} \qquad \text{pour tout } h \in H \backslash D$$

En effet, quelque soit $d \in D$ on a

$$\begin{aligned} & \|h-d\| < \frac{\|f\|}{2} \\ \Longrightarrow \quad & \|h-d\| + \inf_{m\in\mathbb{Z}} \|d-mf\| < \frac{\|f\|}{2} + \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \inf_{m\in\mathbb{Z}} \|\lambda f - mf\| \\ \Longrightarrow \quad & \inf_{m\in\mathbb{Z}} (\|h-mf\|) < \frac{\|f\|}{2} + \|f\| \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \inf_{m\in\mathbb{Z}} |\lambda - m| \\ \Longrightarrow \quad & \inf_{m\in\mathbb{Z}} (\|h-mf\|) < \|f\| \end{aligned}$$

ce qui contredit la minimalité de $\|f\|$. Désignons avec W le complement orthogonal de D dans $\mathbb{R}^n$ et avec π la projéction canonique de $\mathbb{R}^n$ sur W de long de D. C'est un homomorphisme continu ouvert. L'ensemble $\{x \in W \mid \|x\| < \frac{\|f\|}{2}\} \cap \pi(H)$ consiste en $\{0\}$ seulement, d'après ce qui précède. $\{0\}$ est donc un ouvert de $\pi(H)$, i.e. $\pi(H)$ est un sous-groupe discret de W.

On peut identifier W à $\mathbb{R}^{n-1}$. Par hypothèse de recurrence il existent des vecteurs linéairement indépendants $\{f'_1, ..., f'_s\}$ dans le sous espace W de $\mathbb{R}^n$ tels qu'on ait $\pi(H) = \{m_1 f'_1 + ... + m_s f'_s \mid m_1, ..., m_s \in \mathbb{Z}\}$. Comme $f'_i \in \pi(H)$, on peut trouver un $f_i \in H$ tel que $\pi(f_i) = f'_i$ pour tout $1 \leq i \leq s$.

Le vecteur f est linéairement indépendent de $\{f_1, ..., f_s\}$: Une rélation de dépendence $\mu_1 f_1 + ... + \mu_s f_s = f$ donne, lorsque qu'on applique π aux deux membres que $\mu_1 f'_1 + ... + \mu_s f'_s = \pi(f) = 0$ et comme $f'_1, ..., f'_s$ sont independents cela implique que $\mu_1 = ... = \mu_s = 0$.

J'affirme que l'ensemble de vecteurs independents $\{f, f_1, ..., f_s\}$ marche : Quelque soit $h \in H$ on a pour des entiers $m_1, ..., m_s$ que $\pi(h) = m_1 f'_1 + ... + m_s f'_s$. Par consequent $\pi(h - m_1 f_1 - ... - m_s f_s) = 0$. C'est la projéction d'un élément de H, et on a donc $h - m_1 f_1 - ... - m_s f_s = mf$ pour un certain $m \in \mathbb{Z}$, ce qui est exactement ce qu'on veut : $h = mf + m_1 f_1 + ... + m_s f_s$. □

Références

[1] Bourbaki, Nicolas. *Topologie générale Chap. 1 à 10.* Diffusion C.C.L.S, Paris 1974

[2] Cartan, Henri et Godement, Roger. *Théorie de la dualité et analyse harmonique dans les groupes topologiques.* Annales de l'école normale superieure, tome 64, Gauthier-Villars, Paris 1947

[3] Hewitt, Edwin und Ross, Kenneth A.. *Abstract harmonic analysis I & II.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften Band 115 und Band 152, Springer Verlag, Göttingen, Berlin 1963 / 1970

[4] Hofmann, Karl H. and Morris, Sidney A.. *The structure of compact groups.* de Gruyter Studies in Mathematics 25, Walter de Gruyter, Berlin, New York 1998

[5] Morris, Sidney A.. *Pontryagin duality and the structure of locally compact abelian groups.* London mathematical society lecture note series 29, Cambridge university press, London 1977

[6] Pontriagin, Lev Semionovich. *Topological groups.* Verlag ? ? ? ?

[7] Rudin, Walter. *Fourier analysis on groups.* Interscience publishers, New York 1967

[8] Weil, André. *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, 2ème edition.* Actualités scientifiques et industrielles, Hermann, Paris 1965