Projet de Semestre

été 2005

Groupes et algèbres de Lie

José-Marcos Carballo

Professeur Responsable:

prof. Michel Matthey

Table des matières

Résumé

Le but de ce travail est d'étudier les groupes de Lie ainsi que les algèbres de Lie. Dans un premier temps, on définira ces deux notions indépendament l'une de l'autre. On verra ensuite que l'on peut définir l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie, ainsi que l'application exponentielle qui est l'application de passage d'une algèbre de Lie vers son groupe de Lie.

Table des notations

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long du travail:

$\mathbb{N}$	$\{0, 1, 2, 3, ...\}$
$\mathbb{F}$	$\{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$

CHAPITRE 1

Théorie classique des groupes de Lie

1. Variétés topologiques et variétés lisses

NOTATION 1.1. Dans ce chapitre, on se donne un corps $\mathbb{K}$ qui est soit le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels, soit le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Si E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, et si $f : E_0 \to F_0$ est une application d'un ouvert de E vers un ouvert de F, on dit que f est *lisse (sur $\mathbb{K}$)* si E_0 est vide, ou réduit à un point (i.e. $\dim(E) = 0$), ou si f est C^∞, i.e. indéfiniment dérivable. On dit que f est *analytique (sur $\mathbb{K}$)* ou *de classe C^ω (sur $\mathbb{K}$)* si E_0 est vide, ou réduit à un point, ou si f est lisse et son développement de Taylor converge ponctuellement vers f au voisinage de chacun des points de E_0. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, "lisse" et "analytique" coïncident, et on dit souvent *holomorphe*.

DÉFINITION 1.2. Soient X un espace topologique et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$, i.e. $E \cong \mathbb{K}^n$ (isomorphisme non-canonique).

(1) Une *carte* sur X est un homomorphisme
$$\varphi_\alpha : E_\alpha \to X_\alpha,$$
avec $E_\alpha \subseteq E$ ouvert et $X_\alpha \subseteq X$ ouvert ; on dira dans ce cas que φ_α est *modelée sur E* et est une $\mathbb{K}$-*carte.*

(2) Un *atlas (modelé sur E)* sur X est une collection de cartes $\{\varphi_\alpha\}_\alpha$ sur X, toutes modelées sur E, telles que
$$\bigcup_\alpha X_\alpha = X;$$
dans ce cas, on dira aussi que $\{\varphi_\alpha\}_\alpha$ est un $\mathbb{K}$-*atlas.*

(3) Un $\mathbb{K}$-atlas $\{\varphi_\alpha\}_\alpha$ sur X est *lisse* (resp. *analytique*) si l'application
$$\varphi_{\beta\alpha} := \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha : \underbrace{\varphi_\alpha^{-1}(X_\alpha \cap X_\beta)}_{\subseteq E} \to \underbrace{\varphi_\beta^{-1}(X_\alpha \cap X_\beta)}_{\subseteq E}$$
est lisse (resp. analytique) sur $\mathbb{K}$, pour tous α,β ; l'application $\varphi_{\beta\alpha}$ est appelée *application de transition, fonction de transition* ou *application de changement de carte.*

(4) Une *variété topologique* est un espace topologique séparé à base dénombrable d'ouverts admettant un atlas.

(5) La *dimension d'une variété topologique M*, notée $\dim(M)$, est la dimension sur $\mathbb{K}$ de n'importe quel espace vectoriel sur lequel est modelé un atlas de M.

Remarque 1.3. L'unicité de la dimension d'une variété topologique est assurée par le théorème d'invariance des domaines qui n'est pas donné ici.

Définition 1.4. Soient $(X, \{\varphi_\alpha\}_\alpha)$ et $(Y, \{\psi_\beta\}_\beta)$ deux espaces topologiques munis d'atlas lisses (resp. analytique), modelés sur E et F respectivement. Une application $f : X \to Y$ est *lisse (resp. analytique)*, si

$$\psi_\beta^{-1} \circ f \circ \varphi_\alpha : \underbrace{\varphi_\alpha^{-1}(X_\alpha \cap f^{-1}(Y_\beta))}_{\subseteq E} \to F$$

est lisse (resp. analytique), où l'on utilise les notations évidentes.

Définition 1.5. Deux atlas lisses (resp. analytiques) $\{\varphi_\alpha\}_\alpha$ et $\{\psi_\beta\}_\beta$ sur X sont appelés *équivalents* si l'identité

$$\mathrm{id}_X : (X, \{\varphi_\alpha\}) \to (X, \{\psi_\beta\})$$

est une application lisse (resp. analytique).

Définition 1.6. Une *variété lisse* (resp. *analytique*) sur $\mathbb{K}$ est un espace topologique séparé (on dit aussi T_2) à base dénombrable muni d'une classe d'équivalence d'atlas lisses (resp. analytiques).

Définition 1.7. Un *difféomorphisme* (resp. *difféomorphisme analytique*) $f : M \to N$ est une application lisse (resp. analytique), bijective et telle que f^{-1} est lisse (resp. analytique). On note

$$f : M \xrightarrow{\approx} N.$$

Exemple 1.8.
(1) Tout espace discret dénombrable est une variété analytique sur $\mathbb{K}$.
(2) $\mathbb{R}^n$ variété analytique de dimension n.
(3) $\mathbb{C}^n$ variété complexe de dimension n.
(4) Toute variété complexe de dimension n est une variété analytique réelle de dimension $2n$.
(5) L'espace $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est une variété analytique sur $\mathbb{K}$ de dimension n^2, difféomorphe à $\mathbb{K}^{n^2}$, autrement dit $\mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \approx \mathbb{K}^{n^2}$. Ainsi, l'ouvert $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est une variété analytique de dimension n^2 sur $\mathbb{K}$.
(6) $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est une variété analytique de dimension n sur $\mathbb{R}$.
(7) S^2 est une variété holomorphe de dimension 1.

Définition 1.9. Si $f : M \to N$ est une application lisse (resp. analytique) sur $\mathbb{K}$, et si $x_0 \in M$, on dit que f est un *difféomorphisme local en* x_0 (resp. *difféomorphisme analytique local en* x_0) s'il existe un voisinage ouvert U de x_0 dans M et un voisinage ouvert V de $f(x_0)$ dans N tels que

$$f|_U : U \xrightarrow{\approx} V.$$

2. Groupes de Lie

DÉFINITION 1.10. Un *groupe topologique* est un espace topologique muni d'une structure de groupe telle que le produit

$$\mu : G \times G \to G, \quad (g,h) \mapsto g \cdot h$$

et le passage à l'inverse

$$\mathrm{inv} : G \to G, \quad g \mapsto g^{-1}$$

sont des applications continues.

DÉFINITION 1.11. Un *groupe de Lie sur* $\mathbb{K}$ est une variété lisse G sur $\mathbb{K}$, munie d'une structure de groupe telle que le produit

$$\mu : G \times G \to G, \quad (g,h) \mapsto g \cdot h$$

et le passage à l'inverse

$$\mathrm{inv} : G \to G, \quad g \mapsto g^{-1}$$

sont lisses. On dit que G est un *groupe de Lie analytique sur* $\mathbb{K}$ si G est une variété analytique sur $\mathbb{K}$ et si μ et *inv* sont des applications analytiques.

DÉFINITION 1.12. Un *homomorphisme de groupes de Lie* (resp. *analytique*) sur $\mathbb{K}$ est un homomorphisme de groupes qui est lisse (resp. analytique) ; c'est un *isomorphisme de groupes de Lie* (resp.*analytique*) sur $\mathbb{K}$, s'il est bijectif et un difféomorphisme (resp. analytique).

EXEMPLE 1.13.
(1) Tout groupe dénombrable, muni de la topologie discrète, est un groupe de Lie (réel ou complexe) de dimension 0.
(2) Le groupe $\mathbb{R}^n$ est un groupe de Lie réel de dimension n.
(3) Le groupe $\mathbb{C}^n$ est un groupe de Lie complexe de dimension n.
(4) Tout groupe de Lie complexe de dimension n est un groupe de Lie réel de dimension $2n$.
(5) Le groupe $\mathbb{R}^\times := \mathbb{R}\backslash\{0\}$ (pour la multiplication) est un groupe de Lie réel de dimension 1.
(6) Le groupe $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C}\backslash\{0\}$ (pour la multiplication) est un groupe de Lie complexe de dimension 1.
(7) Le groupe $\mathbb{H}^\times := \mathbb{H}\backslash\{0\}$ (pour la multiplication) est un groupe de Lie réel de dimension 4.
(8) Le sous-groupe fermé
$$S^0 := \{x \in \mathbb{R}^\times \mid |x| = 1\} = \{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}/2$$
de $\mathbb{R}^\times$ est un groupe de Lie réel de dimension 0.
(9) Le sous-groupe fermé
$$S^1 := \{z \in \mathbb{C}^\times \mid |z| = 1\}$$
de $\mathbb{C}^\times$ est un groupe de Lie réel de dimension 1.
(10) Le sous-groupe fermé
$$S^3 := \{q \in \mathbb{H}^\times \mid |q| = 1\}$$
de $\mathbb{H}^\times$ est un groupe de Lie réel de dimension 3.

(11) Le *tore de dimension* n, défini par

$$\mathbb{T}^n := \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n \text{ facteurs}},$$

est un groupe de Lie réel de dimension n.

(12) Le groupe $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ est un groupe de Lie réel de dimension n. De plus, il y a un isomorphisme de groupes de Lie entre $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ et $\mathbb{T}^n$.

(13) Si H est un sous-groupe ouvert d'un groupe de Lie G sur $\mathbb{K}$, alors H est également un groupe de Lie et a la même dimension que G.

(14) Le groupe $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ (pour l'addition matricielle) est un groupe de Lie analytique sur $\mathbb{K}$ de dimension n^2, isomorphe à $\mathbb{K}^{n^2}$ comme groupe de Lie analytique sur $\mathbb{K}$.

(15) Si G et H sont des groupes de Lie sur $\mathbb{K}$ de dimension n et m respectivement, alors le groupe topologique produit $G \times H$ est un groupe de Lie sur $\mathbb{K}$ de dimension $n+m$. Si G et H sont analytiques, alors $G \times H$ également.

Proposition 1.14. *Le groupe linéaire général* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *(pour la multiplication matricielle), muni de la structure de variété analytique sur* $\mathbb{K}$ *héritée en le réalisant comme sous-espace ouvert de* $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$*, est un groupe de Lie analytique sur* $\mathbb{K}$ *de dimension* n^2*.*

Démonstration. La multiplication matricielle est polynômiale en les entrées des matrices à multiplier, donc l'application

$$\mu : \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \quad (A, B) \mapsto AB$$

est analytique. Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^{\mathrm{ad}},$$

où A^{ad} est la matrice adjointe de A, i.e. la transposée de la matrice des cofacteurs A^{cof} de A. Comme les applications det et ${}^t(-)$ sont analytiques, l'application

$$\mathrm{inv} : \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \quad A \mapsto A^{-1}$$

est également analytique.

□

Proposition 1.15. *Le groupe linéaire général* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{H})$ *(pour la multiplication matricielle), muni de la structure de variété analytique sur* $\mathbb{K}$ *héritée en le réalisant comme sous-espace ouvert de* $\mathrm{M}_n(\mathbb{H})$*, est un groupe de Lie réel analytique sur* $\mathbb{K}$ *de dimension* $8n^2$*.*

Démonstration. $\mathrm{M}_n(\mathbb{H})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension $8n^2$.

$$\mathrm{M}_n(\mathbb{H}) \cong \mathcal{A} := \{ \left(\begin{array}{c|c} A & -\bar{B} \\ \hline B & \bar{A} \end{array} \right) \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbb{C}) \ \ | \ \ A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \}.$$

Ainsi,

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{H}) \leftrightarrow \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C}) \cap \mathcal{A}.$$

□

3. Espace tangent de G et champ de vecteurs invariants à gauche

Soit un groupe de Lie G sur $\mathbb{K}$.

NOTATION 1.16. *L'espace tangent* de G est le $\mathbb{K}$-espace vectoriel

$$\mathrm{L}\, G = \mathrm{T}_e\, G.$$

On l'appelle aussi l'*algèbre de Lie* de G. Si $\varphi : G \to H$ est un homomorphisme de groupes de Lie sur $\mathbb{K}$, on pose

$$\varphi_* = \mathrm{L}\,\varphi := \mathrm{T}_e\,\varphi : \mathrm{L}\, G \to \mathrm{L}\, H.$$

L définit un foncteur de la catégorie des groupes de Lie sur $\mathbb{K}$ vers celle des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, i.e.

$$\mathrm{L}\,\mathrm{id}_G = \mathrm{id}_{\mathrm{L}\, G} \quad \text{et} \quad \mathrm{L}(\psi \circ \varphi) = \mathrm{L}\,\psi \circ \mathrm{L}\,\varphi.$$

EXEMPLE 1.17. Soit $G = \mathbb{K}^n$. On a que

$$\mathrm{T}\,\mathbb{K}^n = \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \quad \text{et que} \quad \mathrm{T}_t\,\mathbb{K}^n = \{t\} \times \mathbb{K}^n,$$

pour tout $t \in \mathbb{K}$. En particulier, on a

$$\mathrm{L}\,\mathbb{K}^n = \{0\} \times \mathbb{K}^n.$$

Dans la suite, on va souvent identifier $\mathrm{L}\,\mathbb{K}^n$ avec $\mathbb{K}^n$ de manière évidente.

EXEMPLE 1.18. Soit $G = \mathbb{T}^n$ avec sa carte canonique, i.e.

$$\varphi : \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[^n \to \mathbb{T}^n, \quad (\theta_1, \ldots, \theta_n) \mapsto (e^{2i\pi\theta_1}, \ldots, e^{2i\pi\theta_n}).$$

Ainsi, on a l'identification suivante (comme espace vectoriel réel)

$$\mathrm{L}\,\mathbb{T}^n \leftrightarrow \mathbb{R}^n, \quad [(1, \ldots, 1), (\theta_1, \ldots, \theta_n)] \leftrightarrow (\theta_1, \ldots, \theta_n).$$

EXEMPLE 1.19. Pour le groupe de Lie réel $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$, où $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$, on a que l'ouvert $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ lui-même est un ouvert trivialisant pour la carte canonique, donc

$$\mathrm{T}\,\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{F}) \approx \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}) \times \mathbb{R}^{\dim(\mathbb{F})\cdot n^2}.$$

De plus,

$$\mathrm{T}_A\,\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}) = \{A\} \times \mathrm{M}_n(\mathbb{F}),$$

pour toute matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$. En particulier,

$$\mathrm{L}\,\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}) = \{1_n\} \times \mathrm{M}_n(\mathbb{F}).$$

Comme avant, on va identifier de manière évidente $\mathrm{L}\,\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ avec $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$.

DÉFINITION 1.20. Un champ de vecteurs $\chi : G \to \mathrm{T}\, G$ est appelé *invariant à gauche* si le diagramme suivant commute pour tout $g \in G$:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}\, G \arrow[r, "(l_g)_*"] & \mathrm{T}\, G \\ G \arrow[u, "\chi"] \arrow[r, "l_g"'] & G \arrow[u, "\chi"'] \end{tikzcd}$$

où l_g est la multiplication à gauche par g dans G. La commutativité du diagramme est équivalente à dire que

$$(l_g)_* \circ \chi_h = \chi_{gh}, \quad \forall g, h \in G.$$

Ici $\chi_h = \chi(h)$, c'est-à-dire le vecteur du champ de vecteur issu de $h \in G$.

Remarque 1.21. Le champ de vecteurs χ sur le groupe de Lie G est invariant à gauche si et seulement

$$(l_g)_* \circ \chi_e = \chi_g,$$

pour tout $g \in G$.

Proposition 1.22. *Si $X \in \mathrm{L}\, G = \mathrm{T}_e\, G$, alors l'application*

$$\bar{X} : G \to \mathrm{T}\, G, \quad g \mapsto \bar{X}_g := (l_g)_*(X)$$

est un champ lisse sur G, invariant à gauche et qui satisfait $\bar{X}_e = X$. On a donc une bijection canonique

$$\mathrm{L}\, G \quad \longleftrightarrow \quad \{\textit{champs lisses invariants à gauche sur } G\}.$$

Par abus de notation, pour $g \in G$, on écrira

$$X(-) := \bar{X} \quad \textit{et} \quad X(g) := \bar{X}_g \in \mathrm{T}_g\, G.$$

Démonstration. Il suffit de montrer que

$$G \times \mathrm{L}\, G \to \mathrm{T}\, G, \quad (g, X) \mapsto X(g) = (l_g)_*(X)$$

est lisse. On ne donne pas le détail ici. □

Définition 1.23. Une variété réelle lisse M de dimension n est appelée *parallélisable* s'il existe n champs de vecteurs continus sur M, disons

$$\chi^{(1)}, \dots, \chi^{(n)} : M \to \mathrm{T}\, M,$$

qui sont *(partout) linéairement indépendants*, i.e. tels que, pour tout point x de M, les vecteurs tangents en x

$$\chi_x^{(1)}, \dots, \chi_x^{(n)} \in \mathrm{T}_x\, M$$

sont $\mathbb{R}$-linéairement indépendants, c'est-à-dire forment une $\mathbb{R}$-base de l'espace vectoriel réel $\mathrm{T}_x\, M$ (qui est de dimension n).

Théorème 1.24. *La variété lisse réelle sous-jacente à un groupe de Lie G sur $\mathbb{K}$ est parallélisable.*

Démonstration. Soit $n = \dim_{\mathbb{R}}(G)$. Si $n = 0$ c'est évident. Supposons donc $n > 0$. Soit

$$X_1, \dots, X_n \in \mathrm{L}\, G$$

une $\mathbb{R}$-base de $\mathrm{L}\, G$ considéré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On en déduit n champs de vecteurs continus (même lisses) sur G

$$X_1(-), \dots, X_n(-) : G \to \mathrm{T}\, G.$$

Comme $X_i(g) = (l_g)_* X_i$ (pour $i = 1, \dots, n$ et $g \in G$), et comme

$$(l_g)_* : \mathrm{T}_e\, G \to \mathrm{T}_g\, G$$

est un $\mathbb{R}$-isomorphisme, il en résulte que les vecteurs

$$X_1(g), \dots, X_n(g) \in \mathrm{T}_g\, G$$

constituent une $\mathbb{R}$-base de $\mathrm{T}_g\, G$, ce qui permet de conclure. □

Corollaire 1.25. *La sphère S^2 ne porte aucune structure de groupe de Lie.*

Remarque 1.26. Ce résultat découle du fait que toute sphère de dimension paire non-nulle a comme caractéristique d'Euler 2, i.e.

$$\chi_{\text{Euler}}(S^{2n}) = 2 \neq 0.$$

On admet aussi le Théorème du Hérisson qui dit que l'on ne peut pas "coiffer" un hérisson (de forme sphérique).

4. Sous-groupes à 1 paramètre

Soit G un groupe de Lie sur $\mathbb{K}$.

Définition 1.27. Un *sous-groupe à 1-paramètre* de G est un homomorphisme de groupes

$$\lambda : \mathbb{K} \to G$$

qui est lisse ; en particulier

$$\lambda(s+t) = \lambda(s) \cdot \lambda(t), \quad \forall s, t \in \mathbb{K}.$$

Exemple 1.28. Soit $G = \mathbb{K}^n$, si $X \in \mathbb{K}^n = \mathrm{L}\,\mathbb{K}^n$, alors l'application

$$\lambda : \mathbb{K} \to \mathbb{K}^n, \quad t \mapsto tX$$

est un sous-groupe à 1-paramètre de $\mathbb{K}^n$, qui vérifie $\lambda'(0) = X \in \mathrm{L}\,\mathbb{K}^n$; plus généralement, on a

$$\lambda'(t) = (tX, X) \in \{tX\} \times \mathbb{K}^n = \mathrm{T}_{tX}\,\mathbb{K}^n,$$

pour tout $t \in \mathbb{K}$.

Exemple 1.29. Soit $(\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$, alors l'application

$$\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^n, \quad t \mapsto (e^{2\pi i\theta_1 \cdot t}, \ldots, e^{2\pi i\theta_n \cdot t})$$

est un sous-groupe à 1-paramètre de $\mathbb{T}^n$. En utilisant la carte canonique au voisinage de $e = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{T}^n$, on obtient que

$$\lambda'(0) = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n = \mathrm{L}\,\mathbb{T}^n.$$

Exemple 1.30. Si $x \in \mathbb{F}$, alors l'application

$$\lambda : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}), \quad t \mapsto \begin{pmatrix} 1 & & tX \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

est un sous-groupe à 1-paramètre de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$. En utilisant la carte canonique au voisinage de $1_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$, on obtient que

$$\lambda'(0) = \begin{pmatrix} 0 & & X \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F}) = \mathrm{L}\,\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}).$$

Exemple 1.31. Si $(\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$, alors l'application

$$\lambda : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}), \quad t \mapsto \begin{pmatrix} e^{\theta_1 \cdot t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\theta_n \cdot t} \end{pmatrix}$$

est un sous-groupe à 1-paramètre de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$. En utilisant la carte canonique au voisinage de $1_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$, on obtient que

$$\lambda'(0) = \begin{pmatrix} \theta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \theta_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F}) = \mathrm{L}\,\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}).$$

THÉORÈME 1.32. *Soit G un groupe de Lie sur $\mathbb{K}$. Pour tout $X \in \mathrm{L}\,G$, il existe un unique sous-groupe à 1-paramètre*

$$\lambda = \lambda_X : \mathbb{K} \to G, \quad t \mapsto \lambda_X(t)$$

de G tel que $\lambda'(0) = X$. En particulier, il y a des bijections canoniques

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{sous-groupes} \\ \textit{à 1-paramètre} \\ \textit{de } G \end{array} \right\} \longleftrightarrow \mathrm{L}\,G \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \textit{champs de vecteurs lisses} \\ \textit{invariants à gauche sur } G \end{array} \right\}.$$

De plus, si G est analytique, alors λ_X est analytique.

DÉMONSTRATION. Cette démonstration fait appel à beaucoup de résultats sur les systèmes d'équations différentielles, résultats analytique que l'on ne donne pas ici. Ainsi, on ne peut donner la démonstration de ce théorème. □

REMARQUE 1.33. Soit G un groupe de Lie sur $\mathbb{K}$. Le Théorème 1.32 dit en particulier que si $X \in \mathrm{L}\,G = \mathrm{T}_e\,G$, parmi toutes les courbes locales sur G tangentes à X en e, il y en a une et une seule qui est globale et qui est un homomorphisme de groupes de Lie sur $\mathbb{K}$ (et est analytique si G est analytique).

5. L'application exponentielle

NOTATION 1.34. Dans cette section, nous utiliserons la notation ε_0 qui est détaillée ci-après.

Pour l'espace euclidien $\mathbb{K}$, on a le champ de vecteurs lisse (non-nul) canonique donné par

$$\varepsilon : \mathbb{K} \to \mathrm{T}\,\mathbb{K} = \mathbb{K} \times \mathbb{K}, \quad t \mapsto \varepsilon_t := [t, 1] = (t, 1).$$

On a alors le vecteur tangent $\varepsilon_0 = (0, 1) \in \{0\} \times \mathbb{K} = \mathrm{T}_0\,\mathbb{K}$. Nous garderons ces notations dans la suite. Ce champ de vecteurs lisse sur $\mathbb{K}$ est souvent noté

$$\varepsilon = \frac{d}{dt} \quad \text{et} \quad \epsilon_t = \frac{d}{dt}\Big|_t$$

pour $t \in \mathbb{K}$; en particulier,

$$\varepsilon_0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\Big|_0.$$

Soit G un groupes de Lie sur $\mathbb{K}$. Gardons les notations du Théorème 1.32.

DÉFINITION 1.35. L'*application exponentielle* de G est l'application

$$\exp = \exp_G : \mathrm{L}\,G \to G, \quad X \mapsto \exp(X) := \lambda_X(1).$$

THÉORÈME 1.36. *Si $X \in \mathrm{L}\,G$ et $t \in \mathbb{K}$, alors on a l'égalité* $\exp(tX) = \lambda_X(t)$. *En particulier, l'application*

$$\mathbb{K} \to G, \quad t \mapsto \exp(tX)$$

est un homomorphisme lisse (et même analytique si G est analytique) ; c'est l'unique sous-groupe à 1-paramètre de G associé à X, et c'est une courbe globale (penser géodésique) sur G tangente à X en e.

Démonstration. Soit $\mu : \mathbb{K} \to G$ l'application donnée par $s \mapsto \lambda_X(st)$ où $x \in \mathrm{L}\, G$ et $t \in \mathbb{K}$ sont fixés. Alors on a :

$$\mu = \lambda_X \circ m_t : \mathbb{K} \to \mathbb{K} \to G,$$

où $m_t : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ est la multiplication par t dans $\mathbb{K}$. Il s'ensuit que μ est un sous-groupe à 1-paramètre, et en plus on a que $(m_t)_*(\varepsilon_0) = t\varepsilon_0$, où $\varepsilon_0 = (0,1) \in \mathrm{T}_0\, \mathbb{K} = \{0\} \times \mathbb{K} \cong \mathbb{K}$. Ainsi,

$$\mu_*(\varepsilon_0) = (\lambda_X)_* \circ (m_t)_*(\varepsilon_0) = (\lambda_X)_*(t \cdot \varepsilon_0) = t \cdot (\lambda_X)_*(\varepsilon_0) = t \cdot X.$$

Par l'unicité du Théorème 1.32, on sait que μ est l'unique sous-groupe à 1-paramètre de G associé au vecteur tangent $tX \in \mathrm{L}\, G$, autrement dit

$$\mu = \lambda_{tX}.$$

Ainsi, on a :

$$\exp(tX) = \lambda_{tX}(1) = \mu(1) = \lambda_X(1 \cdot t) = \lambda_X(t).$$

Ce qui termine la démonstration. □

Corollaire 1.37. *Si $X \in \mathrm{L}\, G$ et $s, t \in \mathbb{K}$, alors*

$$\exp((s+t) \cdot X) = \exp(sX) \cdot \exp(tX).$$

Attention, les points désignent respectivement la multiplication scalaire dans $\mathrm{L}\, G$ *et celle (interne) de G. En particulier, pour $n \in \mathbb{Z}$, on a*

$$\exp(X)^{-1} = \exp(-X) \quad \text{et} \quad \exp(nX) = \exp(X)^n.$$

Remarque 1.38. Ces résultats découlent du Théorème 1.36 et du fait que λ_X est un homomorphisme de groupes (par définition d'un sous-groupe à 1-paramètre).

Exemple 1.39. Pour le groupe de Lie réel $G = \mathbb{T}^n$, on a

$$\exp : \mathbb{R}^n = \mathrm{L}\, \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n, \quad (\theta_1, \ldots, \theta_n) \mapsto (e^{2\pi i \theta_1}, \ldots, e^{2\pi i \theta_n}).$$

Ainsi, exp est, ici, un épimorphisme (homomorphisme surjectif) de groupes de noyau $\mathbb{Z}^n$.

Proposition 1.40. *L'application*

$$\Lambda = \Lambda_G : \mathrm{L}\, G \times \mathbb{K} \to G, \quad (X,t) \mapsto \exp(tX) = \lambda_X(t)$$

est lisse (et même analytique si G est analytique).

Théorème 1.41. *L'application exponentielle* $\exp : \mathrm{L}\, G \to G$ *est lisse (et même analytique si G est analytique). De plus, la dérivée de* exp *en zéro est l'identité de* $\mathrm{L}\, G$*, c'est-à-dire*

$$\mathrm{T}_0 \exp = \mathrm{id}_{\mathrm{L}\, G} : \mathrm{L}\, G \to \mathrm{L}\, G$$

où l'on a identifié $\mathrm{T}_0\, \mathrm{L}\, G$ *(*$= \{0\} \times \mathrm{L}\, G$*) avec* $\mathrm{L}\, G$.

Démonstration. Soit 1 l'application constante sur $\mathrm{L}\, G$ valant $1 \in \mathbb{K}$. Alors, l'application exponentielle peut être écrite

$$\exp \; : \; \mathrm{L}\, G \xrightarrow{(\mathrm{id},1)} \mathrm{L}\, G \times \mathbb{K} \xrightarrow{\Lambda} G.$$

D'où $\exp = \Lambda \circ (\mathrm{id}, 1)$ qui est une composition d'applications lisse, ce qui implique que exp est lisse.

On considère maintenant la courbe globale sur $\mathrm{L}\,G$ tangente à $X \in \mathrm{L}\,G$ (fixé) en 0 : $\gamma : \mathbb{K} \to \mathrm{L}\,G, \quad t \mapsto tX$. Ainsi,

$$\mathrm{T}_0 \exp(X) = (\exp \circ \gamma)'(0) = (\lambda_X)'(0) = X.$$

La première égalité est une utilisation de la règle de dérivation en chaîne qui ne sera pas détaillée ici et la seconde vient simplement du fait que $\exp(tX) = \lambda_X(t)$, ce qui termine la démonstration. $\square$

COROLLAIRE 1.42. *L'application exponentielle* $\exp : \mathrm{L}\,G \to G$ *est un difféomorphisme local en* 0. *En particulier, il existe un voisinage ouvert* U *de* 0 *dans* $\mathrm{L}\,G$ *et un voisinage ouvert* V *de* e *dans* G *tels que la restriction*

$$\exp|_U : U \xrightarrow{\approx} V$$

est un difféomorphisme (même analytique si G *est analytique).*

REMARQUE 1.43. Gardons les mêmes notations. L'application $\exp|_U : U \xrightarrow{\approx} V$ est une carte (locale) au voisinage de e dans G. En particulier, l'ensemble d'applications

$$\{l_g \circ \exp|_U : U \xrightarrow{\approx} gV\}_{g \in G}$$

est un atlas lisse sur G, modelé sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathrm{L}\,G$.

PROPOSITION 1.44. *Soit* $\mathrm{L}\,G = V \oplus W$ *une décomposition de* $\mathrm{L}\,G$ *comme somme directe de* $\mathbb{K}$*-sous-espaces vectoriels. Alors l'application*

$$\exp_{V,W} : \mathrm{L}\,G = V \oplus W \to G, \quad (x, y) \mapsto \exp(x) \cdot \exp(y)$$

est lisse et est un difféomorphisme local en $(0,0)$.

DÉMONSTRATION. L'application $\exp_{V,W}$ peut s'écrire comme la composition

$$\exp_{V,W} = \mu \circ (\exp|_V \times \exp|_W)$$

donc c'est un application lisse par le Théorème 1.41. Par ce même théorème, on a que

$$(\mathrm{T}_0 \exp_{V,W})|_{\mathrm{T}_0 V} = \mathrm{T}_0(\exp_{V,W}|_V) = \mathrm{T}_0(\exp|_V) = (\mathrm{T}_0 \exp)|_{\mathrm{T}_0 V} = \mathrm{id}_V,$$

où l'on identifie $\mathrm{T}_0 V$ avec V dans la dernière égalité. On procède de la même manière pour avoir que $\mathrm{T}_0 \exp_{V,W}|_{\mathrm{T}_0 W} = \mathrm{id}_W$. Ainsi, on a finalement que

$$\mathrm{T}_0 \exp_{V,W} = \mathrm{id}_{V \oplus W} = \mathrm{id}_{\mathrm{L}\,G}\,.$$

$\square$

COROLLAIRE 1.45. *Supposons que* G *soit de dimension* $n > 0$ *sur* $\mathbb{K}$, *et soit* $(X_1, \ldots, X_n)$ *une* $\mathbb{K}$*-base de* $\mathrm{L}\,G$. *Alors, l'application*

$$\mathbb{K}^n \to G, \quad (t_1, \ldots, t_n) \mapsto \exp(t_1 X_1) \cdots \exp(t_n X_n)$$

est lisse et est un difféomorphisme local en $(0, \ldots, 0)$.

DÉMONSTRATION. En imitant la preuve de la proposition précédente, on obtient que l'application

$$\mathrm{L}\,G = \mathbb{K} \cdot X_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{K} \cdot X_n \to G, \quad (t_1 X_1, \ldots, t_n X_n) \mapsto \exp(t_1 X_1) \cdots \exp(t_n X_n)$$

est lisse et est un difféomorphisme local en $(0, \ldots, 0)$. $\square$

DÉFINITION 1.46. L'exponentielle matricielle (de taille n) sur $\mathbb{F} = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ est l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Exp} = e^{(-)} : \mathrm{M}_n(\mathbb{F}) & \to & \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}) \\ X & \mapsto & \mathrm{Exp}(X) := e^X = 1_n + X + \frac{1}{2!}X^2 + \frac{1}{3!}X^3 + \dots \end{array}$$

On note $\mathrm{Exp}_{\mathbb{F}} = \mathrm{Exp}$.

REMARQUE 1.47. Soit $\|\cdot\|$ une norme sous-multiplicative sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, c'est-à-dire telle que

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

Alors la série e^A converge normalement et est bornée par

$$\|e^A\| \leq e^{\|A\|}.$$

On vérifie que si $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ sont des matrices qui commutent, alors

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B.$$

Par conséquent, on a que e^A est invérsible, plus précisément,

$$(e^A)^{-1} = e^{-A},$$

et en particulier, l'image de Exp est bien contenue dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$. Il s'ensuit aussi que

$$e^{(s+t)A} = e^{sA} \cdot e^{tA},$$

pour tous $s, t \in Z(\mathbb{F})$ et toute matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, où $Z(\mathbb{F})$ désigne le centre de l'algèbre $\mathbb{F}$, à savoir

$$Z(\mathbb{R}) = \mathbb{R}, \quad Z(\mathbb{C}) = \mathbb{C}, \quad Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}.$$

REMARQUE 1.48. Le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \mathrm{M}_n(\mathbb{H}) \arrow[r, "incl"] \arrow[d, "\mathrm{Exp}_{\mathbb{H}}"'] & \mathrm{M}_{2n}(\mathbb{C}) \arrow[d, "\mathrm{Exp}_{\mathbb{C}}"] \\ \mathrm{GL}_n(\mathbb{H}) \arrow[r, "incl"] & \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

commute.

THÉORÈME 1.49. *Pour le groupe de Lie analytique* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *sur* $\mathbb{K}$*, l'unique sous-groupe à 1-paramètre de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *associé à* $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ *est donné par*

$$\lambda_X : \mathbb{K} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \quad t \mapsto e^{tX}.$$

En particulier, on a

$$\exp_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})} = \mathrm{Exp} = e^{(-)} : \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \quad A \mapsto e^A.$$

DÉMONSTRATION. Soit $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Considérons

$$\mu : \mathbb{K} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \quad t \mapsto e^{tX}.$$

μ est un sous-groupe à 1-paramètre de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, donc

$$\mu'(0) = \frac{d}{dt}_{|t=0} e^{tX} = X$$

de sorte que

$$\mu = \lambda_X.$$

□

THÉORÈME 1.50. *L'application exponentielle est naturelle, en d'autres termes, si $\varphi : G \to H$ est un homomorphisme de groupes de Lie sur $\mathbb{K}$, alors le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{L}\,G \arrow[r, "\mathrm{L}\,\varphi"] \arrow[d, "\exp_G"'] & \mathrm{L}\,H \arrow[d, "\exp_H"] \\ G \arrow[r, "\varphi"] & H \end{tikzcd}$$

commute, i.e. pour tout $X \in \mathrm{L}\,G$, on a

$$\varphi(\exp_G(X)) = \exp_H(\mathrm{L}\,\varphi(X)).$$

DÉMONSTRATION. Pour $X \in \mathrm{L}\,G$, soit λ_X le sous-groupe à 1-paramètre de G correspondant. Considérons l'application

$$\mu : \varphi \circ \lambda_X : \mathbb{K} \to H, \quad t \mapsto \varphi(\lambda_X(t)).$$

Évidemment, c'est un sous-groupe à 1-paramètre de H, et on a

$$\mu_*(\varepsilon_0) = \mathrm{L}\,\varphi \circ (\lambda_X)_*(\varepsilon_0) = \mathrm{L}\,\varphi(X).$$

Par l'unicité du Théorème **??**, on a que $\mu = \lambda_{\mathrm{L}\,\varphi(X)}$. On en déduit que $\exp_H \circ \mathrm{L}\,\varphi(X)$ est successivement égal à

$$\exp_H(\mathrm{L}\,\varphi(X)) = \lambda_{\mathrm{L}\,\varphi(X)}(1) = \mu(1) = \varphi(\lambda_X(1)) = \varphi \circ \exp_G(X),$$

ce qui nous donne la commutativité du diagramme. □

6. Sous-variétés et sous-groupes de Lie

DÉFINITION 1.51. Soit M une variété lisse sur $\mathbb{K}$, de dimension m. Un sous-ensemble (disons non-vide) N de M est appelé *sous-variété lisse de dimension n sur $\mathbb{K}$* (resp. *sous-variété analytique de dimension n sur $\mathbb{K}$*) de M, si $0 \leq n \leq m$ et si pour tout point x de N, il existe :

(1) un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension m ;
(2) un $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel F de E, de dimension n ;
(3) un voisinage ouvert U de 0 dans E ;
(4) un voisinage ouvert V de x dans M ;
(5) un difféomorphisme (resp. analytique) $\varphi : U \to V$;

avec (E, F, U, V, φ) vérifiant

(a): $\varphi(0) = x$;
(b): $\varphi(U \cap F) = V \cap N$.

On dit aussi que N est de *codimension $m - n$* dans M. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on dit aussi *sous-variété réelle* ou simplement *sous-variété*, et si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on dit aussi *sous-variété complexe* ou *sous-variété holomorphe*.

REMARQUE 1.52. En gardant les mêmes notations que dans la définition précédente, soit N une sous-variété de dimension n de M.

(1) N hérite d'une structure de variété lisse sur $\mathbb{K}$ de dimension n.
(2) Si $x \in N$, alors $V_x \cap N$ est fermé dans V_x. On dit alors que N est *localement fermé* dans M.

(3) L'inclusion $i : N \hookrightarrow M$ est lisse.
(4) Si P est une variété lisse sur $\mathbb{K}$, et si $f : P \to N$ est une application, alors f est lisse si et seulement si la composition $i \circ f : P \to M$ est lisse.
(5) Si Q est une sous-variété d'une variété lisse P, et si $f : P \to M$ est une application lisse telle que $f(Q) \subseteq N$, alors la restriction
$$f|_Q : Q \to N$$
est également lisse.
(6) Pour $i = 1, 2$, soit N_i une sous-variété d'une variété M_i sur $\mathbb{K}$. Alors l'ensemble produit $N_1 \times N_2$ est une sous-variété de la variété produit $M_1 \times M_2$, et la structure de sous-variété sur $N_1 \times N_2$ coïncide avec la structure de variété produit.

Exemple 1.53. Si M est une variété lisse sur $\mathbb{K}$, alors tout sous-espace discret non-vide D de M est une sous-variété de dimension 0.

Exemple 1.54. Un ouvert non-vide d'une variété lisse sur $\mathbb{K}$ en est une sous-variété sur $\mathbb{K}$, de codimension 0.

Exemple 1.55. Le sous-ensemble $S^1 \times \{1\}$ du tore $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ en est une sous-variété analytique réelle de dimension 1, qui s'identifie au cercle S^1.

Exemple 1.56. La sphère S^{n-1} est une sous-variété analytique réelle de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 1.57. La sphère S^{n-1}, vue comme équateur dans la sphère S^n, en est une sous-variété analytique réelle.

Définition 1.58. Soit G un groupe de Lie sur $\mathbb{K}$. Un *sous-groupe de Lie sur* $\mathbb{K}$ de G est un sous-groupe H de G qui est en même temps une sous-variété de G sur $\mathbb{K}$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on dit aussi *sous-groupe de Lie réel* ou simplement *sous-groupe de Lie*; si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on dit aussi *sous-groupe de Lie complexe*. Si G est analytique et H est une sous-variété analytique, on dit que c'est un *sous-groupe de Lie analytique sur* $\mathbb{K}$ de G.

Exemple 1.59. Si H est un sous-groupe discret d'un groupe de Lie G sur $\mathbb{K}$,alors H est un sous-groupe de Lie de G.

Exemple 1.60. Pour $m \geq n$, le groupe de Lie analytique $\mathbb{K}^n$ sur $\mathbb{K}$ est un sous-groupe de Lie analytique sur $\mathbb{K}$ de $\mathbb{K}^m = \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^{m-n}$.

Exemple 1.61. Pour $m \geq n$, le groupe de Lie analytique réel $\mathbb{T}^n$ sur $\mathbb{K}$ est un sous-groupe de Lie analytique de $\mathbb{T}^m = \mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^{m-n}$.

Exemple 1.62.
– Le groupe de Lie analytique réel S^0 est un sous-groupe de Lie analytique de $\mathbb{R}^\times$ et de S^1.
– Le groupe de Lie analytique réel S^1 est un sous-groupe de Lie analytique de $\mathbb{C}^\times$ et de S^3.
– Le groupe de Lie analytique réel S^3 est un sous-groupe de Lie analytique de $\mathbb{H}^\times$.

Proposition 1.63. *Soit G un groupe de Lie sur $\mathbb{K}$. Alors, un sous-groupe de Lie de G est fermé dans G.*

7. Sous-groupes fermés et Théorème d'Élie Cartan

Le théorème suivant est la réciproque, dans le cas réel, de la Proposition 1.63. Il est donné sans démonstration car celle-ci est très longue et demanderait trop de temps.

THÉORÈME 1.64 (Théorème d'Élie Cartan). *Soit G un groupe de Lie **réel**. Si H est un sous-groupe fermé de G, alors H possède une structure canonique de groupe de Lie réel. De plus, pour cette structure, l'espace tangent $\mathrm{T}_e H = \mathrm{L}\, H$ s'identifie de façon canonique avec le sous-espace vectoriel réel*

$$W = W_H := \{X \in \mathrm{L}\, G \mid \exists \epsilon_X > 0 \ tq. \ \exp_G(tX) \in H, \ \forall t \in] - \epsilon_X, \epsilon_X[\ \}$$

de $\mathrm{L}\, G$; l'exponentielle $\exp_G$ applique W dans H ; la restriction

$$\exp_G|_W : W \to H$$

est un difféomorphisme local en 0 ; et $\exp_H$ s'identifie à $\exp_G|_W$. En particulier, on a $dim(H) = dim(W)$, et, si $X \in W$, alors $\exp_G(tX) \in H$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Finalement, si G est analytique, alors H l'est également.

REMARQUE 1.65. Du théorème, il suit que

$$\begin{aligned} \mathrm{L}\, H &= \{X \in \mathrm{L}\, G \mid \exists \epsilon_X > 0 \text{ avec } \exp_G(tX) \in H, \ \forall t \in] - \epsilon_X, \epsilon_X[\ \} \\ &= \{X \in \mathrm{L}\, G \mid \exp_G(tX) \in H, \ \forall t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

EXEMPLE 1.66. $\mathbb{C}^\times$ est un groupe de Lie complexe, et $S^1 \subseteq \mathbb{C}^\times$ est un sous-groupe fermé **mais** $\dim_{\mathbb{R}}(S^1) = 1$. Cela montre que le groupe de Lie ambient est complexe, alors un sous-groupe fermé n'est pas nécessairement complexe.

COROLLAIRE 1.67. *Soient H_1 et H_2 deux sous-groupes de Lie fermés d'un groupe de Lie G sur $\mathbb{K}$. Supposons que H_1 et H_2 soient connexes. Alors, on a l'égalité $H_1 = H_2$ si et seulement si $\mathrm{L}\, H_1 = \mathrm{L}\, H_2$ (vus comme $\mathbb{K}$-sous-espaces vectoriels de $\mathrm{L}\, G$).*

8. Les groupes classiques

Les groupes classiques sont certains sous-groupes fermés (bien particulier) de $\mathrm{GL}_N(\mathbb{F})$ ($\mathbb{F} = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$) pour un $N \in \mathbb{N}$. Ainsi, on peut utiliser le Théorème 1.64 pour obtenir de nouveaux exemples de groupes de Lie réels.

EXEMPLE 1.68. Le *groupe linéaire général positif sur* $\mathbb{R}$ est le sous-groupe fermé

$$\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) > 0\}$$

de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Pour ce groupe de Lie réel, on a

$$\mathrm{L}\, \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) = \mathrm{L}\, \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{M}_n(\mathbb{R}),$$

et sa dimension est

$$\dim(\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})) = n^2.$$

EXEMPLE 1.69. Le *groupe linéaire spécial sur* $\mathbb{R}$ est le sous-groupe fermé

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$$

de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Pour ce groupe de Lie réel, on a

$$\mathrm{L}\, \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}(A) = 0\},$$

i.e. est constitué des matrices réelles de trace nulle, et sa dimension est

$$\dim(\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})) = n^2 - 1.$$

Rappelons que

$$\det(e^B) = e^{\mathrm{Tr}(B)}.$$

En effet, pour $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$e^{tA} \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}),\ \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \det(e^{tA}) = 1,\ \forall t \Leftrightarrow \mathrm{Tr}(tA) = 0,\ \forall t \Leftrightarrow \mathrm{Tr}(A) = 0.$$

Il est clair que la dimension de $\mathrm{L}\,\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est $n^2 - 1$.

EXEMPLE 1.70. Le *groupe linéaire spécial sur* $\mathbb{C}$ est le sous-groupe fermé

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) := \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid \det(A) = 1\}$$

du groupe de Lie réel $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Pour ce groupe de Lie réel, on a

$$\mathrm{L}\,\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \mid \mathrm{Tr}(A) = 0\},$$

i.e. est constitué des matrices complexes de trace nulle, et sa dimension est

$$\dim(\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})) = 2n^2 - 2.$$

EXEMPLE 1.71. Le *groupe linéaire spécial sur* $\mathbb{H}$ est le sous-groupe fermé

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{H}) := \{Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{H}) \mid \det_D(Q) = 1\},$$

(où $\det_D$ désigne le *déterminant de Dieudonné*), du groupe de Lie réel $\mathrm{GL}_n(\mathbb{H})$, que l'on identifie avec le sous-groupe fermé

$$\mathrm{SL}^{\mathbb{H}}_{2n}(\mathbb{C}) := \mathrm{GL}^{\mathbb{H}}_{2n}(\mathbb{C}) \cap \mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{C})$$

de $\mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{C})$. Pour ce groupe de Lie réel, on a

$$\mathrm{L}\,\mathrm{SL}_n(\mathbb{H}) = \{Q \in \mathrm{M}_n(\mathbb{H}) \mid \mathrm{Re}(\mathrm{Tr}(Q)) = 0\},$$

et sa dimension est

$$\dim(\mathrm{SL}_n(\mathbb{H})) = 4n^2 - 1.$$

EXEMPLE 1.72. Le *groupe orthogonal* est le sous-groupe fermé

$$\mathrm{O}(n) := \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA = A^{-1}\}$$

de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Pour ce groupe de Lie réel, on a

$$\mathrm{L}\,\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA = -A\},$$

i.e. est constitué des matrices réelles anti-symétriques, et sa dimension est

$$\dim(\mathrm{O}(n)) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

En effet, pour $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$${}^t(e^{sA}) = (e^{sA})^{-1},\ \forall s \in \mathbb{R} \Leftrightarrow e^{s\ {}^tA} = e^{-sA},\ \forall s \in \mathbb{R} \Leftrightarrow {}^tA = -A.$$

EXEMPLE 1.73. Le *groupe orthogonal spécial* est le sous-groupe fermé

$$\mathrm{SO}(n) := \mathrm{O}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA = A^{-1} \quad et \quad \det(A) = 1\}$$

de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Pour ce groupe de Lie réel, on a

$$\mathrm{L}\,\mathrm{SO}(n) = \mathrm{L}\,\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA = -A\},$$

i.e. est aussi constitué des matrices réelles anti-symétriques, et sa dimension est

$$\dim(\mathrm{O}(n)) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

EXEMPLE 1.74. Le *groupe unitaire* est le sous-groupe fermé

$$\mathrm{U}(n) := \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid {}^t\overline{A} = A^{-1}\}$$

de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Pour ce groupe de Lie réel, on a

$$\mathrm{L}\,\mathrm{U}(n) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \mid {}^t\overline{A} = -A\},$$

i.e. est constitué des matrices complexes anti-hermitiennes, et sa dimension est

$$\dim(\mathrm{U}(n)) = n^2.$$

En effet, pour $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, on a

$${}^t\overline{(e^{sA})} = (e^{sA})^{-1},\ \forall s \in \mathbb{R} \Leftrightarrow e^{s\ {}^t\overline{A}} = e^{-sA},\ \forall s \in \mathbb{R} \Leftrightarrow {}^t\overline{A} = -A.$$

EXEMPLE 1.75. Le *groupe unitaire spécial* est le sous-groupe fermé

$$\mathrm{SU}(n) := \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid {}^t\overline{A} = A^{-1} \quad et \quad \det(A) = 1\}$$

de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Pour ce groupe de Lie réel, on a

$$\mathrm{L}\,\mathrm{SU}(n) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \mid {}^t\overline{A} = -A \quad et \quad \mathrm{Tr}(A) = 0\},$$

i.e. est constitué des matrices complexes anti-hermitiennes de trace nulle, et sa dimension est

$$\dim(\mathrm{SU}(n)) = n^2 - 1.$$

EXEMPLE 1.76. Le *groupe symplectique* est le sous-groupe fermé

$$\mathrm{Sp}(n) := \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{H}) \mid {}^t\overline{A} = A^{-1}\}$$

de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{H})$. Sa dimension est

$$\dim(\mathrm{Sp}(n)) = 2n^2 + n.$$

9. Les groupes de Lie abéliens connexes

THÉORÈME 1.77. *Pour un groupe de Lie réel connexe G, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i): *G est commutatif ;*

(ii): $\exp : \mathrm{L}\,G \to G$ *est un homomorphisme de groupes ;*

(iii): *$G \cong \mathrm{L}\,G/\Gamma$ comme groupe de Lie, où Γ est un sous-groupe discret de $\mathrm{L}\,G$;*

(iv): *$G \cong \mathbb{T}^l \times \mathbb{R}^m$ comme groupe de Lie, pour des entiers $l, m \in \mathbb{N}$ (uniques). De plus, G est compact si $m = 0$.*

REMARQUE 1.78. Si Γest un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^n$, alors $\Gamma \cong \mathbb{Z}^l$, pour un $l \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Encore mieux, il existe une $\mathbb{R}$-base de $\mathbb{R}^n$ dont les l premiers éléments constituent une $\mathbb{Z}$-base de Γ. En particulier,

$$\mathbb{R}^n/\Gamma \cong (\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{n-l})/\mathbb{Z}^l \cong \mathbb{T}^l \times \mathbb{R}^m,$$

où $m := n - l$.

DÉMONSTRATION.

(i)⇒(ii): Fixons $X, Y \in \mathrm{L}\, G$ et considérons

$$\theta : \mathbb{R} \to G, \quad t \mapsto \exp(tX) \cdot \exp(tY)$$

qui est lisse. Comme G est commutatif, μ est un homomorphisme de groupes, ce qui implique que θ l'est aussi. Donc θ est un sous-groupe à 1-paramètre de G :

$$\theta \ : \ \mathbb{R} \xrightarrow{\Delta} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\lambda_X \times \lambda_Y} G \times G \xrightarrow{\mu} G$$

où $\Delta : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est donnée par $\Delta(t) = (t, t)$, on l'appelle aussi l'*application diagonale*.
Calculons $\theta'(0)$:

$$\begin{aligned} \theta'(0) &= \mathrm{T}_{(e,e)}\, \mu \circ \mathrm{T}_{(0,0)}(\lambda_X \times \lambda_Y) \circ \mathrm{T}_0\, \Delta(\varepsilon_0) \\ &= \text{“addition”} \circ (\mathrm{T}_0\, \lambda_X \times \mathrm{T}_0\, \lambda_Y) \circ \Delta \\ &= X + Y. \end{aligned}$$

Ainsi, on a que $\theta = \lambda_{X+Y}$;

$$\exp(X + Y) = \lambda_{X+Y}(1) = \theta(1) = \exp(X) \cdot \exp(Y).$$

(ii)⇒(i): On sait que exp est un difféomorphisme local en 0, ainsi $\exp(\mathrm{L}\, G)$ est élément d'un voisinage ouvert de e dans G. Mais exp est un homomorphisme de groupes, donc $\exp(\mathrm{L}\, G)$ est un sous-groupe de G. En combinant ces deux observations avec le fait que G est connexe, on a que

$$\exp(\mathrm{L}\, G) = \langle \exp(\mathrm{L}\, G) \rangle = G.$$

Ainsi, G est un quotient de $\mathrm{L}\, G$, donc G, tout comme $\mathrm{L}\, G$, est abélien.

(ii)⇒(iii): L'énoncé sous-entend que exp est surjective avec $\ker(\exp) = \Gamma$ discret. Comme avant, l'application exp est surjective. De plus, exp est un difféomorphisme local en 0, donc il existe un voisinage ouvert U de 0 dans $\mathrm{L}\, G$ tel que la restriction $\exp|_U$ est injective. Il suit que

$$\ker(\exp) \cap U = \{0\}$$

donc 0 est un point ouvert dans $\ker(\exp)$. Par un argument de translation, Γ est discret dans $\mathrm{L}\, G$.

(iii)⇔(iv): C'est un conséquence de la Remarque 1.78.

(iv)⇒(i): C'est clair !

□

Corollaire 1.79. *Un groupe de Lie réel abélien compact et connexe est soit trivial, soit un tore.*

Démonstration. Cela découle directement du Théorème 1.77. □

Nous reformuler le Théorème 1.77 pour les groupes de Lie réels compacts connexes, pour cela, nous donnons d'abord la définition de *réseau*.

Définition 1.80. Un *réseau* dans un espace euclidien E sur $\mathbb{K}$ de dimension n, i.e. un $\mathbb{K}$-espace vectoriel isomorphe à $\mathbb{K}^n$, est un sous-groupe discret de rang maximal ; c'est, de manière équivalente, un sous-groupe discret Λ tel que E/λ est de volume fini, ou encore, tel que E/Λ est compact.

Corollaire 1.81. *Pour un groupe de Lie réel compact connexe G, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i): *G est commutatif ;*

(ii): $\exp : \mathrm{L}\,G \to G$ *est un homomorphisme de groupes ;*

(iii): *$G \cong \mathrm{L}\,G/\Lambda$ comme groupe de Lie, où Λ est un réseau dans $\mathrm{L}\,G$;*

(iv): *$G \cong \mathbb{T}^n$ comme groupe de Lie, pour un entier $n \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. De nouveau, cela découle du Théorème 1.77. □

Corollaire 1.82. *Si G est un groupe de Lie complexe, connexe et abélien, alors, pour $m, l \in \mathbb{N}$,*

$$G \cong \mathbb{T}^l \times \mathbb{R}^m$$

comme groupe de Lie réel.

Démonstration. Sans surprise, cela découle encore du Théorème 1.77. □

CHAPITRE 2

Algèbres de Lie et lien avec les groupes de Lie

1. Les algèbres de Lie

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif de caractéristique différente de 2.

DÉFINITION 2.1. Une *algèbre de Lie* sur $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel g muni d'une application $\mathbb{K}$-bilinéaire, appelée *crochet de Lie*

$$[\ ,\ ] = [\ ,\ ]_g : g \times g \to g, \quad (X,Y) \mapsto [X,Y]$$

telle que :
- antisymétrie : $[X,Y] = -[Y,X]$, pour tous $X, Y \in g$
- identité de Jacobi :

$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$$

  pour tous $X, Y, Z \in g$.

DÉFINITION 2.2. Un *homomorphisme de* $\mathbb{K}$*-algèbres de Lie* est une application $\mathbb{K}$-linéaire $\varphi : g \to h$ telle que

$$\varphi([X,Y]_g) = [\varphi(X), \varphi(Y)]_h$$

pour tous $X, Y \in g$.

NOTATION 2.3. Si P et Q sont des parties d'une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie g, on pose

$$[P,Q] = \mathrm{lin}_{\mathbb{K}}\{[p,q] \mid p \in P, q \in Q\}.$$

NOTATION 2.4. Si $X, Y \in g$, on dit que X et Y *commutent* si $[X,Y] = 0$.

NOTATION 2.5. On dit que g est *abélienne* si $[X,Y] = 0$ pour tous $X, Y \in g$, i.e. si $[g,g] = 0$.

DÉFINITION 2.6. Une $\mathbb{K}$*-sous-algèbre de Lie* h de g est un $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel de g tel que $[h,h] \subseteq h$.

DÉFINITION 2.7. Un *idéal de Lie* de g est un $\mathbb{K}$-sous-espace α de g tel que

$$[g,\alpha] \subseteq \alpha.$$

NOTATION 2.8. Si α est un idéal de Lie de g, alors le quotient de g par α est la $\mathbb{K}$-algèbre de Lie donnée par le $\mathbb{K}$-espace vectoriel g/α muni du crochet de Lie

$$[X+\alpha, Y+\alpha]_{g/\alpha} = [X,Y]_g + \alpha,$$

où $X, Y \in g$.

DÉFINITION 2.9. Le *centre* de g est le sous-ensemble

$$Z(g) = \{X \in g \mid [X, Y] = 0, \forall Y \in g\};$$

c'est un idéal de Lie de g.

DÉFINITION 2.10. *L'idéal des commutateurs* de g est le sous-ensemble $[g, g]$ de g ; c'est un idéal de Lie de g.

NOTATION 2.11. Si $\phi : g \to h$ est un homomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres de Lie, on pose

$$\operatorname{im}(\phi) = \{\phi(X) \mid X \in g\} = \phi(g)$$
$$\ker(\phi) = \{X \in g \mid \phi(X) = 0\} = \phi^{-1}(\{0\}).$$

$\operatorname{im}(\phi)$ est une sous-algèbre de Lie de h et $\ker(\phi)$ est un idéal de Lie de g.

DÉFINITION 2.12. Si $\{g_i\}_{i\in I}$ est une collection de $\mathbb{K}$-algèbres de Lie, la *somme directe*

$$\bigoplus_{i\in I} g_i$$

est la $\mathbb{K}$-algèbre de Lie donnée par le $\mathbb{K}$-espace vectoriel somme directe, muni du crochet de Lie

$$[(X_i)_{i\in I}, (Y_i)_{i\in I}]_{\bigoplus_{i\in I} g_i} = ([X_i, Y_i]_{g_i})_{i\in I}.$$

REMARQUE 2.13. Si $X \in g$, alors $[X, X] = 0$.
En effet, puisque le crochet de Lie est anti-symétrique, on a que

$$[X, Y] + [Y, X] = 0, \quad \forall X, Y \in g.$$

Si on choisit $X = Y$, cela devient $2[X, X] = 0$, mais comme la caractéristique du corps $\mathbb{K}$ est différente de 2, on a finalement que

$$[X, X] = 0$$

pour tout $X \in g$.

REMARQUE 2.14. Le fait que $[X, X] = 0$ pour tout $X \in g$ implique que $[X, Y] = -[Y, X]$ pour $X, Y \in g$ même si la caractéristique de $\mathbb{K}$ est 2.

EXEMPLE 2.15. Si V est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on peut le considérer comme $\mathbb{K}$-algèbre de Lie pour le crochet nul.

EXEMPLE 2.16. Si A est une $\mathbb{K}$-algèbre centrale associative (i.e. un $\mathbb{K}$-bimodule). Alors on pose

$$[\ ,\ ]_{assoc} : A \times A \to A, \quad (X, Y) \mapsto [X, Y] = XY - YX.$$

Ainsi, $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie dont l'espace vectoriel sous-jacent est $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et dont le crochet de Lie est $[\ ,\ ]_{assoc}$. On note

$$\mathrm{gl}_n(\mathbb{K}) = (\mathrm{M}_n(\mathbb{K}), [\ ,\ ]_{assoc}).$$

EXEMPLE 2.17. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors $\mathrm{gl}_n(E) = (\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E), [\ ,\ ]_{assoc})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie, i.e.

$$[\varphi, \psi] = \varphi \circ \psi - \psi \circ \varphi.$$

De façon analogue, si E est un $\mathbb{H}$-espace vectoriel (à gauche ou à droite), on définit $\mathrm{gl}_{\mathbb{H}}(E)$ comme $\mathbb{R}$-algèbre de Lie.

Exemple 2.18.

$$\mathrm{sl}_n(\mathbb{K}) = \{X \in \mathrm{gl}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{Tr}(X) = 0\}$$
$$\mathrm{so}_n(\mathbb{K}) = \{X \in \mathrm{gl}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{Tr}(X) = 0 \text{ et } {}^tX = -X\}$$

Remarque 2.19.

$$[\mathrm{gl}_n(\mathbb{K}), \mathrm{gl}_n(\mathbb{K})] \subseteq \mathrm{sl}_n(\mathbb{K})$$

En effet, $tr([X, Y]) = tr(XY - YX) = tr(XY) - tr(YX) = 0$. En particulier, $\mathrm{sl}_n(\mathbb{K})$ est un idéal de Lie de $\mathrm{gl}_n(\mathbb{K})$.

Exemple 2.20. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors

$$\mathrm{u}(n) = \mathrm{L}\,\mathrm{U}(n), \quad \mathrm{su}(n) = \mathrm{L}\,\mathrm{SU}(n).$$

Exemple 2.21.

$$Z(\bigoplus_{i\in I} g_i) = \bigoplus_{i\in I} Z(g_i)$$
$$[\bigoplus_{i\in I} g_i, \bigoplus_{i\in I} g_i] = \bigoplus_{i\in I} [g_i, g_i].$$

Exemple 2.22. Si α et β sont des idéaux de Lie de g, alors $\alpha + \beta = \mathrm{lin}_{\mathbb{K}}(\alpha \cup \beta)$, $\alpha \cap \beta$ et $[\alpha, \beta]$ le sont également.

Exemple 2.23. Si $\phi : g \to h$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie surjectif et si α est un idéal de Lie de g, l'image $\phi(\alpha)$ est un idéal de Lie de h.

Scholie 2.24 (Théorème d'Ado (1935 et 1947)). *Si $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique nulle, alors toute $\mathbb{K}$-algèbre de Lie de dimension finie est matricielle, i.e. est isomorphe à une sous-algèbre de Lie de $gl_n(\mathbb{K})$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$.*

2. L'algèbre de Lie d'un groupe de Lie

Le but de cette partie (et de ce projet finalement) est de montrer que $\mathrm{L}\,G$ possède une structure de $\mathbb{K}$-algèbre de Lie de façon canonique.

Remarque 2.25. On rappel que la *représentation adjointe* d'un groupe de Lie G sur $\mathbb{K}$ est un homomorphisme de groupes de Lie sur $\mathbb{K}$

$$\mathrm{Ad} = \mathrm{Ad}_G : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(\mathrm{L}\,G), \quad g \mapsto \mathrm{Ad}(g) := \mathrm{L}\,c_g$$

avec c_g la conjugaison par g. De plus, on a l'égalité suivante

$$\mathrm{L}\,\mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(\mathrm{L}\,G) = \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathrm{L}\,G).$$

Cette remarque nous permet de définir...

Définition 2.26. Soit G un groupe de Lie sur $\mathbb{K}$, et soit $\mathrm{L}\,G = \mathrm{T}_e\,G$ son espace tangent vu comme $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On considère l'application

$$\mathrm{ad} = \mathrm{ad}_{\mathrm{L}\,g} := \mathrm{L}\,\mathrm{Ad} : \mathrm{L}\,G \to \mathrm{L}\,\mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(\mathrm{L}\,G) = \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathrm{L}\,G), \quad X \mapsto \mathrm{ad}(X)$$

obtenue en différentiant la représentation adjointe Ad en $e \in G$.

On définit alors une structure canonique de $\mathbb{K}$-algèbre sur $\mathrm{L}\,G$ en le munissant du proguit $\mathbb{K}$-bilinéaire, appelé *crochet*, donné par

$$[X, Y] := \mathrm{ad}(X) \cdot Y,$$

pour $X, Y \in \mathrm{L}\,G$.

EXEMPLE 2.27. Soit G un groupe de Lie commutatif sur $\mathbb{K}$. Alors, pour tout $g \in G$ la conjugaison c_g est l'identité de G, ce qui implique que $\mathrm{Ad}(g) = \mathrm{L}\, c_g = \mathrm{L}\, \mathrm{id}_G = \mathrm{id}_{\mathrm{L}\, G}$. Ainsi, la représentation adjointe de G est l'homomorphisme trivial, de sorte que

$$\mathrm{ad} = 0 : \mathrm{L}\, G \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathrm{L}\, G).$$

Finalement, on voit que le crochet de $\mathrm{L}\, G$ est nul, i.e.

$$[X, Y] = 0,$$

pour tous $X, Y \in \mathrm{L}\, G$.

Le lemme suivant est nécessaire à la démonstration du Théorème 2.29, il sera donné sans démonstration car il fait appelle à de l'analyse que nous n'avons pas vu.

LEMME 2.28. *Pour $X, Y \in \mathrm{L}\, G$, on a*

$$\mathrm{ad}(X) \quad = \quad \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \; \mathrm{Ad}(\exp(tX))$$

$$[X, Y] = (\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \; \mathrm{Ad}(\exp(tX)) \cdot Y)$$

THÉORÈME 2.29. *Pour le groupe de Lie de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ sur $Z(\mathbb{F})$ avec $\mathbb{F} = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$, on a*

$$[X, Y] = XY - YX,$$

pour tous $X, Y \in \mathrm{L}\, \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}) = \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$.

DÉMONSTRATION. Le Théorème 1.49 nous dit que l'exponentielle pour $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ est donnée par l'exponentielle matricielle, et on considère comme connu le fait que la représentation adjointe, dans ce cas, est donnée par la conjugaison de matrices.

Ainsi, à partir de la deuxième égalité du lemme précédent, on a

$$[X, Y] = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \; (\mathrm{Ad}(\exp(tX)) \cdot Y) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \; (e^{tX} \cdot Y \cdot e^{-tX}),$$

d'où, par calcul

$$[X, Y] = (X \cdot e^{tX} \cdot Y \cdot e^{-tX})|_{t=0} + (e^{tX} \cdot Y \cdot (-X) \cdot e^{-tX})|_{t=0} = XY - YX,$$

ce qui termine la démonstration. □

PROPOSITION 2.30. *Si $\varphi : G \to H$ est un homomorphisme de groupes de Lie sur $\mathbb{K}$, alors $\mathrm{L}\, \varphi : \mathrm{L}\, G \to \mathrm{L}\, H$ est un homomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres, i.e.*

$$\mathrm{L}\, \varphi[X, Y]_{\mathrm{L}\, G} = [\mathrm{L}\, \varphi(X), \mathrm{L}\, \varphi(Y)]_{\mathrm{L}\, H},$$

pour tous $X, Y \in \mathrm{L}\, G$.

DÉMONSTRATION. On ne donne pas la preuve ici car elle n'apporte rien d'intéressant pour la suite, tout en étant assez compliquée, c'est pourquoi nous nous l'épargnons. □

REMARQUE 2.31. Pour conclure ce travail, nous allons maintenant énoncé quelques résultats importants, mais qui demandent beaucoup d'analyse pour être démontrés. En effet, en montrant que $[\ ,\ ]_{\mathrm{L}\, G}$ est un crochet de Lie, on doit travailler avec des applications exponentielles, les dérivés et cela sort du cadre que nous nous sommes fixés.

THÉORÈME 2.32. *Pour un groupe de Lie G sur $\mathbb{K}$, le crochet $[\ ,\ ]_{\mathrm{L}\, G}$ sur $\mathrm{L}\, G$ fait de ce dernier une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie.*

COROLLAIRE 2.33. *Soit $\varphi : G \to H$ un homomorphisme de groupes de Lie sur $\mathbb{K}$. Alors l'application tangentielle $\mathrm{L}\,\varphi : \mathrm{L}\,G \to \mathrm{L}\,H$ est un homomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres de Lie. En particulier, si φ est un isomorphisme de groupes de Lie sur $\mathbb{K}$, alors $\mathrm{L}\,\varphi$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres entre $\mathrm{L}\,G$ et $\mathrm{L}\,H$.*

DÉMONSTRATION. Découle du Théorème 2.32 et de la Proposition 2.30. $\square$

COROLLAIRE 2.34. *La correspondance définie par $\mathrm{L}(-)$ est un foncteur de la catégorie des groupes de Lie sur $\mathbb{K}$ vers celle des $\mathbb{K}$-algèbres de Lie de dimension finie. Ce foncteur est fidèle (autrement dit injectif) sur la sous-catégorie pleine des groupes de Lie sur $\mathbb{K}$ qui sont connexes.*

COROLLAIRE 2.35. *Si H est un sou-groupe de Lie sur $\mathbb{K}$ d'un groupe de Lie G sur $\mathbb{K}$, alors $\mathrm{L}\,H$ est une $\mathbb{K}$-sous-algèbre de Lie de $\mathrm{L}\,G$, i.e.*

$$[X,Y]_{\mathrm{L}\,H} = [X,Y]_{\mathrm{L}\,G}$$

si $X, Y \in \mathrm{L}\,H$.

DÉMONSTRATION. L'inclusion $\mathrm{incl}_H : H \hookrightarrow G$ est un homomorphisme de groupes de Lie sur $\mathbb{K}$, par définition de sous-groupe de Lie sur $\mathbb{K}$. Par le Corollaire 2.33, son application tangentielle $\mathrm{L}\,\mathrm{incl}_H$ est un homomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbre de Lie. D'où

$$\mathrm{L}\,\mathrm{incl}_H = \mathrm{incl}_{\mathrm{L}\,H} : \mathrm{L}\,H \hookrightarrow \mathrm{L}\,G,$$

ce qui établit le résultat. $\square$

COROLLAIRE 2.36. *Si G est un groupe de Lie matriciel, i.e. un sous-groupe de Lie de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ pour un $n \in \mathbb{N}$, alors le crochet de Lie sur $\mathrm{L}\,G \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ est donné par le commutateur, qui est*

$$[X,Y] = XY - YX,$$

pour tous $X, Y \in \mathrm{L}\,G$.

DÉMONSTRATION. Découle du Théorème 2.32 et du Corollaire 2.35 $\square$

COROLLAIRE 2.37. *Soient H_1 et H_2 deux sous-groupes de Lie d'un groupe de Lie G sur $\mathbb{K}$. Alors, l'intersection $H_1 \cap H_2$ est un sous-groupe de Lie de G sur $\mathbb{K}$, et on a*

$$\mathrm{L}(H_1 \cap H_2) = \mathrm{L}\,H_1 \cap \mathrm{L}\,H_2$$

vus comme $\mathbb{K}$-sous-algèbre de Lie de $\mathrm{L}\,G$.

DÉMONSTRATION. Cela découle également du Corollaire 2.35, mais aussi du Corollaire 1.67 du premier chapitre. $\square$

Bibliographie

[1] Matthey, Michel. *Groupes de Lie compacts*. Cours d'École doctorale, EPFL, Lausanne, 2004.

Index