ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Projet de semestre

Géométrie Fractale

Grégoire Aubry

Responsable :

Professeur M. Troyanov

DMA

Ete 2000

Table des matières

Introduction

Dans ce travail, nous traiterons quelques éléments de la géométrie fractale. Par fractal, nous entendrons une partie F d'un espace métrique qui satisfait généralement les propriétés suivantes :

(i) F est trop irrégulière pour être décrite et étudiée par la géométrie traditionnelle.

(ii) Il existe des similitudes entre F et certaines de ses parties.

(iii) F a une structure fine, c'est-à-dire des détails à des échelles arbitrairement petites.

Nous commencerons par introduire la notion de mesure extérieure sur laquelle nous donnerons quelques résultats généraux. Dans le chapitre 2, nous introduirons la mesure et la dimension de Hausdorff (1868-1942) et nous en donnerons les propriétés suivies par quelques exemples. Le chapitre 3 sera consacrer à la relation, dans $\mathbb{R}^n$, entre la mesure extérieure de Hausdorff et celle de Lebesgue (1875-1941). Nous terminerons ce travail par une application de la dimension de Hausdorff à des sous-anneaux de $\mathbb{R}$.

Chapitre 1

Mesures extérieures

Dans ce premier chapitre, nous allons définir la notion de mesure extérieure et donner quelques propriétés générales et utiles les concernant.
Nous aurons ainsi les bases nécessaires pour développer la notion de mesure de Hausdorff traitée chapitre 2.

1.1 Définitions

Considérons un ensemble E et notons $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Si E est un espace topologique, on note $\mathcal{B}(E)$ la σ-algèbre de tous les boréliens de E, ie la plus petite σ-algèbre contenant tous les ouverts de E.

Définition 1.1 *Une fonction $\mu : \mathcal{P}(E) \to [0, \infty]$ est appelée une **mesure extérieure** sur E si*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $\mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ *pour tout* $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ *(σ-sous-additivité)*

Dans la suite, on dira "mesure" au lieu de "mesure extérieure". On notera aussi $\bigsqcup$ pour désigner une réunion d'ensembles deux à deux disjoints. Dans le reste de ce paragraphe, μ sera une mesure sur un ensemble E.

Remarque Une mesure est monotone, ie $\mu(A) \leq \mu(B)$ si $A \subset B$. Cela découle de la sous-additivité de μ.

Définition 1.2 *Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(E)$ est une σ-algèbre. On dit que μ est une **mesure σ-additive** sur $\mathcal{F}$ si*

$$\mu(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

pour toute famille dénombrable $\{A_k\} \subset \mathcal{F}$ avec les A_k deux à deux disjoints.

Définition 1.3 *On dit que μ est une* ***mesure σ-finie*** *si on peut écrire $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ avec $\mu(A_k) < \infty$ pour tout k. Si $\mu(E) < \infty$, on dit que μ est une* ***mesure finie****.*

Définition 1.4 *Si (E,d) un espace métrique, on dit que $A, B \subset E$ sont des* ***ensembles distants*** *si*

$$\inf\{\, d(x,y) \,|\, x \in A, y \in B \,\} > 0$$

Une mesure ***métrique*** *est une mesure telle que $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ pour tout ensemble distant A, B.*

Remarquons que deux ensembles distants sont toujours disjoints.

Définition 1.5 *Soit μ une mesure sur E. On dit qu'un ensemble $A \subset E$ est* ***μ-mesurable*** *(ou simplement* ***mesurable*** *si le contexte est clair) si $\mu(F) = \mu(F \cap A) + \mu(F \cap A^c)$ pour tout $F \subset E$*

1.2 Propriétés générales

Nous allons à présent énoncer quelques résultats concernant les mesures extérieures.

Propositon 1.1 *Le supremum d'une famille de mesures extérieures est une mesure extérieure.*

Preuve :

Soient E un ensemble et $\{\mu_i\}_{i\in I}$ une famille de mesures extérieures sur $\mathcal{P}(E)$. Posons $\mu := \sup_{i\in I} \mu_i$

(i) On a $\mu(\emptyset) = \sup_i \mu_i(\emptyset) = 0$, car $\mu_i(\emptyset) = 0$ pour tout i.

(ii) Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ et $\{A_k\}_{k\in K}$ un recouvrement de A. Pour tout i, on a

$$\mu_i(A) \leq \sum_k \mu_i(A_k)$$

Donc

$$\mu_i(A) \leq \sup_{l\in I}(\sum_k \mu_l(A_k)) \text{ pour tout i.}$$

Ainsi

$$\sup_i \mu_i(A) \leq \sup_{l\in I}(\sum_k \mu_l(A_k)) \leq \sum_k \sup_i \mu_i(A_k)$$

C'est-à-dire $\mu(A) \leq \sum_k \mu(A_k)$
Par conséquent, $\mu = \sup_i \mu_i$ est une mesure extérieure.

$\square$

Théorème 1.2 (Carathéodory, 1914) *Si μ est une mesure, alors la collection des ensembles μ-mesurables forme une σ-algèbre.*

Preuve :

On a immédiatement que E est mesurable. De plus, A^c est mesurable si et seulement si A est mesurables. Soient à présent A, B mesurables et $F \subset E$ quelconque. On a

$$\begin{aligned}
&\mu(F \cap (A \cup B)) + \mu(F \cap (A \cup B)^c) \\
&= \mu((F \cap A \cap B^c) \cup (F \cap A \cap B) \cup (F \cap A^c \cap B)) + \mu(F \cap A^c \cap B^c) \\
&\leq (F \cap A \cap B^c) + \mu(F \cap A \cap B) + \mu(F \cap A^c \cap B) + \mu(F \cap A^c \cap B^c) \\
&= \mu(F \cap A) + \mu(F \cap A^c) = \mu(F)
\end{aligned}$$

en utilisant la sous-additivité de μ, la mesurabilité de B, puis celle de A. Ainsi

$$\mu(F \cap (A \cup B)) + \mu(F \cap (A \cup B)^c) \leq \mu(F) \text{ pour tout } F$$

La définition de μ nous donne l'inégalité inverse. Donc $A \cup B$ est mesurable, ie $A^c \cap B^c$ est mesurable, donc $A \cap B$ est mesurable.

Il reste à démontrer qu'une réunion dénombrable d'ensembles mesurables est encore mesurable. Pour cela, il suffit de prouver l'inégalité

$$\mu(F \cap \bigcup_k A_k) + \mu(F \cap (\bigcup_k A_k)^c) \leq \mu(F) \text{ pour tout } F$$

car l'inégalité inverse découle de la sous-additivité de μ. On peut supposer les A_k deux à deux disjoints quitte à remplacer A_k par $A_k \setminus \bigcup_{l<k} A_l$. Pour tout n, on a donc

$$\begin{aligned}
&\mu(F \cap \bigsqcup_k A_k) + \mu(F \cap (\bigsqcup_k A_k)^c) \\
&\leq \mu(F \cap \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k) + \mu(F \cap \bigsqcup_{k>n} A_k) + \mu(F \cap (\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k)^c) \\
&= \mu(F) + \mu(F \cap \bigsqcup_{k>n} A_k)
\end{aligned}$$

car tout réunion fini d'ensembles mesurables est mesurable. Si $\mu(F) = \infty$, l'inégalité à démontrer est trivialement satisfaite. Sinon, il suffit de montrer que la série $\sum_k \mu(F \cap A_k)$ est convergente. Or, vu que les A_k sont mesurables et deux à deux disjoints, on a les égalités suivantes

$$\mu(F) = \mu(F \cap A_1) + \mu(F \cap A_1^c)$$
$$= \mu(F \cap A_1) + \mu((F \cap A_1^c) \cap A_2) + \mu((F \cap A_1^c) \cap A_2^c)$$
$$= \mu(F \cap A_1) + \mu(F \cap A_2) + \mu(F \cap A_1^c \cap A_2^c)$$
$$= \mu(F \cap A_1) + \mu(F \cap A_2) + \mu((F \cap A_1^c \cap A_2^c) \cap A_3) + \mu((F \cap A_1^c \cap A_2^c) \cap A_3^c)$$
$$= \mu(F \cap A_1) + \mu(F \cap A_2) + \mu(F \cap A_3) + \mu(F \cap A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c)$$

Par induction, on obtient que $\mu(F) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(F \cap A_k)$ pour m quelconque. Donc $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(F \cap A_k)$ converge et ainsi $\sum_{k>n} \mu(F \cap A_k) \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

$\square$

Corollaire 1.3 *Si $\{A_k\}$ est une suite d'ensembles mesurables, alors $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ et $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ sont mesurables.*

Preuve :

Du théorème 1.2, on a que $\bigcup_{k=1}^{\infty}$ est mesurable. La loi de Morgan : $(\bigcap_k A_k)^c = \bigcup_k A_k^c$ permet alors de conclure que $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ est mesurable.

$\square$

Théorème 1.4 *Soient μ une mesure et $\{A_k\}$ une suite d'ensembles mesurables. Alors :*

(i) Si les A_k sont deux à deux disjoints, alors

$$\mu(\bigsqcup_k A_k) = \sum_k \mu(A_k)$$

(ii) Si $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, alors

$$\lim_{k \to \infty} \mu(A_k) = \mu(\bigcup_k A_k)$$

(iii) Si $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ et $\mu(A_1) < \infty$, alors

$$\lim_{k \to \infty} \mu(A_k) = \mu(\bigcap_k A_k)$$

Preuve :

(i) Supposons que les A_k sont deux à deux disjoints. La mesurabilité de A_1 nous donne

$$\begin{aligned}
\mu(\bigsqcup_k A_k) &= \mu(\bigsqcup_k A_k \cap A_1) + \mu(\bigsqcup_k A_k \setminus A_1) \\
&= \mu(A_1) + \mu(\bigsqcup_{k>1} A_k)
\end{aligned}$$

En répétant cet argument, on obtient par induction que pour tout n

$$\begin{aligned}\mu(\bigsqcup_k A_k) &= \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) + \mu(\bigsqcup_{k>n} A_k) \\ &\geq \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)\end{aligned}$$

En prenant la limite lorsque $n \to \infty$, on obtient

$$\mu(\bigsqcup_k A_k) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

De plus, on a l'inégalité inverse par définition de μ.

Remarque Du point (i), on a donc :

si $A \subset B$, alors $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

(ii) Posons $B_1 := A_1$ et $B_k := A_k \setminus A_{k-1}$ pour $k \geq 2$. Alors les B_k sont mesurables et deux à deux disjoints, $A_k = \bigsqcup_{i=1}^{k} B_i$ et $\bigcup_k A_k = \bigsqcup_k B_k$. Le point (i) nous donne alors les deuxième et troisième égalités suivantes :

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) &= \lim_{k\to\infty} \mu(\bigsqcup_{i=1}^{k} B_i) \\ &= \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \mu(B_i) \\ &= \mu(\bigsqcup_k B_k) \\ &= \mu(\bigcup_k A_k)\end{aligned}$$

(iii) Posons $B_0 := \bigcap_k A_k$, $B_k := A_k \setminus A_{k+1}$ pour $k \geq 1$. Alors les B_i sont mesurables et deux à deux disjoints et $A_1 = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_i \cup B_0$.
Posons $C_k := \bigsqcup_{i=1}^{k} B_i = A_1 \setminus A_{k+1}$. Alors $C_1 \subset C_2 \subset \dots$, $A_1 = \bigcup_k C_k \cup B_0$ et $B_0 \cap C_k = \emptyset$ pour tout k.
Le point (ii) nous donne la deuxième égalité suivante :

$$\begin{aligned}\mu(A_1) &= \mu(B_0) + \mu(\bigcup_k C_k) \\ &= \mu(B_0) + \lim_{k\to\infty} \mu(\bigcup_{i=1}^{k} C_i) \\ &= \mu(B_0) + \lim_{k\to\infty} \mu(A_1 \setminus A_{k+1}) \\ &= \mu(B_0) + \lim_{k\to\infty} (\mu(A_1) - \mu(A_{k+1}))\end{aligned}$$

D'où $\lim\limits_{k\to\infty}\mu(A_k) = \mu(B_0) = \mu(\bigcap\limits_k A_k)$.

$\square$

Définition 1.6 *Soit μ une mesure sur un espace topologique E. On dit que μ est* ***borélienne*** *si tout ensemble borélien de E est mesurable.*

Théorème 1.5 (Carathéodory) *Soient E un espace métrique et μ une mesure métrique sur E. Alors μ est une mesure borélienne.*

Preuve :

$\mathcal{B}(E)$, la σ-algèbre de tous les boréliens de E, étant engendrée par les fermés de E, il suffit de montrer que les fermés de E sont mesurables.
Soit donc $C \subset E$ un fermé.
Posons
$D_0 := \{ x \in E \mid dist(x,C) \geq 1 \}$ et $D_n := \{ x \in E \mid \frac{1}{2^n} \leq dist(x,C) < \frac{1}{2^{n-1}} \}$ pour $n \geq 1$
A montrer : $\mu(F) = \mu(F\cap C) + \mu(F \cap C^c)$ pour tout $F \subset E$.
Par définition de μ, on a

$$\mu(F) = \mu((F\cap C)\cup(F\cap C^c)) \leq \mu(F\cap C) + \mu(F\cap C^c)$$

Il reste donc à montrer que $\mu(F) \geq \mu(F\cap C) + \mu(F\cap C^c)$ pour tout $F \subset E$.
Par conséquent on peut choisir F tel que $\mu(F) < \infty$.
Clairement, D_i et D_j sont des ensembles distants si $|i-j| > 1$, d'où pour m quelconque

$$\begin{aligned}\mu(F) &\geq \mu(F\cap(\bigsqcup_{k=0}^{m} D_{2k}))\\ &= \sum_{k=0}^{m}\mu(F\cap D_{2k})\end{aligned}$$

Puisque la même inégalité est valable pour 2k+1 au lieu de 2k, on obtient que la série infinie $\sum_{k=0}^{m}\mu(F\cap D_k)$ est convergente.
A présent, vu que C et $\bigsqcup_{k=0}^{m} D_k$ sont des ensembles distants, on a pour tout $m \geq 0$

$$\begin{aligned}\mu(F) &\geq \mu((F\cap C)\cup(F\cap\bigsqcup_{k=0}^{m} D_k))\\ &= \mu(F\cap C) + \mu(F\cap\bigsqcup_{k=0}^{m} D_k)\end{aligned}$$

De plus,

$$\mu(F\cap C^c) \leq \mu(F\cap\bigsqcup_{k=0}^{m} D_k) + \mu(F\cap\bigsqcup_{k>m} D_k)$$

Donc

$$\begin{aligned}\mu(F) &\geq \mu(F\cap C)+\mu(F\cap C^c)-\mu(\bigsqcup_{k>m} D_k)\\ &\geq \mu(F\cap C)+\mu(F\cap C^c)-\sum_{k>m}\mu(F\cap D_k)\end{aligned}$$

Or $\sum_k \mu(F\cap D_k)$ est finie, donc $\sum_{k>m}\mu(F\cap D_k)\to 0$ lorsque $m\to\infty$. Ainsi $\mu(F)\geq \mu(F\cap C)+\mu(F\cap C^c)$.

□

Corollaire 1.6 *Une mesure métrique est additive sur les boréliens disjoints.*

□

Chapitre 2

La dimension de Hausdorff

Dans ce deuxième chapitre nous allons développer la notion de dimension de Hausdorff. Pour cela, nous commencerons par définir la mesure de Hausdorff. Ensuite, nous en donnerons quelques propriétés et nous terminerons par des exemples de calcul de la dimension de Hausdorff de fractals célèbres.

Tout au long de ce chapitre, (E, d) désignera un espace métrique.

2.1 Définitions

Définition 2.1 *Soit $U \subset E$ un ensemble non-vide. Le **diamètre** de U est donné par $|U| = \sup\{ d(x, y) \mid x, y \in U \}$.*
*Si $\{U_i\}$ est une famille dénombrable de sous-ensembles de E de diamètre au plus δ qui recouvre $F \subset E$ (ie $F \subset \bigcup_i U_i$), on dit que $\{U_i\}$ est un δ-**recouvrement** de F.*

Définition 2.2 *Soit $s \geq 0$ et posons*

$$\omega_s := \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(1 + \frac{s}{2})} \text{ où } \Gamma(t) := \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx.$$

Si $\delta \in]0, \infty]$ et $F \subset E$, on définit

$$\mathcal{H}^s_\delta(F) := \frac{\omega_s}{2^s} \inf\{ \sum_i |U_i|^s \mid \{U_i\} \text{ est un } \delta\text{-recouvrement de } F \}.$$

*Finalement, on définit la **mesure s-dimensionnelle de Hausdorff** de F*

$$\mathcal{H}^s(F) := \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^s_\delta(F) = \lim_{\delta \to 0} \downarrow \mathcal{H}^s_\delta(F).$$

Remarque Dans le cas où s est entier, ω_s est le volume de la boule de rayon 1 dans $\mathbb{R}^s$. Ici, $\mathcal{H}^s$ a été définie avec la constante $\frac{\omega_s}{2^s}$ afin d'obtenir, lorsque s est entier, l'égalité remarquable $\mathcal{H}^s = \mathcal{L}^n$ (qui sera développée plus loin). Mais elle est parfois définie sans cette constante de normalisation.

Nous allons à présent justifier la définition précédente.

Théorème 2.1 *Pour tout $s \geq 0$ et tout $\delta \in]0, \infty[$, $\mathcal{H}^s_\delta$ et $\mathcal{H}^s$ sont des mesures extérieures.*

Preuve :

Soient $\delta \in]0, \infty[$ et $s \geq 0$. Clairement, $\mathcal{H}^s_\delta(\emptyset) = 0$ et $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$.
Soient $F \subset \bigcup_{i \geq 1} F_i$, $1 > \varepsilon > 0$ et pour chaque i soit $\{E^i_j\}_{j \in J_i}$ un δ-recouvrement de F_i tel que

$$\frac{\omega_s}{2^s} \sum_{j \in J_i} |E^i_j|^s \leq \mathcal{H}^s_\delta(F_i) + \varepsilon^i$$

Alors $\bigcup_i \{E^i_j\}_{j \in J_i}$ est un δ-recouvrement de F.
D'où

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^s_\delta(F) &\leq \frac{\omega_s}{2^s} \sum_{i \geq 1} \sum_{j \in J_i} |E^i_j|^s \\
&\leq \sum_i (\mathcal{H}^s_\delta(F_i) + \varepsilon^i) \\
&= \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} + \sum_i \mathcal{H}^s_\delta(F_i)
\end{aligned}$$

Vu l'arbitraire sur $\varepsilon > 0$, cela démontre la σ-sous-additivité de $\mathcal{H}^s_\delta$ et donc que $\mathcal{H}^s_\delta$ est une mesure extérieure.
La proposition 1.1, nous permet alors de conclure que $\mathcal{H}^s$ est aussi une mesure extérieure.

□

2.2 Propriétés

Propositon 2.2 *Si A et B sont des ensembles distants et $\delta < \frac{d(A,B)}{2}$, alors $\mathcal{H}^s_\delta(A \cup B) = \mathcal{H}^s_\delta(A) + \mathcal{H}^s_\delta(B)$.*

Preuve :

Soit $\{E_i\}_{i \in I}$ un δ-recouvrement de $A \cup B$. Soient $\{F_j\}_{j \in J}$ la sous-famille de $\{E_i\}$ qui recouvre A et $\{G_k\}_{k \in K}$ celle qui recouvre B. On a $\{F_j\} \cap \{G_k\} = \emptyset$ et $\{F_j\} \cup \{G_k\} = \{E_i\}$.
Donc

$$\sum_i |E_i|^s = \sum_j |F_j|^s + \sum_k |G_k|^s$$

Ainsi, vu l'arbitraire sur le δ-recouvrement,

$$\mathcal{H}^s_\delta(A \cup B) = \mathcal{H}^s_\delta(A) + \mathcal{H}^s_\delta(B)$$

□

Remarque $\mathcal{H}^s$ est donc une mesure métrique.

Lemme 2.3 *Si $F \subset E$, alors $\mathcal{H}^t_\delta(F) \leq \delta^{t-s}\mathcal{H}^s_\delta(F)$ pour tout $t > s \geq 0$.*

Preuve :

Soit U_i un δ-recouvrement de F ($\delta > 0$). Donc $\frac{|U_i|}{\delta} \leq 1$ pour tout i.
Soient $t > s \geq 0$, on a donc les implications successives des propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{|U_i|^t}{\delta^t} &\leq \frac{|U_i|^s}{\delta^s} \text{ pour tout i} \\ |U_i|^t &\leq \delta^{t-s}|U_i|^s \text{ pour tout i} \\ \sum_i |U_i|^t &\leq \delta^{t-s}\sum_i |U_i|^s \end{aligned}$$

On conclut en prenant l'infimum sur tous les δ-recouvrements.

□

Définition 2.3 *Une mesure μ est dite **Borel-régulière** si pour tout $A \subset E$, il existe un borélien B de E tel que $A \subset B$ et $\mu(A) = \mu(B)$.*

Théorème 2.4 *Soit $F \subset E$ et $s \geq 0$. Alors les assertions suivantes sont vraies :*

(i) *$\mathcal{H}^s$ est une mesure borélienne*

(ii) *$\mathcal{H}^s(F) > 0 \Rightarrow \mathcal{H}^{s'} = \infty$ si $s > s' \geq 0$*

(iii) *$\mathcal{H}^s$ est une mesure Borel-régulière*

(iv) *$\mathcal{H}^0$ est une mesure de comptage*

(v) *Supposons F tel que $\mathcal{H}^s_\delta(F) = 0$ pour un certain $\delta \in]0, \infty]$. Alors $\mathcal{H}^s(F) = 0$.*

(vi) *Soient (E', d') un espace métrique et $f : F \to E'$ une application telle qu'il existe des constantes $c, \alpha > 0$ avec*

$$d'(f(x), f(y)) \leq c\,(d(x,y))^\alpha \text{ pour tout } x, y \in F$$

Alors

$$\mathcal{H}^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}}\,\mathcal{H}^s(F)$$

(vii) *Si $f : F \to E'$ est une isométrie, alors $\mathcal{H}^s(f(F)) = \mathcal{H}^s(F)$.*

Preuve :

(i) $\mathcal{H}^s$ étant une mesure métrique (par la remarque précédente), le théorème 1.5 nous permet de conclure.

(ii) Du lemme 2.3, $\mathcal{H}^s_\delta(F) \leq \delta^{s-s'}\mathcal{H}^{s'}_\delta(F)$ pour tout $s > s' \geq 0$. Donc si $\delta \to 0$, on a l'implication $\mathcal{H}^{s'}(F) < \infty \Rightarrow \mathcal{H}^s(F) = 0$. La contraposée donne l'assertion.

(iii) Vu que $|U_i| = |\overline{U_i}|$, on peut se restreindre à des recouvrements fermés, dans la définition de $\mathcal{H}^s_\delta$. Choisissons F tel que $\mathcal{H}^s(F) < \infty$ (le cas où $\mathcal{H}^s(F) = \infty$ étant trivial). Pour tout n, on peut trouver un $\frac{1}{n}$-recouvrement fermé $\{U_i^n\}$ de F tel que

$$\frac{\omega_s}{2^s} \sum_i |U_i^n| \leq \mathcal{H}^s_{\frac{1}{n}}(F) + \frac{1}{n} \text{ pour tout } n$$

Posons $C_n := \bigcup_i U_i^n$ et $B := \bigcap_n C_n$. Alors $F \subset B$, B est borélien et pour tout $n \geq 1$

$$\mathcal{H}^s_{\frac{1}{n}}(B) \leq \mathcal{H}^s_{\frac{1}{n}}(C_n) \leq \frac{\omega_s}{2^s} \sum_i |U_i^n| \leq \mathcal{H}^s_{\frac{1}{n}}(F) + \frac{1}{n}$$

En prenant la limite lorsque $n \to \infty$, on obtient $\mathcal{H}^s(B) \leq \mathcal{H}^s(F)$. Puisque $A \subset B$, on a aussi l'inégalité inverse.

(iv) On a $\omega_o = 1$, donc $\mathcal{H}^0(\{a\}) = 1$ pour tout $a \in E$

(v) On conclut en remarquant que $\mathcal{H}^s_\delta$ décroît lorsque $\delta \to 0$.

(vi) Soit $\{U_i\}$ un δ-recouvrement de F. Puisque $|f(F \cap U_i)| \leq c\,|U_i|^\alpha$, il suit que $\{f(F \cap U_i)\}$ est un ε-recouvrement de $f(F)$, où $\varepsilon = c\,\delta^\alpha$. Ainsi

$$\sum_i |f(F \cap U_i)|^{\frac{s}{\alpha}} \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \sum_i |U_i|^s$$

nous donne

$$\mathcal{H}^{\frac{s}{\alpha}}_\varepsilon(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}}\, \mathcal{H}^s_\delta(F)$$

Vu que $\delta \to 0$ entraîne que $\varepsilon \to 0$, l'assertion est démontrée.

(vii) Soit $\{U_i\}$ un δ-recouvrement de F, alors $\{f(U_i)\}$ est un δ-recouvrement de $f(F)$ et $|f(U_i)| = |U_i|$, car f est une isométrie. Donc $\mathcal{H}^s_\delta(f(F)) = \mathcal{H}^s_\delta(F)$ pour tout $\delta > 0$. D'où la dernière assertion.

□

Le théorème précédent nous dit en particulier que la mesure de Hausdorff est invariante par translation et par rotation (dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$).

Propositon 2.5 *Si E est en plus un espace vectoriel et si $\lambda > 0$, alors*

$$\mathcal{H}^s(\lambda F) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F)$$

où $\lambda F = \{\, \lambda x \,|\, x \in F \,\}$.

Preuve :

Soit $\{U_i\}$ un δ-recouvrement de F, alors $\{\lambda U_i\}$ est un $\lambda\delta$-recouvrement de λF. D'où

$$\mathcal{H}^s_{\lambda\delta}(\lambda F) \leq \sum |\lambda U_i|^s = \lambda^s \sum |U_i|$$

Puisque cela est vrai pour tout δ-recouvrement, on a

$$\mathcal{H}^s_{\lambda\delta}(\lambda F) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s_\delta(F)$$

En faisant tendre $\delta \to 0$, on obtient $\mathcal{H}^s(\lambda F) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s(F)$.
En remplaçant λ par $\frac{1}{\lambda}$ et F par λF, on obtient l'inégalité inverse.

$\square$

2.3 Définition et propriétés de la dimension de Hausdorff

Définition 2.4 *Soit $F \subset E$. On définit alors* ***la dimension de Hausdorff*** *de F par le nombre suivant :*

$$dim_H F = \inf\{\, s \geq 0 \,|\, \mathcal{H}^s(F) = 0 \,\}$$

Remarque Par le point (ii) du théorème 2.4, $\mathcal{H}^s(F) = \infty$ si $s < dim_H F$ et $\mathcal{H}^s(F) = 0$ si $s > dim_H F$. Toutefois, on ne peut rien dire de général sur la valeur de $\mathcal{H}^s(F)$ lorsque $s = dim_H F$.

Propositon 2.6 *Les assertions suivantes sont vraies :*

(i) Si $F \subset G$, alors $dim_H F \leq dim_H G$.

(ii) Si $\{F_i\}_{i=1}^\infty$ est une suite d'ensembles, alors

$$dim_H \bigcup_i F_i = \sup_i \{dim_H F_i\}$$

(iii) Si F est dénombrable, alors $dim_H F = 0$

Preuve :

(i) Cela découle de la monotonie des mesures extérieures.

(ii) D'une part, $dim_H \bigcup_i F_i \geq dim_H F_j$ pour tout j. D'autre part, si $s > dim_H F_i$ pour tout i, alors $\mathcal{H}^s(F_i) = 0$. Donc $\mathcal{H}^s(\bigcup_i F_i) = 0$ par σ-sous-additivité, et cela nous donne $\sup_j \{dim_H F_j\} \geq dim_H \bigcup_i F_i$.

(iii) Vu que $\mathcal{H}^0(\{a\}) = 1$, on a $dim_H\{a\} = 0$ et le point (ii) nous permet de conclure.

$\square$

Soit (E', d') un espace métrique. On rappelle qu'une application $f : F \to E'$ est **lipschitzienne** s'il existe une constante k telle que

$$d'(f(x), f(y)) \leq k\, d(x,y) \text{ pour tout } x, y \in F.$$

On dit qu'elle est **bilipschitzienne** s'il existe des constantes $k_1, k_2 > 0$ telles que

$$k_1\, d(x,y) \leq d'(f(x), f(y)) \leq k_2\, d(x,y) \text{ pour tout } x, y \in F.$$

Propositon 2.7 *Soit $f : F \to E'$ une application.*

(i) Si f est telle qu'il existe des constantes $c, \alpha > 0$ avec

$$d'(f(x), f(y)) \leq c\,(d(x,y))^{\alpha} \text{ pour tout } x, y \in F$$

Alors $dim_H f(F) \leq \frac{1}{\alpha}\, dim_H F$.

(ii) Si f est lipschitzienne, alors $dim_H f(F) \leq dim_H F$.

(iii) Si f est bilipschitzienne, alors $dim_H f(F) = dim_H F$.

Preuve :

(i) Si $s > dim_H F$, alors $\mathcal{H}^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}}\, \mathcal{H}^s(F) = 0$ par le théorme 2.4. Donc $dim_H f(F) \leq \frac{s}{\alpha}$ pour tout $s > dim_H F$, ie $dim_H f(F) \leq \frac{1}{\alpha} dim_H F$.

(ii) Découle du point (i) avec $\alpha = 1$.

(iii) Découle du point (ii) appliqué à f et à $f^{-1} : f(F) \to F$.

□

On remarque que la dimension de Hausdorff est invariante par transformations bilipschitziennes.

2.4 Exemples de calcul de la dimension de Hausdorff

Nous allons donner dans ce paragraphe deux exemples de fractals appartenant à la même classe de fractals, celles des fractals autosimilaires. Nous calculerons d'abord leur dimension et nous donnerons ensuite une méthode élégante pouvant s'étendre à tous les fractals autosimilaires pour ce calcul.

Définition 2.5 *On dit qu'un borélien $F \subset \mathbb{R}^n$ est un* ***ensemble λ-autosimilaire à m blocs*** *s'il existe des ensembles $F_1, \ldots, F_m$ deux à deux disjoints tels que*

(i) $F = \bigsqcup_{i=1}^{m} F_i$

(ii) il existe une similitude f_i de rapport λ telle que $f_i(F_i) = F$

Exemple :

Considérons la construction suivante :

Etape 0 Soit un carré de côté 1 dans $\mathbb{R}^2$.

Etape 1 Diviser ce carré initial en 16 carrés de côté $\frac{1}{4}$ (ie de sorte que le carré initial contienne 4 lignes et 4 colonnes de 4 carrés chacun). Ne garder qu'un seul carré par ligne et par colonne.

Etape 2 Diviser chacun des 4 carrés restants en 16 carrés de côté $\frac{1}{4^2}$. A nouveau, ne garder qu'un seul carré par colonne et par ligne dans chacun des 4 carrés de l'étape précédente.

Et ainsi de suite ...
L'ensemble F ainsi obtenu est parfois appelée "poussière du carré unité" et est tel que $1 \leq \mathcal{H}^1(F) \leq \sqrt{2}$ et donc $dim_H F = 1$.

Preuve :

En prenant le δ-recouvrement de F constitué des 4^k carrés de côté 4^{-k} (ie $\delta = 4^{-k}\sqrt{2}$) de la k^e étape de la construction de F, on obtient $\mathcal{H}^1_\delta(F) \leq 4^k 4^{-k}\sqrt{2}$.
Lorsque $k \to \infty$, $\delta \to 0$ et on obtient $\mathcal{H}^1(F) \leq \sqrt{2}$. D'où $dim_H F \geq 1$.
A présent, soit π la projection orthogonale sur l'axe des abscisses. Vu que $|\pi(x) - \pi(y)| \leq |x - y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$, la proposition 2.7 nous donne $\mathcal{H}^s(\pi(F)) \leq \mathcal{H}^s(F)$ pour s quelconque. De plus, par construction de F, $\pi(F) = [0,1]$, donc $1 \leq \mathcal{H}^1(F)$ (car $\mathcal{H}^1([0,1]) = 1$, par le chapitre 3).

$\square$

Exemple :

Soit F l'ensemble triadique de Cantor. Si $s = \frac{\log 2}{\log 3}$, alors $dim_H F = s$ et $\frac{1}{2} \leq \mathcal{H}^s(F) \leq 1$.

Preuve :

Posons $s = \frac{\log 2}{\log 3}$ et appelons "intervalles de base" les intervalles de longueur 3^{-k} pour $k = 0, 1, 2, \ldots$ qui constituent l'ensemble E_k de la k^e étape dans la construction de F (à l'étape 0, on considère l'intervalle $[0,1]$; à l'étape 1, on considère les intervalles $[0, \frac{1}{3}]$ et $[\frac{2}{3}, 1]$; à l'étape 2, on considère les intervalles $[0, \frac{1}{9}]$, $[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}]$ et $[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}]$, $[\frac{8}{9}, 1]$; etc ...). Soit $\{U_i\}$ le recouvrement de F donné par les 2^k intervalles constituant E_k. On a donc

$$\mathcal{H}^s_{3^{-k}}(F) \leq \sum |U_i|^s = 2^k 3^{-ks} = 1$$

Lorsque $k \to \infty$, on obtient $\mathcal{H}^s(F) \leq 1$ et ainsi $dim_H F \leq s$.
Afin de prouver que $\mathcal{H}^s(F) \geq \frac{1}{2}$ (et donc que $dim_H F = s$), nous allons montrer que pour tout recouvrement $\{U_i\}$ de F

$$\sum_i |U_i|^s \geq \frac{1}{2} = 3^{-s} \ (*)$$

On peut supposer que les U_i sont des intervalles fermés. F étant compact, il suffit alors de démontrer $(*)$ pour un recouvrement fini consitué d'intervalles fermés de $[0,1]$.
Pour chaque U_i, soit k l'entier tel que

$$3^{-(k+1)} \leq |U_i| < 3^{-k} \ (**)$$

Ainsi U_i intersecte au plus un intervalle de base de E_k. Par construction, si $j \geq k$, alors U_i intersecte au plus 2^{j-k} intervalles de base de E_j. Avec $(**)$, on obtient que U_i intersecte au plus

$$2^{j-k} = 2^j 3^{-sk} \leq 2^j 3^s |U_i|^s \text{ intervalles de base de } E_j.$$

En prenant j assez grand pour que $3^{-(j+1)} \leq |U_i|$ pour tout U_i, on obtient que U_i intersecte au plus $2^j 3^s |U_i|^s$ intervalles de base de E_j et cela pour tout U_i. Ainsi, vu que $\{U_i\}$ recouvre les 2^j intervalles de base de longueur 3^{-j}, on a que $2^j \leq \sum_i 2^j 3^s |U_i|^s$. D'où $(*)$ et donc $\mathcal{H}^s(F) \geq \frac{1}{2}$.

□

A présent, nous allons démontrer la forme faible d'un lemme permettant de calculer aisément la dimension de Hausdorff de fractals autosimilaires.

Lemme 2.8 *Soit F un ensemble λ-autosimilaire à m blocs. Si $dim_H F = s$ et si $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$, alors*

$$dim_H F = \frac{\log m}{\log \lambda}$$

Preuve :

On a

$$\mathcal{H}^s(F) = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{H}^s(F_i) \text{ et } \mathcal{H}^s(F) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F_i)$$

Donc

$$\mathcal{H}^s(F) = m\lambda^{-s}\mathcal{H}^s(F) \text{ c'est-à-dire } m\lambda^{-s} = 1$$

□

Remarque L'hypothèse $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ n'est en fait pas nécessaire.

La poussière du carré unité étant un ensemble 4-autosimilaire à 4 blocs, sa dimension de Hausdorff est bien $\frac{\log 4}{\log 4} = 1$. L'ensemble triadique de Cantor est 3-autosimilaire à 2 blocs donc sa dimension est bien $\frac{\log 2}{\log 3}$. On obtient ainsi $\frac{\log 4}{\log 3}$ pour la dimension de Hausdorff du flocon de von Koch.

Chapitre 3

$\mathcal{L}^n = \mathcal{H}^n$

Dans ce chapitre, nous allons développer les outils nécessaires pour démontrer que, dans $\mathbb{R}^n$, la mesure de Hausdorff coïncide avec la mesure de Lebesgue.

3.1 Définition de la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$

Définition 3.1 ***La mesure (extérieure) n-dimensionnelle de Lebesgue*** *est définie pour tout $B \subset \mathbb{R}^n$, par*

$$\mathcal{L}^n(B) = \inf\{\sum_k r_k^n \,|\, B \subset \bigcup_k Q_k \text{ où chaque } Q_i \text{ est un cube de côté de } r_i\}$$

Remarque $\mathcal{L}^n$ est une mesure Borel-régulière.

3.2 Résultats préliminaires

Nous allons démontrer dans ce paragraphe un théorème de recouvrement dû à Vitali (1875-1932) qui nous servira à atteindre le but de ce chapitre.

Définition 3.2 *Soient $\mathcal{F}$ une famille d'ensembles fermés d'un espace métrique E et $B \subset E$. On dit alors que $\mathcal{F}$ est un* ***recouvrement fin*** *de B si pour tout $x \in B$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $V \in \mathcal{F}$ tel que $x \in V$ et $|V| < \varepsilon$.*

Théorème 3.1 (Vitali) *Soient (E,d) un espace métrique, $B \subset E$, $\alpha \geq 0$ et $\mathcal{F}$ un recouvrement fin de B. Alors il existe une sous-famille dénombrable d'ensembles disjoints $\{V_i\}$ de $\mathcal{F}$ satisfaisant l'une au moins des deux assertions suivantes :*

(i) $\sum_{i=1}^{\infty} |V_i|^{\alpha} = \infty$

(ii) $\mathcal{H}^{\alpha}(B \setminus \bigsqcup_{i=1}^{\infty} V_i) = 0$

Preuve :

Soit $\mathcal{F}_0 := \mathcal{F}$ et prenons $V_1 \in \mathcal{F}_0$ tel que

$$|V_1| > \frac{1}{2} \sup\{\, |V| \,|\, V \in \mathcal{F}_0 \,\}$$

Définissons par induction, pour $k \geq 1$

$$\mathcal{F}_k := \{\, V \in \mathcal{F} \,|\, V \cap \bigsqcup_{i=1}^{k} V_i = \emptyset \,\} \text{ et } d_k := \sup\{\, |V| \,|\, V \in \mathcal{F}_k \,\}$$

Si $d_k = 0$, on arrête l'induction. Sinon, on choisit $V_{k+1} \in \mathcal{F}_k$ tel que $|V_{k+1}| > \frac{1}{2} d_k$ et ainsi de suite. Si l'induction s'arrête, alors l'assertion (ii) est satisfaite. Supposons donc que notre induction ne s'arrête pas et que $\sum_{k=1}^{\infty} |V_k|^\alpha < \infty$. Prenons $x_i \in V_i$ pour chaque i et considérons un point arbitraire $x \in B \setminus \bigsqcup_{i=1}^{k} V_i$ pour un certain $k \geq 1$. Vu que les V_i sont fermés, il existe $V \in \mathcal{F}$ tel que $x \in V$ et $V \cap \bigsqcup_{i=1}^{k} V_i = \emptyset$. De la manière avec laquelle on a choisi V_{k+1}, on a que V satisfait $|V| < 2|V_{k+1}|$. En remarquant que $|V| < 2|V_n|$ si $n > k$ et si $V \cap \bigsqcup_{i=1}^{n} V_i = \emptyset$, et que $\lim_{n\to\infty} |V_n| = 0$ (vu la convergence de la série), on obtient que $V \cap V_n \neq \emptyset$ pour des $n > k$ assez grands. Soit n le plus petit indice satisfaisant ces conditions. Alors on a

$$|V| < 2|V_n| \text{ et } d(x, x_n) \leq |V| + |V_n| < 3\,|V_n|$$

Ainsi, x est contenu dans une boule de rayon $3\,|V_n|$ centrée en x_n (pour un certain n) si $x \in B \setminus \bigsqcup_{i=1}^{k} V_i$. Par conséquent, pour tout $\delta > 0$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^\alpha_\delta(B \setminus \bigsqcup_{i=1}^{k} V_i) &\leq \mathcal{H}^\alpha_\delta(\bigcup_{i=k+1}^{\infty} B(x_i, 3\,|V_i|)) \\ &\leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \mathcal{H}^\alpha_\delta(B(x_i, 3\,|V_i|)) \end{aligned}$$

Si k est tel que $4|V_i| < \delta$ pour tout $i > k$, alors

$$\mathcal{H}^\alpha_\delta(B \setminus \bigsqcup_{i=1}^{\infty} V_i) \leq \mathcal{H}^\alpha_\delta(B \setminus \bigsqcup_{i=1}^{k} V_i) \leq \frac{\omega_\alpha}{2^\alpha} \sum_{i=k+1}^{\infty} (6|V_i|)^\alpha$$

En prenant la limite lorsque $k \to \infty$, on obtient que $\mathcal{H}^\alpha_\delta(B \setminus \bigsqcup_{i=1}^{\infty} V_i) = 0$ et vu l'arbitraire sur $\delta > 0$, l'assertion (ii) est satisfaite.

$\square$

3.3 Inégalité isodiamétrique

Afin de démontrer l'inégalité isodiamétrique, nous allons introduire la notion de symétrisation de Steiner (1796-1863) et énoncer un lemme. Mais tout d'abord quelques notations.
Pour $a, b \in \mathbb{R}^n$ avec $|a| = 1$, on note $L_b^a := \{ b + ta \,|\, t \in \mathbb{R}^n \}$, la droite passant par b de direction a, et $P_a := \{ x \in \mathbb{R}^n \,|\, x.a = 0 \}$, le plan passant par l'origine et perpendiculaire à a.

Définition 3.3 *Soient $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $|a| = 1$ et $A \subset \mathbb{R}^n$. On dit que la* ***symétrisation de Steiner*** *de A par rapport au plan P_a est l'ensemble*

$$S_a(A) := \bigcup_{b \in P_a, A \cap L_b^a \neq \emptyset} \{ b + ta \,|\, |t| \leq \frac{1}{2}\mathcal{H}^1(A \cap L_b^a) \}$$

Lemme 3.2 (Propriétés de la symétrisation de Steiner) *La symétrisation de Steiner satisfait les assertions suivantes :*

(i) $|S_a(A)| \leq |A|$

(ii) Si A est $\mathcal{L}^n$-mesurable, alors $S_a(A)$ l'est aussi et de plus, $\mathcal{L}^n(S_a(A)) = \mathcal{L}^n(A)$

Théorème 3.3 (Inégalité isodiamétrique) *Pour tout ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$,*

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \omega_n(\frac{|A|}{2})^n$$

Preuve :

Si $|A| = \infty$, le résultat est trivial. Supposons donc que $|A| < \infty$ et soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On définit $A_1 := S_{e_1}(A)$, $A_2 := S_{e_2}, \dots$, $A_n := S_{e_n}(A_{n-1})$. Notons $A^\star := A_n$.

(i) $A^\star$ est symétrique par rapport à l'origine.
Montrons cela par induction sur n. Clairement, A_1 est symétrique par rapport à P_{e_1}. Soit k avec $1 \leq k < n$ et supposons que A_k soit symétrique par rapport à $P_{e_1}, \dots, P_{e_k}$. On a que $A_{k+1} = S_{e_{k+1}}(A_k)$ est symétrique par rapport à $P_{e_{k+1}}$. Fixons j avec $1 \leq j \leq k$ et soit $S_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la réflexion par rapport au plan P_{e_j}. Soit $b \in P_{e_{k+1}}$. Puisque $S_j(A_k) = A_k$, on a

$$\mathcal{H}^1(A_k \cap L_b^{e_{k+1}}) = \mathcal{H}^1(A_k \cap L_{S_j(b)}^{e_{k+1}})$$

Par conséquent,

$$\{ t \,|\, b + te_{k+1} \in A_{k+1} \} = \{ t \,|\, S_j(b) + te_{k+1} \in A_{k+1} \}$$

D'où $S_j(A_{k+1}) = A_{k+1}$, ie A_{k+1} est symétrique par rapport au plan P_{e_j}. Et ainsi, $A^\star = A_n$ est symétrique par rapport aux plans $P_{e_1}, \dots, P_{e_n}$ et donc par rapport à l'origine.

(ii) $\mathcal{L}^n(A^\star) \leq \omega_n(\frac{|A^\star|}{2})^n$.
En effet, soit $x \in A^\star$. Par le point (i), $-x \in A^\star$, et ainsi $|A^\star| \geq 2|x|$. D'où $A^\star \subset B(0, \frac{|A^\star|}{2})$ et par conséquent

$$\mathcal{L}^n(A^\star) \leq \mathcal{L}^n(B(0, \frac{|A^\star|}{2})) = \omega_n(\frac{|A^\star|}{2})^n$$

(iii) Finalement, $\mathcal{L}^n(A) \leq \omega_n(\frac{|A|}{2})^n$.
En effet, $\overline{A}$, l'adhérence de A, étant $\mathcal{L}^n$-mesurable, le lemme 3.2 implique

$$\mathcal{L}^n((\overline{A})^\star) = \mathcal{L}^n(\overline{A}) \text{ et } |\overline{A}|^\star \leq |\overline{A}|$$

D'où

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^n(A) &\leq \mathcal{L}^n(\overline{A}) = \mathcal{L}^n((\overline{A})^\star) \\
&\leq \omega_n(\frac{|\overline{A}^\star|}{2})^n \text{ par le point (ii)} \\
&\leq \omega_n(\frac{|\overline{A}|}{2})^n \\
&= \omega_n(\frac{|A|}{2})^n
\end{aligned}$$

□

Remarque Le point (ii) nous dit en particulier que l'on a une égalité dans le cas où A est une boule.

3.4 $\mathcal{L}^n = \mathcal{H}^n$

Théorème 3.4 *Pour tout ensemble $B \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{L}^n(B) = \mathcal{H}^n(B)$.*

Preuve :

Soit $B \subset \mathbb{R}^n$. Alors, étant donné que $\mathcal{L}^n$ et $\mathcal{H}^n$ sont des mesures Borel-régulières, on peut supposer B borélien et borné.
Soient $\delta > 0$ et $\{B_i\}_{i \in I}$ un δ-recouvrement de B. On a donc

$$\mathcal{L}^n(B) \leq \sum_i \mathcal{L}^n(B_i)$$

L'inégalité isodiamétrique donne

$$\mathcal{L}^n(B_i) \leq \frac{\omega_n}{2^n}|B_i|^n$$

Donc

$$\mathcal{L}^n(B) \leq \frac{\omega_n}{2^n}\sum_i |B_i|^n$$

Vu l'arbitraire du recouvrement, on a $\mathcal{L}^n(B) \leq \mathcal{H}^n_\delta(B)$ pour tout $\delta > 0$. D'où $\mathcal{L}^n(B) \leq \mathcal{H}^n(B)$.
Soit à présent un ouvert borné A tel que $B \subset A$. Posons

$$\mathcal{F} := \{\, \overline{B(x,r)} \,|\, x \in B, B(x,r) \subset A \text{ et } 0 < r < 2\delta \,\}$$

Du théorème du recouvrement de Vitali, il existe des suites $\{x_i\}$ et $\{r_i\}$ telles que $\{\overline{B(x_i,r_i)}\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ et que les $\overline{B(x_i,r_i)}$ soient deux à deux disjointes et $\mathcal{H}^n(B \setminus \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} \overline{B(x_i,r_i)}) = 0$.
Pour $\delta > 0$, vu que $\mathcal{H}^n_\delta(C) \leq \mathcal{H}^n(C)$ pour tout $C \subset \mathbb{R}^n$, on a

$$\mathcal{H}^n_\delta(B \setminus \bigsqcup_i \overline{B(x_i,r_i)}) = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^n_\delta(B) &= \mathcal{H}^n_\delta(\bigsqcup_i \overline{B(x_i,r_i)}) \leq \sum_i \mathcal{H}^n_\delta(\overline{B(x_i,r_i)}) \\
&\leq \frac{\omega_n}{2^n} \sum_i |B(x_i,r_i)|^n \leq \frac{\omega_n}{2^n} \sum_i (2r_i)^n \\
&= \sum_i \mathcal{L}^n(\overline{B(x_i,r_i)}) \leq \mathcal{L}^n(A)
\end{aligned}$$

Vu l'arbitraire sur $\delta > 0$, on obtient $\mathcal{H}^n(B) \leq \mathcal{L}^n(A)$. En outre, $\mathcal{L}^n$ étant Borel-régulière et A étant borélien, on a $\mathcal{L}^n(B) = \mathcal{L}^n(A)$. Donc $\mathcal{H}^n(B) \leq \mathcal{L}^n(B)$. D'où le théorème.

□

Chapitre 4

Dimension de Hausdorff de structures algébriques

Dans ce paragraphe, nous allons nous occuper de sous-ensembles de $\mathbb{R}$ possédant une certaine structure algébrique. Il y a beaucoup d'exemples simples : les entiers (relatifs), les rationnels et $\{ r + s\sqrt{-7} \mid r, s \in \mathbb{Z} \}$ sont des sous-anneaux (donc des sous-groupes) de $\mathbb{R}$ muni des opérations usuelles. Ces ensembles étant dénombrables, ils ont par conséquent une dimension de Hausdorff nulle. On peut alors se demander s'il existe des sous-groupes ou des sous-anneaux de $\mathbb{R}$ ayant pour dimension de Hausdorff s si $0 < s < 1$.

Pour $0 < s < 1$, il existe en effet un sous-groupe additif G_s de $\mathbb{R}$ tel que $dim_H G_s = s$. Cet exemple n'est pas trivial à analyser et ne sera pas développer ici. En ce qui concerne les sous-anneaux de $\mathbb{R}$, ils peuvent être encore plus difficiles à analyser.

Nous allons énoncer un lemme qui va nous permettre de montrer qu'il n'existe aucun sous-anneaux boréliens de $\mathbb{R}$ ayant une dimension de Hausdorff strictement comprise entre $\frac{1}{2}$ et 1.

Pour $c \in \mathbb{R}$ quelconque, définissons l'application continue $\psi_c : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\psi_c(x, y) = x + cy$.

Lemme 4.1 *Si E est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^2$ tel que $dim_H E \leq 1+d$ avec $0 < d < 1$, alors $dim_H\{c \in \mathbb{R} | dim_H \psi_c(E) \leq d\} \leq 1+d-dim_H E$.*

La preuve de ce lemme faisant intervenir des résultats de la théorie du potentiel ne sera pas donnée ici. (cf. [5])

Théorème 4.2 *Soit A un sous-anneau de $\mathbb{R}$ muni de l'addition et de la multiplication usuelles. Si d est le supremum des dimensions de Hausdorff des sous-ensembles compacts de A, alors soit $d \leq \frac{1}{2}$ soit $d = 1$.*

Preuve :

Supposons que $d < 1$. Soit $\varepsilon > 0$ et F un sous-ensemble compact de A tel que $dim_H F > d - \varepsilon$. Par une formule sur le produit cartésien ([4] formule 7.2), on a $dim_H(F \times F) > 2d - 2\varepsilon$. Si $x, y, c \in A$, alors $\psi_c(F \times F) \subset \psi_c(A \times A) \subset A$ et donc, $\psi_c(F \times F)$ étant compact, $dim_H(F \times F) \leq d$ si $c \in A$.
En appliquant le lemme précédent à $F \times F$, on a

$$\begin{aligned} d - \varepsilon &\leq dim_H F \\ &\leq dim_H A \\ &\leq dim_H \{ c \in \mathbb{R} \mid \psi_c(F \times F) \leq d \} \\ &\leq 1 + d - dim_H(F \times F) \\ &\leq 1 + d - 2d + 2\varepsilon \end{aligned}$$

D'où $2d < 1 + 3\varepsilon$. Vu l'arbitraire sur ε, cela démontre le théorème.

□

Corollaire 4.3 *Soit A un sous-anneau de $\mathbb{R}$. Alors, si A est borélien soit $dim_H A \leq \frac{1}{2}$ soit $dim_H A = 1$.*

Preuve :

Soit A un sous-anneau borélien de $\mathbb{R}$.
Posons $k := \sup\{ dim_H K \mid K \subset A \text{ compact } \}$.
Si $dim_H A = k$, alors le théorème 4.2 nous donne la conclusion du corollaire.
Il reste donc à vérifier que $dim_H A = k$. L'inégalité $dim_H A \geq k$ est évidente.
Pour démontrer l'autre, nous allons utiliser le résultat suivant ([6] théorème 8.13) :
Pour tout borélien B de $\mathbb{R}$ et pour tout $s \geq 0$,

$$\mathcal{H}^s(B) = \sup\{ \mathcal{H}^s(C) \mid C \subset B \text{ compact avec } \mathcal{H}^s(C) < \infty \}$$

Vu ce résultat, pour tout $s < dim_H A$ (donc $\mathcal{H}^s(A) = \infty$), il existe un compact $K_s \subset A$ tel que $\mathcal{H}^s(K_s) > 0$. Donc $dim_H K_s \geq s$ et ainsi $k \geq dim_H A$.

□

Remarque Le résultat énoncé dans la preuve est faux si B n'est pas supposé borélien, car il existe un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ (dit "de Bernstein") tel que

(i) $\mathcal{L}^1(A) > 0$ (et donc $dim_H A = 1$)

(ii) tout compact $K \subset A$ est fini ou dénombrable (et donc $dim_H K = 0$)

Remarque Le problème de savoir s'il existe des sous-anneaux de $\mathbb{R}$ non-boréliens ayant leur dimension de Hausdorff comprise strictement entre $\frac{1}{2}$ et 1 n'est pas encore résolu. Toutefois il semblerait que cela soit improbable ([4] paragraphe 12.4)

Bibliographie

[1] Ambrosio L., *Geometric Measure Theory and Applications to the Calculus of Variations*, 1999.

[2] Bouvier A., George M. et Le Lionnais F., *Dictionnaire des Mathématiques*, 5ème édition, Presses Universitaires de France, Paris, 1996.

[3] Evans L.C. et Gariepy R.F., *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, Florida, 1992.

[4] Falconer K.J., *Fractal Geometry : Mathematical Fundations and Applications*, John Wiley & Sons, Chichester, 1990.

[5] Falconer K.J., *Rings of fractional dimension*, Mathematatika, 31, 25-27, 1984.

[6] Matilla P., *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces*, Cambridges Studies in Advanced Mathematics, 1995.