Groupes arithmétiques

Sylvestre Blanc

Table des matières

Première partie . Définitions

1 Introduction

Le but de ce travail est d'étudier les groupes fuchsiens d'un point de vue algébrique. Il est connu que ceux-ci donnent lieu à des algèbres de quaternions. Ainsi, nous allons essayer de comprendre de quelle manière ces algèbres apparaissent et démontrer un critère de l'arithméticité des groupes sous des hypothèses purement algébriques. On va aussi étudier un exemple particulier sur lequel on appliquera la théorie développée.

2 Trigonométrie hyperbolique

Tout ce travail traite du demi-plan de Poincaré $\mathcal{H}$. Il s'agit d'une variété riemannienne dont une carte est donnée par le demi-plan supérieur de $\mathbb{C}$ et l'identité. Sa métrique est

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$$

où x et y sont les parties réelles et imaginaires du point considéré. Les géodésiques de $\mathcal{H}$ sont les cercles orthogonaux à l'axe réel. A partir de celles-ci, on peut construire toutes les figures dont la géométrie à besoin. La figure de base est le triangle. Il consiste en trois arcs de géodésique se coupant selon des angles α, β et γ. Comme la courbure du demi-plan de Poincaré est négative, la somme $\alpha+\beta+\gamma$ est toujours plus petite que π. De plus, il existe une formule très utile qui relie la longueur des côtés a, b et c, aux angles du triangle,

$$\cosh(c) = \frac{\cos(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\gamma)}{\sin(\alpha)\sin(\beta)}$$

Dans le demi-plan de Poincaré, un polygone géodésique est une partie du plan dont le bord est constitué d'un nombre fini de segments de géodésiques.

3 Groupes fuchsiens

Les isométries de $\mathcal{H}$ sont toutes données par l'une des deux formules suivantes,

$$f(z) = \tfrac{az+b}{cz+d} \quad f(z) = \tfrac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}$$

où a,b,c,$d \in \mathbb{R}$. Celles qui conservent l'orientation sont de la première forme. On peut les mettre sous une forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Le miracle est que l'on obtient aussi un élément de $PSl(2,\mathbb{R})$ et que la composition de deux isométries se calcule bien en multipliant les matrices correspondantes.

Définition 3.1: Un groupe fuchsien est un sous-groupe discret de $PSl(2,\mathbb{R})$. Si Γ est un groupe fuchsien, on note $\Gamma\backslash\mathcal{H}$, le quotient de $\mathcal{H}$ relativement à Γ. C'est une surface de Riemann (avec des singularités si Γ a des points fixes).

Dans la suite, nous nous intéresserons aux cas où $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ est d'aire $\mu(\Gamma\backslash\mathcal{H}) < \infty$.

4 Algèbre de quaternions

Définition 4.1: Soit F, un corps de caractéristique différente de 2. Une algèbre de quaternion est une algèbre A sur le corps F satisfaisant les conditions suivantes,

- Son radical R est trivial. R est l'idéal maximal tel qu'il existe une puissance de lui-même qui est nulle.
- Son centre $Z = \{x \in A | \forall y \in A\ xy = yx\} = F$.
- $Dim_F(A) = 4$.

Une telle algèbre est une algèbre simple et centrale.

Notation 4.2: L'algèbre de quaternion $A = \{x_0{+}x_1i{+}x_2j{+}x_3k | x_0,x_1,x_2,x_3 \in \mathbb{F}\}$ vérifiant $i^2 = a$, $j^2 = b$ et $ij = -ji = k$ se notera

$$A = \left(\frac{a,b}{\mathbb{F}}\right)$$

Les quaternions usuels de Hamilton sont

$$\mathbb{H} = \left(\frac{-1,-1}{\mathbb{R}}\right)$$

De plus, il y a un homomorphisme d'algèbre $\phi : A \to M(2,F(\sqrt{a}))$ donné par

$$1 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad i \to \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & -\sqrt{a} \end{pmatrix}$$
$$j \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \quad k \to \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{a} \\ -b\sqrt{a} & 0 \end{pmatrix}$$

Comme ϕ est injective, elle est même un isomorphisme entre A et une F-sous-algèbre de $M(2,F(\sqrt{a}))$. Si a est un carré de F, alors ϕ est un isomorphisme entre A et $M(2,F)$.

Définition 4.3: La trace réduite d'un quaternion est, par définition, donnée par

$$Trd(x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k) = 2x_0$$

La norme réduite est

$$Nrd(x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k) = x_0^2 - ax_1^2 - bx_2^2 + abx_3^2$$

Lorsque l'on écrit les quaternions sous leur forme matricielle, on s'aperçoit que la trace réduite est égale à la trace matricielle et que la norme réduite correspond au déterminant.

Une algèbre de quaternion peut être une algèbre de division ou non. Elle en est une si et seulement si tous ses éléments non nuls ont une norme réduite non nulle. De plus, on a la proposition suivante,

Proposition 4.4: Si $A = \left(\frac{a,b}{F}\right)$ n'est pas isomorphe à $M(2,F)$, alors A est une algèbre de division.

Toutes les algèbres de quaternions sont isomorphes à une algèbre $A = \left(\frac{a,b}{F}\right)$, avec $a,b \in F^*$. Il existe une base de A, $\{1,i,j,k\}$ telle que

$$i^2 = a \quad j^2 = b \quad k = ij = -ji \ .$$

Soit A, une algèbre de quaternion et $\sigma : F \to K$, un homomorphisme de corps. On peut alors définir,

$$A^\sigma = \left(\frac{\sigma(a),\sigma(b)}{\sigma(F)}\right) \quad \text{et} \quad A^\sigma \otimes K = \left(\frac{\sigma(a),\sigma(b)}{K}\right)$$

Dans tout ce travail F sera toujours un corps algébrique totalement réel. Cela signifie que F est une extension algébrique de $\mathbb{Q}$ de degré fini n et que tous ses plongements $\{\phi_i\}_{i=1,\dots,n}$ dans $\mathbb{C}$, sont en fait des plongements dans $\mathbb{R}$. On supposera que $\phi_1 = Id$.

Définition 4.5: On dira qu'une algèbre de quaternion A possède la propriété des ramifications s'il existe des $\mathbb{R}$-isomorphismes ρ_i tels que

$$\rho_1 : A^{\phi_1} \otimes \mathbb{R} \to M(2,\mathbb{R}) \quad \rho_i : A^{\phi_i} \otimes \mathbb{R} \to \mathbb{H} \quad 2 \le i \le n$$

On a évidemment les propriétés suivantes

$$\begin{array}{cc} Nrd(x) = Det(\rho_1(x)) & Trd(x) = Tr(\rho_1(x)) \\ \phi_i(Nrd(x)) = Nrd_{\mathbb{H}}(\rho_i(x)) & \phi_i(Trd(x)) = Trd_{\mathbb{H}}(\rho_i(x)) \end{array}$$

5 Ordre

Définition 5.1: Soit F, un corps. On appelle ensemble des entiers sur F, et on note $\mathcal{O}_F$, l'ensemble des éléments de F qui sont racines d'un polynôme unitaire à coefficients entiers.

Définition 5.2: On donne ici trois définitions équivalentes d'un ordre.

- Un ordre $\mathcal{O}$ dans une algèbre de quaternion A sur un corps F est un sous-anneau de A contenant 1 et qui est de type fini en tant que $\mathcal{O}_F$-module. De plus, il doit engendrer tout A sur F.
- Un ordre $\mathcal{O}$ dans une algèbre de quaternion A sur un corps F tel que $[F:\mathbb{Q}] = n$ est un sous-anneau de A contenant 1 et qui est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang $4n$.
- Un ordre $\mathcal{O}$ dans une algèbre de quaternion A sur un corps F est un sous-anneau d'éléments entiers de A, i.e. les $x \in A$ tels que $Nrd(x) \in \mathcal{O}_F$ et $Trd(x) \in \mathcal{O}_F$, et tel que $F.\mathcal{O} = A$.

6 Groupes Arithmétiques

On s'intéressera dans la suite beaucoup aux éléments de norme 1 d'un ordre, i.e. $\mathcal{O}^1 = \{x \in \mathcal{O} | Nrd(x) = 1\}$. Pour tout ordre $\mathcal{O}$ d'une algèbre de quaternion A, $\rho_1(\mathcal{O}^1)$ est un sous-groupe de $Sl(2,\mathbb{R})$ et

$$\Gamma(A,\mathcal{O}) = \frac{\rho_1(\mathcal{O}^1)}{\{Id_2, -Id_2\}}$$

est un sous-groupe de $PSl(2,\mathbb{R})$. On peut montrer que $\Gamma(A,\mathcal{O})$ est un groupe fuchsien. Mais je ne connais pas de procédé général qui permettrais de le prouver dans chaque cas. On peut toutefois donner la démonstration du fait que $\Gamma(A,\mathcal{O})$ est fuchsien, où $A = \left(\frac{-1,2}{\mathbb{Q}}\right)$ et $\mathcal{O}$ est l'ensemble des quaternions de A dont les coefficients sont entiers. Ce résultat nous sera utile pour la troisième partie.

Preuve Il suffit de montrer qu'il existe un voisinage de l'identité qui ne contient pas d'autre élément du groupe. Soit donc

$$\begin{pmatrix} a + b\sqrt{2} & c + d\sqrt{2} \\ -c + d\sqrt{2} & a - b\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

un quaternion proche de l'identité. C'est-à-dire,

$$|a + b\sqrt{2} - 1| < \epsilon \quad |a - b\sqrt{2} - 1| < \epsilon \quad |c + d\sqrt{2}| < \epsilon \quad |-c + d\sqrt{2}| < \epsilon$$

Des deux premières inégalités, on tire $|2a - 2| < 2\epsilon$ et donc $a = 1$. Des deux dernières inégalités, on fait de même et on trouve que $|2c| < 2\epsilon$, ainsi $c = 0$. Il est maintenant facile de conclure et de trouver que $b = 0$ et $d = 0$.■

Définition 6.1: Si Γ est un sous-groupe d'indice fini d'un $\Gamma(A,\mathcal{O})$, alors on appelle Γ, groupe fuchsien dérivé de l'algèbre de quaternion A.

Définition 6.2: Deux groupes sont dits commensurables si leur intersection est d'index fini dans chacun d'eux.

Définition 6.3: Si Γ est un groupe fuchsien commensurable avec un $\Gamma(A,\mathcal{O})$, alors Γ est dit groupe arithmétique.

Deuxième partie . Un critère d'arithméticité

7 Lemme technique

Lemme 7.1: Soit Γ un groupe fuchsien tel que $\mu(\Gamma\backslash\mathcal{H}) < \infty$ et $Tr(\Gamma) \subset k$, où k est un corps algrébrique tel que $[k:\mathbb{Q}] < \infty$. Alors $\exists g \in Sl(2,\mathbb{R})$ et un corps algébrique K avec $[K:\mathbb{Q}] < \infty$ tel que $g^{-1}\Gamma g \subseteq PSl(2,K)$

Preuve Un théorème concernant les groupes fuchsiens, nous assure que Γ contient une transformation hyperbolique T. Soient donc, e_1 et e_2, les vecteurs propres de T. On les choisit de telle manière que $det(e_1,e_2) > 0$. Soient encore λ et λ^{-1}, les valeurs propres correspondantes.

λ est réel, car T est hyperbolique. Pour le voir, il suffit de constater que le discriminant est bien positif. Posons g_1 comme étant la matrice dont les colonnes sont e_1 et e_2. On posera aussi $K = k(\lambda)$.

On a que

$$g_1^{-1}Tg_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

Choisissons $T_2 \in \Gamma$ tel que

$$g_1^{-1}T_2g_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

avec $c \neq 0$ et $b > 0$. Posons $g_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{b} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{b}} \end{pmatrix}$

Ainsi, $(g_1g_2)^{-1}\Gamma(g_1g_2)$ contient un

$$T_0 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \text{ avec} \lambda \neq 1 \text{ et un } T_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \text{ avec } c_1 \neq 0 \ .$$

Montrons maintenant que $(g_1g_2)^{-1}\Gamma(g_1g_2) \subseteq PSl(2,K)$.
Soit $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in (g_1g_2)^{-1}\Gamma(g_1g_2)$, on a alors

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda^{-1}c & \lambda^{-1}d \end{pmatrix} \in (g_1g_2)^{-1}\Gamma(g_1g_2)$$

Ainsi $a + d$ et $\lambda a + \lambda^{-1}d \in K$. Et donc a et d sont dans K. On refait le même raisonnement et on montre que a_1 et d_1 sont dans K. De plus, en calculant le déterminant, on a que $a_1d_1 - c_1 \in K$ et donc $c_1 \in K$ et $T_1 \in PSl(2,K)$.

Ainsi,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_1 + bc_1 & a + bd_1 \\ a_1c + dc_1 & c + dd_1 \end{pmatrix}$$

et par le même argument, $aa_1+bc_1 \in K$ et $c+dd_1 \in K$. Comme $a,a_1,d,d_1,c_1 \in K$, on a aussi que $b,c \in K$. ■

8 Lemme des quaternions

Lemme 8.1: Soit Γ un groupe fuchsien tel que $Tr(\Gamma) \subset k$, un corps algébrique tel que $[k : \mathbb{Q}] < \infty$. Soit $k_0 = \mathbb{Q}(Tr(\Gamma))$ et

$$A = k_0[\Gamma] = \{\sum_{i=1}^{d} a_iT_i | a_i \in k_0, T_i \in \Gamma, d \in \mathbb{N}\}.$$

Alors A est une algèbre de quaternion sur k_0.

Preuve Par la preuve du lemme technique, on peut supposer que Γ contient deux éléments,

$$T_0 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda \neq 1 \text{ et } T_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \text{ avec } c_1 \neq 0$$

et que $\Gamma \subseteq PSl(2,K_0)$ avec $K_0 = k_0(\lambda)$.

On voit que ou bien $K_0 = k_0$ ou bien K_0 est une extension quadratique de k_0. Ainsi $A \subseteq M(2,K_0)$ et $1 < dim_{k_0}(A) \leq 8$.

Il y a trois choses à montrer :

- Le radical R de A est trivial.
- Le centre Z de A est k_0.
- $dim_{k_0}(A) = 4$.

Soit $T \in R$, il existe donc $e \in \mathbb{N}$ tel que $T^e = 0$ et donc $det(T) = 0$. Ce qui implique que $Tr(T^j) = Tr(T)^j \ \forall j \in \mathbb{N}$, car il y a une valeur propre nulle. Et donc si $j = e$, on a $Tr(0) = 0 = Tr(T)^e$ et $Tr(T) = 0$.

De plus, R est un idéal, donc si

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

alors $a + d = 0$ et $\lambda a + \lambda^{-1} d = 0 \Rightarrow a = d = 0$.

Et

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bc_1 & bd_1 \\ a_1 c & c \end{pmatrix}$$

On emploie, alors l'argument maintenant devenu habituel et on a que $bc_1 = c = 0$ et donc $b = c = 0$ et $T = 0$. On a donc bien que $R = 0$.

Soit

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Z$$

Alors $TT_0 = T_0 T \Leftrightarrow T_0^{-1} T T_0 = T$.

$$\begin{pmatrix} a & \lambda^{-2} b \\ \lambda^2 c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow b = c = 0$$

De plus, $T_1 T = T T_1$ et donc

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \Rightarrow a = d \Rightarrow T \in k_0 Id$$

Pour montrer que la dimension est 4, on utilise un théorème d'algèbre qui nous dit que la dimension d'une algèbre simple et centrale est un carré d'entier (cf, par exemple, AMS Colloqium publications volume XXIV). Donc $dim(A) = 4.$■

9 Lemme de l'ordre

Lemme 9.1: Soit Γ, une groupe fuchsien avec $\mu(\Gamma \backslash \mathcal{H}) < \infty$ et $k_0 = \mathbb{Q}(Tr(\Gamma))$, $[k_0 : \mathbb{Q}] < \infty$. De plus, on suppose que $Tr(\Gamma) \subseteq \mathcal{O}_{k_0}$ (les entiers de k_0).

Soit

$$A = k_0[\Gamma] = \{\sum_{i=1}^{d} a_i T_i | a_i \in k_0, T_i \in \Gamma, d \in \mathbb{N}\}$$

et

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_{k_0}[\Gamma] = \{\sum_{i=1}^{d} a_i T_i | a_i \in \mathcal{O}_{k_0}, T_i \in \Gamma, d \in \mathbb{N}\}$$

Alors, $\mathcal{O}$ est un ordre de l'algèbre de quaternion A.

Preuve $\mathcal{O}$ est un sous-anneau engendrant A sur k_0. Il contient l'identité. Il reste donc à montrer que $\mathcal{O}$ est un $\mathcal{O}_{k_0}$-module de type fini.

Par le lemme technique, on peut supposer que :

$$T_0 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \in \Gamma \text{ et } T_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \in \Gamma$$

avec $\lambda \neq 1$ et $c_1 \neq 0$, et que $\Gamma \subseteq PSl(2,K_0)$ où $K_0 = k_0(\lambda)$. Il est clair que $\mathcal{O}_{k_0} \subseteq \mathcal{O}_{K_0}$.De plus, λ est un entier de k_0, car il est racine d'un polynôme caractéristique. On a aussi que $a + d$ et $\lambda a + \lambda^{-1} d$ sont dans $\mathcal{O}_{k_0}$. Et donc, $a + d$ et $\lambda^2 a + d$ sont aussi dans $\mathcal{O}_{k_0}$. En soustrayant, on a que a et d sont dans le module $\frac{\mathcal{O}_{k_0}}{1-\lambda^2}$.

Par le démonstration du lemme technique, $aa_1 + bc_1$ et $c + dd_1$ sont aussi dans $\frac{\mathcal{O}_{k_0}}{1-\lambda^2}$. Et donc $a,b,c,d \in \frac{\mathcal{O}_{k_0}}{1-\lambda^2}$ qui est un idéal. Ainsi $\mathcal{O}$ est un sous-module de type fini d'un $\mathcal{O}_{k_0}$-module libre, ce qui fait de lui un sous-module de type fini.

10 Théorème

Théorème 10.1: Soit Γ, un groupe fuchsien tel que $\mu(\Gamma\backslash\mathcal{H}) < \infty$. Alors Γ est dérivé d'une algèbre de quaternion sur un corps de nombre totalement réel F, si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- $k_1 = \mathbb{Q}(Tr(\Gamma))$ est algébrique de degré $n < \infty$ et $Tr(\Gamma) \subseteq \mathcal{O}_{k_1}$, les entiers de k_1.
- $\forall \phi$, plongement de k_1 vers $\mathbb{C}$ différent de l'identité, on a que $\phi(k_1)$ est borné.

Preuve de la nécessité Soit Γ, un sous-groupe d'index fini dans un $\Gamma(A,\mathcal{O})$ avec A, une algèbre de quaternion et $\mathcal{O}$, un ordre de A. On a $Tr(\Gamma) \subseteq F$ et donc $k_1 \subseteq F$, et comme F est totalement réel, k_1 l'est aussi.

De plus, on a que $Trd(\mathcal{O}) \subset \mathcal{O}_F \Rightarrow Tr(\Gamma) \subset \mathcal{O}_{k_1}$ et donc la première condition est vérifiée.

Pour la seconde condition, on supposera que $n > 1$, car sinon, il n'y a rien à vérifier. $\forall 2 \leq i \leq n$, on a que $\phi_i(Tr(\Gamma)) \subset Trd_{\mathbb{H}}(\rho_i(\mathcal{O}^1))$. De plus, $\forall x \in \mathcal{O}^1$, on a $Nrd_{\mathbb{H}}(\rho_i(x)) = \phi_i(Nrd(x))$ et donc $\rho_i(\mathcal{O}^1) \subseteq \mathbb{H}^1$. Mais comme on sait que $Trd_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^1) \subseteq [-2,2]$, on a que $\phi_i(Tr(\Gamma))$ est borné.

Remarque 10.2: La preuve de la suffisance des conditions va être faite dans les lemmes suivants.

11 $\mathbb{Q}(Tr(\Gamma))$ est totalement réel

Lemme 11.1: Soit Γ, un groupe fuchsien tel que $\mu(\Gamma\backslash\mathcal{H}) < \infty$ et satisfaisant les deux conditions du théorème. On a alors que $k = \mathbb{Q}(Tr(\Gamma))$ est totalement réel et si ϕ est un plongement de k vers $\mathbb{R}$ différent de l'identité, alors $\phi(Tr(\Gamma)) \subset [-2{,}2]$.

Preuve Soit $T \in \Gamma$, et u et u^{-1}, les valeurs propres de T. Soit ϕ, un plongement de k vers $\mathbb{C}$ différent de l'identité. On peut étendre ϕ à $k(u)$. On appelera ψ, cette extension. On a alors que $|\psi(u)| = 1$. En effet, si $|\psi(u)| \neq 1$ alors,

$$\begin{array}{rcl} |\phi(Tr(T^m))| & = & |(\psi(u))^m + (\psi(u))^{-m}| \\ & \geq & ||\psi(u)|^m - |\psi(u)|^{-m}| \end{array}$$

et donc $\{\phi(Tr(T^m))|m \in \mathbb{Z}\}$ n'est pas borné ↯. Ainsi, $|\psi(u)| = 1$. De plus, $\phi(Tr(T)) = \psi(u) + \psi(u)^{-1} = \psi(u) + \overline{\psi(u)} \in [-2{,}2]$.

12 A est une algèbre de quaternion

Proposition 12.1: Soit Γ, un groupe fuchsien tel que $\mu(\Gamma\backslash\mathcal{H}) < \infty$ et $Tr(\Gamma) \subset \mathcal{O}_k$ où $k = \mathbb{Q}(Tr(\Gamma))$. Si Γ satisfait les deux conditions du théorème, alors $A(\Gamma) = k[\Gamma]$, possède la propriété des ramifications.

Preuve Par le lemme technique, Γ contient

$$T_0 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \quad \lambda \neq 1 \quad \text{et} \quad T_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \quad c_1 \neq 0$$

On va montrer que $K = k(\lambda)$ est une extension quadratique propre de k. En effet, si k est une extension propre de $\mathbb{Q} \Rightarrow \exists \psi : K \to \mathbb{C}$ tel que $\psi|_k \neq Id$. $\psi(\lambda)$ et $\psi(\lambda)^{-1}$ sont les racines de

$$x^2 - \psi(t_0)x + 1 = 0 \qquad \text{où } t_0 = Tr(T_0)$$

Par le lemme 5, $|\psi(t_0)| < 2$ et donc $\psi(K)$ est un corps imaginaire puisque le discriminant de ce polynôme est négatif. De plus, k est totalement réel et donc $\psi(K)$ est réel, ce qui montre que K est une extension propre de k. Si $k = \mathbb{Q}$, alors t_0 est un entier de $\mathbb{Q}$, puisque c'est une trace d'un élément de Γ, et donc $|t_0| > 2$, puisque T est hyperbolique. Ainsi $x^2 - t_0x + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$, car $t_0^2 - 4$ ne peut être un carré. K est donc bien une extension propre de k.
Dans la suite, on notera x', le conjugué de x selon k. Par exemple, $\lambda^{-1} = \lambda'$.

On a $Tr(T_1) = a_1 + d_1 \in k$, et $Tr(T_0T_1) = a_1\lambda + d_1\lambda' \in k$. De plus, λ et λ' sont indépendants sur k. Posons,

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha_0\lambda + \alpha_1\lambda' \\ d_1 &= \delta_0\lambda + \delta_1\lambda' \end{aligned}$$

Par conjuguaison on a,

$$(\alpha_0\lambda + \alpha_1\lambda')\lambda + (\delta_0\lambda + \delta_1\lambda')\lambda' = (\alpha_0\lambda' + \alpha_1\lambda)\lambda' + (\delta_0\lambda' + \delta_1\lambda)\lambda'$$

Et donc,

$$(\alpha_0 - \delta_1)\lambda^2 + (\delta_1 - \alpha_0)\lambda'^2 = 0$$

Ce qui montre que $\alpha_0 = \delta_1$. Comme $a_1 + d_1 \in k$, en procédant de la même manière,

$$\alpha_0\lambda + \alpha_1\lambda' + \delta_0\lambda + \delta_1\lambda' = \alpha_0\lambda' + \alpha_1\lambda + \delta_0\lambda' + \delta_1\lambda$$

Et donc $\alpha_0 + \delta_0 - \alpha_1 - \delta_1 = \delta_0 - \alpha_1 = 0$. D'où, $a_1 = d_1'$. De plus, comme $det(T_1) = 1$, $c_1 \in k$.

Ainsi,

$$T_0 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda' \end{pmatrix} \quad \lambda \neq 1 \quad T_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ c_1 & a_1' \end{pmatrix} \quad c_1 \neq 0$$

De plus, Id,T_0,T_1,T_0T_1, sont linéairement indépendants et donc forment une base de $A[\Gamma]$ sur k. Ainsi

$$A[\Gamma] = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b'c_1 & a' \end{pmatrix} | a,b \in K,\, c_1 \in k \right\}$$

Maintenant, que l'on a déterminé la forme des éléments de $A[\Gamma]$, on va pouvoir terminer la preuve, mais avant cela, nous avons besoin d'un dernier lemme.

13 Lemme des plongements

Lemme 13.1: Soit ψ, un plongement de $K = k(\lambda) \subset \mathbb{C}$ tel que $\psi|_k \neq Id$. Alors,

- $\forall T = \begin{pmatrix} a & b \\ b'c_1 & a' \end{pmatrix} \in \Gamma$, on a $|\psi(a)| \leq 1$.
- Pour $T_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ c_1 & a_1' \end{pmatrix}$, on a $\psi(c_1) < 0$.

Preuve 1) Par le lemme 5, on a $|\psi(Tr(TT_0^m))| \leq 2$. De plus, $a = \alpha_0\lambda + \alpha_1\lambda' \in K$. D'où,

$$\psi(a') = \psi(\alpha_0)\psi(\lambda') + \psi(\alpha_1)\psi(\lambda) = \overline{\psi(\alpha_0)\psi(\lambda) + \psi(\alpha_1)\psi(\lambda')} = \overline{\psi(a)}$$

De plus, $|\psi(\lambda)| = 1$ et k est totalement réel. Ainsi,

$$\psi(Tr(TT_0^m)) = \psi(a\lambda^m) + \psi(a'\lambda'^m) = \psi(a\lambda^m) + \overline{\psi(a\lambda^m)} = 2Re(\psi(a)\psi(\lambda^m))$$

Et $\psi(\lambda)$ n'est pas une racine de l'unité, car il est solution de $x^2 - \psi(t_0)x + 1$ qui ne divise pas $x^n - 1$ et donc $\{\psi(\lambda)^m | m \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{S}^1$. Ainsi, $|Re(\psi(a)z)| \leq 1 \; \forall z \in \mathbb{S}^1 \Rightarrow |\psi(a)| \leq 1$.
2) En appliquant le point 1) à T_1, on trouve que $|\psi(a_1)| \leq 1$ et comme $det(T_1) = a_1a_1' - c_1 = 1$, on a $\psi(c_1) - \psi(a_1a_1') - 1 = |\psi(a_1)|^2 - 1 \leq 0$ et $c_1 \neq 0$. Ainsi, $\psi(c_1) < 0$.

14 Fin de preuve

Soient $\{\phi_i\}_{1\leq i\leq n}$, les plongements de k dans $\mathbb{R}$ avec $\phi_1 = Id$. On étend ϕ_i en $\psi_i : k(\lambda) \longrightarrow \mathbb{C}$ et on définit $\Psi_i : A[\Gamma] \longrightarrow M(2,\mathbb{R})$ de la manière suivante,

$$\Psi_i \begin{pmatrix} a & b \\ b'c_1 & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_i(a) & \psi_i(b) \\ \psi_i(b'c_1) & \psi_i(a') \end{pmatrix}$$

Ainsi, $A^{\phi_1} \otimes \mathbb{R} \cong M(2,\mathbb{R})$. Il est aussi très facile de montrer que $A^{\phi_i} \otimes \mathbb{R} \cong \mathbb{H}$ pour les $i > 1$ en utilisant le fait que $\psi_i(a') = \overline{\psi_i(a)}$. La preuve est donc complète. ■

Troisième partie . Deux Octogones

15 Arithméticité

Dans cette section, nous allons appliquer le théorème précédent à un certain groupe d'isométrie du demi-plan de Poincaré. Nous allons le faire sur deux exemples. Il s'agit dans les deux cas d'un octogone régulier, auquel on a identifié les côtés de la manière suivante dans le cercle de Poincaré, Les matrices associées à ces isométries sont dans le premier cas,

$$\begin{pmatrix} \alpha+\frac{\beta}{\sqrt{2}} & -\alpha-\frac{\beta}{\sqrt{2}} \\ \frac{\beta}{\sqrt{2}}-\alpha & \frac{\beta}{\sqrt{2}}-\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\sqrt{2}} & -\frac{\beta}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}\alpha \\ \frac{\beta}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}\alpha & \frac{\beta}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -\alpha+\frac{\beta}{\sqrt{2}} & \alpha-\frac{\beta}{\sqrt{2}} \\ \frac{\beta}{\sqrt{2}}+\alpha & \frac{\beta}{\sqrt{2}}+\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\sqrt{2}} & -\frac{\beta}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\alpha \\ \frac{\beta}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\alpha & \frac{\beta}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

et dans le second cas,

$$\begin{pmatrix} \beta & -\sqrt{2}\alpha \\ -\sqrt{2}\alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}\alpha+\beta & 0 \\ 0 & \beta-\sqrt{2}\alpha \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \alpha+\beta & -\alpha \\ -\alpha & \beta-\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta+\alpha & \alpha \\ \alpha & -\alpha+\beta \end{pmatrix}$$

où $\alpha = \sqrt{1+\sqrt{2}}$, $\beta = 1+\sqrt{2}$. Afin d'appliquer le théorème, il nous faut tout d'abord calculer $\mathbb{Q}(Tr(\Gamma))$, où Γ, est le groupe engendré par les quatre matrices génératrices dans chacun des cas. On peut remarquer que toutes les éléments de Γ sont de la forme

$$\begin{pmatrix} r+k\alpha & s+l\alpha \\ -s+l\alpha & r-k\alpha \end{pmatrix}$$

où $k,l,r,s \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Il y a un isomorphisme entre les matrices de cette forme et l'algèbre de quaternion $\left(\frac{-1,\beta}{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}\right)$, que voici,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to 1, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \to i$$
$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} \to j, \quad \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} \to k$$

Avec, $i^2 = -1$, $j^2 = \beta$, $ij = -ji = k$.

Les traces des éléments de Γ sont donc toutes de la forme $(r+k\alpha)+(r-k\alpha) = 2r \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. On peut facilement calculer que les entiers de $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}}(\sqrt{2})$ sont $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Pour savoir si les traces des éléments de Γ sont bien dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, on remarque tout d'abord que, dans le second cas, les coefficients devant les α et les coefficients purement dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ dans les quatre générateurs sont des éléments de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Ainsi, leurs traces sont bien dans $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}}(\sqrt{2})$. Ceci termine le deuxième cas. Il nous reste à le prouver dans le premier cas, ce qui sera fait dans le théorème suivant.

Théorème 15.1: Les traces des éléments du groupe (que l'on notera Γ) engendré par les quatres générateurs, p_1,p_2,p_3,p_4, du premier cas sont toutes dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

Preuve On va noter p_5,p_6,p_7,p_8, les inverses de p_1,p_2,p_3,p_4. La supposition de base est de dire que $\forall x = \Pi_{i=1}^{n} p_{j_i} \in \Gamma$,

$$x = (a + \frac{b}{\sqrt{2}}) + (c + \frac{d}{\sqrt{2}})i + (e_1 + e_2\sqrt{2})j + (f_1 + f_2\sqrt{2})k$$

avec a,b,c,d,e_1,e_2,f_1,$f_2 \in \mathbb{Z}$ et $b + d = e_1 + f_1 = 0 \mod 2$.
Nous allons faire cela par récurrence sur le nombre de générateurs à partir desquels x à été construit. Pour $n = 1$, le résultat est trivial, et on a en particulier que

	a	c	b	d	e_1	f_1	e_2	f_2
p_1	1	−1	1	−1	1	1	0	0
p_2	1	−1	1	−1	0	0	0	1
p_3	1	−1	1	−1	−1	−1	0	0
p_4	1	−1	1	−1	0	0	0	−1
p_5	1	1	1	1	−1	−1	0	0
p_6	1	1	1	1	0	0	0	−1
p_7	1	1	1	1	1	1	0	0
p_8	1	1	1	1	0	0	0	1

Montrons maintenant que la forme indiquée est bien conservée lorsque l'on multiplie x par un $p_i = (a' + \frac{b'}{\sqrt{2}}) + (c' + \frac{d'}{\sqrt{2}})i + (e_1' + e_2'\sqrt{2})j + (f_1' + f_2'\sqrt{2})k$.

Pour le terme en 1 : On obtient :

$$qqc + \frac{bb'}{2} - \frac{dd'}{2}$$

où qqc représente un terme qui est déjà de la forme $a + b/\sqrt{2}$. Comme $b' = \pm d' = 1$, on voit que le terme restant est

$$\frac{b \pm d}{2}$$

et donc ceci est bien un élément de $\mathbb{Z}$, car $b + d = 0 \mod 2$.

Pour le terme en i : On obtient :

$$qqc + \frac{bd' + db'}{2}$$

Mais comme $bd' + db' = b + d = 0 \mod 2$, tout va bien.

Pour le terme en j : On obtient :

$$qqc + \frac{be_1' + b'e_1 + f_1d' + f_1'd}{\sqrt{2}}$$

mais,

$$\begin{array}{rl} & be'_1 + b'e_1 + f_1 d' + f'_1 d \mod 2 \\ = & be'_1 + f'_1 d + e_1 + f_1 \mod 2 \\ = & be'_1 + f'_1 d \mod 2 \\ = & b + d \mod 2 \\ = & 0 \mod 2 \end{array}$$

Pour le terme en k : On obtient :

$$qqc + \frac{bf'_1 + f_1 b' + de'_1 - d'e_1}{\sqrt{2}}$$

mais,

$$\begin{array}{rl} & bf'_1 + b'f_1 + e_1 d' + e'_1 d \mod 2 \\ = & bf'_1 + e'_1 d + e_1 + f_1 \mod 2 \\ = & b + d \mod 2 \qquad (\text{car } e'_1 = f'_1 \text{ et } e_1 + f_1 = 0 \mod 2) \\ = & 0 \mod 2 \end{array}$$

Il reste à monter que les nouveaux $b + d$ et $e_1 + f_1$ restent nuls.

Pour $b + d$: Le terme en $b + d$ s'écrit modulo 2 comme

$$\begin{array}{rl} & ab' + a'b + cd' + c'd \\ & +ad' + bc' + a'd + b'c \mod 2 \\ = & a + b + c + d + a + b + c + d \mod 2 \\ = & 0 \mod 2 \end{array}$$

Pour $e_1 + f_1$: Le terme en $e_1 + f_1$ s'écrit modulo 2 comme

$$\begin{array}{rl} & ae'_1 + be'_2 + a'e_1 + b'e_2 + f_1 c' + f_2 d' - f'_1 c - f'_2 d \\ & +af'_1 + bf'_2 + a'f_1 + b'f_2 + ce'_1 + de'_2 - c'e_1 - d'e_2 \mod 2 \\ = & e'_1(a + c) + e'_2(b + d) + e_1 + e_2 - f_1 - f_2 \\ & +f'_1(a + c) + f'_2(b + d) + f_1 + f_2 + e_1 + e_2 \mod 2 \\ = & (e'_1 + f'_1)(a + c) + (e'_2 + f'_2)(b + d) \mod 2 \\ = & 0 \mod 2 \end{array}$$

Ainsi les traces sont toutes de la forme $2a + \sqrt{2}b \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.■

En plus, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est un corps algébrique totalement réel. Il ne reste donc plus qu'à montrer que $Tr(\phi(\Gamma))$ est borné pour tout automorphisme ϕ différent de l'identité. On a,

$$det(x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k) = x_0^2 + x_2^2 - \beta(x_1^2 + x_3^2) = 1$$

Le seul automorphisme différent de l'identité est

$$\begin{array}{rrcl} \phi : & \mathbb{Q}(\sqrt{2}) & \rightarrow & \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \\ & x + y\sqrt{2} & \rightarrow & x - y\sqrt{2} \end{array}$$

Ainsi,

$$det(\phi(x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k)) = x_0'^2 + x_2'^2 - \beta'(x_1'^2 + x_3'^2) = 1$$

et comme $\beta' = 1 - \sqrt{2} < 0$, on a que

$$Tr(\phi(x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k)) = 2x_0' < 2$$

et est donc borné. Ainsi, dans les deux cas, Γ est un groupe arithmétique.

16 Topologie

Nous avons maintenant prouvé que, dans les deux manières d'identifier les côtés des octogones, les groupes fuchsiens correspondants sont arithmétiques. Cherchons maintenant à savoir si les deux surfaces obtenues sont isométriques ou non. Tout d'abord, on peut utiliser un argument de géométrie algébrique, le complexe de DeRham, pour montrer que les deux surfaces sont topologiquement équivalentes à un tore à deux trous.

Dans le premier cas, on donne les noms a,b,c,d aux quatres côtés. On appelle, l'octogone entier O et le seul sommet s'appellera P. Dans le second cas, on mettera des primes aux noms des objets. On obtient les complexes suivants,

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}\{O\} \xrightarrow{d_2} \mathbb{R}\{a,b,c,d\} \xrightarrow{d_1} \mathbb{R}\{P\} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}\{O'\} \xrightarrow{d_2} \mathbb{R}\{a',b',c',d'\} \xrightarrow{d_1} \mathbb{R}\{P'\} \longrightarrow 0$$

où toutes les différentielles sont identiquement nulles. Dans les deux cas, on trouve que la caractéristique d'Euler des surfaces est -2, ce qui veut dire qu'il s'agit de tores à deux trous.

17 Isomorphisme de groupe

On peut maintenant se demander si les deux groupes fuchsiens de ces surfaces sont isomorphes en tant que groupes. Pour cela, on peut trouver des présentations de ces groupes. On obtient,

$$\Gamma = < a,b,c,d | ab(ba)^{-1} = cd(dc)^{-1} > \text{ pour le premier cas}$$

$$\Gamma' = < a',b',c',d' | a'b'c'd' = d'c'b'a' > \text{ pour le second cas}$$

Ensuite, on peut ajouter une nouvelle notation,

$$\begin{array}{cccc} ab = r & cd = s & dc = t & ba = u \\ a'b' = r' & c'd' = s' & d'c' = t' & b'a' = u' \end{array}$$

Les relations deviennent, $ru^{-1} = st^{-1}$ et $r's' = t'u'$. Ainsi, on obtient un isomorphisme entre les deux groupes en posant

$$\phi(r) = r' \quad \phi(u) = s'^{-1} \quad \phi(s) = t' \quad \phi(t) = u'^{-1}$$

Toutefois, on obtient bien isomorphisme que si on peut revenir univoquement aux a,b,c,d et a',b',c',d' à partir des r,s,t,u et r',s',t',u', ce qui n'est pas donné. Pour cela supposons que l'on ait

$$\begin{array}{ll} ab = r & ba = u \\ xy = r & yx = u \end{array}$$

et cherchons à montrer que $x = a$ et $y = b$. Ecrivons $x = az$, alors $y = z^{-1}b$ et $z^{-1}uz = u$. Ainsi, les vecteurs propres de u et z sont les mêmes et on n'a plus que deux valeurs propres à choisir. En écrivant explicitement, la forme générale d'une matrice dont les vecteurs propres sont ceux de u, on se rend compte qu'il n'y en a qu'une qui soit dans Γ ou dans Γ', c'est l'identité. Ainsi, notre transformation est bien bijective et les deux groupes sont isomorphes.

18 Isométrie

Afin de savoir si les deux surfaces obtenues sont isométriques ou non, on peut employer plusieurs méthodes. Après quelques essais, j'ai utilisé la méthode des points de Weierstrass. En effet, un théorème sur les surfaces de genre deux, nous dit que si une isométrie de ces surfaces a six points fixes, alors celle-ci est unique et les six points sont appelés points de Weierstrass de la surface. Afin de montrer que les deux surfaces que nous avons sont bien différentes, nous allons tout d'abord trouver leurs points de Weierstrass et ensuite, montrer que les distances entre ces points sont différentes dans les deux cas.
Le deuxième cas est plus facile que le premier, commençons donc par celui ci. L'isométrie qui a six points fixes est le demi-tour autour de l'origine dans le cercle de Poincaré. Elle a bien six points fixes, qui sont, l'origine, les quatres milieux des côtés et le point qui est à l'extrémité des côtés.

Pour le premier cas, l'isométrie est plus compliquée à trouver. Il faut tout d'abord trianguler la surface en 32 triangles de la manière suivante. Bien que le dessin de la page suivante nous indique le contraire, tous ces triangles sont congruents. Il y en a 16 qui ont une orientation positive et 16 qui ont l'autre orientation. Leurs angles sont $\pi/2$,$\pi/4$,$\pi/8$ et les cosinus hyperbolique de la longueur de leurs côtés sont $1/\tan(\pi/8)$, $1/(\sqrt{2}\sin(\pi/8))$ et $1/(2\sin(\pi/8))$. On peut définir l'isométrie en indiquant sur quel triangle, chaque triangle va (voir la figure de la fin). On s'aperçoit alors, que cette isométrie possède exactement 6 points fixes qui sont donc les points de Weierstrass.

On calcule alors le minimum des distances entre les points de Weierstrass dans chacun des deux cas. Pour le second cas, on trouve la distance $arccosh(\beta)$. Pour le premier cas, on trouve $arccosh(1)$ qui n'existe pas dans l'autre cas. Les deux surfaces ne sont donc pas isométriques.

19 Commensurabilité

Une question que l'on pourrait se poser à propos de cet exemple est, est-ce que les deux groupes correspondants sont commensurables. J'ai essayé plusieurs méthodes pour répondre à cette question et je n'ai pas réussi à trouver un seul élément différent de l'identité dans leur intersection. Je n'ai pas non plus réussi à montrer que leur intersection ne contenait que l'identité. Il semblerait que cette question soit plus difficile que les autres.

Références

[1] Svetlana Katok, *Fuchsian Groups*

[2] *AMS Colloqium Publications*, Vol. XXIV pp. 51-52