Projet de Semestre

été 2005

Fibrés Vectoriels

Oliver Prosperi

Professeur Responsable:

prof. K. Hess Bellwald

Table des matières

Résumé 2
Table des notations 2

Introduction 3

Chapitre 1. $\mathbb{K}$-familles 5
1. Notions de base 5
2. Morphismes 6
3. $\mathbb{K}$-famille triviale 8
4. Restrictions et $\mathbb{K}$-familles induites 10

Chapitre 2. Fibrés Vectoriels 13
1. Fibré vectoriel 13
2. Théorèmes de recollement 14
3. Opérations sur le Fibrés Vectoriels 20
4. Sections de Fibrés Vectoriels 25
5. Théorie de l'Homotopie des Fibrés Vectoriels 31
6. Propriétés algébriques 34

Bibliographie 49

Index 51

Résumé

En partant de la structure de base de $\mathbb{K}$-famille, nous introduisons la notion de fibré vectoriel sur un espace topologique. Nous montrons ensuite des propriétes essentielles des fibrés vecoriels, en particulier les recollements, le lien avec les G-cocycles, les fibrés induits, la possibilité d'effectuer des opérations comme la somme directe, et le concept de section, on observe les fibrés avec les "lunettes" de la théorie de l'homotopie. Finalement, nous étudions les propriétés algébriques des fibrés vectoriels pour conclure avec l'important théorème de Serre-Swan qui fait le pont entre les fibrés vectoriels et les modules projectifs de type fini et qui a une grande importance en $\mathbb{K}$–théorie.

Table des notations

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long du travail:

$\mathbb{K}_{fam}$	la catégorie des $\mathbb{K}$-familles
$\mathbb{K}_{fam}(X)$	la catégorie des $\mathbb{K}$-familles sur X
π_i	la projection sur le i-ème facteur
$f^*(\xi)$	la $\mathbb{K}$-famille induite par f de ξ
$\xi_{\vert X'}$ ou $E_{X'}$	la réstriction de ξ à $X' \subset X$
$\mathrm{H}^1(X, G)$	l'ensemble des classes d'équivalence des G-cocylces
$\mathscr{C}(E, F)$	les morphismes de E vers F dans la catégorie $\mathscr{C}$
$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(E, F)$	les morphismes de E vers F dans la catégorie $\mathscr{C}$
$A := C_{\mathbb{K}}(X)$	l'anneau des fonctions continues à valeur dans $\mathbb{K}$
$\Gamma(X, E) = \Gamma(E)$	l'ensemble des sections continues sur le fibré (E, p, X)
θ_n	le fibré trivial de rang n

Introduction

Dans le cadre du "Projet de l'Index", qui regroupe quatorze projets individuels dont le but commun est de s'approcher du Théorème de l'indice d'Atiyah et Singer, ce projet vise à introduire les notions principales liées à la théorie des fibrés vectoriels sur un espace topologique, afin de permettre une introduction à la K–théorie topologique

Dans ce texte on utilise souvent des concepts liés à la théorie des catégories qui n'appartiennent pas directement au sujet étudié ici. Pour avoir plus de détails sur la théorie des catégories je recommande la lecture de projet de Xavier Alexandre "Théorie des Catégories" **[7]** qui fait aussi partie de l'ambitieux projet de l'index.

Tout au long de l'œuvre on applique la convention que $\mathbb{K}$ est soit le corps $\mathbb{R}$ soit le corps $\mathbb{C}$, et π_i représente la projection sur le i-ème facteur d'un produit. De plus on utilise deux notations, $\mathscr{C}(E, F)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(E, F)$, pour indiquer les morphismes de E vers F dans la catégorie $\mathscr{C}$.

Il ne me reste plus qu'a vous souhaiter un bonne lecture !

CHAPITRE 1

$\mathbb{K}$-familles

1. Notions de base

Définition 1.1. Soient E et X deux espaces topologiques. Soit $p : E \longrightarrow X$ une application continue telle que pour tout $x \in X$:

(1) $E_x = p^{-1}(x)$ est muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie ;

(2) la topologie sur E induit la topologie naturelle sur chaque E_x

On appelle alors

X: l'espace de base

E: l'espace totale

p: la projection

E_x: la fibre de E en x

(E, p, X): une $\mathbb{K}$-*famille sur X*

Remarque 1.2. (1) On a que $\emptyset$ n'est pas un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, donc $p^{-1}(x) \neq \emptyset \quad \forall x \in X$ et donc p est surjective.

(2) $E = \coprod_{x \in X} E_x$, la réunion disjointe des espaces E_x. En effet si $p(z) = x$, alors $z \in E_x$ et $z \notin E_{x'}$ pour tout $x' \neq x$.

Exemple 1.3. Soit X la sphère $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$. Pour tout point x de S^n on choisit E_x comme étant l'espace vectoriel orthogonal à x. Alors $E = \coprod_{x \in X} E_x \subset S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ est muni de la topologie induite. On pose $p : E \longrightarrow S^n$ la projection sur la première composante : $p(z) = x$ avec $z \in E_x$.
Alors (E, p, S^n) est une $\mathbb{K}$-famille.

Exemple 1.4. La $\mathbb{K}$-*famille produit sur X avec fibre F* est $(X \times F, p, X)$ ou $p : X \times F \longrightarrow X$ est la projection sur le premier facteur, F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $p^{-1}(x) = \{x\} \times F \cong F$.
Ainsi $X \times F = \coprod_{x \in X} \{x\} \times F$.

NOTATION 1.5. On note une $\mathbb{K}$-famille avec une lettre grècque $(\xi, \eta, \zeta, \dots)$ $\xi = (E, p, X)$.

2. Morphismes

DÉFINITION 1.6. Soient $\xi = (E, p, X)$ et $\xi' = (E', p', X')$ deux $\mathbb{K}$-familles. Un *morphisme* de ξ vers ξ' est un couple (f, g) d'applications continues $f : X \longrightarrow X'$ et $g : E \longrightarrow E'$ telles que :

(1) $p'g = fp$, donc telles que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\quad g \quad} & E' \\ {\scriptstyle p}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle p'} \\ X & \xrightarrow{\quad f \quad} & X' \end{array}$$

(2) L'application induite par g à chaque $x \in X$, $g_x : E_x \longrightarrow E'_{f(x)}$ définie par $g_x(z) = g(z)$, soit $\mathbb{K}$-linéaire.

REMARQUE 1.7. Si $(f, g) : (E, p, X) \longrightarrow (E', p', X')$ et $(f', g') : (E', p', X') \longrightarrow (E'', p'', X'')$ sont des morphismes de $\mathbb{K}$-famille, alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{\quad g \quad} & E' & \xrightarrow{\quad g' \quad} & E'' \\ {\scriptstyle p}\big\downarrow & & {\scriptstyle p'}\big\downarrow & & {\scriptstyle p''}\big\downarrow \\ X & \xrightarrow{\quad f \quad} & X' & \xrightarrow{\quad f' \quad} & X'' \end{array}$$

En effet on a $fp = p'g$ et $f'p' = p''g'$ et donc $p''g'g = f'p'g = f'fp$.

De plus l'application $(g'g)_x : E_x \longrightarrow E''_{f'f(x)}$ définie par $(g'g)_x(z) = g'_{f(x)}(g(z))$ est $\mathbb{K}$-linéaire. En effet on a

$$E_x \xrightarrow{\quad g_x \quad} E'_{f(x)} \xrightarrow{\quad g'_{f(x)} \quad} E''_{f'f(x)}$$

et donc

$$\begin{aligned} (g'g)_x(\alpha y + \beta z) &= g'_{f(x)}(g_x(\alpha y + \beta z)) \\ &= \alpha g'_{f(x)} g_x(y) + \beta g'_{f(x)} g_x(z) \\ &= \alpha (g'g)_x(y) + \beta (g'g)_x(z) \end{aligned}$$

Par conséquent les compositions $g'g$ et $f'f$ induisent un morphisme de $\mathbb{K}$-familles $(f'f, g'g) : (E, p, X) \longrightarrow (E'', p'', X'')$ qui est défini comme étant la composition $(f'f, g'g) = (f', g') \circ (f, g)$ de (f, g) et (f', g').

On peut donc construire une catégorie où les objets sont les $\mathbb{K}$-familles et les flèches sont les morphismes de $\mathbb{K}$-familles. Le morphisme identité est donné par le morphisme (id_X, id_E) et l'associativité découle de l'associativité de la composition

d'applications continues.
On note cette catégorie $\mathbb{K}_{fam}$

Cas particulier

Si ξ et ξ' ont la même base X, un morphisme entre ξ et ξ' est un morphisme (f, g) au sens de la définition (1.6) avec $f = id_X$.
Le diagramme suivant doit donc être commutatif :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

On note g à la place de $(f, g) = (id_x, g)$.
Les $\mathbb{K}$-familles de même base X et les morphismes g forment une sous-catégorie de $\mathbb{K}_{fam}$ noté $\mathbb{K}_{fam}(X)$.

Définition 1.8. Soit $(f.g) : (E, p, X) \longrightarrow (E', p', X')$ un morphisme de $\mathbb{K}$-familles. (f, g) est un *isomorphisme* s'il existe un morphisme $(f', g') : (E', p', X') \longrightarrow (E, p, X)$ tel que la composition $(f', g') \circ (f, g) = (f'f, g'g) = (id_X, id_E)$ et
$(f, g) \circ (f', g') = (ff', gg') = (id_{X'}, id_{E'})$

Remarque 1.9. Si (f, g) est un isomorphisme, alors il existe un unique (f, g') tel que $(f'f, g'g) = (id_X, id_E)$ et $(ff', gg') = (id_{X'}, id_{E'})$.
En effet, si (f'', g'') est un autre tel morphisme, on obtient

$$\begin{aligned} g''(z') &= g''(id_{E'}(z')) \\ &= g''gg'(z') \\ &= id_E(g'(z')) \\ &= g'(z'), \text{ pour tout } z' \in E' \text{ et} \end{aligned}$$

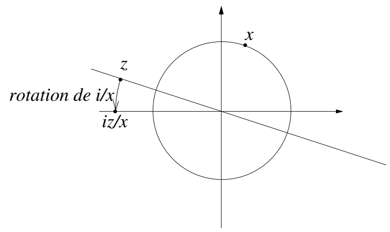
$$\begin{aligned} f''(x') &= f''(id_{X'}(x')) \\ &= f''ff'(x') \\ &= id_X(f'(x')) \\ &= f'(x'), \text{ pour tout } x' \in X' \end{aligned}$$

Donc $(f', g') = (f'', g'')$. On appelle (f',g') le morphisme inverse de (f, g) et on le note $(f, g)^{-1}$.

Définition 1.10. Deux $\mathbb{K}$-familles sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme entre les deux.

Exemple 1.11. Reprenons l'exemple (1.3) et posons $n = 1$. On a $\xi = (E, p, X)$, $E \subset S^1 \times \mathbb{R}^2$. Posons en plus $\xi' = (S^1 \times \mathbb{R}, \pi, S^1)$ où $S^1 \times \mathbb{R}$ a la topologie produit et π est la projection sur le premier facteur. Si on identifie $\mathbb{R}^2$ avec le corps des nombres complexes comme d'habitude, on définit
$g : E \longrightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ par $g(x, z) = (x, \frac{iz}{x})$.

Alors g est un morphisme de $\mathbb{K}$-famille sur S^1 et en fait, c'est aussi un isomorphisme.



3. $\mathbb{K}$-famille triviale

DÉFINITION 1.12. Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $E = X \times V$, $p : E \longrightarrow X$ la projection sur le premier facteur et $E_x = x \times V$ pour tout $x \in X$.
Alors $(E, p, X) = (X \times V, p, X)$ est appelé $\mathbb{K}$-*famille triviale*.

On aimerait maintenant décrire les morphismes entre deux $\mathbb{K}$-familles triviales de même base X, $E = X \times V$ et $E' = X \times V'$.
Soit donc $g : E \longrightarrow E'$ un morphisme de $\mathbb{K}$-famille, le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} X \times V \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "p"'] & & X \times V' \arrow[dl, "p'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

est alors commutatif, donc $p'g = p$ et ainsi

$$\begin{aligned} & p'g(x,v) = p(x,v) \\ \Leftrightarrow & p'(x',v') = x \\ \Leftrightarrow & x' = x \end{aligned}$$

Donc pour tout $(x, v) \in X \times V$ on a $g(x, v) = (x, v')$ où $v' = \pi_2 \circ g(x, v) \in V'$.
Ceci implique que pour tout point x de X, g induit une application linéaire

$$g_x : V \longrightarrow V'$$

définie par $g_x(v) = \pi_2 \circ g(x, v)$ (où on identifie $\{x\} \times V$ avec V et $\{x\} \times V'$ avec V').

Posons $\breve{g} : X \longrightarrow \mathscr{L}(V, V')$ définie par $\breve{g}(x) = g_x$ (où $\mathscr{L}(V, V)$ est l'espace des applications linéaires de V vers V').

THÉORÈME 1.13. *L'application $\breve{g} : X \longrightarrow \mathscr{L}(V, V')$ est continue par rapport à la topologie naturelle de $\mathscr{L}(V, V')$. Réciproquement, soit $h : X \longrightarrow \mathscr{L}(V, V')$ une application continue, et soit $\hat{h} : E \longrightarrow E'$ l'application qui induit $h(x)$ pour tout $x \in X$. Alors $\hat{h}$ est un morphisme de $\mathbb{K}$-famille sur X.*

DÉMONSTRATION. Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de V et $\{f_1, \ldots, f_p\}$ une base de V'.
Puisque g_x est linéaire on peut voir cette application comme une matrice $p \times n$

$(\alpha_{ij}(x))_{ij}$ où $\alpha_{ij}(x) \in \mathbb{K}$ est la i-ème coordonné du vecteur $g_x(e_{ij})$.
La fonction $\alpha_{ij} : X \longrightarrow \mathbb{K}$ qui nous donne le coefficient $\alpha_{ij}(x)$ pour tout $x \in X$ est continue car c'est la composition des applications continues suivantes :

$$X \xrightarrow{\beta_j} X \times V \xrightarrow{g} X \times V' \xrightarrow{\gamma} V' \xrightarrow{p_i} \mathbb{K}$$

où $\beta_j(x) = (x, e_j)$, $\gamma(x, v') = v'$ et p_i est la i-ème projection de V' sur $\mathbb{K}$.
On observe que $\mathscr{L}(V, V')$ peut être identifié à $\mathbb{K}^{p+n}$ et donc

$$\breve{g}(x) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \vdots \\ \alpha_{pn} \end{pmatrix}$$

On peut donc affirmer que $\breve{g}$ est continue si et seulement si chaque α_{ij} est continue. Par ce qui précède on a donc que $\breve{g}$ est continue.

Réciproquement si $h : X \longrightarrow \mathscr{L}(V, V')$ est une application continue, alors $\hat{h} : E \longrightarrow E'$ est obtenue par la composition des applications continues suivantes :

$$X \times V \xrightarrow{\delta} X \times \mathscr{L}(V, V') \times V' \xrightarrow{\varepsilon} X \times V'$$

où $\delta(x, v) = (x, h(x), v)$ et $\varepsilon(x, u, v) = (x, u(v))$.
Donc $\hat{h} = \varepsilon\delta$ est continue et on a bien que $\hat{h}_x(v) = h(x)(v)$ pour tout $v \in V$, ainsi $\hat{h}$ induit $h(x)$ pour tout $x \in X$.
On a que $\hat{h}$ fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \times V \arrow[rr, "\hat{h}"] \arrow[dr, "p"'] & & X \times V' \arrow[dl, "p'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

par définition et $\hat{h}_x$ est linéaire, donc $\hat{h}$ est bien un morphisme de $\mathbb{K}$-famille sur X $\square$

Remarque 1.14. On a bien que $\hat{\breve{g}} = g$ car pour tout $(x, v) \in E$

$$\begin{aligned} \hat{\breve{g}}(x, v) &= (x, \breve{g}(x)(v)) \\ &= (x, g_x(v)) \\ &= g(x, v) \end{aligned}$$

et que $\breve{\hat{h}} = h$ car $\breve{\hat{h}}(x)(v) = \hat{h}_x(v) = h(x)(v)$ pour tout $v \in V$ et $x \in X$.

4. Restrictions et $\mathbb{K}$-familles induites

Définition 1.15. Soit $\xi = (E, p, X)$ une $\mathbb{K}$-famille et soit $X' \subset X$ un sous-espace de X. Le triple $(p^{-1}(X'), p_{|_{p^{-1}(X')}}, X')$ forme une $\mathbb{K}$-famille ξ' appelé *réstriction* de ξ à X'.

On note $(p^{-1}(x), p_{|_{p^{-1}(X')}}, X')$ par $\xi_{|_{X'}}$ ou simplement $\xi_{X'}$ ou $E_{X'}$.

Les fibres de $\xi_{|_{X'}}$ sont les fibres de ξ au dessus du sous-espace X'. Si $X'' \subset X' \subset X$ alors on a bien

$$(\xi_{|_{X'}})_{|_{X''}} = \xi_{|_{X''}}$$

Définition 1.16. Soit $f : Y \longrightarrow X$ une application continue et soit $\xi = (E, p, X)$ une $\mathbb{K}$-famille. La $\mathbb{K}$-*famille induite* par f de ξ est une $\mathbb{K}$-famille $f^*(\xi)$ qui a comme base Y, comme espace total E' qui est le sous-espace de $Y \times E$ de tous les couples $(y, z) \in Y \times E$ avec $f(y) = p(z)$. La projection π_1 est l'application $\pi_1(y, z) = y$.
La fibre au dessus de $\bar{y}$ est donnée par :

$$\begin{aligned} E'_{\bar{y}} = (\pi_1)^{-1}(\bar{y}) &= \{(y, z) \in E' : y = \bar{y} \text{ et } f(y) = p(z)\} \\ &= \{(\bar{y}, z) \in E' : z \in E_{f(\bar{y})}\} \\ &= \{\bar{y}\} \times E_{f(\bar{y})} \end{aligned}$$

Parfois on indique E' par $f^*(E)$.

Remarque 1.17.

(1) Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} f^*(E) \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

où π_2 est la projection sur le deuxième facteur. En effet si $(y, z) \in f^*(E)$ alors $\pi_2(y, z) = z$ et $\pi_1(y, z) = y$ et on sait que $f(y) = p(z)$, donc $fp'(y, z) = p\pi_2(y, z)$.

(2) Si $f = id : X \longrightarrow X$ alors $f^*(\xi) = \xi$ car $E' = \coprod_{x \in X} E'_x = \coprod_{x \in X} E_{f(x)} = \coprod_{x \in X} E_x = E$

(3) Si $f' : Z \longrightarrow Y$ est une autre application continue, alors on a $(f \circ f')^*(\xi) = f'^*(f^*(\xi))$.
En effet pour $(f \circ f')^*(\xi)$ on a $E''_z = E_{f \circ f'(z)}$. De l'autre côté on a d'abord que pour $f^*(\xi)$, l'espace $E'_y = E_{f(y)}$, et ensuite, pour $f'^*(\zeta)$, on a $E''_z = E'_{f'(z)}$. On pose maintenant $\zeta = f^*(\xi)$ et on obtient $E''_z = E'_{f'(z)} = E_{f \circ f'(z)}$.

(4) Si $Y \subset X$ et f est l'inclusion, alors on a $f^*(\xi) = \xi_{|_Y}$. En effet $E'_y = E_{f(y)} = E_y$

PROPOSITION 1.18. *Si (f, g) est un morphisme de $\mathbb{K}$-familles entre (E, p, X) et (E', p', Y) avec $f : Y \longrightarrow X$ et $g : E' \longrightarrow E$, alors (f, g) induit un morphisme de $\mathbb{K}$-familles sur Y, $h : E' \longrightarrow f^*(E)$ comme le montre de diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd}
E' \arrow[r, "h"] \arrow[d, "p'"'] & f^*(E) \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"] & E \arrow[d, "p"] \\
Y \arrow[r, "id"] & Y \arrow[r, "f"] & X
\end{tikzcd}$$

où π_i est la projection sur le i-ème facteur.

DÉMONSTRATION. L'application $f : Y \longrightarrow X$ induit la $\mathbb{K}$-famille $(f^*(E), \pi_1, Y)$ et si on pose $h(e') = (p'(e'), g(e'))$ pour $e' \in E'$, alors on a bien $(p'(e'), g(e')) \in f^*(E)$ car $p\pi_2(p'(e'), g(e')) = p(g(e')) = fp'(e') = f\pi_1(p'(e'), g(e'))$.
Ainsi on observe que $p'(e') = \pi_1(p'(e'), g(e')) = \pi_1(h(e'))$. On peut donc affirmer que la partie de gauche du diagramme commute et donc h est un morphisme. $\square$

Considérons maintenant deux $\mathbb{K}$-familles sur X (E, p_E, X) et (F, p_f, X), un morphisme $\alpha : E \longrightarrow F$ et une application continue $f : Y \longrightarrow X$.
On peut définir un morphisme $f^*(\alpha) : f^*(E) \longrightarrow f^*(F)$ par $f^*(\alpha)(y, e) = (y, \alpha(e))$ qui est continu car α est continue. Ainsi le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & f^*(F) \arrow[rr, "\pi_2^F"] \arrow[dd, "\pi_1^F"] & & F \arrow[dd, "p_F"] \\
f^*(E) \arrow[ur, "f^*(\alpha)"] \arrow[rr, "\pi_2^E"'] \arrow[dr, "\pi_1^E"'] & & E \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "p_E"] & \\
 & Y \arrow[rr, "f"] & & X
\end{tikzcd}$$

En particulier si $Y \subset X$ et f est l'inclusion alors $f^*(\alpha)$ correspond à la restriction de α à $p_E^{-1}(Y)$; en effet, on a $f^*(\alpha) : p_E^{-1}(Y) \longrightarrow p_F^{-1}(Y)$ car $f^*(E) = p_E^{-1}(Y)$ et $f^*(F) = p_f^{-1}(Y)$ par le point (4) de la remarque 1.17.

PROPOSITION 1.19. *Soit $f : Y \longrightarrow X$ une application continue. Alors la correspondance $E \mapsto f^*(E)$ et $\alpha \mapsto f^*(\alpha)$ est un foncteur entre la catégorie des $\mathbb{K}$-familles sur X et la catégorie des $\mathbb{K}$-familles sur Y.*

DÉMONSTRATION. Il nous reste seulement a voir que si $\beta : F \longrightarrow G$ est un morphisme vers une famille G alors

$$f^*(\beta \circ \alpha) = f^*(\beta) \circ f^*(\alpha).$$

Soit $(y, e) \in f^*(E)$. On a alors

$$\begin{aligned}
f^*(\beta) \circ f^*(\alpha)((y, e)) &= f^*(\beta)((y, \alpha(e))) \\
&= (y, \beta(\alpha(e))) \\
&= (y, \beta \circ \alpha(e)) \\
&= f^*(\beta \circ \alpha)((y, e))
\end{aligned}$$

$\square$

CHAPITRE 2

Fibrés Vectoriels

1. Fibré vectoriel

DÉFINITION 2.1. Soit $\xi = (E, p, X)$ une $\mathbb{K}$-famille, alors ξ est dit un *fibré vectoriel* si pour tout point $x \in X$ il existe un voisinage U de x tel que la restriction $\xi_{|_U}$ de ξ à U soit isomorphe à une $\mathbb{K}$-famille triviale

Cette dernière condition est verifiée s'il existe un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V de dimension finie et un homéomorphisme $\varphi : U \times V \longrightarrow p^{-1}(U)$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & p^{-1}(U) \arrow[dl, "p_{|_{p^{-1}(U)}}"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

et si pour tout point $y \in U$ l'application $\varphi_y : V \longrightarrow E_y$ soit $\mathbb{K}$-linéaire ; de sorte que φ soit un isomorphisme de $\mathbb{K}$-familles.

NOTATION 2.2. On appelle U *un domaine de trivialisation en* $x \in X$ du fibré vectoriel ξ.
Un recouvrement $\{U_i\}_{i \in I}$ de X est dit un *recouvrement de trivialisation* si chaque U_i est un domaine de trivialisation.

EXEMPLE 2.3. Montrons que l'exemple 1.3 est un fibré vectoriel.
$E = \coprod_{x \in X} E_x$ où E_x est l'espace vectoriel orthogonal à x. $E \subset S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$.
Pour $x \in S^n$ on pose $U_x = \{y \in S^n :< y, x >\neq 0\}$ où $< \, . \, , \, . >$ est le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^{n+1}$. Posons $\varphi^x : p^{-1}(U_x) \longrightarrow U_x \times E_x$ définie par $\varphi^x(u, v) = (u, w)$ où w est la projection orthogonale de v sur E_x. Explicitement on a $w = v - < v, x > x$. Inversement on a $v = w - \frac{<g,w>}{<x,g>} x$. Ainsi φ^x est un homéomorphisme et de plus, grâce à la linéarité du produit scalaire, on a bien que les applications $\varphi^x_{(u,v)}$ et ${(\varphi^x)^{-1}}_{(u,w)}$ sont $\mathbb{K}$-linéaires, et donc E est localement trivial.

2. Théorèmes de recollement

THÉORÈME 2.4 (Recollement de morphismes). *Soient* $\xi = (E, p, X)$ *et* $\xi' = (E', p', X)$ *deux fibrés vectoriels avec même base* X. *Soient de plus*

1. *Un recouvrement ouvert* $\{U_i\}$ *de* X
2. *Une collection de morphismes* $\alpha_i : \xi_{U_i} \longrightarrow \xi'_{U_j}$ $i \in I$
   (où $\xi_{U_i} = (p^{-1}(U_i), p_{|_{p^{-1}(U_i)}}, U_i)$ *et* $\xi'_{U_i} = (p'^{-1}(U_j), p'_{|_{p'^{-1}(U_j)}}, U_j))$ *tels que* ${\alpha_i}_{|_{U_i \cap U_j}} = {\alpha_j}_{|_{U_i \cap U_j}}$ *pour tout* $i, j \in I$

Alors il existe un unique morphisme $\alpha : \xi \longrightarrow \xi'$ *tel que* $\alpha_{|_{p^{-1}(U_i)}} = \alpha_i$.

DÉMONSTRATION.
Unicité :
Soit $e \in E$, comme $\{U_i\}_{i \in I}$ est un recouvrement de X, on a que $e \in E_{U_i}$ pour un certain $i \in I$ (E_{U_i} est l'espace total de ξ_{U_i}). Donc $\alpha(e) = r'_i(\alpha_i(e))$ où $r'_i : E'_{U_i} \hookrightarrow E'$ est l'inclusion. Ainsi α est uniquement déterminée grâce à la condition (2) qui nous dit que α ne dépend pas du choix de l'ouvert U_i

Existence
On identifie E_{U_i} et E'_{U_j} avec des sous-ensembles de E et E' respectivement.
Pour $e \in E$ on pose $\alpha(e) = \alpha_i(e)$ avec i tel que e appartienne à l'espace E_{U_i}. La condition (2) nous dit que cette définition est indépendante du choix de l'ouvert U_i.

Les sous-ensembles $E'_{U_i} = p'^{-1}(U_i)$ forment un recouvrement ouvert de l'espace E'. En effet $p'^{-1}(U_i)$ est un ouvert comme p' est continue et si $e' \in E'$ alors $p'(e') \in U_i$ pour un certain $i \in I$ et donc $e' \in p'^{-1}(U_i)$.

On vérifie maintenant que α est continue.
Soit $A \subset E'$ un ouvert de E', alors on peut écrire $A = \bigcup_{i \in I} E'_{U_i} \cap A$ et donc

$$\begin{aligned}\alpha^{-1}(A) &= \alpha^{-1}(\bigcup_{i \in I} E'_{U_i} \cap A) \\ &= \bigcup_{i \in I} \alpha^{-1}(E'_{U_i} \cap A) \\ &= \bigcup_{i \in I} \alpha_i^{-1}(E'_{U_i} \cap A)\end{aligned}$$

Ainsi $\alpha^{-1}(A) = \bigcup_{i \in I} \alpha_i^{-1}(E'_{U_i} \cap A)$ qui est un ouvert de E comme réunion d'ouverts vu que α_i est continue pout tout $i \in I$. Donc α est continue.
D'autre part $\alpha_x : E_x \longrightarrow E'_x$ est linéaire car $E_x = p^{-1}(x) \subset p^{-1}(U_i) = E_{U_i}$ avec $x \in U_i$, donc $\alpha_x = \alpha_{i\,x}$ qui est linéaire.
Ainsi α est un morphisme de fibrés vectoriels. □

THÉORÈME 2.5 (Recollement de fibrés). *Soit* $\{U_i\}_{i \in I}$ *un recouvrement ouvert d'un espace topologique* X. *Soient* $\xi_i = (E_i, p_i, U_i)$ *des fibrés vectoriels sur les espaces* U_i. *Soient de plus* $g_{ji} : {\xi_i}_{|_{U_i \cap U_j}} \longrightarrow {\xi_j}_{|_{U_i \cap U_j}}$ *des isomorphismes qui satisfont la condition de compatibilité* ${g_{ki}}_{|_{U_i \cap U_j \cap U_k}} = g'_{kj} g'_{ji}$ *pour tout* $i, j, k \in I$ *où*

$g'_{kj} = g_{kj|_{U_i\cap U_j\cap U_k}}$ *et* $g'_{ji} = g_{ji|_{U_i\cap U_j\cap U_k}}$.
Alors il existe un fibré vectoriel sur X *et des isomorphismes* $g_i : \xi_i \longrightarrow \xi_{|_{U_i}}$ *tels que le diagramme suivant commute*

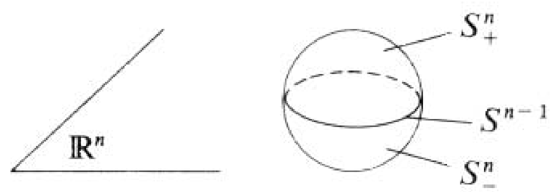
$$\begin{tikzcd}
\xi_{i|_{U_i\cap U_j}} \arrow[rr, "g_{ji}"] \arrow[dr, "g_{i|_{U_i\cap U_j}}"'] & & \xi_{j|_{U_i\cap U_j}} \arrow[dl, "g_{j|_{U_i\cap U_j}}"] \\
& \xi_{|_{U_i\cap U_j}} &
\end{tikzcd}$$

DÉMONSTRATION. La preuve est omise, voir Karoubi **[1]** p.8. □

EXEMPLE 2.6. Soit S^n la sphère de $\mathbb{R}^{n+1}$, i.e.

$$S^n = \{x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2} = 1\}.$$

Soit S^n_+ (respectivement S^n_- le sous-ensemble de S^n tel que $S^n_+ = \{x \in S^n : x_{n+1} \geq 0\}$ (respectivemet $S^n_- = \{x \in S^n : x_{n+1} \leq 0\}$. On obtient ainsi que $S^n_+ \cap S^n_- = S^{n-1}$.



Soit de plus $f : S^{n-1} \longrightarrow \mathrm{GL_p}(\mathbb{K})$ une application continue. Selon le théorème (2.5) il existe un fibré vectoriel E_f sur S^n associé naturellement a f.
E_f est obtenu en récollant les fibrés triviaux $E_1 = S^n_+ \times \mathbb{K}^p$ et $E_2 = S^n_- \times \mathbb{K}^p$ avec l'application de "transition" $g_{21} = \hat{f} : S^{n-1} \times \mathbb{K}^p \longrightarrow S^{n-1} \times \mathbb{K}^p$ définie par $g_{21}(z, k) = (z, f(z)(k))$ pour tout $z \in S^{n-1}$ et $k \in \mathbb{K}^p$ (g_{11} et g_{22} sont l'application identité)

DÉFINITION 2.7. Soit $\xi = (E, p, X)$ un fibré vectoriel. On définit sur X une fonction *rang* $r_E : X \longrightarrow \mathbb{N}$ par $r(x) = \dim_{ev}(E_x)$ = la dimension comme espace vectoriel de E_x pour tout $x \in X$.
Si r_E est constante égale à un entier n pour tout $x \in X$, alors on dit que n est le *rang de* ξ

REMARQUE 2.8. L'application r_E est localement constante. En effet pour tout $x \in X$ il existe un domaine de trivialisation $U \subset X$ et un homéomorphisme $\varphi : p^{-1}(U) \longrightarrow U \times V$ où V est un espace vectoriel de dimension finie n. Ainsi, via φ, E_x est homéomorphe à V pour tout $x \in U$ et ainsi $\dim_{ev}(E_x) = \dim_{ev}(V) = n$ pour tout $x \in U$ et donc $r(U) = \{n\}$.

REMARQUE 2.9. Si X est connexe alors $r_E : X \longrightarrow \mathbb{N}$ est constante. En effet supposons que r_E ne soit pas constante. Soit $R = \{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement de trivialistion de X.

Posons $A_1 = \{U_i \in R : r_E(U) = 1\}$
$A_2 = \{U_i \in R : r(U) = 2\}$
$\vdots$

On a $\bigcup_{i=1}^{\infty} \cup A_i = X$ où $\cup A_i$ est la réunion de tous les éléments de A_i. Chaque $\cup A_i$ est un ouvert comme union d'ouverts. De plus si $j \in \mathbb{N}$ vérifie $A_j \neq \emptyset$, alors $\cup A_j \cap \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{\infty} \cup A_i = \emptyset$, car sinon, si $x \in \cup A_j \cap \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{\infty} \cup A_i$ alors $x \in \cup A_j$ et donc $r(x) = j$; mais on a aussi $x \in \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{\infty} \cup A_i$ donc il existe $k \neq j$ tel que $x \in \cup A_k$ et ainsi $r(x) = k \neq j$. On a donc contradiction.

Donc $\cup A_j \cap \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{\infty} \cup A_i = \emptyset$ et ainsi $X = \cup A_j \coprod \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{\infty} \cup A_i$ et donc X n'est pas connexe, ce qui nous mène a une contradiction, s'il existe $i \neq j$ tel que $A_i \neq \emptyset$.

Définition 2.10. Soient X un espace topologiqe et G un groupe topologique. Un *G-coclycle* sur X est donné par un recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i\in I}$ de X et des applications continues $g_{ji} : U_i \cap U_j \longrightarrow G$ telles que $g_{kj}(x) \cdot g_{ji}(x) = g_{ki}(x)$ pour $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$ et $i, j, k \in I$.

On note un G-cocycle par (U_i, g_{ji})

Remarque 2.11.

- $g_{ii}(x) = e$ où $e \in G$ est l'élément neutre de G. En effet on a par définition que $g_{kj}(x) \cdot g_{ji}(x) = g_{ki}(x)$ et si on pose $j = i$ on obtient $g_{ki}(x) \cdot g_{ii}(x) = g_{ki}(x)$ et ainsi $g_{ii}(x) = g_{ki}(x)^{-1} g_{ki}(x) = e$.
- $g_{ji}(x)^{-1} = g_{ij}(x)$ car $g_{ij}(x)g_{ji}(x) = g_{ii}(x) = e$ et donc $g_{ij}(x) = g_{ji}(x)^{-1}$

Définition 2.12. Deux G-cocycles (U_i, g_{ji}), (V_r, h_{sr}) sur X sont *équivalents* s'il existe des applications continues $g_i^r : U_i \cap V_r \longrightarrow G$ telles que $g_j^s(x) \cdot g_{ji}(x) \cdot g_i^r(x)^{-1} = h_{sr}(x)$ pour $x \in U_i \cap U_j \cap V_r \cap V_s$.

On note $(U_i, g_{ji}) \sim (V_r, h_{sr})$

Remarque 2.13. Ceci est une relation d'équivalence.
symétrie :

Si $(U_i, g_{ji}) \sim (V_r, h_{sr})$ alors on a $g_j^s(x) g_{ji}(c) g_i^r(x)^{-1} = h_{sr}(x)$ et ainsi $g_{ji}(x) = g_j^s(x)^{-1} h_{sr}(x) g_i^r(x)$.
On pose $g_j^s(x)^{-1} = h_s^j(x)$ et $g_i^r(x) = h_r^i(x)^{-1}$ et ainsi $g_{ji}(x) = h_s^j(x)^{-1} h_{sr}(x) h_r^i(x)$ et donc $(V_r, h_{sr}) \sim (U_i, g_{ji})$.

réflexivité :

On pose $g_k^j(x) = g_{jk}(x)$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} g_j^s(x)g_{ji}(x)g_i^r(x)^{-1} &= g_{sj}(x)g_{ji}(x)g_{ri}(x)^{-1} \\ &= g_{si}(x)g_{ir}(x) \\ &= g_{sr}(x) \text{ pout tout } i,j,s,r \in I \end{aligned}$$

Ainsi on a bien que $(U_i, g_{ji}) \sim (U_i, g_{ji})$.

transitivité :

Supposons $(U_i, g_{ji}) \sim (V_r, h_{sr})$ et $(V_r, h_{sr}) \sim (W_u, l_{vu})$.
On a donc des applications $h_r^u : V_r \cap W_u \longrightarrow G$ telles que $h_s^v(x)h_{sr}(x)h_r^u(x)^{-1} = l_{vu}$ pour $x \in V_r \cap V_s \cap W_v \cap W_u$

Ainsi $l_{vu}(x) = h_s^v(x)h_{sr}(x)h_r^u(x)^{-1} = h_s^v(x)g_j^s(x)g_{ji}(x)g_i^r(x)^{-1}(x)h_r^u(x)^{-1}$.
On définit

$$k_j^v(x) = h_s^v(x)g_j^s(x)$$

et

$$k_i^u(x) = h_r^u(x)g_i^r(x)$$

pour des s et r quelconques où
$k_j^v : U_j \cap W_v \longrightarrow G$ est définie par $k_j^v(x) = h_s^v(x)g_j^s(x)$ avec s tel que $x \in V_s$.
De même pour k_i^u, *i.e.*,
$k_i^u : U_i \cap W_u \longrightarrow G$ définie par $g_i^u(x) = h_r^u(x)g_i^r(x)$ avec r tel que $x \in V_r$.
Ceci est bien défini car $\{V_k\}$ est un recouvrement de X et si $x \in V_p \cap V_q \cap U_i \cap W_u$ alors $h_q^u(x)g_i^q(x) = h_p^u(x)g_i^p(x)$.
En effet de $(U_i, g_{ji}) \sim (V_r, h_{sr})$ on a que $g_i^p(x)g_{ii}(x)g_i^q(x)^{-1} = h_{pq}(x)$ donc $g_i^p(x)g_i^q(x)^{-1} = h_{pq}(x)$ pour $x \in U_i \cap V_p \cap V_q$.
De même, de $(V_r, h_{sr}) \sim (W_u, l_{vu})$ on a que

$$\begin{aligned} &h_p^u(x)h_{pq}(x)h_q^u(x)^{-1} = l_{uu}(x) \\ \Leftrightarrow &h_p^u(x)h_{pq}(x)h_q^u(x)^{-1} = e \\ \Leftrightarrow &h_{pq}(x) = h_p^u(x)^{-1}h_q^u(x) \text{ pour } x \in V_p \cap V_q \cap W_u \end{aligned}$$

On obtient alors $h_p^u(x)^{-1}h_q^u(x) = g_i^p(x)g_i^q(x)^{-1}$ pour tout $x \in V_p \cap V_q \cap U_i \cap W_u$.
Et ainsi $h_q^u(x)g_i^q(x) = h_p^u(x)g_i^p(x)$ pour tout $x \in V_p \cap V_q \cap U_i \cap W_u$

Ainsi $l_{vu}(x) = g_j^v(x)g_{ji}(x)g_i^u(x)$ pour tout $x \in U_i \cap U_j \cap W_v \cap W_u$ et donc $(U_i, g_{ji}) \sim (W_u, l_{vu})$.

On note $\mathrm{H}^1(X, G) = \{G\text{-cocycles}\}_{/\sim}$, l'ensemble des classes d'équivalence des G-cocycles.

THÉORÈME 2.14. *Soit $\Phi_n^{\mathbb{K}}(X)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de $\mathbb{K}$-fibrés vectoriels sur X de rang n. Alors $\Phi_n^{\mathbb{K}}(X)$ est isomorphe à l'ensemble $H^1(X, G)$ où $G = GL_n(\mathbb{K})$*

Démonstration. On va définir deux applications

$$\begin{array}{rccc} h: & \Phi_n^{\mathbb{K}}(X) & \longrightarrow & \mathrm{H}^1(X,G) \\ h' & \mathrm{H}^1(X,G) & \longrightarrow & \Phi_n^{\mathbb{K}}(X) \end{array}.$$

Soit $\xi = (E,p,X)$ un fibré vectoriel et $\{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement de trivialistation de X. Soient $\varphi_i : U_i \times \mathbb{K}^n \longrightarrow E_{U_i}$ des isomorphismes donnés par la trivialisation et $g_{ji} : U_i \cap U_j \longrightarrow G$ défini par $g_{ji}(x) = (\varphi_j)_x^{-1} \cdot (\varphi_i)_x$ pour tout $i,j \in I$.
Ainsi on a que (U_i, g_{ji}) est un G-cocycle sur X. En effet $g_{kj}(x)g_{ji}(x) = (\varphi_k)_x^{-1} \cdot (\varphi_j)_x \cdot (\varphi_j)_x^{-1} \cdot (\varphi_i)_x = (\varphi_k)_x^{-1} \cdot (\varphi_i)_x = g_{ki}(x)$ pour tout $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$.
On pose $h([\xi]) = [U_1, g_{ji}]$. La classe $h([\xi]) \in \mathrm{H}^1(X,G)$ ne dépend ni du choix du représentant de la classe $[\xi]$ ni du choix du recouvrement de trivialisation et des φ_i utilisés pour construire le cocycle. En effet si (V_i, h_{sr}) est un cocycle associé au fibré vectoriel $\zeta = (E', p', X) \in [\xi]$ qui a les trivialisations $\psi_r : V_r \times \mathbb{K}^n \longrightarrow E_{V_r}$, alors on pose $g_i^r(x) = (\psi_r)_x^{-1} f_x (\varphi_i)_x$ où $f_x : E_x \longrightarrow E'_x$ est donné par l'isomorphisme $f : E \longrightarrow E'$ entre ζ et ξ.
Si $x \in U_i \cap U_j \cap V_r \cap V_s$ alors on a

$$\begin{aligned} g_j^s(x) g_{ji}(x) g_i^r(x)^{-1} &= (\psi_s)_x^{-1} f_x (\varphi_j)_x (\varphi_j)_x^{-1} (\varphi_i)_x (\varphi_i)_x^{-1} f_x^{-1} (\psi_r)_x \\ &= (\psi_s)_x^{-1} (\psi_r)_x \\ &= h_{sr}(x) \end{aligned}$$

et donc $(U_i, g_{ji}) \sim (V_r, h_{sr})$ si ζ est isomorphe à ξ.
Ainsi h est bien définie.
Réciproquement si (U_i, g_{ji}) est un G-cocycle, soit ξ le fibré vectoriel obtenu en recollant les fibrés vectoriels triviaux $E_i = U_i \times \mathbb{K}^n$ avec les applications $g_{ji} : U_j \cap U_i \longrightarrow G$ de la façon suivante.
On pose $\tilde{g}_{ji} : U_i \cap U_j \times \mathbb{K}^n \longrightarrow U_j \cap U_i \times \mathbb{K}^n$ définie par $\tilde{g}_{ji}(x,a) = (x, g_{ji}(x)(a))$.
Pour $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$ on a bien

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{kj} \cdot \tilde{g}_{ji}(x,a) &= \tilde{g}_{kj}(x, g_{ji}(x)(a)) \\ &= (x, g_{kj}(x)(g_{ji}(x)(a))) \\ &= (x, (g_{kj}(x)(g_{ji}(x))(a)) \\ &= (x, g_{ki}(x)(a)) \\ &= \tilde{g}_{ki}(x,a) \end{aligned}$$

et donc la condition de compatibilité réquise par le théorème (2.5) est satisfaite par $\tilde{g}_{ji}$ et on obtient donc un fibré vectoriel $\xi = (E,p,X)$.
On pose $h'([(U_i, g_{ji})]) = [\xi]$. Cette application est bien définie. En effet soit $(V_r, h_{sr}) \in [(U_i, g_{ji})]$ un autre représentant de la classe et soit F est le fibré vectoriel obtenu en recollant les fibrés triviaux $F_r = V_r \times \mathbb{K}^n$.
Montrons que E et F sont isomprphes.
Soit $\alpha : E \longrightarrow F$ le morphisme unique qui fait commuter le diagramme suivant pour tout couple (i,r).

$$\begin{tikzcd}
E_{i|_{U_i\cap V_r}} \arrow[r, "\tilde{g}_i^r"] \arrow[d, "g_{i|_{U_i\cap V_r}}"'] & F_{r|_{U_i\cap V_r}} \arrow[d, "h_{r|_{U_i\cap V_r}}"] \\
E_{|_{U_i\cap V_r}} \arrow[r, "\alpha_{|_{U_i\cap V_r}}"] & F_{|_{U_i\cap V_r}}
\end{tikzcd}$$

où $\tilde{g}_i^r$ est donnée par l'équivalence entre (U_i, g_{ji}) et (V_r, h_{sr}) :
$\tilde{g}_i^r : U_i \cap V_r \times \mathbb{K}^n \longrightarrow U_i \cap V_r \times \mathbb{K}^n$ définie par $\tilde{g}_i^r(x,a) = (x, \tilde{g}_i^r(x)(a))$; et g_i, h_r sont les isomorphismes donnés par le théorème de recollement (2.5).
α est bien définie car si $x \in U_i \cap V_r$ et $x \in U_j \cap V_s$ alors on a

$$\begin{aligned}
&h_{sr}(x) = g_j^s(x) g_{ji}(x) g_i^r(x)^{-1} \\
\Leftrightarrow\, &h_{sr}(x) g_i^r(x) g_{ji}(x)^{-1} = g_j^s(x) \\
\Leftrightarrow\, &h_s(x)^{-1} h_r(x) g_i^r(x) g_i(x)^{-1} g_j(x) = g_j^s(x) \\
\Leftrightarrow\, &h_r(x) g_i^r(x) g_i(x)^{-1} = h_s(x) g_j^s(x) g_j(x)^{-1}
\end{aligned}$$

De plus on a que α est un isomorphisme car de la même façon on peut définir $\beta : F \longrightarrow E$ qui fait commuter le diagramme dans le sens inverse. Ainsi E est isomorphe à F.
Enfin h et h' sont l'une l'inverse de l'autre par définition. $\square$

Théorème 2.15. *Soient (U_i, g_{ji}) et (U_i, h_{ji}) deux cocycles avec le même recouvrement sur l'espace X.*
Alors les fibrés vectoriels associés E et F respectivement sont isomprphes si et seulement s'il existe des applications continues $\lambda_i : U_i \longrightarrow G = GL_n(\mathbb{K})$ telles que $h_{ji}(x) = \lambda_j(x) g_{ji}(x) \lambda_i(x)^{-1}$ pour $x \in U_i \cap U_j$. En particulier le fibré vectoriel E est trivial si et seulement si $g_{ji}(x) = \lambda_j(x)^{-1}\lambda_i(x)$ pour un bon choix des λ_i

Démonstration. Soit $\alpha : E \longrightarrow F$ un isomorphisme. On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
E_{|_{U_i\cap U_j}} \arrow[rr, "\alpha_{|_{U_i\cap U_j}}"] \arrow[dr, "g_{j|_{U_i\cap U_j}}"] \arrow[dd, "g_{i|_{U_i\cap U_j}}"'] & & F_{|_{U_i\cap U_j}} \arrow[dr, "h_{j|_{U_i\cap U_j}}"] \arrow[dd, "h_{i|_{U_i\cap U_j}}"' near start] & \\
& E_{j|_{U_i\cap U_j}} \arrow[rr, "\hat{\lambda}_{j|_{U_i\cap U_j}}"] & & F_{j|_{U_i\cap U_j}} \\
E_{i|_{U_i\cap U_j}} \arrow[ur, "\hat{g}_{ji}"'] \arrow[rr, "\hat{\lambda}_{i|_{U_i\cap U_j}}"'] & & F_{i|_{U_i\cap U_j}} \arrow[ur, "\hat{h}_{ji}"'] &
\end{tikzcd}$$

où $E_i = F_i = U_i \times \mathbb{K}^n$ et où, selon la notation de 1.13, $\hat{\lambda_i} = h_i \cdot \alpha_{|_{U_i}} \cdot (g_i)^{-1}$; $\hat{g}_{ji} = g_j g_i^{-1}$ et $\hat{h}_{ji} = h_j h_i^{-1}$.
On obtient donc que $h_{ji}(x) = \lambda_j(x) g_{ji}(x) \lambda_i(x)^{-1}$.
En particulier si on choisit $h_{ji}(x) = e$, l'élément neutre de G, pour tout $x \in U_I \cap U_j$, alors on a que F est isomorphe au fibré trivial et du diagramme on a $g_{ij}(x) =$

$\lambda_j(x)^{-1}\lambda_i(x)$.

Réciproquement si des tel λ_i existent, alors on se ramène à la dernière partie de la preuve du théorème (2.14) $\square$

Exemple 2.16. Appliquons le théorème précédent à l'exemple 2.6 avec les mêmes notations. Soit $\lambda : E_1 = S^n_+ \times \mathbb{K}^p \longrightarrow E_1$ un automorphisme qui induit un automorphisme $\mu : E_{1|_{S^{n-1}}} = S^{n-1} \times \mathbb{K}^p \longrightarrow E_{1|_{S^{n-1}}}$.
On considère les deux G-cocycles $(\{E_1, E_2\}, g_{21} = f)$ et $(\{E_1, E_2\}, h_{21} = f \cdot \check{\mu})$, avec $\check{\mu}$ comme dans le théorème 1.13. On montre que E_f et $E_{f\cdot\check{\mu}}$ sont isomorphes.
On applique le théorème précédent en posant $\lambda_1 = (\check{\lambda})^{-1} : S^n_+ \longrightarrow \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ définie par $(\check{\lambda})^{-1}(x) = \check{\lambda}(x)^{-1}$ (comme dans le théorème 1.13), et $\lambda_2 \equiv id$.
On observe que pour tout $x \in S^{n-1}$ on a $\lambda_2(x)g_{21}(x)\lambda_1(x)^{-1} = id\, f(x)(\check{\lambda}(x)^{-1})^{-1} = f(x)\check{\lambda}(x) = f(x)\check{\mu}(x) = h_{21}(x)$. Ainsi les deux fibrés sont isomorphes.

3. Opérations sur le Fibrés Vectoriels

On appelle $\mathbb{K}^e_v$ la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$, et $\mathrm{Vect}(X)$ celle des fibrés vectoriels sur l'espace topologique X.
Si on veut préciser le corps, par exemple $\mathbb{R}$, on note $\mathbb{R}^e_v$ et $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(X)$.

Définition 2.17. Une catégorie $\mathscr{C}$ est *additive* si pour tout $A, B \in \mathscr{C}$ l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ est muni d'une structure de groupe abélien compatible avec la composition d'applications.

Proposition 2.18. *Soient $E, F \in Vect(X)$, alors $Hom_{Vect(X)}(E, F)$ est un groupe abélien, et donc $Vect(X)$ est une catégorie additive.*

Démonstration. **Somme:** Si $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Vect}(X)}(E, F)$, on pose pour $z \in E$

$$(f+g)(z) = f(z) + g(z)$$

C'est bien défini car on fait la somme dans $F_{p(z)}$.
$f+g$ est un morphisme ; en effet il nous ne reste qu'à vérifier la continuité, et localement on a

$$\begin{tikzcd} U_i \times V \arrow[rr, "\widetilde{f+g}"] \arrow[dr] & & U_i \times W \arrow[dl] \\ & U_i & \end{tikzcd}$$

où $\widetilde{f+g}(x,z) = (x, f_x(z) + g_x(z))$. Ainsi $\widetilde{f+g}$ est continue car c'est linéaire. Donc $f+g$ est continue.

Élément neutre: On a l'élément neutre évident

$$\begin{array}{cccc} f: & E & \longrightarrow & F \\ \\ & z & \longmapsto & 0 \end{array}$$

Inverses: Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Vect}(X)}(E,F)$ on pose

$$\begin{array}{cccc} -f: & E & \longrightarrow & F \\ \\ & z & \longmapsto & -f_{p(z)}(z) \end{array}$$

$-f$ est continue et clairement $(-f+f)=0$

□

LEMME 2.19. *Soit $f : Y \longrightarrow X$ une application continue entre deux espaces topologiques Y. Alors le foncteur f^* de la proposition 1.19 induit un foncteur entre la catégorie Vect(X) et Vect(Y).*

DÉMONSTRATION. Il faut voir que $f^*(\xi)$ est localement triviale si ξ est un fibré vectoriel.
Soit $y \in Y$ et soit U un voisinage de $f(x') \in X$ tel que ξ_U soit triviale.
Soit $U' = f^{-1}(U)$ et $g : U' \longrightarrow U$ la restriction de f à U'.
On a le diagramme

$$\begin{tikzcd} g^*(\xi_U) \arrow[d, "\pi_1"] & \xi_U \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & U \times V \arrow[d] \\ U' \arrow[r, "g"] & U \arrow[r, "Id"] & U \end{tikzcd}$$

Donc $\xi_U \cong U \times V$ et ainsi par définition on a

$$g^*(\xi_U) \cong U' \times_U (U \times V).$$

On pose

$$\begin{array}{ccc} U' \times_U (U \times V) & \longrightarrow & U' \times V \\ (u',u,v) & \longmapsto & (u',v) \\ (u',g(u'),v) & \longleftarrow\!\shortmid & (u'v) \end{array}$$

Les deux applications sont évidemment l'une l'inverse de l'autre et ainsi

$$g^*(\xi_U) \cong U' \times_U (U \times V) \cong U' \times V.$$

Donc $f^*(\xi)$ est localement triviale.
En particulier si Y est un sous-espace de X alors $f^*(\xi) = \xi_Y$ est un fibré vectoriel.

□

DÉFINITION 2.20. Un foncteur $\varphi : \mathbb{K}_v^e \longrightarrow \mathbb{K}_v^e$ est appelé *continu* si pour tout couple (M,N) d'objets dans $\mathbb{K}_v^e$, l'application naturelle $\varphi_{M,N} : \mathbb{K}_v^e(M,N) \longrightarrow \mathbb{K}_v^e(\varphi(M),\varphi(N))$ défine par $\varphi_{M,N}(f) = \varphi(f)$ pour toute application linéaire f de M dans N, est continue (pour la topologie usuelle sur un espace vectoriel de dimension finie).

EXEMPLE 2.21.

(1) $\varphi(M) = \underbrace{M \oplus \cdots \oplus M}_{\text{i fois}}$

(2) $\varphi(M) = \underbrace{M \otimes \cdots \otimes M}_{\text{i fois}}$

Pour voir que ces foncteurs sont continus, on choisit une base pour M et N, alors la matrice de $\varphi_{M,N}(\alpha)$ est donnée par une matrice qui dépend de façon continue de la matrice de α, pour $\alpha \in \mathbb{K}_v^e(M,N)$.

On aimerait maintenant associer à chaque foncteur continu φ un foncteur $\varphi' = \varphi(X)$:Vect$(X)\longrightarrow$Vect(X) dans la catégorie des fibrés vectoriels sur X, Vect(X), qui coïncide avec φ quand X est réduit à un point. Si $\xi = (E,p,X)$ est un fibré vectoriel sur X, on définit *l'ensemble* $E' = \varphi'(E)$ comme l'union disjointe $\coprod_{x\in X} \varphi(E_x)$, muni de la projection $p' : \varphi'(E) \longrightarrow X$ definie par $p'(e') = x$ avec x tel que $e' \in \varphi(E_x)$.
Pour munir $\varphi'(E)$ d'une topologie pour qu'il devienne un fibré vectoriel, on a besoin du lemme suivant.

LEMME 2.22. *Soient $\xi = (E,p,X)$ un fibré vectoriel sur X et U, V des sous-ensembles ouverts de X. Soient de plus $\beta : E_U \longrightarrow U \times M$ et $\gamma : E_V \longrightarrow V \times N$ des trivialisations de E sur U et V respectivement. Posons alors $\beta' : E'_U \longrightarrow U \times \varphi(M)$ et $\gamma' : E'_V \longrightarrow V \times \varphi(N)$ les bijections induites par fonctorialité sur chaque fibre. Si on donne à E'_U et E'_V les topologies induites par ces bijections, alors elles coïncident sur $E'_U \cap E'_V = E'_{U\cap V}$ et de plus $E'_{U\cap V}$ est un ouvert aussi bien dans E'_U que dans E'_V.*

DÉMONSTRATION. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} E'_{U\cap V} & \xrightarrow{\beta'_{|U\cap V}} & (U\cap V)\times\varphi(M) \\ \Vert & & \downarrow \hat{\delta} \\ E'_{U\cap V} & \xrightarrow{\gamma'_{|U\cap V}} & (U\cap V)\times\varphi(N) \end{array}$$

où δ est donnée par la composition d'application continues

$$U \times V \xrightarrow{s} \mathbb{K}_v^e(M,N) \xrightarrow{\varphi_{M,N}} \mathbb{K}_v^e(\varphi(M),\varphi(N))$$

avec $\hat{s} = \gamma_{|U\cap V} \cdot \beta^{-1}_{|U\cap V}$. Comme δ est continue, $\hat{\delta}$ est aussi continue (théorème 1.13). Pour la même raison δ^{-1} est aussi continue et ça nous montre que les deux topologies sur $E'_{|U\cap V}$ coïncident. De plus la projection $p'_U : E'_U \longrightarrow U$ est continue par rapport à la topologie induite par β'. Ainsi $E'_{U\times V} = p'^{-1}_U(U\hat{V})$ est un ouvert de E'_U, et de même $E'_{U\times V}$ est un ouvert de E'_V. $\square$

On peut maintenant définir une topologie sur $E' = \varphi'(E)$. Soit $\{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X, et soit $\beta_i : E_{U_i} \longrightarrow U_i \times M_i$ une trivialisation de E sur U_i pour chaque $i \in I$. Par fonctorialité, les isomorphismes β_i induisent une bijection $\beta'_i : E'_{U_i} \longrightarrow U_i \times \varphi(M_i)$ et ainsi on peut munir E'_{U_i} d'une topologie. On le munit maintenant de la topologie la plus fine qui rend l'inclusion $E'_{U_i} \longrightarrow E'$ continue. Ceci est possible car, grâce au lemme précédent, pour tout couple $(i,j) \in I \times I$ les topologies sur E'_{U_i} et E'_{U_j} coïncident sur $E'_{U_i\cap U_j}$, qui est ainsi un ouvert de E'_{U_i} et de E'_{U_j}.

Cette topologie ne dépend ni du choix du recouvrement ni du choix des trivialisations. En effet, si $\{V_j\}_{j\in J}$ est un autre recouvrement et $\psi_r : E_{V_r} \longrightarrow V_r \times N_r$ est une autre trivialisation pour chaque j, alors le même argument qu'avant nous montre que si on a deux topologies possibles sur $E'_{U_i\cap V_r}$, elles coïncident, et que $E'_{U_i\cap V_r}$ est un ouvert de E'_{U_i} et de E'_{V_r}. Ainsi les deux topologies sur E' coïncident. Enfin E' est localement trivial car E'_{U_i} est homéomrphe à $U_i \times \varphi(M_i)$ et donc c'est un fibré trivial pour tout $i \in I$.

Pour définir complètement le foncteur φ', il faut définir

$$f' = \varphi'(f) : \varphi'(E) \longrightarrow \varphi'(F)$$

dans le cas où $f : E \longrightarrow F$ est un morphisme de fibrés vectoriels sur X. On définit f' sur chaque fibre par $f'_x = \varphi(f_x) : \varphi(E_x) \longrightarrow \varphi(F_x)$, qui est linéaire car f_x l'est. Pour montrer que f' est continue, on regarde les diagrammes suivants

$$\begin{tikzcd} E_U \arrow[r, "\beta", "\simeq"'] \arrow[d, "f_{|U}"'] & U \times M \arrow[d, "g"] \\ F_U \arrow[r, "\gamma", "\simeq"'] & U \times N \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} E'_U \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "f'_{|U}"'] & U \times \varphi(M) \arrow[d, "g'"] \\ F'_U \arrow[r, "\gamma'"] & U \times \varphi(N) \end{tikzcd}$$

où β', γ' et g' sont induites par fonctorialité sur chaque fibre par β, γ et g respectivement. Alors l'application $\check{g}'$, induite par g', est la composition des applications continues suivantes.

$$U \xrightarrow{\check{g}} \mathbb{K}^e_v(M,N) \xrightarrow{\varphi_{M,N}} \mathbb{K}^e_v(\varphi(M),\varphi(N))$$

En accord avec le théorème 1.13 l'application g' est continue et donc f' est continue.

Généralisation 2.23. Soit $\mathscr{C}$ la catégorie

$$\underbrace{\mathbb{R}^{e\,op}_v \times \cdots \times \mathbb{R}^{e\,op}_v}_{p_1} \times \underbrace{\mathbb{C}^{e\,op}_v \times \cdots \times \mathbb{C}^{e\,op}_v}_{p_2} \times \underbrace{\mathbb{R}^{e}_v \times \cdots \times \mathbb{R}^{e}_v}_{q_1} \times \underbrace{\mathbb{C}^{e}_v \times \cdots \times \mathbb{C}^{e}_v}_{q_2}$$

et soit $\mathscr{C}'$ la catégorie

$$\underbrace{\mathbb{R}^{e\,op}_v \times \cdots \times \mathbb{R}^{e\,op}_v}_{p'_1} \times \underbrace{\mathbb{C}^{e\,op}_v \times \cdots \times \mathbb{C}^{e\,op}_v}_{p'_2} \times \underbrace{\mathbb{R}^{e}_v \times \cdots \times \mathbb{R}^{e}_v}_{q'_1} \times \underbrace{\mathbb{C}^{e}_v \times \cdots \times \mathbb{C}^{e}_v}_{q'_2}$$

où la notation ^{op} indique la catégorie opposée (mêmes objets mais flèches inversées). Un foncteur $\varphi : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}'$ est appelé *continu* si pour tout couple (R,S) de objets de $\mathscr{C}$, l'application $\mathscr{C}(R,S) \longrightarrow \mathscr{C}'(\varphi(R),\varphi(S))$ est continue. Alors la même méthode qu'avant nous montre comme on peut définir un foncteur $\varphi' = \varphi(X) : \mathscr{C}(X) \longrightarrow \mathscr{C}'(X)$ où

$$\begin{aligned}\mathscr{C}(X) = {} & \underbrace{\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(X)^{op} \times \cdots \times \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(X)^{op}}_{p_1} \times \underbrace{\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(X)^{op} \times \cdots \times \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(X)^{op}}_{p_2} \\ & \times \underbrace{\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(X) \times \cdots \times \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(X)}_{q_1} \times \underbrace{\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(X) \times \cdots \times \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(X)}_{q_2}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathscr{C}'(X) = \underbrace{\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(X)^{op} \times \cdots \times \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(X)^{op}}_{p_1'} \times \underbrace{\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(X)^{op} \times \cdots \times \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(X)^{op}}_{p_2'} \\ \times \underbrace{\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(X) \times \cdots \times \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(X)}_{q_1'} \times \underbrace{\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(X) \times \cdots \times \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(X)}_{q_2'}\end{aligned}$$

Si la composition de deux foncteurs $\varphi_2 \cdot \varphi_1$ est bien définie, alors on a $(\varphi_2 \cdot \varphi_1)(X) = \varphi_2(X) \cdot \varphi_1(X)$. Enfin, si φ_1 et φ_2 sont des foncteurs isomorphes, alors $\varphi_1(X)$ et $\varphi_2(X)$ sont aussi isomorphes.

Définition 2.24. Soient (E, p, X) et (E', p', X) deux fibrés vectoriels sur X. Alors le *produit fibré* $E \times_X E'$ est le sous-ensemble de $E \times E'$ formé par les couples (e, e') tels que $p(e) = p'(e')$. On a que $E \times_X E'$ est une $\mathbb{K}$-famille sur X avec projection $q : E \times_X E' \longrightarrow X$ définie par $q(e, e') = p(e) = p'(e')$ et avec fibres $q^{-1}(x) = E_x \times E'_x$.

Exemple 2.25.

(1) Le foncteur $\varphi : \mathbb{K}_v^e \times \mathbb{K}_v^e \longrightarrow \mathbb{K}_v^e$ donné par $\varphi(M, N) = M \oplus N$ induit $\varphi(X) : \mathrm{Vect}(X) \times \mathrm{Vect}(X) \longrightarrow \mathrm{Vect}(X)$. Si E et F sont des fibrés vectriels sur X, alors le fibré vectoiel $\varphi(X)(E, F)$ est noté $E \oplus F$ et est appelé la *somme directe* ou *somme de Whitney* des fibrés vectoriels E et F. $E \oplus F$ est isomorphe au produit fibré $E \times_X F$ car la fibre au-dessus de x dans $E \times_X F$ est donnée par $\varphi(E_x, F_x) = E_x \oplus F_x \simeq E_x \times F_x$ qui est la fibre au dessus de x dans le produit fibré.
De plus les identités classiques pour les espaces vectoriels impliquent grâce à 2.23 les isomorphismes $(E \oplus F) \oplus G \cong E \oplus (F \oplus G)$ et $E \oplus F \cong F \oplus E$.

(2) Soit $\varphi : \mathbb{K}_v^e \times \mathbb{K}_v^e \longrightarrow \mathbb{K}_v^e(\mathbb{K})$ le foncteur défini par $\varphi(M, N) = M \otimes_{\mathbb{K}} N$. Alors $\varphi(X)(E, F) = E \otimes F$ est le *produit tensoriel* de E et F. Encore une fois on a les isomorphismes $(E \otimes F) \otimes G \cong E \otimes (F \otimes G)$ et $E \otimes F \cong F \otimes E$.

(3) Si $\varphi : {\mathbb{K}_v^e}^o \times \mathbb{K}_v^e \longrightarrow \mathbb{K}_v^e$ est le foncteur $(M, N) \mapsto \mathbb{K}_v^e(M, N)$ alors l'objet $\varphi(X)(E, F) = \mathrm{HOM}(E, F)$ est appelé le *fibré vectoriel des homomorphismes* entre E et F (la fibre au dessu de $x \in X$ est $\mathbb{K}_v^e(E_x, F_x) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}_v^e}(E_x, F_x)$).

Remarque 2.26. On a que $f^*(E \oplus F) \cong f^*(E) \oplus f^*(F)$, donc que f^* est un foncteur additif. En effet, il est facile de vérifier que l'application

$$(g, (e, f)) \mapsto ((g, e), (g, f))$$

est un isomorphisme de fibrés vectoriels.

4. Sections de Fibrés Vectoriels

DÉFINITION 2.27. Soit $\xi = (E, p, X)$ un fibré vectoriel. Une *section* de ξ est une application $s : X \longrightarrow E$ telle que $p \circ s = Id_X$. Une section s est dite *continue* si s est une application continue.

NOTATION 2.28. On note $\Gamma(X, E)$ l'ensemble des sections continues du fibré vectoriel (E, p, X). S'il n'y a pas d'ambiguité sur l'espace X on écrit $\Gamma(X, E) = \Gamma(E)$.

EXEMPLE 2.29. Si $s_0 : X \longrightarrow E$ est l'application qui à chaque point $x \in X$ associe le vecteur 0 de l'espace E_x, alors s_0 est une section continue. En effet comme $s_0(x) \in E_x$, on a bien que $p \cdot s_0 = Id_X$. Montrons maintenant que s_0 est continue. Soit $x_0 \in X$ et V un ouvert trivialisant de x_0. On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} E_V \arrow[rr, "\varphi", "\cong"'] \arrow[dr, "p_V"'] & & V \times T \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

où $\varphi : E_V \longrightarrow V \times T$ est une trivialisation locale avec T un espace vectoriel de dimension finie.
Définissons $\sigma : V \longrightarrow V \times T$ par $\sigma(x) = (x, 0)$. Clairement σ est continue et de plus on a $\varphi \cdot s_{0|_V}(x) = \varphi(0_x) = (x, 0) = \sigma(x)$ pour $x \in V$, et ainsi $s_{0|_V} = \varphi^{-1} \cdot \sigma$ qui est continue. Donc s_0 est continue puisqu'elle est localement continue.
Cette section est appelé *section zéro* du fibré vectoriel.

EXEMPLE 2.30. Supposons que E soit le fibré vectoriel trivial $X \times M$. Alors une section continue de E peut être écrite comme $x \mapsto (x, s_1(x))$, où $s_1 : X \longrightarrow M$ est une application continue. Inversement, toute application continue $X \longrightarrow M$ induit une section continue de E.

On va montrer maintenant un théorème très utile qui, en s'appuyant sur les sections, nous donne un outil pour vérifier si une $\mathbb{K}$-famille est triviale. Si c'est le cas, la famille est aussi un fibré vectoriel trivial.

THÉORÈME 2.31. *Soit $\xi = (E, p, X)$ une $\mathbb{K}$-famille sur l'espace topologique X. Alors ξ est triviale si et seulement s'il existe des sections $s_1, \ldots, s_n \in \Gamma(X, E)$ telles que $\{s_1(x), \ldots, s_n(x)\}$ soit une base de l'espace E_x pour tout $x \in X$*

DÉMONSTRATION. Supposons que ξ soit une $\mathbb{K}$-famille triviale.
On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\varphi", "\cong"'] \arrow[dr, "p"] & & X \times T \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

avec $E_x = T$ où T est un espace vectoriel de dimension finie, pout tout x dans X. Soit $\{v_1, \ldots, v_n\}$ une base de T et définissons $\tilde{s_i} : X \longrightarrow X \times T$ par

$$\tilde{s_i}(x) = (x, v_i).$$

Posons de plus

$$s_i = \varphi^{-1} \circ \tilde{s}_i : X \longrightarrow E$$

avec $s_i(x) = \varphi^{-1}(x, v_i)$.
On a que s_i est continue car $\tilde{s}_i$ est continue et φ est un homéomorphisme.
De plus on a que

$$p \circ s_i(x) = p \circ \varphi^{-1}(x, v_i) = x.$$

Ainsi chaque s_i est une section continue.

Comme $\varphi_x^{-1} : \{x\} \times T \longrightarrow E_x$ est un isomorphisme et comme $\{(x, v_1), \ldots, (x, v_n)\}$ est une base de $\{x\} \times T$, alors son image

$$\{s_1(x), \ldots, s_n(x)\}$$

par φ_x^{-1} est une base de E_x.

Réciproquement, supposons que pour tout $x \in X$ on a que $\{s_1(x), \ldots, s_n(x)\}$ est une base de E_x.
Soit $\{s_1^*(x), \ldots, s_n^*(x)\}$ la base duale associée.
Pour tout $z \in E_x$ on a que

$$z = \sum_{i=1}^{n} s_i^*(x)(z) s_i(x)$$

Remarquons que

$$s_i^*(x) : E_x \longrightarrow \mathbb{K}$$

est linéaire et comme la dimension de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de E_x est finie, on a que $s_i^*(x)$ est continue. Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $v_1, \ldots, v_n$ une base de V. Posons alors $\varphi : E \longrightarrow X \times V$ définie par

$$\varphi(z) = \left(p(z),\ \sum_{i=1}^{n} s_i^*(p(z))(z) v_i \right)$$

φ est bijective car son inverse $\varphi^{-1} : X \times V \longrightarrow E$ est donné par

$$\varphi^{-1}(x, v) = \sum_{i=1}^{n} v_i^*(v) s_i(x)$$

Où $v_1^*, \dots, v_n^*$ est la base duale.
En effet on a bien que

$$\begin{aligned}
\varphi \circ \varphi^{-1}(x,v) &= \varphi(\sum_{i=1}^n v_i^*(v) s_i(x)) \\
&= \left(p(\sum_{j=1}^n v_j^*(v) s_j(x)),\ \sum_{i=1}^n s_i^*(p(\sum_{j=1}^n v_j^*(v) s_j(x)))(\sum_{j=1}^n v_j^*(v) s_j(x)) v_i \right) \\
&= \left(x,\ \sum_{i,j=1}^n v_j^*(v)\, s_i^*(x)(s_j(x))\, v_i \right) \\
&= \left(x,\ \sum_{i,j=1}^n v_j^*(v)\, \delta_{ij}\, v_i \right) \\
&= \left(x,\ \sum_{i=1}^n v_i^*(v) v_i \right) \\
&= (x,v)
\end{aligned}$$

Et de même

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1} \circ \varphi(z) &= \varphi^{-1} \left(p(z),\ \sum_{i=1}^n s_i^*(p(z))(z)\, v_i \right) \\
&= \sum_{j=1}^n v_j^*(\sum_{i=1}^n s_i^*(p(z))(z)\, v_i)\, s_i(p(z)) \\
&= \sum_{i,j=1}^n s_i^*(p(z))(z) v_j^*(v_i)\, s_i(p(z)) \\
&= \sum_{i=1}^n s_i^*(p(z))(z)\, s_i(p(z)) \\
&= \sum_{i=1}^n s_i^*(x)(z)\, s_i(x) \text{ avec } x = p(z) \text{ car } z \in E_x \\
&= z
\end{aligned}$$

Pour montrer que φ et φ^{-1} sont continues, il suffit de remarquer que p, s_i, s_i^* et v_i^* sont toutes continues. □

EXEMPLE 2.32. Soit $X = S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$ et considérons la $\mathbb{K}$-famille $E = TS^2$ qu'on appelle *fibré tangent*, et qui est définie par

$$TS^2 = \{(x,v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : x \in S^2 \text{ et } \langle x, v\rangle = 0\}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire standard de $\mathbb{R}^3$.
On muni TS^2 de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Un élément de TS^2 peut être representé par un couple (x,v) avec $x \in S^2$ et $v \in T_x$, où T_x est le plan tangent à S^2 en x. La projection $p : TS^2 \longrightarrow S^2$ est donnée par $p(x,v) = x$.
Une section $s : S^2 \longrightarrow TS^2$ n'est rien d'autre qu'un champ de vecteurs tangents à la sphère. Or, par le théorème du hérisson, un tel champ s'annule en au moins un

point. Il n'existe donc pas de sections s_1, s_2 telles que $\{s_1(x), s_2(x)\}$ soit une base de T_x pour tout $x \in S^2$. Donc TS^2 n'est pas triviale.

NOTATION 2.33. On note $A := C_{\mathbb{K}}(X)$, l'anneau des fonctions continues à valeur dans $\mathbb{K}$.

PROPOSITION 2.34. *Soit (E, p, X) un $\mathbb{K}$-fibré vectoriel, alors*

$$\Gamma(X, E) = \{s : X \longrightarrow E |\ s \textit{ est une section continue}\}$$

est un A–module.

DÉMONSTRATION. Posons $(s_1 + s_2)(x) = s_1(x) + s_2(x)$ et $(\lambda s)(x) = \lambda(x)s(x)$ pour tout $x \in X$; $s, s_1, s_2 \in \Gamma(X, E)$ et $\lambda \in A$.
Ces applications sont bien définies car les opérations sont effectuées dans les fibres E_x pour tout $x \in X$. Montrons qu'elles sont continues.
Comme dans l'exemple 2.29, soit $x_0 \in X$ et V un ouvert trivialisant contenant x_0. On a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} E_V \arrow[rr, "\varphi", "\cong"'] \arrow[dr, "p_V"'] & & V \times T \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

où $\varphi : E_V \longrightarrow V \times T$ est une trivialisation locale avec T un espace vectoriel de dimension finie.
On a $E_x \xrightarrow[\cong]{\psi_x} T$ via l'homéomorphisme φ_x pour tout $x \in V$.
On pose

$$\begin{aligned} \widetilde{s_1 + s_2} : & V \longrightarrow V \times T \\ & x \longmapsto (x, \psi_x s_1(x) + \psi_x s_2(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\lambda s} : & V \longrightarrow V \times T \\ & x \longmapsto (x, \psi_x(\lambda(x)s(x))) \end{aligned}$$

Ces deux applications sont clairement continues et on a

$$\begin{aligned} \varphi \circ (s_1 + s_2)_{|V}(x) &= \varphi(s_1(x) + s_2(x)) \\ &= (x, \psi_x s_1(x) + \psi_x s_2(x)) \\ &= \widetilde{s_1 + s_2}(x) \end{aligned}$$

donc $(s_1 + s_2)_{|V} = \varphi^{-1} \circ \widetilde{s_1 + s_2}$ qui est continue. De même $(\lambda s)_{|V} = \varphi^{-1} \circ \widetilde{\lambda s}$.

□

PROPOSITION 2.35. *Si $\theta_n \cong X \times \mathbb{K}^n$ est un fibré vectoriel trivial, alors*

$$\Gamma(\theta_n) \cong A^n,$$

i.e., c'est un A–module libre de type fini.

DÉMONSTRATION. θ_n est un fibré trivial, et donc, pour le théorème 2.31, il existe des sections $s_1, \ldots, s_n \in \Gamma(\theta_n)$ telles que $\{s_1(x), \ldots, s_n(x)\}$ soit une base de $\{x\} \times \mathbb{K}^n$. On montre maintenant que $\{s_1, \ldots, s_n\}$ est une partie génératrice de

$\Gamma(\theta_n)$.
Pour tout $x \in X$ et $s \in \Gamma(\theta_n)$ on a

$$s(x) = \lambda_1(x)s_1(x) + \cdots + \lambda_n(x)s_n(x)$$

où on interprète les λ_i comme des applications de X dans $\mathbb{K}$. Ces applications sont clairement continues puisque $s, s_1, \ldots, s_n$ sont continues. Ainsi tout élément de $\Gamma(\theta_n)$ peut être écrit comme combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments de $\Gamma(\theta_n)$ à coefficients dans A. Donc $\Gamma(\theta_n)$ est de type fini.

Définissons maintenant une application

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \Gamma(\theta_n) & \longrightarrow & A^n \\ & & & \\ & s = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i s_i & \longmapsto & (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \end{array}.$$

On vérifie facilement que φ est A-linéaire est bijective. Donc $\Gamma(\theta_n)$ est libre. $\square$

PROPOSITION 2.36. *Si (E, p, X) est un fibré vectoriel sur un espace topologique compact*[1] *X , alors $\Gamma(X, E)$ est un A–module de type fini.*

DÉMONSTRATION. La proposition précédente nous dit que $\Gamma(E) \overset{not}{=} \Gamma(X, E)$ est un A–module. Montrons que c'est de type fini.

Soit $\{U_i\}_{i \in I}$, avec $I = \{1, \ldots, n\}$, un recouvrement de trivialisation fini. Supposons que la restriction E_{U_i} du fibré à U_i soit triviale de rang n_i.

Soit $\{\eta_i\}_{i \in I}$ une partition de l'unité, qui existe car X est normal. Autrement dit on a des applications

$$\eta_i : X \longrightarrow \mathbb{R},\ i \in I, \text{ telles que}$$

- $\mathrm{supp}(\eta_i) \subseteq U_i$;
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \eta_i^2(x) = 1$ pour tout $x \in X$.

Comme dans la preuve de la proposition 2.35, pour chaque U_i on a une partie génératrice $\{s_{i,1}, \ldots, s_{i,n_i}\}$ de $\Gamma(E_{U_i})$. Ainsi, si $s_i \in \Gamma(E_{U_i})$ est la restriction de $s \in \Gamma(E)$ à U_i on peut écrire

$$s_i = \lambda_{i,1}s_{i,1} + \cdots + \lambda_{i,n_i}s_{i,n_i}.$$

Définissons maintenant pour $i \in I$ et $1 \leq j \leq n_i$

$$t_{i,j} = \eta_i \cdot \tilde{s}_{i,j}$$

et

$$\alpha_{i,j} = \eta_i \cdot \tilde{\lambda}_{i,j}$$

où $\tilde{s}_{i,j}$ et $\tilde{\lambda}_{i,j}$ sont les prolongements par 0 de $s_{i,j}$ et $\lambda_{i,j}$ sur tout l'espace X. On observe que $t_{i,j}$ et $\alpha_{i,j}$ sont continues.
On considère maintenant la somme

$$\sum_{i,j} \alpha_{i,j} t_{i,j}$$

[1]Pour X *compact* on entend X para-compact et Hausdorff. Ainsi X est aussi normal.

où on a bien que $\alpha_{i,j} \in A$ et $t_{i,j} \in \Gamma(E)$.
On calcule donc, pour $x \in X$

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} \alpha_{i,j} t_{i,j}\,(x) &= \sum_i \sum_j \alpha_{i,j}(x) t_{i,j}(x) \\
&= \sum_i \sum_j \eta_i(x) \tilde{\lambda}_{i,j}(x) \eta_i(x) \tilde{s}_{i,j}(x) \\
&= \sum_i \eta_i^2(x) \sum_j \tilde{\lambda}_{i,j}(x) \tilde{s}_{i,j}(x) \\
&= \sum_i \eta_i^2 s_i(x) \\
&= \sum_i \eta_i^2 s(x) \\
&= s(x) \sum_i \eta_i^2 \\
&= s(x).
\end{aligned}$$

Ainsi $\{t_{i,j}\}_{i \in I; 1 \leq j \leq n_i}$ génère $\Gamma(E)$. □

Lemme 2.37. *Soient E et F deux fibrés vectoriels sur X. On a que*

$$\Gamma(X, E) \oplus \Gamma(X, F) \cong \Gamma(X, E \oplus F),$$

un isomprhisme de A–modules.

Démonstration. On définit l'application

$$\begin{array}{cccc}
\gamma & \Gamma(X, E) \oplus \Gamma(X, F) & \longrightarrow & \Gamma(X, E \oplus F) \\
 & & & \\
 & (r, s) & \longmapsto & s \oplus r
\end{array}$$

où $s \oplus r(x) = (s(x), r(x))$ vu dans $E_x \oplus F_x$.
Cette application est clairement A-linéaire et bijective, c'est donc un isomorphisme. □

Proposition 2.38. *Soit (E, p, X) un fibré vectoriel sur un espace topologique compact X. Alors $\Gamma(E)$ est un module projectif de type fini.*

Démonstration. Par la proposition 2.36, $\Gamma(E)$ est un module de type fini, montrons qu'il est projectif. Par le théorème 2.45 il existe un fibré F sur X et un entier $n \in \mathbb{N}$ tels que

$$E \oplus F \cong \theta_n$$

où θ_n est un fibré triviale de rang n. Ainsi

$$\Gamma(E \oplus F) \cong \Gamma(\theta_n).$$

Par le lemme 2.37 on a

$$\Gamma(E \oplus F) \cong \Gamma(E) \oplus \Gamma(F).$$

D'autre part, par la proposition 2.35 on a

$$\Gamma(\theta_n) \cong A^n.$$

Ainsi on a

$$\Gamma(E) \oplus \Gamma(F) \cong A^n$$

et donc $\Gamma(E)$ est un facteur direct d'un module libre, ainsi il est projectif. □

5. Théorie de l'Homotopie des Fibrés Vectoriels

Dans cette section on va énoncer des théorèmes qui reprennent le concept de fibré induit introduit dans la section 4. Pour faire cela on admettera d'abord le résultat suivant.

PROPOSITION 2.39. *Soient E et F deux fibrés vectoriels sur un espace paracompact X. Soient Y un sous-ensemble fermé de X et $\alpha : E_Y \longrightarrow F_Y$ un isomorphisme de fibrés vectoriels. Alors il existe un voisinage V de Y et un isomorphisme $\alpha' : E_V \longrightarrow F_V$ tel que $\alpha'_Y = \alpha$*

DÉMONSTRATION. La démonstration est omise, voir [**1**], p.24. □

THÉORÈME 2.40. *Soit X un espace topologique compact et E un fibré vectoriel sur $X \times I$, où $I = [0, 1]$. Posons*

$$\begin{aligned} \alpha_t \quad &: X \longrightarrow X \times I \\ &x \longmapsto (x, t) \end{aligned}$$

Alors les fibrés $E_0 := \alpha_0^*(E)$ et $E_1 = \alpha_1^*(E)$ sont isomorphes.

DÉMONSTRATION. La projection π_1 du fibré est donnée par

$$\begin{aligned} \pi_1 \quad &: X \times I \longrightarrow X \\ &(x, t) \longmapsto x. \end{aligned}$$

Posons $E_t = \alpha_t^*(E)$. On a le diagramme

$$\begin{tikzcd} \pi_1^*(E_t)_{|X\times\{t\}} \arrow[d] & E_t \arrow[d] & E_{|X\times\{t\}} \arrow[d] \\ X \times \{t\} \arrow[r, "\pi_1"] & X \arrow[r, "\alpha_t"] & X \times \{t\} \end{tikzcd}$$

On a bien que $\pi_1^*(E_t)_{|X\times\{t\}}$ est isomorphe à $E_{|X\times\{t\}}$, car $\alpha_t \cdot \pi_1{}_{|X\times\{t\}} = Id_{|X\times\{t\}}$ et donc

$$\pi_1^*(E_t)_{|X\times\{t\}} = \pi_1^*(\alpha_t^*(E))_{|X\times\{t\}} = (\alpha_t \circ \pi_1)^*(E)_{|X\times\{t\}} = Id^*_{X\times\{t\}}(E)_{|X\times\{t\}} = E_{|X\times\{t\}}$$

Par la proposition 2.39, il existe un voisinage V de $X \times \{t\}$ dans $X \times I$ tel que $E_V \cong \pi_1^*(E_t)_{|V}$.
Comme X est compact, V doit contenir un voisinage de la forme $X \times U$ où U est un voisinage de t dans I. En effet V peut s'écrire comme

$$V = \bigcup_{j\in J} A_j \times B_j \subset X \times I.$$

Avec les A_j qui recouvrent X et les B_j qui sont des voisinage de t. Comme X est compact on peut choisir un sous-ensemble fini L de J tel que $\{A_l\}_{l\in L}$ soit un recouvrement fini de X. En posant

$$U = \bigcap_{l\in L} B_l$$

on obtient que U est encore un voisinage de t et donc

$$\bigcup_{l\in L} A_l \times \bigcap_{l\in L} B_l = X \times U$$

est un voisinage de $X \times \{t\} \subset X \times I$.
Evidemment si $E_V \cong \pi_1^*(E_t)_{|V}$ alors on a aussi $E_{X\times U} \cong \pi_1^*(E_t)_{|X\times U}$ car l'isomorphisme est défini sur chaque fibre.
On rappelle que si $f : Y \longrightarrow X$ est une application continue, alors f^* est un foncteur covariant et donc si E et F sont deux fibrés isomorphes, on a que $f^*(E)$ et $f^*(F)$ sont isomorphes.
On considère l'application continue d'inclusion $i : X \times \{u\} \hookrightarrow X \times U$ pour $u \in U$. On applique le foncteur i^* aux fibrés isomorphes $E_{X\times U} \cong \pi_1^*(E_t)_{|X\times U}$. On obtient

$$i^*(E_{X\times U}) \cong i^*(\pi_1^*(E_t)_{|X\times U}).$$

Donc

$$E_{X\times\{u\}} \cong \pi_1^*(E_t)_{|X\times\{u\}}$$

car dans le cas d'une inclusion, le fibré induit coïncide avec la restriction (remarque 1.17, point 4).
On applique maintenant le foncteur α_u^* aux deux fibrés isomorphes qu'on vient d'obtenir. On a

$$\alpha_u^*(E_{X\times\{u\}}) \cong \alpha_u^*(\pi_1^*(E_t)_{|X\times\{u\}})$$

Et ainsi

$$E_u \cong E_t$$

car

$$\alpha_u^*(\pi_1^*(E_t)_{|X\times\{u\}}) = (\pi_{1|X\times\{u\}} \circ \alpha_u)^*(E_t) = Id_X^*(E_t) = E_t.$$

Le diagramme suivant illustrera bien la situation

$$\begin{tikzcd}
E_t \arrow[r, "\cong"] \arrow[dr] & E_u \arrow[d] & \pi_1^*(E_t)_{|X\times\{u\}} \arrow[r, "\cong"] \arrow[dr] & E_{|X\times\{u\}} \arrow[d] & \pi^*(E_t)_{|X\times U} \arrow[r, "\cong"] \arrow[dr] & E_{|X\times U} \arrow[d] \\
 & X \arrow[rr, "\alpha_u"'] & & X \times \{u\} \arrow[rr, "i"'] & & X \times U
\end{tikzcd}$$

Donc pour tout $u \in U$ on a que $E_u \cong E_t$ et donc par connexité de I, $E_0 \cong E_1$. $\square$

THÉORÈME 2.41. *Soient X un espace compact et $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ deux applications continues et homotopes. Si E est un fibré sur Y, alors $f_0^*(E) \cong f_1^*(E)$*

DÉMONSTRATION. Soit $H : X \times I \longrightarrow Y$ une homotopie entre f_0 et f_1.
On a

$$f_0^*(E) = (H \circ \alpha_0)^*(E) = \alpha_0^*(H^*(E))$$

et

$$f_1^*(E) = (H \circ \alpha_1)^*(E) = \alpha_1^*(H^*(E)).$$

Vu que $H^*(E)$ est un fibré sur $X \times I$ le théorème précédent nous permet d'affirmer que $\alpha_0^*(H^*(E))$ et $\alpha_1^*(H^*(E))$ sont isomorphes, et donc $f_0^*(E)$ et $f_1^*(E)$ sont isomorphes. $\square$

THÉORÈME 2.42. *Si X est un espace compact contractile, alors tout fibré vectoriel sur X est trivial.*

DÉMONSTRATION. Soit

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto x_0 \end{aligned}$$

l'application constante en $x_0 \in X$. Comme X est contractile, f est homotope à l'identité Id_X.
Soit E un fibré sur X, on a

$$E = (Id_X)^*(E) \cong f^*(E)$$

car on peut appliquer le théorème précedent.
D'autre part si on pose

$$\begin{aligned} h : X &\longrightarrow \{x_0\} \\ x &\longmapsto x_0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} i : \{x_0\} &\hookrightarrow X \\ x_0 &\longmapsto x_0 \end{aligned}$$

où i est l'inclusion, alors on a

$$f = i \circ h$$

et ainsi

$$f^*(E) = (i \circ h)^*(E) = h^*(i^*(E)).$$

Vu que i est l'inclusion, le fibré induit est isomorphe à la restriction (remarque 1.17, point 4). Ainsi

$$i^*(E) \cong E_{\{x_0\}}.$$

Mais

$$E_{\{x_0\}} = p^{-1}(x_0) = \{x_0\} \times E_{x_0}$$

Ainsi $i^*(E)$ est trivial, i.e., $i^*(E) \cong \{x_0\} \times E_{x_0}$.
On applique le foncteur h^* aux fibrés isomorphes qu'on vient d'obtenir, et on a

$$\begin{aligned} &h^*(i^*(E)) \cong h^*(\{x_0\} \times E_{x_0}) \\ \Leftrightarrow &h^*(i^*(E)) \cong X \times (\{x_0\} \times E_{x_0}) \end{aligned}$$

où $(\{x_0\} \times E_{x_0})$ est clairement un espace vectoriel. En effet

$$\begin{aligned} h^*(\{x_0\} \times E_{x_0}) &= \{(x, x_0, e) \in X \times (\{x_0\} \times E_{x_0}) : h(x) = \pi_1(x_0, e) = x_0 = p(e)\} \\ &= X \times (\{x_0\} \times E_{x_0}) \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} h^*(i^*(E)) \arrow[r, "\cong"] \arrow[dr] & h^*(\{x_0\} \times E_{x_0}) \arrow[d] & & i^*(E) \arrow[r, "\cong"] \arrow[dr] & (\{x_0\} \times E_{x_0}) \arrow[d] \\ & X \arrow[rrr, "h"'] & & & \{x_0\} \end{tikzcd}$$

Ainsi $h^*(i^*(E))$ est trivial, et donc E est trivial, vu que $E \cong f^*(E) = h^*(i^*(E))$ $\square$

6. Propriétés algébriques

Dans la section précédente on a vu qu'il est possible effectuer des opérations sur les fibrés vectoriels dans le contexte de la catégorie $\mathrm{Vect}(X)$. On exploite cette possibilité pour enoncer quelque propriétes algébriques des fibrés vectoriels qui nous amènerons à d'importants théorèmes, dont celui de Serre-Swan (2.56).

THÉORÈME 2.43. *Dans la catégorie* $\mathrm{Vect}(X)$ *des fibrés vectoriels sur* X*, la somme directe (au sens des catégories) existe et correspond à l'image de* $\oplus$ *comme vu précédemment.*

DÉMONSTRATION. Soient F, E_1 et E_2 trois fibrés vectoriels sur l'espace X. Par définition de la somme directe catégorique on a

$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[dr, "i_1"'] \arrow[drr, bend left, "f_1"] & & \\
& E_1 \oplus E_2 \arrow[r, dotted, "\exists! f"] & F \\
E_2 \arrow[ur, "i_2"] \arrow[urr, bend right, "f_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

où pour $k = 1, 2$

$$i_k : E_k \longrightarrow E_1 \oplus E_2 = \coprod_{x \in X} E_{1_x} \oplus E_{2_x} \cong \coprod_{x \in X} E_{1_x} \times E_{2_x}$$

est donné par les homomorhismes d'injection $E_{k_x} \longrightarrow E_{1_x} \oplus E_{2_x}$ et f_1 et f_2 sont des morphismes dans $\mathrm{Vect}(X)$.
On doit montrer qu'il existe un unique morphisme

$$f : E_1 \oplus E_2 \longrightarrow F$$

tel que le diagramme précédent soit commutatif.

Unicité

Soient

$$f, g : E_1 \oplus E_2 \longrightarrow F$$

telles que

$$f_k = f \circ i_k \text{ et } f_k = g \circ i_k.$$

Soit $(e_1, e_2) \in E_1 \oplus E_2$, on a alors

$$\begin{aligned}
f(e_1, e_2) &= f_x(e_1, e_2) \\
&= f_x((e_1, 0) + (0, e_2)) \\
&= f_x(e_1, 0) + f_x(0, e_2) \\
&= f_x \circ i_1(e_1) + f_x \circ i_2(e_2) \\
&= f_{1_x}(e_1) + f_{2_x}(e_2) \text{ (où } f_{k_x} = f_{k|_{E_{k_x}}}\text{)}.
\end{aligned}$$

De même pour g on obtient

$$g(e_1, e_2) = f_{1_x}(e_1) + f_{2_x}(e_2).$$

Et donc $g = f$.

Existence

Posons

$$\begin{array}{rccc} f: & E_1 \oplus E_2 & \longrightarrow & F \\ & (e_1, e_2) & \longmapsto & (f_1)_x(e_1) + (f_2)_x(e_2) \end{array}$$

où $(e_1, e_2) \in E_{1_x} \oplus E_{2_x}$.
Il faut montrer que f est une application continue.
Soit U une trivialisation de E_1, E_2, F

$$\text{i.e.} \quad \begin{array}{r} E_{1|_U} \cong U \times M_1 \\ E_{2|_U} \cong U \times M_2 \\ F_U \cong U \times N \end{array}$$

Alors

$$(E_1 \oplus E_2)_{|_U} \cong E_{1|_U} \oplus E_{2|_U} \cong U \times (M_1 \oplus M_2).$$

Si on définit l'application continue

$$\begin{array}{ccc} U \times (M_1 \oplus M_2) & \longrightarrow & U \times N \\ (u, m_1, m_2) & \longmapsto & (u, g_1(m_1) + g_2(m_2)) \end{array}$$

où $g_k : M_k \longrightarrow N$ est l'application induite par la trivialisation sur $f_{k|_U}$; on peut définir $f_{|_U} : (E_1 \oplus E_2)_{|_U} \longrightarrow F_U$ grâce aux corréspondances qu'on vient d'enoncer

$$\begin{tikzcd} (E_1 \oplus E_2)_{|_U} \arrow[r, "\cong"] \arrow[rrr, bend left, "f_{|_U}"] & U \times (M_1 \oplus M_2) \arrow[r] & U \times N \arrow[r, "\cong"] & F_U . \end{tikzcd}$$

$$(u, m_1, m_2) \longmapsto (u, g_1(m_1) + g_2(m_2))$$

Ainsi $f_{|_U}$ est continue et donc f est continue.

□

THÉORÈME 2.44. *Soit E un fibré vectoriel sur l'espace X, et soit*

$$p : E \longrightarrow E$$

telle que $p^2 = p$ (i.e. p est un projecteur). Alors

$$\ker p := \coprod_{x \in X} \ker(p_x)$$

est un fibré vectoriel.

DÉMONSTRATION. Sans perte de généralité, on peut considérer $E = X \times M$ où M est un espace vectoriel de dimension finie. Soit $x_0 \in X$ et posons

$$\begin{array}{rccc} f: & X & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_k(M, M) \\ & x & \longmapsto & id_M - p_x - p_{x_0} + 2(p_x \circ p_{x_0}) \end{array}.$$

On a $f(x_0) = id_M$ et donc il existe un voisinage $V(x_0) = V$ de x_0 tel que $f(x)$ est un automorphisme pour tout x dans X (car $\mathrm{Aut}(M)$ est ouvert dans $\mathrm{End}(M)$). Comme

$$p_{x_0} \circ f(x) = f(x) \circ p_x$$

on a que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker p \arrow[r] \arrow[d, dashed] & X \times M \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\hat{f}"] & X \times M \arrow[d, "\hat{f}"] \\
0 \arrow[r] & X \times \ker p_{x_0} \arrow[r] & X \times M \arrow[r, "p_0"] & X \times M
\end{tikzcd}$$

où $p_0 = id_X \times p_{x_0}$ et $\hat{f}$ est définie comme au théorème 1.13
On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \hat{f}_{V\times M\cap\ker p}: & V \times M \cap \ker p & \longrightarrow & V \times \ker p_{x_0} \\ & (v,m) & \longmapsto & (v, f(v)(m)) \end{array}.$$

Cette application est bien définie car si $(v,m) \in (V \times M \cap \ker p)$ alors selon le diagramme précédent on a

$$\begin{aligned} \hat{f}p(v,m) &= p_0\hat{f}(v,m) \\ \hat{f}(v,0) &= p_0(v, f(v)(m)) \\ (v, f(v)(0)) &= (v, p_{x_0}f(v)(m)) \\ (v,0) &= (v, p_{x_0}f(v)(m)) \\ &\Rightarrow f(v)(m) \in \ker p_{x_0} \end{aligned}$$

De plus cette application est continue, bijective et son inverse est aussi continue car $(\hat{f}_{V\times M\cap\ker p})^{-1} = (\widehat{f^{-1}_{V\times M\cap\ker p}})$. Ainsi c'est un homéomorphisme, et donc $\ker p$ est localement triviale. □

THÉORÈME 2.45. *Soit $E \in$ Vect(X) un fibré vectoriel qui a pour base un espace topologique compact X, alors il existe un autre fibré vectoriel $E' \in$ Vect(X) tel que*

$$E \oplus E' \text{ est trivial.}$$

DÉMONSTRATION. Bien que ce théorème donne un résultat très important, sa démonstration est technique, non constructive et comporte des notions qui n'ont pas été introduites. Elle est donc omise et peut être trouvée dans [**1**], théorème 6.5 page 27. □

Nous introduisons maintenant de nouveaux concepts de la théorie des catégories utiles aux prochains théorèmes.

DÉFINITION 2.46. Une catégorie additive $\mathscr{C}$ est dite *pseudo-abélienne* si pour tout $E \in \mathscr{C}$ et pout pour tout $p : E \longrightarrow E$ tel que $p^2 = p$, le noyau de p existe.

EXEMPLE 2.47.

(1) $\mathrm{Vect}(X)$ est pseudo-abélienne
(2) Si A est un anneau à unité, $\mathscr{P}(A)$, la catégorie des modules projectifs de type fini, est pseudo-abélienne.

Proposition 2.48. *Soient $\mathscr{C}$ une catégorie pseudo-abélienne, $E \in \mathscr{C}$ un objet de $\mathscr{C}$, et*

$$p : E \longrightarrow E$$

telle que $p^2 = p$. Alors

$$E = \ker(p) \oplus \ker(1-p)$$

Démonstration. Soient

$$\begin{array}{lccc} i_1 : & \ker(p) & \longrightarrow & E \\ \\ i_2 : & \ker(1-p) & \longrightarrow & E \end{array}$$

les inclusions canoniques.
Considérons les diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} \ker(p) \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "p"] & E \\ \ker(p) \arrow[r, "i_1"'] & E \arrow[u, "1-p"'] \arrow[ul, dashed, "j_1"] \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} \ker(1-p) \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "1-p"] & E \\ \ker(1-p) \arrow[r, "i_2"'] & E \arrow[u, "p"'] \arrow[ul, dashed, "j_2"] \end{tikzcd}$$

où j_1 et j_2 sont données par la propriété universelle du noyau car

$$\begin{aligned} p \circ (1-p) &= p \circ 1 - p \circ p \\ &= p - p \\ &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (1-p) \circ p &= 1 \circ p - p \circ p \\ &= p - p \\ &= 0 \end{aligned}$$

(j_1 et j_2 sont uniques par la proprieté universelle).
On a alors

$$\begin{aligned} i_1 \circ j_1 \circ i_1 &= (1-p) \circ i_1 \\ &= i_1 - \underbrace{p \circ i_1}_{=0} \\ &= i_1 \end{aligned}$$

Donc

$$j_1 \circ i_1 = \mathrm{id}_{\ker(p)} .$$

De même on obtient

$$j_2 \circ i_2 = \mathrm{id}_{\ker(1-p)}$$

De plus on a les diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} \ker(p) \arrow[r, "i_1"] & E \arrow[r, "p"] & E \\ \ker(1-p) \arrow[u, dashed, "\sigma", "0"'] \arrow[r, "i_2"'] & E \arrow[u, "1-p"'] \arrow[ul, "j_1"] \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} \ker(1-p) \arrow[r, "i_2"] & E \arrow[r, "1-p"] & E \\ \ker(p) \arrow[u, dashed, "\tau", "0"'] \arrow[r, "i_1"'] & E \arrow[u, "p"'] \arrow[ul, dashed, "j_2"] \end{tikzcd}$$

où on a par la propriété universelle les flèches σ et τ. Comme on doit avoir

$$\underbrace{(1-p)\circ i_2}_{=0} = i_1 \circ \sigma$$

et i_1 est injective, on a forcément que

$$\sigma = 0.$$

De même pour τ on a

$$\tau = 0.$$

Ainsi

$$j_1 \circ i_2 = 0 \text{ et } j_2 \circ i_1 = 0$$

et de plus on a que

$$i_1 \circ j_1 + i_2 \circ j_2 = ((1-p) + p = 1.$$

Par le lemme 18.1 p.29 de Mitchell[**3**], on a

$$E \cong \ker(p) \oplus \ker(1-p).$$

□

Le théorème suivant nous montre un procédé universel pour associer une unique catégorie pseudo-abélienne a chaque catégorie additive. Ceci sera très utile pour le théorème de Serre-Swan (2.56).

Définition 2.49. Un foncteur $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ est *quasi-surjectif* si tout objet de $\mathscr{D}$ est un facteur direct d'un objet dans l'image de F.
Autrement dit, pour tout objet G de $\mathscr{D}$ il existe un objet G' dans $\mathscr{D}$ et un objet E dans $\mathscr{C}$ tels que

$$G \oplus G' = T(E).$$

Théorème 2.50. *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie additive, alors il existe une catégorie pseudo-abélienne $\tilde{\mathscr{C}}$ et un foncteur additif*

$$\varphi : \mathscr{C} \longrightarrow \tilde{\mathscr{C}}$$

pleinement fidèle (i.e. Hom$(A, B) \cong$ Hom$(\varphi(A), \varphi(B))$) tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & & \tilde{\mathscr{C}} \arrow[dl, dashed, "\exists ! \tilde{\psi}"] \\ & \mathscr{D} & \end{tikzcd}$$

où ψ est un foncteur additif et $\mathscr{D}$ est une catégorie pseudo-abélienne.
La paire $(\tilde{\mathscr{C}}, \varphi)$ est unique à équivalence de catégorie près.
De plus φ est quasi-surjectif.

Démonstration. Construisons $\tilde{\mathscr{C}}$.
Les objets de cette catégorie sont les couples (E, p), où $E \in \mathscr{C}$ et p est un projecteur de E (i.e. $p \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(E, E)$ telle que $p \circ p = p$).
Un morphisme de (E, p) vers (F, q) est un morphisme f de E dans F tel que

$$f \circ p = q \circ f = f$$

comme dans le digaramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] \arrow[dr, "f"] & F \arrow[d, "q"] \\
E \arrow[r, "f"] & F
\end{tikzcd}$$

avec la composition usuelle ; en effet

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] \arrow[dr, "f"] & F \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"] \arrow[dr, "g"] & G \arrow[d, "r"] \\
E \arrow[r, "f"] & F \arrow[r, "g"] & G
\end{tikzcd} .$$

Avec la structure de catégorie additive de $\mathscr{C}$ on définit la somme de deux objets dans $\tilde{\mathscr{C}}$ comme

$$(E, p) \oplus (F, q) = (E \oplus F, p \oplus q).$$

Vérifions que, avec l'objet qu'on vient de définir, on a effectivement la somme directe dans la catégorie $\tilde{\mathscr{C}}$.
On a le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
(E,p) \arrow[dr, "i_1 \circ p"'] \arrow[drr, bend left, "f"] & & \\
& (E \oplus F, p \oplus q) \arrow[r, dotted, "\exists ! \tilde{h}"] & (G, r) \\
(F,q) \arrow[ur, "i_2 \circ q"] \arrow[urr, bend right, "g"'] & &
\end{tikzcd}$$

où (G, r) est un objet quelconque.
En effet on a que $i_1 \circ p$ est un morphisme car le diagramme

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "i_1 \circ p"] \arrow[d, "i_1 \circ p"'] \arrow[dr, "p"] & E \oplus F \arrow[d, "p \oplus q"] \\
E \arrow[r, "i_1 \circ p"] & E \oplus F
\end{tikzcd}$$

commute. De même $i_2 \circ q$ est un morphisme.
Dans la catégorie $\mathscr{C}$ on a

$$\begin{tikzcd} E \arrow[dr, "i_1"'] \arrow[drr, bend left, "f"] & & \\ & E \oplus F \arrow[r, dotted, "\exists ! \tilde{h}"] & G \\ F \arrow[ur, "i_2"] \arrow[urr, bend right, "g"'] & & \end{tikzcd}$$

avec

$$h \circ i_1 = f \text{ et } h \circ i_2 = g$$

On pose

$$\tilde{h} = r \circ h \circ (p \oplus q).$$

Vérifions qu'avec cette définition $\tilde{h}$ fait l'affaire.

(1) $\tilde{h}$ est bien définie (i.e. c'est un morphisme dans $\tilde{\mathscr{C}}$).
Il faut vérifier que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} E \oplus F \arrow[r, "\tilde{h}"] \arrow[d, "p \oplus q"'] \arrow[dr, "\tilde{h}"] & G \arrow[d, "r"] \\ E \oplus F \arrow[r, "\tilde{h}"] & G \end{tikzcd}$$

- $$\begin{aligned} r \circ \tilde{h} &= r \circ r \circ h \circ (p \oplus q) \\ &= r \circ h \circ (p \oplus q) \\ &= \tilde{h} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \tilde{h} \circ (p \oplus q) &= r \circ h \circ (p \oplus q) \circ (p \oplus q) \\ &= r \circ h \circ ((p \circ p) \oplus (g \circ g)) \\ &= r \circ h \circ (p \oplus q) \\ &= \tilde{h} \end{aligned}$$

Ainsi $\tilde{h}$ est un morphisme dans la catégorie $\tilde{\mathscr{C}}$.

(2) $\tilde{h}$ a la propriété universelle.
On observe d'abord que f est un morphisme et donc $f = r \circ f = f \circ p$ pour le diagramme

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] \arrow[dr, "f"] & G \arrow[d, "r"] \\ E \arrow[r, "f"] & G \end{tikzcd}$$

Et donc on a que

$$r \circ f \circ p = f.$$

De même pour g on a que
$$r \circ g \circ q = g.$$
On calcule
$$\begin{aligned}\tilde{h} \circ i_1 \circ p &= r \circ h \circ (p \oplus q) \circ i_1 \circ p\\ &= r \circ h \circ i_1 \circ p \text{ car } (p \oplus q) \circ i_1 \circ p = i_1 \circ p\\ &= r \circ f \circ p\\ &= f\end{aligned}$$
Le même raisonnement s'applique pour $\tilde{h} \circ i_2 \circ q = g$

Ainsi $\tilde{h}$ a bien les propriétes voulues.

On vérifie maintenant que $\mathrm{Hom}_{\tilde{\mathscr{C}}}((E,p),(F,q))$ est un groupe abélien, ce qui nous permettera de dire que $\tilde{\mathscr{C}}$ est une catégorie additive.
On sait que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(E,F)$ est un groupe abélien.
L'élément 0 de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(E,F)$ est aussi dans $\mathrm{Hom}_{\tilde{\mathscr{C}}}((E,p),(F,q))$ car il stisfait au diagramme
$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "0"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "0"] & F \arrow[d, "q"] \\ E \arrow[r, "0"] & F \end{tikzcd} .$$
Pour deux morphismes f et g dans $\mathrm{Hom}_{\tilde{\mathscr{C}}}((E,p),(F,q))$, définissons
$$f+g = f+g \text{ dans } \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(E,F)$$
Alors le diagramme
$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f+g"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "f+g"] & F \arrow[d, "q"] \\ E \arrow[r, "f+g"] & F \end{tikzcd}$$
commute car
$$q \circ (f+g) = q \circ f + q \circ g = f + g$$
vu que f et g sont des morphismes et $\mathscr{C}$ est additive, ce qui nous permet de distribuer la composition. De même on obtient que le triangle du bas commute.
Ainsi $f+g$ est dans $\mathrm{Hom}_{\tilde{\mathscr{C}}}((E,p),(F,q))$ qui est donc un sous-groupe abélien de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(E,F)$.

Montrons maintenant que $\tilde{\mathscr{C}}$ est pseudo-abélienne.
Soit f un projecteur de $(E,p) \in \tilde{\mathscr{C}}$ (en particulier f est un morphisme de $\tilde{\mathscr{C}}$). On veut prouver qu'il existe un noyau de f, $\ker f$.
Posons
$$\ker f = (E, p-f)$$
(1) $\ker f$ est bien défini (i.e. c'est un objet).
Il faut vérifier que $p-f$ est un projecteur.
$$\begin{aligned}(p-f)\circ(p-f) &= p \circ p - p \circ f - f \circ p + f \circ f\\ &= p - f - f + f\\ &= p - f\end{aligned}$$

Ainsi $p-f$ est un projecteur.

(2) Montrons que $\ker f$ avec la flèche

$$p-f:(E,p-f)\longrightarrow(E,p)$$

a la propriété universelle du noyau.

(a) $p-f$ est un morphisme de $\tilde{\mathscr{C}}$ car

$$p\circ(p-f)=p\circ p-p\circ f=p-f$$

et d'autre part

$$(p-f)\circ(p-f)=(p-f)$$

comme vu avant. Donc le diagramme

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "p-f"] \arrow[d, "p-f"'] \arrow[dr, "p-f"] & E \arrow[d, "p"] \\
E \arrow[r, "p-f"] & E
\end{tikzcd}$$

commute, et ainsi $p-f$ est un morphisme.

(b) Vérifions la propriété universelle

$$\begin{tikzcd}
(E,p-f) \arrow[r, "p-f"] \arrow[rr, bend left, "f\circ(p-f)=0"] & (E,p) \arrow[r, "f"] & (E,p) \\
 & (F,q) \arrow[u, "g"] \arrow[ur, "0"'] \arrow[ul, dotted, "\exists!h"] &
\end{tikzcd}$$

où (F,q) est un objet et g un moprhisme dans $\tilde{\mathscr{C}}$ tel que $f\circ g=0$. Si $h:(F,q)\longrightarrow(E,p-f)$ est un morphisme dans $\tilde{\mathscr{C}}$ tel que le diagramme commute, alors on a

$$(p-f)\circ h=g$$

et d'autre part, vu que h est un morphisme, on a

$$h\circ q=(p-f)\circ h=h$$

alors

$$h=(p-f)\circ h=g.$$

Posons donc $h=g$.

– Montrons que

$$h:(F,q)\longrightarrow(E,p-f)$$

est un morphisme. On a

$$(p-f)\circ h=(p-f)\circ g=p\circ g-f\circ g=g-0=g=h$$

et

$$h\circ q=g\circ q=g=h$$

Ainsi on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "h"] \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "h"] & E \arrow[d, "p-f"] \\ F \arrow[r, "h"] & E \end{tikzcd}$$

et donc h est un morphisme.

– Maintenant il nous reste à voir que le triangle de gauche commute. On a

$$(p-f)\circ h = (p-f)\circ g = g$$

et ainsi la propriété est verifié.

(3) On s'occupe maintenant du foncteur $\varphi : \mathscr{C} \longrightarrow \tilde{\mathscr{C}}$.
On pose

$$\varphi(E) = (E, id_e)$$

pour tout objet E de $\mathscr{C}$, et

$$\varphi(f) = f$$

pour tout morphisme f de $\mathscr{C}$.
Montrons que f est un morphisme dans $\tilde{\mathscr{C}}$ pour tout morphisme f de $\mathscr{C}$

$$E \xrightarrow{f} F.$$

On a le diagramme évident

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, "f"] & F \arrow[d, equal] \\ E \arrow[r, "f"] & F \end{tikzcd}$$

et donc f est un morphisme.

φ est pleinement fidèle car en effet on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(E,F) = \mathrm{Hom}_{\tilde{\mathscr{C}}}((E,p),(F,q))$$

et on peut voir cette égalité comme une bijection et un homomorphisme de groupes abéliens. De plus φ est clairement additif.

Montrons enfin que $(\tilde{\mathscr{C}}, \varphi)$ satisfait la propriété universelle souhaitée

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"] & & \tilde{\mathscr{C}} \arrow[dl, dotted, "\exists! \tilde{\psi}"] \\ & \mathscr{D} & \end{tikzcd}$$

avec ψ additif et $\mathscr{D}$ pseudo-abélienne.
On pose

$$\tilde{\psi}(E,p) = \ker(\psi(1-p))$$
$$\tilde{\psi}(f) = \psi(f)_{|_{\ker(\psi(1-p))}}$$

On a

$$\begin{aligned}\tilde{\psi} \circ \varphi(E) &= \tilde{\psi}(E, id_E) \\ &= \ker(\psi(1 - id_E)) \\ &= \ker(\psi(0) \\ &= \ker(0_{\psi(E)}) \\ &= \psi(E).\end{aligned}$$

De plus

$$\tilde{\psi} \circ \varphi(f) = \tilde{\psi}(f)_{|_{\ker \psi(1-p)}} = \tilde{\psi}(f)_{|_{\psi(E)}} = \psi(f).$$

Ainsi $\tilde{\psi}$ vérifie la propriété voulue.

L'unicité de $(\tilde{\mathscr{C}}, \varphi)$ resulte des propriétés universelles.

De plus si on pose $f = 1 - p$ vue comme un morphisme de $\varphi(E)$ vers $\varphi(E)$, on obtient que le noyau de $1 - p$ est (E, p), et ainsi pour la proposition 2.48 on a que

$$\varphi(E) = (E, 1 - p) \oplus (E, p).$$

Ce qui montre que tout objet (E, p) de $\tilde{\mathscr{C}}$ est un facteur direct d'un objet dans l'image de φ, et ainsi φ est quasi-surjective.
On achève ainsi la démonstration. □

Définition 2.51. La catégorie $\tilde{\mathscr{C}}$ ici décrite est appelée la *catégorie pseudo-abélienne associée à* $\mathscr{C}$.

Théorème 2.52. *Soient $\mathscr{C}$ une catégorie additive, $\mathscr{D}$ une catégorie pseudo-abélienne et $\psi : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ un foncteur plienement fidéle tel que tout objet de $\mathscr{D}$ soit un facteur direct d'un objet dans l'image de ψ, alors le foncteur $\tilde{\psi}$ décrit dans le théorème précédent est une équivalence de catégorie entre $\tilde{\mathscr{C}}$ et $\mathscr{D}$.*

Démonstration. Un foncteur est une équivalence de catégorie si et seulement si il est essentiellement surjectif et pleinement fidèle (Mac Lane page 91 [**6**]).

(1) Montrons d'abord que le foncteur $\tilde{\psi}$ est essentiellemetn surjectif (i.e. tout objet de $\mathscr{D}$ est isomorphe à un objet de l'image de $\tilde{\psi}$).
Soit G un objet de $\mathscr{D}$, par hypothèse il existe un objet E dans $\mathscr{C}$ et un objet G' dans $\mathscr{D}$ tels que $\psi(E) = G \oplus G'$.
Par la propriéte universelle de la somme directe on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[dr, "i_1"] \arrow[drr, bend left, "\mathrm{id}"] & & \\
& G \oplus G' \arrow[r, "\exists ! p_1"] & G \\
G' \arrow[ur, "i_2"] \arrow[urr, bend right, "0"'] & &
\end{tikzcd}.$$

Ainsi on a que $p_1 \circ i_1 = \mathrm{id}_G$ et $p_1 \circ i_2 = 0$, et donc pour la proposition 18.5 page 31 du Mitchell [**3**] on a que

$$\theta = i_1 \circ p_1 : \psi(E) \longrightarrow \psi(E)$$

est un projecteur et

$$G \xrightarrow{i_1} G \oplus G'$$

est le noyau de $q = \mathrm{id} - \theta$ qui est aussi un projecteur. Ainsi on obtient que $G \cong \ker(q)$.
Comme ψ est pleinement fidèle, on peut écrire q comme $\psi(p)$ pour un certain projecteur p de E. Alors G est isomorphe à $\tilde{\psi}(E, 1-p)$, en accord avec la définition de $\tilde{\psi}$ donnée dans la preuve du théorème 2.50

(2) Pour prouver que $\tilde{\psi}$ est pleinemetn fidèle, considérons deux objets H et H' de $\tilde{\mathscr{C}}$ qui sont des facteurs directs de $\varphi(E)$ et $\varphi(E')$ respectivement. Alors on a le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\mathscr{C}}(\varphi(E), \varphi(E')) \arrow[r, "\cong"] \arrow[dr, "\tilde{\psi}_{\varphi(E),\varphi(E')}"'] & \mathscr{C}(E, E') \arrow[r, bend left] \arrow[d, "\psi_{E,E'}"] & \tilde{\mathscr{C}}(H, H') \arrow[l, bend left] \arrow[d, "\tilde{\psi}_{H,H'}"] \\
& \mathscr{D}(\psi(E), \psi(E')) \arrow[r, bend left] & \mathscr{D}(\tilde{\psi}(H), \tilde{\psi}(H')) \arrow[l, bend left]
\end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales courbes sont induites par la decomposition en somme directe $\varphi(E) = H \oplus H_1$ et $\varphi(E') = H' \oplus H_1'$ et les morphismes associés $i_1, i_1', p_1 etp_1'$. Autrement dit si

$$H \xrightarrow{f} H'$$

est un morphisme entre H et H', alors on pose

$$\varphi(E) \xrightarrow{g} \varphi(E)$$

défini par la composition

$$g = i_1' \circ f \circ p_1;$$

et si

$$\varphi(E) \xrightarrow{k} \varphi(E)'$$

est un morphisme entre $\varphi(E)$ et $\varphi(E')$, alors on pose

$$H \xrightarrow{l} H'$$

comme étant la composition

$$l = p_1' \circ k \circ i_1.$$

On observe que

$$p_1' \circ (i_1' \circ f \circ p_1) \circ i_1 = (p_1' \circ i_1') \circ f \circ (p_1 \circ i_1) = \mathrm{id}_{H'} \circ f \circ \mathrm{id}_H = f \tag{1}$$

et

$$\begin{aligned} i_1' \circ (p_1' \circ k \circ i_i) p_1 &= (i_1' \circ p_1') \circ k \circ (i_1 \circ p_1) \\ &= (1 - p') \circ k \circ (1 - p) \\ &= k \end{aligned} \tag{2}$$

où la première identité est évidente et pour la deuxième on rappelle que si $H = (E, p)$ alors $i_1 \circ p_1 = 1 - p$ comme dans la preuve de la proposition 2.48

et vu que $1-p$ est un projecteur sur $\varphi(E)$ on a le diagramme commutatif (en considérant le même pour $\varphi(E')$ et $i'_1 \circ p'_1 = 1-p'$)

$$\begin{tikzcd} \varphi(E) \arrow[r, "k"] \arrow[d, "i_1 \circ p_1 = 1-p"'] \arrow[dr, "k"] & \varphi(E') \arrow[d, "i'_1 p'_1 = 1-p'"] \\ \varphi(E) \arrow[r, "k"'] & \varphi(E') \end{tikzcd}$$

car k est un morphisme.
De plus on observe facilement que chacune des flèches horizontales courbes décrites ci-dessus est un homomprphisme de groupes ; ainsi grâce à 1 et 2 on a que ces flèches sont des isomorphismes. De même pour les flèches en bas, avec le fait que ψ est quasi-surjectif, on obtient que les flèches sont des isomorphismes de groupes.

On montre maintenant que le carré de droite commute. Pour faire ceci il suffit de montrer que $\tilde{\psi}(i_1), \tilde{\psi}(i'_1), \tilde{\psi}(p_1), \tilde{\psi}(p'_1)$ corresopondent aux analogues de i_1, i'_1, p_1, p'_1 pour les flèches en bas.
En effet on a , par exemple pour i_1,

$$E \xrightarrow{i_1} E \oplus E'$$

$$\Downarrow \psi$$

$$\psi(E) \xrightarrow{\psi(i_1)} \psi(E \oplus E') \ .$$

Or $\psi(E) \oplus \psi(E') \cong \psi(E \oplus E')$, et ainsi l'injection "en bas" corresponds à l'image par ψ de i_1.

Enfin vu qu'on sait que le carré de droite du diagramme commute, les flèches courbes sont des isomorphismes et $\psi_{E,E'}$ est un isomorphisme par hypothèse, on a que $\tilde{\psi}_{H,H'}$ est un isomorphisme.

Ainsi $\tilde{\psi}$ est une équivalence de catégorie. □

Théorème 2.53. *Soit $\mathscr{C} = Vect_T(X)$ la catégorie des fibrés triviaux sur X. Si X est compact, alors la catégorie pseudo-abélienne associée à $\mathscr{C}$ est équivalente à la catégorie $Vect(X)$ des fibrés vectoriels sur X.*

Démonstration. Soit $\psi : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ le foncteur d'inclusion (pleinement fidèle). Par le théorème 2.45 on a que les hypothèses du théorème 2.52 sont vérifiées et donc on peut conclure que $\tilde{\mathscr{C}}$ est équivalente à $\mathscr{D}$. □

Théorème 2.54. *Soit A un anneau à unité. Posons $\mathscr{C} = \mathscr{L}(A)$ la catégorie des modules libres de type fini. Alors $\tilde{\mathscr{C}}$ est équivalente à $\mathscr{D} = \mathscr{P}(A)$ la catégorie des modules projectifs de type fini.*

Démonstration. Tout module libre est projectif, et on sait que tout module projectif est facteur direct d'un module libre (pour plus de détails voir Rotman pages 474-476 [**2**]). On considère encore une fois le foncteur d'inclusion pleinement fidèle $\psi : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$. On obtient ainsi que les hypotèses du théorème 2.52 sont vérifiés, ce qui nous permet de conclure. □

Remarque et Définition 2.55. Soit $A = C_{\mathbb{K}}(X)$ l'anneau des fonctions continues à valeur dans $\mathbb{K}$ sur un espace X compact.
Si E est un $\mathbb{K}$-fibré vectoriel sur X, l'ensemble $\Gamma(X, E)$ des sections continues de E est muni d'une structure de A–module par

$$\lambda \cdot s(x) = \lambda(x) \cdot s(x)$$

où $s \in \Gamma(X, E)$ et $\lambda \in A$.
Si E est un fibré trivial $X \times \mathbb{K}^n$, on peut identifier $\Gamma(X, E)$ à A^n, et si d'autre part on a E et E' tels que $E \oplus E' \cong X \times \mathbb{K}^n$, alors

$$\Gamma(X, E) \oplus \Gamma(X, E') \cong \Gamma(X, E \oplus E') \cong A^n$$

et ainsi $\Gamma(X, E)$ est un A–module projectif de type fini (comme facteur direct d'un module libre). On définit alors

$$\begin{array}{cccc} \Gamma : & Vect(X) & \longrightarrow & \mathscr{P}(A) \\ & E & \longmapsto & \Gamma(X, E) \\ & E \xrightarrow{f} F & \longmapsto & \begin{array}{ccc} \Gamma(X, E) & \xrightarrow{\Gamma(f)} & \Gamma(X, F) \\ s & \longmapsto & f \circ s \end{array} \end{array}$$

Théorème 2.56 (Serre-Swan). *Le foncteur Γ qu'on vient d'introduire est une équivalence de catégorie entre Vect(X)et $\mathscr{P}(A)$ où $A = C_{\mathbb{K}}(X)$ et X est compact.*

Démonstration. Le foncteur Γ induit un foncteur

$$\Gamma_T : \mathrm{Vect}_T \longrightarrow \mathscr{L}(A)$$

où $\mathrm{Vect}_T(X)$ est la sous categorie de $\mathrm{Vect}(X)$ des fibrés vectoriels triviaux sur X qu'on a définit au théorème 2.53. Pour (2.55) on a $A^n \cong \Gamma_T(E)$ avec $E = X \times \mathbb{K}^n$ et donc Γ_T est essentiellement surjective.
Si $F = X \times \mathbb{K}^p$ et $f : E \longrightarrow F$ est un morphisme, alors $\Gamma_T(f)$ est representé par les matrices $M(x) = (a_{ji}(x))$, pour $i = 1, \ldots, n$ et $j = 1, \ldots, p$ et l'application $x \mapsto M(x)$ coïncides avec $\check{f} : X \longrightarrow \mathbb{K}^e_v(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$ selon la notation du théorème 1.13. De plus, toujours par le théorème 1.13, on a que $\check{f}$ est continue, donc $\Gamma_T(f)$ corresponds de manière unique à une application continue de X vers $\mathbb{K}^e_v(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$.
D'autre part si $h : X \longrightarrow \mathbb{K}^e_v(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$ est une application continue alors pour le même théorème $\hat{h} : E \longrightarrow F$ est un morphisme de E dans F. Par la remarque 1.14 on a $\hat{\check{f}} = f$ et $\check{\hat{h}} = h$, ainsi on a une bijection entre les morphismes de fibrés vectoriels de E dans F et les applications continues de X dans $\mathbb{K}^e_v(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$. Donc par l'identifiction faite entre les morphismes de $\Gamma_T(E)$ dans $\Gamma_T(F)$ et les applications continues de X dans $\mathbb{K}^e_v(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$ on a une bijection entre les morphismes de fibrés vectoriels de E dans F et les morphismes de modules libres de $\Gamma_T(E)$ dans $\Gamma_T(F)$.
Ainsi Γ_T est pleinement fidèle, et donc Γ_T est une équivalence de catégorie.

Posons $\mathscr{C} = \mathrm{Vect}_T(X)$ et $\mathscr{D} = \mathscr{P}(A)$, et soit $\psi : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ la composition de Γ_T et l'inclusion de $\mathscr{L}(A)$ dans $\mathscr{P}(A)$. Comme le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Vect}_T(X) = \mathscr{C} \arrow[r] \arrow[d, "\psi"'] & \tilde{\mathscr{C}} \sim \mathrm{Vect}(X) \arrow[dl, "\Gamma"] \\ \mathscr{P}(A) = \mathscr{D} & \end{tikzcd}$$

est commutatif, Γ doit être identifié avec $\tilde{\psi}$ du théorème 2.50. De plus tout module projectif est un facteur direct d'un module libre (Rotman page 476 [**2**]) et ainsi tout objet de $\mathscr{D}$ est un facteur direct d'un objet dans l'image de ψ, ainsi pour le théorème 2.52 on a que Γ est une équivalence de catégorie. $\square$

Bibliographie

[1] KAROUBI, MAX. *K–Theory, An Introduction*. Springer-Verlag, 1978.

[2] ROTMAN, JOSEPH J.. *Advanced modern algebra*. Prentice Hall Inc., 2002.

[3] MITCHELL, BARRY. *Theory of categories*. Academic Press, 1965.

[4] HUSEMOLLER, DALE. *Fibre bundles*. McGraw-Hill Book Co., 1966.

[5] HERRLICH, HORST & STRECKER, GEORGE E.. *Category theory : an introduction*. Allyn and Bacon Inc., 1973.

[6] MAC LANE, SAUNDERS. *Categories for the Working Mathematician*. Springer-Verlag, 1971.

[7] ALEXANDRE, XAVIER. *Théorie des catégories*. Projet de semestre à l'EPFL, été 2005.

Index

$\mathbb{K}$-famille, 5
  induite, 10
  Morphisme, 6
  Morphisme inverse, 7
  Restriction, 10
  triviale, 8

Catégorie
  additive, 20
  des $\mathbb{K}$-familles sur X, 7
  des $\mathbb{K}$-familles, 7
  pseudo-abélienne, 36
  pseudo-abélienne associée, 44

Equivalence de G-cocycles, 16

Fibré vectoriel, 13
Foncteur
  continu, 21
  pleinement fidèle, 38
  quasi-surjectif, 38

G-cocycle, 16

Rang d'un fibré vectoriel, 15

Section , 25
  zero, 25