Espaces de Sobolev

Louis Fauchier-Magnan, SMA - EPFL

Boris Buffoni, IACS

février 2006

Chapitre 1

Introduction

Le but de ce présent travail est d'introduire les espaces de Sobolev en dimension N. Nous nous baserons principalement sur le livre de H. Brezis. Nous mettrons en avant des résultats importants, comme les injections de Sobolev, particulièrement délicates en dimension supérieure à un. Nous nous permettrons d'omettre certaines preuves qui ne paraissent pas essentielles à la compréhension du sujet, renvoyant par conséquent le lecteur au livre cité plus haut.

Table des matières

1 Introduction **1**

2 Espace de Sobolev en dimension un **3**

3 Espace de Sobolev en dimension N **16**

Chapitre 2

Espace de Sobolev en dimension un

Définition 2.0.1. Soit $I = (a, b)$ un intervalle (pas forcément borné) et $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leqslant p \leqslant \infty$.
On définit l'espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$ par :

$$W^{1,p}(I) := \left\{ u \in L^p(I) \mid \exists g \in L^p(I) \text{ t. q. } \int_I u\phi' = -\int_I g\phi \ \ \forall \phi \in C_0^\infty(I) \right\} \tag{2.1}$$

En utilisant le Lemme fondamental de calcul des variations qui dit :

Soit $f \in L^1_{loc}(I)$ telle que

$$\int_I f\phi = 0 \ \ \forall \phi \in C_0^\infty(I)$$

alors $f = 0$
On peut conclure que dans la définition précédente, si g existe, elle est unique. On pose alors $g = u'$.

Remarque 2.0.1. On munit $W^{1,p}(I)$ de la norme :

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} := \|u\|_{L^p(I)} + \|u'\|_{L^p(I)} \tag{2.2}$$

Lemme 2.0.1. L'espace $W^{1,p}(I)$ est :

- un espace de Banach pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$
- un espace réflexif pour $1 < p < \infty$
- un espace séparable pour $1 \leqslant p < \infty$

Preuve :Ces propriétés découlent immédiatement des preuves pour les espaces L^p qui sont supposées connues.

Théorème 2.0.2. Soit $u \in W^{1,p}(I)$ alors $\exists \tilde{u} \in C(\bar{I})$ telle que :

$$u = \tilde{u} \text{ pp sur } I \tag{2.3}$$

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_x^y u'(t)dt \; \forall x, y \in \bar{I} \tag{2.4}$$

Remarque 2.0.2. On constate clairement que le représentant continu de chaque $u \in W^{1,p}(I)$ est unique.

Preuve :

On utilisera les deux lemmes (sans preuve) :

Lemme 2.0.2. Soit $g \in L^1_{loc}(I)$. Fixons $y_o \in I$ et posons :

$$v(x) := \int_{y_0}^x g(t)dt \, , \; \forall x \in I$$

Alors $v \in C(I)$ et $v' = g$ au sens faible (c'est-à-dire au sens de Sobolev)

Lemme 2.0.3. Soit $f \in L^1_{loc}(I)$ telle que

$$\int_I f\phi' = 0 \, , \; \forall \phi \in C_0^\infty(I)$$

alors il existe une constante C telle que $f = C$ sur I.

Démonstration du théorème

Fixons $y_o \in I$ et posons :

$$\bar{u}(x) := \int_{y_0}^x u'(t)dt$$

On sait d'après le premier lemme cité que $\bar{u}' = u'$ et donc

$$\int_I \bar{u}\phi' = -\int_I u'\phi = \int_I u\phi' \; \forall \phi \in C_0^\infty(I)$$

et donc

$$\int_I (u - \bar{u})\phi' = 0 \, , \forall \phi \in C_0^\infty(I)$$

En utilisant le second lemme, on sait qu'il existe C constante telle que $u - \bar{u} = C$ pp sur I.

On pose alors $\tilde{u} := \bar{u} + C$.

Proposition 2.0.1. Autre caractérisation d'appartenance à $W^{1,p}(I)$ Soit $u \in L^p(I)$ avec $1 < p \leqslant \infty$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $u \in W^{1,p}(I)$

2. Il existe une constante C telle que

$$\left|\int_I u\phi'\right| \leqslant C\|\phi\|_{L^{p'}(I)}\ ,\ \forall \phi \in C_0^\infty(I) \tag{2.5}$$

3. Il existe une constante C telle que pour tout ouvert $\omega \subset\subset I$ et tout $h \in \mathbb{R}$ avec $|h| < dist(\omega, I^c)$, on a

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)} \leq C|h| \tag{2.6}$$

Où $\tau_h u(x) := u(x+h)$ De plus, on peut choisir $C = \|u'\|_{L^p(I)}$ dans toute la proposition.

<u>Preuve :</u>

(1) $\Rightarrow$ (2)
Soit $\phi \in C_0^\infty(I)$ alors, par définition de $W^{1,p}(I)$ et grâce à l'inégalité de Hölder,

$$\left|\int_I u\phi'\right| = \left|-\int_I u'\phi\right| \leqslant \|u'\phi\|_{L^1(I)} \leqslant \|u'\|_{L^p(I)}\|\phi\|_{L^{p'}(I)}$$

(2) $\Rightarrow$ (1)
La forme linéaire

$$\phi \mapsto \int_I u\phi'$$

est définie sur $C_0^\infty(I)$ qui est dense dans $L^{p'}(I)$, et elle est continue sur $L^{p'}(I)$(hypothèse 1). Par le théorème de Hahn-Banach, elle se prolonge en une forme linéaire continue Ψ sur $L^{p'}(I)$. Par le théorème de représentation de Riesz, $\exists g \in L^p(I)$ tel que

$$\Psi(\varphi) = \int_I g\varphi,\ \ \forall \varphi \in L^{p'}(I)$$

Par conséquent, on sait que

$$\int_I u\phi' = \Psi(\phi) = \int_I g\phi = -\int_I (-g)\phi,\ \ \forall \phi \in C_0^\infty(I)$$

En posant $u' := -g$ on constate que $u \in W^{1,p}(I)$.

(1) $\Rightarrow$ (3)
D'après le théorème 2.0.2, $\forall x \in \omega$,

$$u(x+h) - u(x) = \int_x^{x+h} u'(t)dt = h\int_0^1 u'(x+sh)ds$$

Donc

$$|u(x+h) - u(x)| \leqslant |h| \int_0^1 |u'(x+sh)|ds$$

Le résultat est évident si $p = \infty$. Supposons alors $1 < p < \infty$. En appliquant l'inégalité de Hölder, on trouve :

$$\int_0^1 |u'(x+sh)|ds \leqslant \left\{\int_0^1 |u'(x+sh)|^p ds\right\}^{1/p} \cdot \underbrace{\left\{\int_0^1 |1|^{p'} ds\right\}^{1/p'}}_{=1}$$

Et par conséquent,

$$\left\{\int_0^1 |u'(x+sh)|ds\right\}^p \leqslant \int_0^1 |u'(x+sh)|^p ds$$

Ainsi,

$$|u(x+h)-u(x)|^p \leqslant |h|^p \int_0^1 |u'(x+sh)|^p ds$$

Or

$$\int_\omega |u(x+h)-u(x)|^p dx \leqslant |h|^p \int_\omega dx \int_0^1 |u'(x+sh)|^p ds = |h|^p \int_0^1 ds \int_\omega |u'(x+sh)|^p dx$$

Or, pour $0 < s < 1$, on a

$$\int_\omega |u'(x+sh)|^p dx = \int_{\omega+sh} |u'(y)|^p dy \leqslant \int_I |u'(y)|^p dy$$

Par conséquent,

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)} \leqslant |h| \cdot \|u'\|_{L^p(I)}$$

(3) $\Rightarrow$ (2)

Soit $\phi \in C_0^\infty(I)$. On choisit $\omega \subset\subset I$ tel que $\operatorname{supp}\phi \subset \omega$. Pour $h \in \mathbb{R}$ avec $|h| < dist(\omega, I^c)$, on obtient avec un changement de variables :

$$\int_I [u(x+h)-u(x)]\phi(x)dx = \int_I u(x)[\phi(x-h)-\phi(x)]dx$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\int_I [u(x+h)-u(x)]\phi(x)dx = \int_\omega [u(x+h)-u(x)]\phi(x)dx \leqslant \|(\tau_h u - u)\phi\|_{L^1(\omega)} \leqslant$$

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)} \|\phi\|_{L^{p'}(I)} \leqslant C|h| \|\phi\|_{L^{p'}(I)}$$

la dernière inégalité venant de l'hypothèse (3). Ainsi, pour $h \neq 0$, on a :

$$\left|\int_I u(x)\left\{\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h}\right\}dx\right| \leqslant C\|\phi\|_{L^{p'}(I)}$$

En passant à la limite $h \to 0$, on trouve :

$$\left|\int_I u\phi'\right| \leqslant C\|\phi\|_{L^{p'}(I)}, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(I)$$

Corolaire 2.0.1. Une fonction $u \in L^\infty$ appartient à $W^{1,\infty}(I)$ si et seulement s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|u(x) - u(y)| \leqslant C|x - y| \ pp \ x, y \in I \tag{2.7}$$

Preuve :
Il suffit d'appliquer la proposition précédente pour $p = \infty$

Théorème 2.0.3. Opérateur de prolongement
Soit $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Il existe un opérateur de prolongement

$$P : W^{1,p}(I) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}) \tag{2.8}$$

linéaire et continu tel que :

1. $(Pu)_{|I} = u$
2. $\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R})} \leqslant C\|u\|_{L^p(I)} \ \forall u \in W^{1,p}(I)$
3. $\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(I)} \ \forall u \in W^{1,p}(I)$

où $C = C(|I|)$
Preuve :
Commençons par le cas où $I = (0, \infty)$. On pose :

$$(Pu)(x) = u^*(x) := \begin{cases} u(x) & \text{si } x \geqslant 0 \\ u(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Il est tout d'abord évident que $u^*_{|I} = u$. De plus,

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}} |u^*(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \left\{ \int_{-\infty}^{0} |u(-x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \int_{0}^{\infty} |u(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$2\left\{ \int_I |u(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} = 2\|u\|_{L^p(I)}$$

Ainsi

$$\|u^*\|_{L^p(\mathbb{R})} \leqslant 2 \ \|u\|_{L^p(I)}$$

Ensuite, posons :

$$v(x) := \begin{cases} u'(x) & \text{si } x > 0 \\ -u'(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ainsi v est définie presque partout sur $\mathbb{R}$ et on constate que $v \in L^p(\mathbb{R})$.

De plus,

$$u^*(x) - u(0) = \int_0^x v(y)dy, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

En effet, en utilisant le théorème 2.0.2, pour $x \geqslant 0$,

$$\int_0^x v(t)dt = \int_0^x u'(t)dt = u(x) - u(0) = u^*(x) - u(0)$$

Ensuite, pour $x < 0$, on a que

$$\int_0^x v(y)dy = -\int_x^0 v(y)dy = -\int_x^0 -u'(-y)dy = \int_x^0 u'(-y)dy =$$

$$\int_0^{-x} u'(t)dt = u(-x) - u(0) = u^*(x) - u(0)$$

Par conséquent, en utilisant le lemme 2.0.2, on constate que $u \in W^{1,p}(I)$ avec $(u^*)' = v$, et de plus,

$$||u^*||_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leqslant 2||u||_{W^{1,p}(I)}$$

Considérons maintenant un intervalle borné I. On peut toujours se ramener au cas $I = (0, 1)$ Fixons une fonction $\eta \in C^1(\mathbb{R})$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$ telle que

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < \frac{1}{4} \\ \\ 0 & \text{si } x > \frac{3}{4} \end{cases}$$

Ensuite, $\forall f \in \mathbb{R}^{(0,1)}$ on définit $\tilde{f} \in \mathbb{R}^{(0,\infty)}$ par :

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Ensuite, pour $u \in W^{1,p}(I)$, on a :

$$u = \eta u + (1 - \eta)u$$

On va ensuite utiliser le lemme suivant :

Lemme 2.0.4. Soit $u \in W^{1,p}(I)$, alors

$$\eta\tilde{u} \in W^{1,p}(0, \infty) \text{ et } (\eta\tilde{u})' = \eta'\tilde{u} \ + \ \eta\tilde{u'}$$

Preuve :
Soit $\varphi \in C_0^\infty(0, \infty)$ On a :

$$\int_0^\infty \eta\tilde{u}\varphi' = \int_0^1 \eta u\varphi' = \int_0^1 u[(\eta\varphi)' - \eta'\varphi] = -\int_0^1 u'\eta\varphi - \int_0^1 u\eta'\varphi = -\int_0^\infty (\tilde{u'}\eta + \tilde{u}\eta')\varphi$$

On s'occupe tout d'abord de ηu. On prolonge cette application, définie d'abord sur $(0, 1)$, à $(0, \infty)$ grâce à $\eta\tilde{u}$. On constate, à l'aide du lemme précédent, que $\eta\tilde{u} \in$

$W^{1,p}(0,\infty)$. On la prolonge ensuite par réflexion à $\mathbb{R}$ tout entier. On obtient ainsi une fonction $w_1 \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\|w_1\|_{L^p(\mathbb{R})} \leqslant 2\|u\|_{L^p(I)} \text{ et } \|w_1\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(I)}$$

On procède de manière analogue pour $(1-\eta)u$. On la prolonge d'abord à $(-\infty, 1)$ en la posant égale à 0 sur $(-\infty, 0]$ et on la prolonge ensuite à $\mathbb{R}$ par réflexion mais cette fois-ci par rapport au point 1. On obtient ainsi une fonction $w_2 \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ qui prolonge $(1-\eta)u$ et qui vérifie :

$$\|w_2\|_{L^p(\mathbb{R})} \leqslant 2\|u\|_{L^p(I)} \text{ et } \|w_2\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(I)}$$

On pose ensuite

$$Pu \ := \ w_1 \ + \ w_2$$

Reste à décrire un peu plus en détail la constante C : On a
$\|w_1\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} = \|w_1\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|w_1'\|_{L^p(\mathbb{R})} \leqslant 2\|u\|_{L^p(I)} + \|(\eta u)'\|_{L^p(\mathbb{R})} \leqslant 2\|u\|_{L^p(I)} + \|\eta' u + \eta \tilde{u}'\|_{L^p(\mathbb{R})} \leqslant 2\|u\|_{L^p(I)} + \|\eta' u\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|\eta \tilde{u}'\|_{L^p(\mathbb{R})} \leqslant 2\|u\|_{L^p(I)} + \|\eta'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|u\|_{L^p(I)} + \|\tilde{u}'\|_{L^p(0,\infty)} \leqslant 3\|u\|_{L^p(I)} + \|\eta'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|u\|_{L^p(I)} \leqslant \max\{3, \|\eta'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\}\|u\|_{L^p(I)}$
et
$\|w_2\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} = \|w_2\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|w_2'\|_{L^p(\mathbb{R})} \leqslant 2\|u\|_{L^p(I)} + \|[(1-\eta)u]'\|_{L^p(\mathbb{R})} \leqslant 2\|u\|_{L^p(I)} + \|(1-\eta)'u + (1-\eta)\tilde{u}'\|_{L^p(\mathbb{R})} \leqslant 2\|u\|_{L^p(I)} + \|(1-\eta)'u\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|(1-\eta)\tilde{u}'\|_{L^p(\mathbb{R})} \leqslant 2\|u\|_{L^p(I)} + \|(1-\eta)'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|u\|_{L^p(I)} + \|\tilde{u}'\|_{L^p(0,\infty)} \leqslant 3\|u\|_{L^p(I)} + \|(1-\eta)'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|u\|_{L^p(I)} \leqslant \max\{3, \|(1-\eta)'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\}\|u\|_{L^p(I)}$
On pose alors

$$C := \max\{3, \|\eta'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \|(1-\eta)'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\} \tag{2.9}$$

Lemme 2.0.5. Densité

Soit $u \in W^{1,p}(I)$ avec $1 \leqslant p < \infty$. Alors il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$u_{n|I} \longrightarrow u \text{ dans } W^{1,p}(I) \tag{2.10}$$

Nous allons tout d'abord énoncer une technique très courante en analyse fonctionnelle que nous utiliserons plus loin : les suites régularisantes

On appelle suite régularisante toute suite de fonctions $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\phi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad \operatorname{supp}\phi_n \subset B\Big(0, \frac{1}{n}\Big), \quad \int \phi_n = 1, \quad \phi_n \geqslant 0 \tag{2.11}$$

Ces fonctions sont très utiles, car elles vérifient :
Soit $1 \leqslant p < \infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R})$. Alors $\phi_n * f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $\|\phi_n * f - f\|_{L^p(\mathbb{R})} \longrightarrow 0$
Ensuite, nous utilisons les deux lemmes suivants (sans preuve) :

Lemme 2.0.6. Convolution
Soit $\eta \in L^1(\mathbb{R})$ et soit $v \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ avec $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Alors

$$\eta * v \in W^{1,p}(\mathbb{R}) \text{ et } (\eta * v)' = \eta * v' \tag{2.12}$$

Lemme 2.0.7. Troncature
On fixe une fonction $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $0 \leqslant \xi \leqslant 1$ et

$$\xi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leqslant 1 \\ \\ 0 & \text{si } |x| \geqslant 2 \end{cases}$$

On pose ensuite, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\xi_n(x) := \xi(\frac{x}{n})$. On sait, grâce au théorème de convergence dominée, que $\forall u \in L^p(\mathbb{R})$, $\xi_n u \longrightarrow u$ dans $L^p(\mathbb{R})$. De plus, par définition de ξ on constate que $\xi_n u$ est à support compact $\forall n \in \mathbb{N}$.

Revenons à notre lemme initial. Nous choisissons une suite régularisante $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et nous allons montrer que la suite

$$u_n := \xi_n(\rho_n * u)$$

converge vers u dans $W^{1,p}(I)$ Tout d'abord $||u_n - u||_{L^p(I)} \longrightarrow 0$. En effet,

$$u_n - u = \xi_n[(\rho_n * u) - u] + [\xi_n u - u]$$

et donc

$$||u_n-u||_{L^p(I)} \leqslant ||\xi_n[(\rho_n*u)-u]||_{L^p(I)}+||\xi_n u-u||_{L^p(I)} \leqslant ||\xi_n||_{L^\infty(I)}||(\rho_n*u)-u||_{L^p(I)}+||\xi_n u-u||_{L^p(I)}$$

or $0 \leqslant \xi_n \leqslant 1$ et donc $||\xi_n||_{L^\infty(I)} \leqslant 1$. Par conséquent :

$$||u_n - u||_{L^p(I)} \leqslant ||(\rho_n * u) - u]||_{L^p(I)} + ||\xi_n u - u||_{L^p(I)} \longrightarrow 0$$

le dernier résultat venant des commentaires précédents.
Ensuite, on sait que

$$u_n' = \xi_n'(\rho_n * u) + \xi_n(\rho * u')$$

Par conséquent :

$$||u_n' - u'||_{L^p(I)} \leqslant ||\xi_n'(\rho_n * u)||_{L^p(I)} + ||\xi_n(\rho_n * u') - u'||_{L^p(I)} \leqslant$$

$$\frac{||\xi'||_{L^\infty(\mathbb{R})}}{n}||u||_{L^p(I)} + ||(\rho_n * u') - u'||_{L^p(I)} + ||\xi_n u' - u'||_{L^p(I)} \longrightarrow 0$$

Théorème 2.0.4. Injections de Sobolev Il existe une constante C dépendant de $|I| \leqslant \infty$ telle que

$$||u||_{L^\infty(I)} \leqslant C||u||_{W^{1,p}(I)} \; \forall u \in W^{1,p}(I) \; \forall \; 1 \leqslant p \leqslant \infty \tag{2.13}$$

Autrement dit, $W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$ avec injection continue $\forall \; 1 \leqslant p \leqslant \infty$ De plus, lorsque I est borné, on a :

$$\text{L'injection } W^{1,p}(I) \subset C(\bar{I}) \text{ est compacte pour } 1 < p \leqslant \infty \tag{2.14}$$

$$\text{L'injection } W^{1,1}(I) \subset L^q(I) \text{ est compacte pour } 1 \leqslant q < \infty \tag{2.15}$$

Nous rappelons qu'injection compacte de A dans B signifie que la boule unité de A, vue dans B, est relativement compacte, c'est-à-dire que $\overline{B_A(0,1)}$ est compacte dans B.

Preuve :
On commence par prouver (2.13) pour $I = \mathbb{R}$. Tout d'abord, si $p = \infty$ le résultat est trivial. Soit $v \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $1 \leqslant p < \infty$. On pose $G(s) := s|s|^{p-1}$ $\forall s \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $w := G(v)$, qui appartient à $C_0^1(\mathbb{R})$ et on voit que

$$w' = G'(v)v' = p|v|^{p-1}v'$$

Donc pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$G(v(x)) = \int_{-\infty}^{x} p|v(t)|^{p-1}v'(t)dt$$

et en utilisant l'inégalité de Hölder, on trouve que $|v(x)|^p \leqslant p\|v\|_{L^p(\mathbb{R})}^{p-1}\|v'\|_{L^p(\mathbb{R})}$. D'où, en utilisant l'inégalité de Young, on a :

$$|v(x)| \leqslant \sqrt[p]{p\|v\|_{L^p(\mathbb{R})}^{p-1}\|v'\|_{L^p(\mathbb{R})}} \leqslant \sqrt[p]{p\|v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})}^{p-1}\|v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})}} = \sqrt[p]{p}\|v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})}$$

Or en utilisant le résultat suivant :

$$p^{1/p} \leqslant e^{1/e}, \quad \forall p \geqslant 1$$

on pose $C := e^{1/e}$ et on trouve

$$\|v\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leqslant C\|v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \ \forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R})$$

Ensuite, par densité, soit $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$. On sait qu'il existe une suite $(u_n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $u_n \longrightarrow u$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R})$. Elle est donc de Cauchy dans $W^{1,p}(\mathbb{R})$, et grâce à l'inégalité précédente, on voit qu'elle est de Cauchy dans $L^\infty(\mathbb{R})$, qui est complet. Elle converge donc dans $L^\infty(\mathbb{R})$ vers une certaine limite v. On sait que $u, v \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$. Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, alors

$$\int u\phi = \lim_{n\to\infty} \int u_n\phi = \int v\phi$$

car ϕ est à support compact, on a donc :

$$\int (u - v)\phi = 0, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$$

Par conséquent $u = v$. Le résultat suit par continuité des normes.
Prouvons maintenant à (2.14). L'application injective à considérer est le représentant continu, que nous avons traiter au théorème 2.0.2. Reste à montrer que l'injection

est compacte. Soit S la boule unité de $W^{1,p}(I)$ et soit $u \in S$. On sait alors, grâce à l'inégalité de Young, que :

$$|u(x) - u(y)| = \left| \int_x^y u'(t)dt \right| \leqslant ||u'||_{L^p(I)} |x-y|^{\frac{1}{p'}} \leqslant |x-y|^{\frac{1}{p'}} \ \forall x, y \in I$$

On constate donc que S vue dans $C(\bar{I})$ est équicontinue. De plus, comme I est borné, $\bar{I}$ est compact. Par le théorème d'Ascoli, S est relativement compacte dans $C(\bar{I})$ et l'injection est donc compacte.
Reste à montrer (2.15). On utilise pour cela un corollaire de théorie de l'intégration, que l'on trouve à [BRE], p. 74 :

Corolaire 2.0.2. Supposons dans les hypothèses du théorème que :

$$\forall \epsilon > 0, \ \forall \omega \subset\subset I, \ \exists 0 < \delta < dist(\omega, I^c) \text{ t. q. } \forall |h| < \delta \text{ et } \forall u \in S$$

$$||\tau_h u - u||_{L^p(\omega)} < \epsilon \tag{2.16}$$

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists \omega \subset\subset I \text{ t. q. } ||u||_{L^p(I-\omega)} < \epsilon, \ \forall u \in S \tag{2.17}$$

Alors S est relativement compacte dans $L^p(I)$.

Vérifions alors la condition 2.16.
Soit $\omega \subset\subset I, u \in S$ et $|h| < dist(\omega, I^c)$. D'après la proposition 2.0.1,

$$||\tau_h u - u||_{L^1(\omega)} \leqslant |h| ||u'||_{L^1(I)} \leqslant |h| \tag{2.18}$$

Donc

$$\int_\omega |u(x+h) - u(x)|^q dx = \int_\omega |u(x+h) - u(x)| \cdot |u(x+h) - u(x)|^{q-1} dx \leqslant$$

$$\left(2||u||_{L^\infty(I)}\right)^{q-1} \cdot \int_\omega |u(x+h) - u(x)| dx \leqslant C||u||_{W^{1,1}(I)} |h| \leqslant C|h|$$

Et donc

$$||\tau_h u - u||_{L^q(\omega)} \leqslant C^{\frac{1}{q}} |h|^{\frac{1}{q}} < \epsilon \text{ , si } |h| < \delta \tag{2.19}$$

Passons maintenant à la seconde condition : Pour $u \in S$, on a :

$$||u||_{L^q(I-\omega)} \leqslant ||u||_{L^\infty(I)} \, |I-\omega|^{\frac{1}{q}} \leqslant C \, |I-\omega|^{\frac{1}{q}} < \epsilon \text{ , si } |I-\omega| \text{ est assez petit.}$$

On sait donc, par le corollaire (2.0.2) que S est relativement compacte dans $L^q(I)$ pour $1 \leqslant q < \infty$. Par conséquent l'injection est compacte.

Corolaire 2.0.3. Supposons I non-borné et soit $u \in W^{1,p}(I)$ avec $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Alors on a :

$$\lim_{x\in I,\ |x|\to\infty} u(x) = 0 \tag{2.20}$$

<u>Preuve :</u>
On sait qu'il existe une suite $(u_n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $u_{n|I} \longrightarrow u$ dans $W^{1,p}(I)$. On déduit de (2.13) que $\|u_n - u\|_{L^\infty(I)} \longrightarrow 0$. Ainsi, soit $\epsilon > 0$, on peut choisir $n \in \mathbb{N}$ assez grand pour que $\|u_n - u\|_{L^\infty(I)} < \epsilon$. Or pour $|x|$ assez grand, on a $u_n(x) = 0$, et donc $|u(x)| < \epsilon$. Attention, on travaille ici avec $\tilde{u} \in C(I)$.

Théorème 2.0.5. Dérivation d'un produit et d'une composition de fonctions
Ce théorème généralise les formules connues pour la dérivation au sens usuel.
Soit $u, v \in W^{1,p}(I)$ avec $1 \leqslant p \leqslant \infty$, alors

$$uv \in W^{1,p}(I) \text{ et } (uv)' = u'v + uv' \tag{2.21}$$

Soit $G \in C^1(\mathbb{R})$ telle que $G(0) = 0$ et soit $u \in W^{1,p}(I)$. Alors

$$G \circ u \in W^{1,p}(I) \text{ et } (G \circ u)' = (G' \circ u) \cdot u' \tag{2.22}$$

<u>Preuve :</u>
Ces formules sont une conséquence de la densité de $C_0^\infty(\mathbb{R})$ dans $W^{1,p}(I)$ (à restriction des fonctions près). Nous renvoyons à [BRE], p. 131 pour plus de détails.

Remarque 2.0.3. L'équation (2.21) donne à $W^{1,p}(I)$ une structure d'algèbre.

Définition 2.0.6. Soit un entier $m \geqslant 2$ et $1 \leqslant p \leqslant \infty$. On pose

$$W^{m,p}(I) := \left\{ u \in L^p(I) \mid \exists g_1, \ldots, g_m \in L^p(I) \text{ t. q. } \int uD^j\phi = (-1)^j \int g_j\phi \ \forall j \in \{1, \ldots, n\}\ \forall \phi \in C_0^\infty(I) \right\}$$

Où $D^j\phi = \frac{\partial^j \phi}{\partial x^j}$. Grâce au lemme fondamental du calcul des variations, on sait que les g_j sont uniques. On notera alors $Du = g_1, D^2u = g_2, \ldots, D^ju = g_j, \ldots$. On munit cet espace de la norme :

$$\|u\|_{W^{m,p}(I)} := \|u\|_{L^p(I)} + \sum_{j=1}^{m} \left\|D^j u\right\|_{L^p(I)} \tag{2.23}$$

Définition 2.0.7. On va maintenant s'intéresser à un sous-espace de $W^{1,p}(I)$ qui tient une place importante dans l'étude des équations aux dérivées partielles.
Etant donné $1 \leqslant p < \infty$, on définit

$$W_0^{1,p}(I) := \overline{C_0^\infty(I)} \text{ dans } W^{1,p}(I) \tag{2.24}$$

On le munit de la norme induite par $W^{1,p}(I)$, qui lui donne une structure d'espace de Banach séparable (lemme 2.0.1). De plus il est réflexif si $p > 1$.

Remarque 2.0.4. On constate que $W_0^{1,p}(\mathbb{R}) = W^{1,p}(\mathbb{R})$, grâce à la densité de $C_0^\infty(\mathbb{R})$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R})$

Théorème 2.0.8. Autre caractérisation d'appartenance à $W_0^{1,p}(I)$
Soit $u \in W^{1,p}(I)$. Alors

$$u \in W_0^{1,p}(I) \Longleftrightarrow u = 0 \text{ sur } \partial I \tag{2.25}$$

Remarque 2.0.5. Il est important de noter que l'on peut parler de valeur de u sur ∂I qui est de mesure nulle, grâce au représentant continu (théorème 2.0.2).

Preuve :

$\Longrightarrow$

Soit $u \in W_0^{1,p}(I)$. Il existe une suite $(u_n) \subset C_0^\infty(I)$ telle que $u_n \longrightarrow u$ dans $W^{1,p}(I)$. Par le choix du représentant continu, on peut supposer que $u \in C(\bar{I})$. Par conséquent, on voit que la convergence est uniforme, et comme $u_n = 0$ sur ∂I $\forall n \in \mathbb{N}$, $u = 0$ sur ∂I.

$\Longleftarrow$

Soit $u \in W^{1,p}(I)$ telle que $u = 0$ sur ∂I. On fixe une fonction $G \in C^\infty(I)$ telle que

$$G(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |t| \leqslant 1 \\ \\ t & \text{si } |t| \geqslant 2 \end{cases}$$

et

$$|G(t)| \leqslant |t| \quad , \ \forall t \in \mathbb{R}$$

On pose ensuite $u_n := \frac{1}{n}G(nu)$. Ainsi $u_n \in W^{1,p}(I)$, par le théorème précédent. D'autre part

$$\operatorname{supp} u_n \subset \left\{x \in I \mid |u(x)| \geqslant \frac{1}{n}\right\}$$

Par conséquent $\operatorname{supp} u_n$ est un compact dans I. En effet, il est borné, car $u = 0$ sur ∂I et $u(x) \longrightarrow 0$ quand $|x| \longrightarrow \infty$, $x \in I$. Par conséquent on sait que $u_n \in W_0^{1,p}(I)$ (car elle est à support compacte $\forall n \in \mathbb{N}$), et par le théorème de convergence dominée, on constate que $u_n \longrightarrow u$ dans $W^{1,p}(I)$.

Proposition 2.0.2. Inégalité de Poincaré
Supposons $I = (a, b)$ borné. Alors il existe une constante C qui dépend de $|I|$ et de p telle que

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} \leqslant C\|u'\|_{L^p(I)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(I) \tag{2.26}$$

Preuve :
Soit $u \in W_0^{1,p}(I)$. On a $|u(x)| = |u(x) - u(a)| = \left|\int_a^x u'(t)dt\right| \leqslant \|u'\|_{L^1(I)} \forall x \in I$. Par conséquent $\|u\|_{L^\infty(I)} \leqslant \|u'\|_{L^1(I)}$. Par l'inégalité de Hölder, on déduit (2.26).

Définition 2.0.9. On désigne par $W^{-1,p'}$ l'espace dual de $W_0^{1,p}(I)$ avec $1 \leqslant p < \infty$. Grâce au théorème de représentation de Riesz, on peut identifier L^2 et son dual. Par conséquent, si I est borné, on a

$$W_0^{1,p}(I) \subset L^2 \subset W^{-1,p'} \ \forall 1 \leqslant p < \infty \tag{2.27}$$

Ceci vient du fait que si I est borné, $L^p(I) \subset L^2(I)$.

Proposition 2.0.3. Soit $F \in W^{-1,p'}$. Alors il existe $f_0, f_1 \in L^{p'}$ tels que

$$F(v) = \int f_0 v + \int f_1 v' \ \ \forall v \in W_0^{1,p}(I) \tag{2.28}$$

et

$$\|F\| = \max\left\{\|f_0\|_{L^{p'}(I)}, \|f_1\|_{L^{p'}(I)}\right\} \tag{2.29}$$

Preuve :
On munit l'espace $E = L^p \times L^p$ de la norme

$$\|h\| = \|h_0\|_{L^p(I)} + \|h_1\|_{L^p(I)} \text{ où } h = (h_0, h_1)$$

L'application $T : W_0^{1,p}(I) \longrightarrow E : u \mapsto (u, u')$ est une isométrie de $W_0^{1,p}(I)$ dans E. On pose $G := T(W_0^{1,p}(I))$ et on le munit de la norme induite par E. On définit ensuite $S := T^{-1} : G \longrightarrow W_0^{1,p}(I)$. L'application $G \longrightarrow \mathbb{R} : h \mapsto F(S(h))$ est linéaire et continue, car F et S le sont. Par le théorème de Hahn-Banach, on peut la prolonger en une forme linéaire continue Φ avec $\|\Phi\|_{E'} = \|F\|$. De plus, par le théorème de représentation de Riesz, $\exists f_0, f_1 \in L^{p'}$ avec $\Phi(v, w) = \int f_0 v + \int f_1 w$. Ainsi, $F(v) = \int f_0 v + \int f_1 v'$.
Posons $M \equiv \max\left\{\|f_0\|_{L^{p'}(I)}, \|f_1\|_{L^{p'}(I)}\right\}$. Soient $(v, w) \in E$. On a

$$|\Phi(v, w)| = \left|\int f_0 v + \int f_1 w\right| \leqslant \int |f_0 v| + \int |f_1 w| \leqslant \|f_0\|_{L^{p'}(I)}\|v\|_{L^p(I)} + \|f_1\|_{L^{p'}(I)}\|w\|_{L^p(I)} \leqslant M\|(v, w)\|$$

On a donc $\|\Phi\|_{E'} \leqslant M$. Montrons que le sup est atteint. Supposons tout d'abord que $M = \|f_0\|_{L^{p'}(I)}$. On sait qu'il existe $(v_n) \subset L^p(I)$, $\|v_n\|_{L^p(I)} = 1, \ \forall n$ t.q.

$$\|f_0\|_{L^{p'}(I)} = \lim_{n\to\infty} \int f_o \cdot v_n$$

Ainsi

$$M = \|f_0\|_{L^{p'}(I)} = \lim_{n\to\infty} \int f_o \cdot v_n = \lim_{n\to\infty} \left\{ \int f_o \cdot v_n \right\} + \int f_1 \cdot 0 =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \int f_o \cdot v_n + \int f_1 \cdot 0 \right\} = \lim_{n\to\infty} \Phi(v_n, 0) \leqslant \|\Phi\|_{E'} \lim_{n\to\infty} \|(v_n, 0)\| = \|\Phi\|_{E'}$$

Si $M = \|f_1\|_{L^{p'}(I)}$, on procède de manière analogue. Par conséquent

$$\|F\| = \|\Phi\|_{E'} = \max\left\{\|f_0\|_{L^{p'}(I)}, \|f_1\|_{L^{p'}(I)}\right\}$$

Chapitre 3

Espace de Sobolev en dimension N

Définition 3.0.10. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et $1 \leqslant p \leqslant \infty$. On définit l'espace de Sobolev :

$$W^{1,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid \exists g_1, \dots, g_N \in L^p(\Omega) \text{ t.q. } \int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \phi \ \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega),\ \forall i = 1, \dots, N \right\}$$

Grâce au lemme fondamental du calcul des variations, on note :

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \ \ \forall i = 1, \dots, N \text{ et } \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right) = \text{grad } u \tag{3.1}$$

On munit cet espace de la norme :

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)} \tag{3.2}$$

Proposition 3.0.4. L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est :

- un espace de Banach pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$
- un espace réflexif pour $1 < p < \infty$
- un espace séparable pour $1 \leqslant p < \infty$

Preuve :
Similaire au cas $N = 1$

Remarque 3.0.6. Soit (u_n) une suite de $W^{1,p}(\Omega)$ telle que $u_n \longrightarrow u$ dans $L^p(\Omega)$ et (∇u_n) converge vers une limite dans $L^p(\Omega)^N$, alors $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $\|u_n - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \longrightarrow 0$. Lorsque $p > 1$, il suffit de savoir que $u_n \longrightarrow u$ dans $L^p(\Omega)$ et (∇u_n) reste bornée dans $L^p(\Omega)^N$ pour conclure que $u \in W^{1,p}(\Omega)$

Remarque 3.0.7. Soit $f \in \mathbb{R}^\Omega$. On définit

$$\overline{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^N - \Omega \end{cases}$$

Soient $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $\alpha \in C_0^\infty(\Omega)$ alors,

$$\overline{\alpha u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \text{ et } \frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{\alpha u}) = \overline{\alpha \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} u} \tag{3.3}$$

Preuve :
Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^N} \overline{\alpha u} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \int_\Omega \alpha u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \int_\Omega u \left[\frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha \phi) - \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \phi \right] = -\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \alpha \phi + u \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \phi \right) = -\int_{\mathbb{R}^N} \overline{\left(\alpha \frac{\partial u}{\partial x_i} + u \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \right)} \phi$$

Théorème 3.0.11. Friedrichs Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$ avec $1 \leqslant p < \infty$. Alors il existe une suite $(u_n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$u_{n|\Omega} \longrightarrow u \text{ dans } L^p(\Omega) \tag{3.4}$$

$$\nabla u_{n|\omega} \longrightarrow \nabla u_{|\omega} \text{ dans } L^p(\omega)^N \text{ pour tout } \omega \subset\subset \Omega \tag{3.5}$$

Preuve :
On utilise le lemme suivant, dont la preuve est similaire à 2.0.6 :

Lemme 3.0.8. Soit $\rho \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ avec $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Alors

$$\rho * v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \text{ et } \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho * v) = \rho * \frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad \forall i = 1, \dots, N$$

Revenons au théorème de Friedrichs. On choisit une suite régularisante $(\rho_n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ (adapter pour $\mathbb{R}^N$ la définition du point 2.11). On pose, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n := \rho_n * \overline{u}$ On sait que $v_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $v_n \longrightarrow \overline{u}$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$. Montrons que $\nabla u_{n|\omega} \longrightarrow \nabla u_{|\omega}$ dans $L^p(\omega)^N$ pour tout $\omega \subset\subset \Omega$. Etant donné $\omega \subset\subset \Omega$, on fixe une fonction $\alpha \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ et $\alpha = 1$ sur un voisinage de ω. Notons que pour n assez grand, on a

$$\rho_n * \overline{\alpha u} = \rho_n * \overline{u} \text{ sur } \omega \tag{3.6}$$

En effet, $\operatorname{supp}(\rho_n * \overline{\alpha u} - \rho_n * \overline{u}) = \operatorname{supp}(\rho_n * (1 - \overline{\alpha})\overline{u}) \subset \operatorname{supp} \rho_n + \operatorname{supp}((1 - \overline{\alpha})\overline{u}) \subset B(0, \frac{1}{n}) + \operatorname{supp}(1 - \overline{\alpha}) \subset \omega^c$ pour n assez grand. De plus, d'après la remarque 3.0.7 et le lemme 3.0.8,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_n * \overline{\alpha u}) = \rho_n * \overline{(\alpha \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} u)}$$

et donc

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_n * \overline{\alpha u}) \longrightarrow \overline{\alpha \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} u} \text{ dans } L^p(\mathbb{R}^N)$$

En particulier, comme $\alpha_{|\omega} = 1$,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_n * \overline{\alpha u}) \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ dans } L^p(\omega)$$

et grâce à (3.6),

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_n * \overline{u}) \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ dans } L^p(\omega)$$

Finalement, on tronque la suite v_n comme dans le lemme 2.0.7, pour arriver à une suite $(u_n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, t.q. $u_n \longrightarrow u$ dans $L^p(\Omega)$ et $\nabla u_n \longrightarrow \nabla u$ dans $L^p(\omega)^N$

Proposition 3.0.5. Soit $u \in L^p(\Omega)$ avec $1 < p \leqslant \infty$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $u \in W^{1,p}(\Omega)$

2. Il existe une constante C telle que

$$\left|\int_I u\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right| \leqslant C\|\phi\|_{L^{p'}(\Omega)}\ ,\ \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)\ \forall i = 1, \dots, N \tag{3.7}$$

3. Il existe une constante C telle que pour tout ouvert $\omega \subset\subset \Omega$ et tout $h \in \mathbb{R}^N$ avec $|h| < dist(\omega, \Omega^c)$, on a

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)} \leq C|h| \tag{3.8}$$

Où $\tau_h u(x) := u(x + h)$ De plus, on peut choisir $C = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ dans toute la proposition.

<u>Preuve :</u>

Cette proposition est la généralisation en dimension N de la proposition 2.0.1. L'équivalence entre 1. et 2. est la même que celle en dimension 1.

(1) $\Rightarrow$ (3)

Supposons tout d'abord que $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Soit $h \in \mathbb{R}^N$ et définissons

$$v(t) := u(x + th)\ \forall t \in \mathbb{R} \tag{3.9}$$

Alors $v'(t) = h \cdot \nabla u(x + th)$ et donc

$$u(x + h) - u(x) = v(1) - v(0) = \int_0^1 v'(t)dt = \int_0^1 h \cdot \nabla u(x + th)dt$$

Par suite, comme dans la preuve de 2.0.1

$$|\tau_h u(x) - u(x)|^p \leqslant |h|^p \int_0^1 |\nabla u(x + th)|^p dt$$

et

$$\int_\omega |\tau_h u(x) - u(x)|^p dx \leqslant |h|^p \int_\omega dx \int_0^1 |\nabla u(x+th)|^p dt \leqslant$$

$$|h|^p \int_0^1 dt \int_\omega |\nabla u(x+th)|^p dx = |h|^p \int_0^1 dt \int_{\omega+th} |\nabla u(y)|^p dy$$

Si nous fixons $|h| < dist(\omega, \Omega^c)$, il existe un ouvert $\omega' \subset\subset \Omega$ t.q. $\omega + th \subset \omega'$ pour tout $t \in [0,1]$ et donc,

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)} \leqslant |h| \left\{ \int_{\omega'} |\nabla u|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant |h| \|\nabla u\|_{L^p(\omega')} \tag{3.10}$$

Maintenant, considérons le cas général où $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $p \neq \infty$. On sait qu'il existe une suite $(u_n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ t.q. $u_n \longrightarrow u$ dans $L^p(\Omega)$ et $\nabla u_n \longrightarrow \nabla u$ dans $L^p(\omega)^N$. En appliquant l'inégalité (3.10), on arrive au résultat cherché. Lorsque $p = \infty$, on utilise le résultat (que l'on trouve dans [ADA], p. 25) :

$$\lim_{p \to \infty} \|u\|_{L^p(K)} = \|u\|_{L^\infty(K)}, \quad \forall u \in L^\infty(K), \quad \text{avec } K \subset \Omega \text{ compact}$$

qui nous permet de conclure.

(3) $\Rightarrow$ (2)

Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. On considère un ouvert ω t.q. $\operatorname{supp} \phi \subset \omega \subset\subset \Omega$. Soit $h \in \mathbb{R}^N$ avec $|h| < dist(\omega, \Omega^c)$. Par l'inégalité de Hölder et l'hypothèse (3), on a

$$\left| \int_\Omega (\tau_h u - u)\phi \right| \leqslant \left| \int_\omega (\tau_h u - u)\phi \right| \leqslant \|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)} \|\phi\|_{L^{p'}(\Omega)} \leqslant C|h| \|\phi\|_{L^{p'}(\Omega)} \tag{3.11}$$

D'autre part, comme

$$\int_\Omega (u(x+h) - u(x))\phi(x) dx = \int_\Omega u(y)(\phi(y-h) - \phi(y)) dy \tag{3.12}$$

il vient

$$\left| \int_\Omega u(y) \frac{(\phi(y-h) - \phi(y))}{|h|} dy \right| \leqslant C \|\phi\|_{L^{p'}(\Omega)} \tag{3.13}$$

En choisissant $h = te_i$ avec $|t| < dist(\omega, \Omega^c)$ et en passant à la limite $t \longrightarrow 0$, on obtient le résultat voulu.

Théorème 3.0.12. Dérivation d'un produit et d'une composition de fonctions
Soient $u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ avec $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Alors $uv \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i} \; \forall i = 1, \ldots, N \tag{3.14}$$

Soit $G \in C^1(\mathbb{R})$ t.q. $G(0) = 0$ et $|G'(s)| \leqslant M \; \forall s \in \mathbb{R}$ et soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Alors

$$G \circ u \in W^{1,p}(\Omega) \text{ et } \frac{\partial}{\partial x_i}(G \circ u) = (G' \circ u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \tag{3.15}$$

Preuve :

De même qu'au théorème 2.0.5, nous ne mentionnons pas la preuve. Nous renvoyons à [BRE], p. 155.

Proposition 3.0.6. Soient Ω et Ω' deux ouverts de $\mathbb{R}^N$ et $H : \Omega' \longrightarrow \Omega$ une application bijective t.q.

$$H \in C^1(\Omega') \;\; H^{-1} \in C^1(\Omega) \;\; JacH \in L^\infty(\Omega') \;\; JacH^{-1} \in L^\infty(\Omega) \tag{3.16}$$

où $JacH$ désigne la matrice jacobienne de H : $\left(\frac{\partial H_i}{\partial y_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant N}$
Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Alors $u \circ H \in W^{1,p}(\Omega')$ et

$$\frac{\partial}{\partial y_j}(u \circ H)(y) = \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(H(y))\frac{\partial H_i}{\partial y_j}(y) \; \forall j = 1, \dots, N \tag{3.17}$$

<u>Preuve :</u>
Nous renvoyons à [BRE], p. 156

Définition 3.0.13. Nous appelons multi-indice tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$. On définit

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^N \alpha_i$$

et

$$D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}$$

Définition 3.0.14. Soit $m \geqslant 1$ un entier et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leqslant p \leqslant \infty$. On définit

$$W^{m,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid \forall \alpha \text{ avec } |\alpha| \leqslant m \; \exists g_\alpha \in L^p(\Omega) \text{ t.q. } \int_\Omega u D^\alpha \phi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \phi \,, \; \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega) \right\}$$

On pose, grâce au lemme fondamental du calcul des variations, $D^\alpha u := g_\alpha$ On le munit de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leqslant m} \left\| D^\alpha u \right\|_{L^p(\Omega)} \tag{3.18}$$

qui lui donne une structure d'espace de Banach.

Opérateurs de prolongement L'idée de ce paragraphe est de trouver la généralisation en dimension N du théorème 2.0.3. Cependant, en dimension 1, nous ne considérions que des intervalles, qui sont des ouverts particuliers. Ici, nous considérons des ouverts $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ **quelconques**. Il paraît donc normal de rajouter des hypothèses de régularité sur Ω pour arriver à un résultat utile. Commençons par l'écriture :

Notations : Soit $x \in \mathbb{R}^N$. On écrit :

$$x = (x', x_N) \text{ avec } x' = (x_1, \ldots, x_{N-1})$$

et on pose

$$|x'| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{N-1}^2}$$

On note

$$\mathbb{R}_+^N := \{x = (x', x_N) \mid x_N > 0\}$$

$$Q := \{x = (x', x_N) \mid |x'| < 1 \text{ et } |x_N| < 1\}$$

$$Q_+ := Q \cap \mathbb{R}_+^N$$

$$Q_0 := \{x = (x', x_N) \mid |x'| < 1 \text{ et } x_N = 0\}$$

Définition 3.0.15. Un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$ est de classe C^1 si pour tout $x \in \Gamma = \partial\Omega$, il existe un voisinage U de x dans $\mathbb{R}^N$ et une application $H : Q \longrightarrow U$ bijective t.q.

$$H \in C^1(\overline{Q}) \quad H^{-1} \in C^1(\overline{U}) \quad H(Q_+) = U \cap \Omega \text{ et } H(Q_0) = U \cap \Gamma \tag{3.19}$$

Lemme 3.0.9. Partitions de l'unité

On énonce ici le lemme de partition de l'unité qui nous sera très utile pour prouver notre théorème de prolongement. Soient $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$ un compact et $\{U_1, \ldots, U_k\}$ un recouvrement ouvert de Γ.

Alors il existe $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_k \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ t.q.

$$0 \leqslant \theta_i \leqslant 1 \quad \forall i = 0, 1, \ldots, k \tag{3.20}$$

$$\sum_{i=0}^{k} \theta_i = 1 \text{ sur } \mathbb{R}^N \tag{3.21}$$

$$\operatorname{supp} \theta_i \text{ est compact et } \operatorname{supp} \theta_i \subset U_i \quad \forall i = 1, \ldots, k \tag{3.22}$$

$$\operatorname{supp} \theta_0 \subset \mathbb{R}^N - \Gamma \tag{3.23}$$

De plus, lorsque Ω est un ouvert borné et $\Gamma = \partial\Omega$, alors $\theta_{0|\Omega}$ est à support compact.

Lemme 3.0.10. Prolongement par réflexion

Etant donnée $u \in W^{1,p}(Q_+)$, on définit sur Q la fonction u^* prolongée par réflexion, ie

$$u^*(x', x_N) := \begin{cases} u(x', x_N) & \text{si } x_N > 0 \\ u(x', -x_N) & \text{si } x_N < 0 \end{cases}$$

La fonction est pp sur Q. Alors $u^* \in W^{1,p}(Q)$ et

$$\|u^*\|_{L^p(Q)} \leqslant 2\|u\|_{L^p(Q_+)} \ \text{ et } \ \|u^*\|_{W^{1,p}(Q)} \leqslant 2\|u\|_{W^{1,p}(Q_+)} \tag{3.24}$$

Nous renvoyons à [BRE], p. 158.

Remarque 3.0.8. Le même énoncé reste valable pour $\mathbb{R}^N_+$

Théorème 3.0.16. Prolongement

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ de classe C^1 avec Γ borné (ou alors $\Omega = \mathbb{R}^N_+$). Alors il existe un opérateur de prolongement

$$P : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \tag{3.25}$$

linéaire t.q. $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$,

1. $(Pu)_{|\Omega} = u$
2. $\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\|u\|_{L^p(\Omega)}$ $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$
3. $\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$

où $C = C(|\Omega|)$

Preuve :

On sait que Γ est compact et de classe C^1, il existe donc des ouverts $U_1, \ldots, U_k$ de $\mathbb{R}^N$ t.q.

$$\Gamma \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i$$

et des applications $H_i : Q \longrightarrow U_i$ bijectives t.q.

$$H_i \in C^1(\overline{Q}) \quad H_i^{-1} \in C^1(\overline{U_i}) \quad H_i(Q_+) = U_i \cap \Omega \ \text{ et } H_i(Q_0) = U_i \cap \Gamma \tag{3.26}$$

On considère les fonctions $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_k$ introduites au lemme des partitions de l'unité. Ainsi, pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$, on écrit

$$u = \sum_{i=0}^{k} \theta_i u = \sum_{i=0}^{k} u_i \ \text{ où } \ u_i := \theta_i u \tag{3.27}$$

On va maintenant prolonger chacune de ces fonctions à $\mathbb{R}^N$.

Prolongement de u_0 :

On rappelle que $\theta_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $\nabla\theta_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, car

$$\nabla\theta_0 = -\sum_{i=1}^{k} \nabla\theta_i$$

est à support compact et $\operatorname{supp}\theta_0 \subset \mathbb{R}^N - \Gamma$. On définit alors

$$\overline{u_0}(x) := \begin{cases} u_0(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^N - \Omega \end{cases}$$

On sait donc par la remarque 3.0.7 que

$$\overline{u_0} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \ \text{ et } \ \frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{u_0}) = \theta_0 \overline{\frac{\partial u}{\partial x_i}} + \frac{\partial\theta_0}{\partial x_i} u \tag{3.28}$$

Par conséquent, il existe une constante C qui dépend de $\|\frac{\partial\theta_0}{\partial x_i}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$, $1 \leqslant i \leqslant N$, t.q.

$$\|\overline{u_0}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \tag{3.29}$$

Prolongement de $u_i,\ i = 1, \ldots, k$:

On considère la restriction de u à $U_i \cap \Omega$. On pose ensuite $v_i(y) := u(H_i(y))\ \forall y \in Q_+$. On sait, par la proposition 3.0.6 du changement de variable, que $v_i \in W^{1,p}(Q_+)$. On définit ensuite le prolongement par réflexion de v_i sur Q, que l'on note v_i^*. Par le lemme 3.0.10, $v_i^* \in W^{1,p}(Q)$. On définit ensuite

$$w_i(x) := v_i^* \circ H_i^{-1}(x) \ \text{ pour } x \in U_i \tag{3.30}$$

De nouveau grâce au changement de variables, on sait que

$$w_i \in W^{1,p}(U_i) \tag{3.31}$$

et par définition de H_i et H_i^{-1},

$$w_i = u \text{ sur } U_i \cap \Omega \tag{3.32}$$

et il existe une constante $K > 0$ dépendant de H_i, H_i^{-1} ainsi que de leurs dérivées t.q.

$$\|w_i\|_{W^{1,p}(U_i)} \leqslant K\|u\|_{W^{1,p}(U_i\cap\Omega)} \tag{3.33}$$

Finalement, on prolonge w_i et donc u_i avec pour $x \in \mathbb{R}^N$

$$\hat{u}_i(x) := \begin{cases} \theta_i w_i(x) & \text{si } x \in U_i \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^N - U_i \end{cases}$$

Par la remarque 3.0.7, on sait que $\hat{u_i} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ et par (3.32), $\hat{u_i} = u_i$ sur Ω. Finalement

$$||\hat{u_i}||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leqslant \tilde{K}||u||_{W^{1,p}(U_i\cap\Omega)} \tag{3.34}$$

avec $\tilde{K} > 0$. Par conséquent, on pose

$$Pu := \overline{u_0} + \sum_{i=1}^{k} \hat{u_i} \tag{3.35}$$

On constate que P est linéaire par définition et qu'il vérifie les propriétés voulues.

Corolaire 3.0.4. Densité

Supposons Ω de classe C^1. Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$ avec $1 \leqslant p < \infty$. Alors il existe une suite $(u_n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ t.q. $u_{n|\Omega} \longrightarrow u$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. Autrement dit, les restrictions Ω des fonctions de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ forment un sous-espace dense de $W^{1,p}(\Omega)$.

Preuve :
Supposons tout d'abord $\Gamma = \partial\Omega$ borné. Alors, avec le notations du lemme 2.0.7, en prenant une suite tronquante $(\xi_n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ et une suite régularisante $(\rho_n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, la suite $\xi_n(\rho_n * Pu) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ converge vers Pu dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Elle répond donc à la question voulue.

Si Γ n'est pas borné, on considère la suite $\xi_n u$. Pour tout $\epsilon > 0$, on fixe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ t.q. $||\xi_{N_\epsilon} u - u||_{W^{1,p}(\Omega)} < \epsilon$. On peut alors prolonger $\xi_{N_\epsilon} u$ à $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, puisqu'à ce moment on ne considérera que l'intersection de Γ avec une grande boule, ce qui nous donnera un ensemble borné. On nomme ce prolongement $\widetilde{\xi_{N_\epsilon} u}$. Par le point précédent, il existe $w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ t.q. $||\widetilde{\xi_{N_\epsilon} u} - w||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} < \epsilon$.

Inégalités de Sobolev Nous allons ici nous intéresser aux possibilités d'injecter $W^{1,p}(\Omega)$ de façon continue ou même compacte dans des espace plus simples, comme $L^p(\Omega)$ avec $1 \leqslant p \leqslant \infty$ voir même, dans certains cas, $C(\overline{\Omega})$. Ce paragraphe est plus qu'une généralisation du théorème 2.0.4, les nuances sont ici plus subtiles et utilisent en profondeur la théorie de l'intégrale de Lebesgue.

Lemme 3.0.11. Commençons tout d'abord par un lemme technique :

Soient $N \geqslant 2$ et $f_1, f_2, \ldots, f_N \in L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})$. pour $x \in \mathbb{R}^N$ et $i = 1, \ldots, N$ on pose

$$\tilde{x_i} := (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \tag{3.36}$$

Alors la fonction

$$f(x) := f_1(\tilde{x_1}) f_2(\tilde{x_2}) \ldots f_N(\tilde{x_N}),\ \forall x \in \mathbb{R}^N \tag{3.37}$$

appartient à $L^1(\mathbb{R}^N)$ et

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leqslant \prod_{i=1}^{N} \|f_i\|_{L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})} \tag{3.38}$$

<u>Preuve :</u>

La preuve de ce lemme n'étant pas en rapport direct avec les espaces de Sobolev, nous renvoyons à [BRE], p. 163.

Théorème 3.0.17. Sobolev, Gagliardo, Nirenberg

Soit $\mathbf{1} \leqslant \mathbf{p} < \mathbf{N}$. On définit $p^* := \frac{Np}{N-p}$ ou de façon équivalente par $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$ Alors

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N) \tag{3.39}$$

De plus, il existe une constante $C = C(p, N)$ telle que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \ \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \tag{3.40}$$

On remarque que $p^* \in (p, \infty)$

<u>Preuve :</u>

Commençons par $p = 1$. Soit $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, on a

$$|u(x_1, x_2, \dots, x_N)| = \left|\int_{-\infty}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_N)dt\right| \leqslant \left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_N)dt\right|$$

et de même pour tout $1 \leqslant i \leqslant N$,

$$|u(x)| \leqslant \left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_N)dt\right| \equiv f_i(\tilde{x}_i) \tag{3.41}$$

Donc

$$|u(x)|^N \leqslant \prod_{i=1}^N f_i(\tilde{x}_i) \tag{3.42}$$

On déduit du lemme 3.0.11 que

$$\int |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} dx \leqslant \prod_{i=1}^N \|f_i\|_{L^1(\mathbb{R}^{N-1})}^{\frac{1}{N-1}} = \prod_{i=1}^N \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N-1}} \tag{3.43}$$

Par conséquent,

$$\|u\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \leqslant \prod_{i=1}^N \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N}} \tag{3.44}$$

Soit $t \geqslant 1$. On applique (3.44) à $|u|^{t-1}u$ au lieu de u. On a donc :

$$\|u\|^t_{L^{\frac{tN}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \leqslant t\prod_{i=1}^N \left\||u|^{t-1}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N}} \leqslant t\|u\|^{t-1}_{L^{p'(t-1)}(\mathbb{R}^N)} \prod_{i=1}^N \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N}} \tag{3.45}$$

Ensuite, on **choisit** t t.q. $\frac{tN}{N-1} = p'(t-1)$, ce qui nous donne $t = \frac{N-1}{N}p^*$, de plus $t \geqslant 1$, car $1 \leqslant p < N$. On obtient finalement

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leqslant t\prod_{i=1}^N \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N}} \tag{3.46}$$

Et donc
$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \tag{3.47}$$
Prenons maintenant $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. On sait qu'il existe une suite $(u_n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ t.q. $u_n \longrightarrow u$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ On sait donc que $u_n \longrightarrow u$ pp dans $\mathbb{R}^N$. Par (3.47), on sait que $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\|u_n\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\|\nabla u_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \tag{3.48}$$
Par le lemme de Fatou, on a finalement que :
$$u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N) \text{ et } \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \tag{3.49}$$
Corolaire 3.0.5. Soit $1 \leqslant p < N$, alors
$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N) \;\; \forall q \in [p, p^*] \tag{3.50}$$
avec injection continue

Preuve :

Soit $q \in [p, p^*]$, alors $\exists \alpha \in [0, 1]$ t.q.
$$\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{p^*} \tag{3.51}$$
Par l'inégalité d'interpolation,
$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leqslant \|u\|^{\alpha}_{L^p(\mathbb{R}^N)}\|u\|^{1-\alpha}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \tag{3.52}$$
En utilisant l'inégalité de Young, on obtient :
$$\|u\|^{\alpha}_{L^p(\mathbb{R}^N)}\|u\|^{1-\alpha}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leqslant \alpha\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + (1-\alpha)\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leqslant \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}$$
et donc, par (3.49),
$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \;\; \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \tag{3.53}$$
Corolaire 3.0.6.
$$W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N) \;\; \forall q \in \left[\frac{N}{N-1}, \infty\right) \tag{3.54}$$
Preuve :

Nous allons à nouveau raisonner par densité. Supposons que $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. On applique (3.45) avec $p = N$:
$$\|u\|^t_{L^{\frac{tN}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \leqslant t\|u\|^{t-1}_{L^{\frac{(t-1)N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)}\|\nabla u\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \;\forall t \geqslant 1 \tag{3.55}$$
On applique t =1, ce qui nous donne
$$\|u\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \leqslant \|\nabla u\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \leqslant \|u\|_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)} \tag{3.56}$$

On veut démonter l'hypothèse de récurrence, pour $k \in \mathbb{N}$, que l'on note $\Lambda(k)$:

$$W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \subset L^{\frac{kN}{N-1}}(\mathbb{R}^N) \tag{3.57}$$

On sait que $\Lambda(1)$ est vraie par (3.56). Montrons que $\Lambda(k) \Rightarrow \Lambda(k+1), \forall k \in \mathbb{N}$
En appliquant $t = k+1$ à (3.55), on trouve

$$||u||^{k+1}_{L^{\frac{(k+1)N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \leqslant (k+1)||u||^k_{L^{\frac{kN}{N-1}}(\mathbb{R}^N)}||\nabla u||_{L^N(\mathbb{R}^N)} \leqslant C_k||u||^k_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)}||u||_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)}$$

pour une constante $C_k > 0$ (hypothèse de récurrence). On voit donc que

$$||u||_{L^{\frac{(k+1)N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \leqslant \{C_k\}^{\frac{1}{k+1}}||u||_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)}$$

ce qui signifie que $\Lambda(k+1)$ est vraie. On sait donc que

$$W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \subset L^{\frac{kN}{N-1}}(\mathbb{R}^N), \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{3.58}$$

L'inégalité d'interpolation nous permet d'arriver au résultat voulu. Finalement, pour traiter le cas général $u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$, on procède par densité.

Théorème 3.0.18. Morrey

Soit $p > N$, alors

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^\infty(\mathbb{R}^N) \tag{3.59}$$

avec injection continue. De plus, la preuve nous donne la formule, pour $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$,

$$|u(x) - u(y)| \leqslant C|x-y|^\alpha ||\nabla u||_{L^p(\mathbb{R}^N)} \text{ pp } x, y \in \mathbb{R}^N \tag{3.60}$$

avec $\alpha = 1 - \frac{N}{p} > 0$ et C une constante qui dépend de p et N.

Preuve :
Nous allons commencer par prouver (3.60). Soient $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, et Q un cube ouvert, contenant 0, dont les côtés, de longueur r, sont parrallèles aux axes de coordonnées. Pour $x \in Q$, on a

$$u(x) - u(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt}u(tx)dt \tag{3.61}$$

et donc,

$$|u(x) - u(0)| \leqslant \int_0^1 \sum_{i=1}^N |x_i| \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(tx)\right| dt \leqslant r \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(tx)\right| dt \tag{3.62}$$

On pose ensuite $\overline{u} \equiv \frac{1}{|Q|}\int u(x)dx$, la moyenne de u sur Q. En intégrant (3.62) sur Q, on obtient

$$|\overline{u} - u(0)| \leqslant \frac{r}{|Q|}\int_Q dx \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(tx)\right| dt =$$

$$\frac{1}{r^{N-1}}\int_0^1 dt\int_Q \sum_{i=1}^N \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(tx)\right| dx = \frac{1}{r^{N-1}}\int_0^1 dt\int_{tQ} \sum_{i=1}^N \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(y)\right| \frac{dy}{t^N}$$

Cependant, avec l'inégalité de Hölder,

$$\int_{tQ} \sum_{i=1}^N \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(y)\right| dy \leqslant \left(\int_Q \frac{\partial u}{\partial x_i}^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot |tQ|^{\frac{1}{p'}} \tag{3.63}$$

puisque pour $0 < t < 1$, $tQ \subset Q$.
On en déduit que

$$|\overline{u} - u(0)| \leqslant \frac{1}{r^{N-1}}\|\nabla u\|_{L^p(Q)}\, r^{\frac{N}{p'}} \int_0^1 \frac{t^{\frac{N}{p'}}}{t^N} dt = \frac{r^{1-\frac{N}{p}}}{1-\frac{N}{p}}\|\nabla u\|_{L^p(Q)} \tag{3.64}$$

Par translation, cette inégalité reste vraie pour tout cube Q de côté r dont les côtés sont parrallèles aux axes de coordonnées ; d'où

$$|\overline{u} - u(x)| \leqslant \frac{r^{1-\frac{N}{p}}}{1-\frac{N}{p}}\|\nabla u\|_{L^p(Q)}\ \forall x \in Q \tag{3.65}$$

Finalement, grâce à l'inégalité triangulaire, on obtient

$$|u(x) - u(y)| \leqslant \frac{2r^{1-\frac{N}{p}}}{1-\frac{N}{p}}\|\nabla u\|_{L^p(Q)}\ \forall x, y \in Q \tag{3.66}$$

Prenons maintenant $x, y \in \mathbb{R}^N$ quelconques. Il existe un cube de côté $r = 2|x-y|$ contenant x et y. En posant $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$, on obtient (3.60) pour $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Pour $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ quelconque, on procède par densité et en utilisant (3.66). Occupons-nous maintenant de (3.59). Soient $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $x \in \mathbb{R}^N$ et Q un cube de côté $r = 1$ contenant x. D'après (3.65), on a

$$|u(x)| \leqslant |\overline{u}| + C\|\nabla u\|_{L^p(Q)} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(Q)} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}$$

où $C \equiv \frac{1}{1-\frac{N}{p}}$ Par conséquent,

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}\ \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \tag{3.67}$$

On procède également par densité pour $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ quelconque.

Remarque 3.0.9. Il est très important de remarque que (3.60) nous montre $\forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ il existe une fonction $\tilde{u} \in C(\mathbb{R}^N)$ t.q. $\tilde{u} \in u$. Autrement dit, on peut associer un **représentant continu** à tout $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, pour $p > N$

Remarque 3.0.10. On déduit également de (3.59) que si $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ avec $N < p < \infty$, alors

$$\lim_{|x|\longrightarrow\infty} u(x) = 0 \tag{3.68}$$

Preuve :
Il existe une suite $(u_n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ t.q. $u_n \longrightarrow u$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. D'après (3.59), u est également limite uniforme des u_n dans $\mathbb{R}^N$.

Corolaire 3.0.7. Soit Ω un ouvert de classe C^1 de $\mathbb{R}^N$ avec $\Gamma = \partial\Omega$ borné et $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Par conséquent,

$$\begin{array}{lll} \text{si} \quad 1 \leqslant p < N, & \text{alors} & W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega) \text{ où } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N} \\ \text{si} \quad p = N, & \text{alors} & W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)\ \forall q \in [p, \infty) \\ \text{si} \quad p > N, & \text{alors} & W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega) \end{array}$$

avec injections continues.
De plus, si $p > N$, on a $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$|u(x) - u(y)| \leqslant C|x-y|^\alpha \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \text{ pp } x, y \in \Omega \tag{3.69}$$

avec $\alpha = 1 - \frac{N}{p} > 0$ et C une constante qui dépend de p, N et Ω. En particulier, $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$

Preuve :
On utilise le théorème 3.0.16 de prolongement. On applique ensuite le corollaire 3.0.5, le corollaire 3.0.6 ou le théorème 3.0.18 suivant le cas souhaité. Puis on conclut en utlisant que $L^p(\mathbb{R}^N) \subset L^p(\Omega)\ \forall 1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Théorème 3.0.19. Rellich - Kondrachov

Soit Ω un ouvert de classe C^1 de $\mathbb{R}^N$ **borné**. Alors,

$$\begin{array}{lll} \text{si} \quad p < N, & \text{alors} & W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega),\ \forall q \in [1, p^*) \text{ où } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N} \\ \text{si} \quad p = N, & \text{alors} & W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega),\ \forall q \in [p, \infty) \\ \text{si} \quad p > N, & \text{alors} & W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega}) \end{array}$$

avec injections compactes.

Remarque 3.0.11. On remarque en particulier que

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega) \tag{3.70}$$

avec injection compacte $\forall 1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Preuve :

Tout d'abord, examinons le cas $p > N$. La compacité de l'injection découle de

(3.69) et du théorème d'Ascoli-Arzela.
Ensuite si $p < N$. On utilise le corolaire 2.0.2 avec S la boule unité de $W^{1,p}(\Omega)$.
Tout d'abord 2.16 :
Comme $1 \leqslant q < p^*$, $\exists \alpha \in (0,1]$ t.q.

$$\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{1} + \frac{1-\alpha}{p^*}$$

Soient $\omega \subset\subset \Omega$, $u \in S$, et $|h| < dist(\omega, \Omega^c)$. Grâce à l'inégalité d'interpolation, on a que

$$||\tau_h u - u||_{L^q(\omega)} \leqslant ||\tau_h u - u||^{\alpha}_{L^1(\omega)} ||\tau_h u - u||^{1-\alpha}_{L^{p^*}(\omega)} \tag{3.71}$$

Or, d'après la proposition 3.0.5, $||\tau_h u - u||_{L^1(\omega)} \leqslant |h| ||\nabla u||_{L^1(\Omega)}$. Par conséquent

$$||\tau_h u - u||_{L^q(\omega)} \leqslant (|h| ||\nabla u||_{L^1(\Omega)})^{\alpha} (2||u||_{L^{p^*}(\Omega)})^{1-\alpha} \tag{3.72}$$

Or, par 3.0.7, $||u||_{L^{p^*}(\Omega)} \leqslant C||u||_{W^{1,p}(\Omega)}$ et par Hölder, $||\nabla u||_{L^1(\Omega)} \leqslant ||\nabla u||_{L^p(\Omega)} |\Omega|^{p'}$ et donc

$$||\tau_h u - u||_{L^q(\omega)} \leqslant C|h|^{\alpha} < \epsilon \tag{3.73}$$

pour $|h|$ assez petit.

Maintenant 2.17 :
Soit $u \in S$. d'après l'inégalité de Hölder,

$$||u||_{L^q(\Omega-\omega)} \leqslant ||u||_{L^{p^*}(\Omega-\omega)} |\Omega - \omega|^{1-\frac{q}{p^*}} \leqslant |\Omega - \omega|^{1-\frac{q}{p^*}} < \epsilon \tag{3.74}$$

Pour $\omega \subset\subset \Omega$ convenablement choisi. Par conséquent, grâce à 2.0.2, on conclut que S est relativement compacte dans $L^q(\Omega)$, $\forall q \in (1, p^*]$.

Le cas $p = N$ se déduit finalement comme limite $p \longrightarrow N, p \leqslant N$.

Corolaire 3.0.8. Soient $m \geqslant 1$ un entier et $1 \leqslant p < \infty$. On a :

$$\text{si} \quad \tfrac{1}{p} - \tfrac{m}{N} > 0, \quad \text{alors} \quad W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N) \text{ où } \tfrac{1}{q} = \tfrac{1}{p} - \tfrac{m}{N}$$

$$\text{si} \quad \tfrac{1}{p} - \tfrac{m}{N} = 0, \quad \text{alors} \quad W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N)\ \forall q \in [p, \infty)$$

$$\text{si} \quad \tfrac{1}{p} - \tfrac{m}{N} < 0, \quad \text{alors} \quad W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^\infty(\mathbb{R}^N)$$

avec injections continues.
Preuve :
Ces résultats s'obtiennent par applications répétées de 3.0.5, 3.0.6 et 3.0.18. Par exemple, nous montrons le cas $m = 2$ et $\frac{1}{p} - \frac{2}{N} > 0$. Soit $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$. On sait donc que $\nabla u \in \{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)\}^N$. Par conséquent, grâce à (3.39), $u \in L^q(\mathbb{R}^N)$ et $\nabla u \in \{L^q(\mathbb{R}^N)\}^N$ avec $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N} > \frac{1}{p} - \frac{2}{N} > 0$. On sait donc que $u \in W^{1,q}(\mathbb{R}^N)$, et $\frac{1}{q} - \frac{1}{N} = \frac{1}{p} - \frac{2}{N} > 0$ par hypothèse. Ainsi $u \in L^{\tilde{q}}(\mathbb{R}^N)$ avec $\frac{1}{\tilde{q}} = \frac{1}{q} - \frac{1}{N} = \frac{1}{p} - \frac{2}{N}$

Définition 3.0.20. Etant donné $1 \leqslant p < \infty$, on définit

$$W_0^{1,p}(\Omega) \equiv \overline{C_0^\infty(\Omega)} \text{ dans } W^{1,p}(\Omega) \tag{3.75}$$

On le munit de la norme induite par $W^{1,p}(\Omega)$, qui lui donne une structure d'espace de Banach séparable (proposition 3.0.4). De plus il est réflexif si $p > 1$.

Remarque 3.0.12. On constate que $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, grâce à la densité de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$

Lemme 3.0.12. Soit $u \in W^{1,p}(I)$, $1 \leqslant p < \infty$ avec $\operatorname{supp} u \subset \Omega$. Alors $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Preuve :
On fixe un ouvert ω t.q. $\operatorname{supp} u \subset \omega \subset\subset \Omega$ et on choisit $\alpha \in C_0^\infty(\omega)$ t.q. $\alpha_{|\operatorname{supp} u} \equiv 1$. Par conséquent, $\alpha u = u$. D'autre part, $\exists (u_n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ t.q. $u_n \longrightarrow u$ dans $L^p(\Omega)$ et $\nabla u_n \longrightarrow \nabla u$ dans $L^p(\omega)^N$. Par conséquent, $\alpha u_n \longrightarrow \alpha u$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. Or $(\alpha u_n) \subset C_0^\infty(\Omega)$ et donc $u = \alpha u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Théorème 3.0.21. Soit Ω de classe C^1, et

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \text{ avec } 1 \leqslant p < \infty$$

Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $u \equiv 0$ sur $\Gamma \equiv \partial\Omega$
2. $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

Preuve :
(1) $\Rightarrow$ (2)
Supposons tout d'abord $\operatorname{supp} u$ borné. On fixe une fonction $G \in C^1(\mathbb{R})$ t.q.

$$G(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |t| \leqslant 1 \\ \\ t & \text{si } |t| \geqslant 2 \end{cases}$$

et

$$|G(t)| \leqslant |t| \ , \ \forall t \in \mathbb{R}$$

On pose ensuite $u_n := \frac{1}{n} G(nu)$. Ainsi $u_n \in W^{1,p}(\Omega)$, par le 3.0.12. D'autre part

$$\operatorname{supp} u_n \subset \left\{ x \in \Omega \mid |u(x)| \geqslant \frac{1}{n} \right\}$$

Par conséquent $\operatorname{supp} u_n$ est un compact dans Ω. Par le lemme précédent, on voit que $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$. De plus, par le théorème de convergence dominée, on sait que $u_n \longrightarrow u$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. Par conséquent $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
Si $\operatorname{supp} u$ n'est pas borné, on utilise une suite tronquante.

(2) $\Rightarrow$ (1)

Grâce à des cartes locales, on se ramène à : Soit $u \in W^{1,p}(Q_+) \cap C(\overline{Q_+})$; montrer que $u \equiv 0$ sur Q_0. Soit $(u_n) \subset C_0^\infty(Q_+)$ t.q. $u_n \longrightarrow u$ dans $W^{1,p}(Q_+)$. On a, pour $(x', x_N) \in Q_+$

$$|u_n(x', x_N)| \leqslant \int_0^{x_N} \left|\frac{\partial u_n}{\partial x_N}(x', t)\right| dt \tag{3.76}$$

et donc, pour $0 < \epsilon < 1$,

$$\frac{1}{\epsilon} \int_{|x'|<1} \int_0^\epsilon |u_n(x', x_N)| dx' dx_N \leqslant \int_{|x'|<1} \int_0^\epsilon \left|\frac{\partial u_n}{\partial x_N}(x', t)\right| dx' dt \tag{3.77}$$

En fixant ϵ et en faisant $n \to \infty$, on arrive à

$$\frac{1}{\epsilon} \int_{|x'|<1} \int_0^\epsilon |u(x', x_N)| dx' dx_N \leqslant \int_{|x'|<1} \int_0^\epsilon \left|\frac{\partial u}{\partial x_N}(x', t)\right| dx' dt \tag{3.78}$$

Enfin, quand $\epsilon \to 0$, on a

$$\int_{|x'|<1} |u(x'), 0| = 0 \tag{3.79}$$

puisque $u \in C(\overline{Q_+})$ et $\frac{\partial u_n}{\partial x_N} \in L^1(Q_+)$. Par conséquent, $u \equiv 0$ sur Q_0.

Proposition 3.0.7. Soit Ω de classe C^1 et $u \in L^p(\Omega)$ avec $1 < p < \infty$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$
2. il existe une constante C t.q.
$$\left|\int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right| \leqslant C\|\phi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)}, \ \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \ \forall i = 1, \ldots, N$$
3. La fonction
$$\overline{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^N - \Omega \end{cases}$$
appartient à $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ et, dans ce cas, $\frac{\partial \overline{u}}{\partial x_i} = \overline{\frac{\partial u}{\partial x_i}}$

<u>Preuve :</u>
(1) $\Rightarrow$ (2)
Soit $(u_n) \subset C_0^\infty(\Omega)$ t.q. $u_n \to u$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. Pour $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\left|\int_\Omega u_n \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right| = \left|\int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \phi\right| \leqslant \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)} \|\phi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)} \tag{3.80}$$

En passant à la limite, on obtient (2).
(2) $\Rightarrow$ (3)
Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. On a

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} \overline{u} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right| = \left|\int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right| \leqslant C\|\phi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)} \tag{3.81}$$

Par conséquent, $\overline{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ par 3.0.5.
(3) $\Rightarrow$ (1)
On supposer Ω borné (si ce n'est pas le cas, on peut s'y ramener à l'aide d'une suite tronquante). Par cartes locales et partition de l'unité, on se ramène au problème suivant :
Soit $u \in L^p(Q_+)$. On suppose que la fonction

$$\overline{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in Q, x_N > 0 \\ 0 & \text{si } x \in Q, x_N < 0 \end{cases}$$

appartient à $W^{1,p}(Q)$. Il faut montrer que $\alpha u \in W_0^{1,p}(Q_+)$ $\forall \alpha \in C_0^\infty(Q_+)$. Soit $(\rho_n) \subset C_0^\infty(Q)$ une suite régularisante t.q.

$$\operatorname{supp} \rho_n \subset \left\{ x \in \mathbb{R}^N \mid \frac{1}{2n} < x_N < \frac{1}{n} \right\}$$

Alors $\rho_n * (\alpha\overline{u}) \to \alpha\overline{u}$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. D'autre part,

$$\operatorname{supp}(\rho_n * \alpha\overline{u}) \subset \operatorname{supp} \rho_n + \operatorname{supp}(\alpha\overline{u}) \subset Q_+ \tag{3.82}$$

pour n assez grand. Ainsi

$$\rho_n * (\alpha\overline{u}) \in C_0^\infty(Q_+)$$

et donc

$$\alpha u \in W_0^{1,p}(Q_+) \;\; \forall \alpha \in C_0^\infty(Q) \tag{3.83}$$

Remarque 3.0.13. On voit que cette dernière proposition implique un raffinement de 3.0.17 : Soit Ω un ouvert **quelconque** de $\mathbb{R}^N$ et $1 \leqslant p < N$. Alors il existe $C > 0$ t.q. :

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \; \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{3.84}$$

De plus, si Ω est borné, en se basant sur :

$$L^{p^*}(\Omega) \subset L^p(\Omega), \text{ car } 1 \leqslant p < p^* < \infty \tag{3.85}$$

avec injection continue. (On peut consulter [ADA], p. 25). Par conséquent, $\exists K > 0$ t.q.

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant K\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \; \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{3.86}$$

On combine finalement (3.84) et (3.86) pour arriver à :

Corolaire 3.0.9. Inégalité de Poincaré

Soit Ω un ouvert **borné** de $\mathbb{R}^N$. Alors il existe une constante $C > 0$ t.q.

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \; \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{3.87}$$

ie $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ est une norme équivalente sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ à la norme $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$

Preuve :
Cela résulte de la remarque 3.0.13.

Définition 3.0.22. On désigne par $W^{-1,p'}$ l'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ avec $1 \leqslant p < \infty$. Grâce au théorème de représentation de Riesz, on peut identifier L^2 et son dual. Par conséquent, si Ω est borné, on a

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset W^{-1,p'} \text{ si } \frac{2N}{N+2} \leqslant p < \infty \tag{3.88}$$

Si Ω n'est pas borné, on a

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset W^{-1,p'} \text{ si } \frac{2N}{N+2} \leqslant p \leqslant 2 \tag{3.89}$$

Preuve :
On veut prouver que $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. On utilise pour cela Rellich-Kondrachov. La condition $\frac{2N}{N+2} \leqslant p$ est équivalente à $2 \geqslant p^*$, avec p^* défini comme au théorème 3.0.19.

Proposition 3.0.8. Soit $F \in W^{-1,p'}$. Alors il existe $f_0, f_1, \ldots, f_N \in L^{p'}$ tels que

$$F(v) = \int f_0 v + \sum_{i=1}^{N} \int f_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{3.90}$$

et

$$\|F\| = \max\left\{\|f_i\|_{L^{p'}(\Omega)} \mid 0 \leqslant i \leqslant N\right\} \tag{3.91}$$

Preuve :
La preuve est analogue au cas $N = 1$. On renvoit à la proposition 2.0.3.

Bibliographie

[BRE] Haïm Brezis, *Analyse fonctionelle*, Masson, Paris, 1987

[ADA] Robert Adams, *Sobolev Spaces*, Eilenberg - Bass, New York, 1970