Projet de Semestre

été 2005

Les espaces de Sobolev

Laurent Landry

Professeur Responsable:

prof. Marc Troyanov

Table des matières

Résumé

Dans ce travail seront présentés les principaux résultats concernant les espaces de Sobolev dans l'espace euclidien, sur les variétés ainsi qu'une approche à la théorie des espaces de Sobolev sur les fibrés vectoriels. Nous commencerons par définir formellement les espaces de Sobolev. Nous donnerons ensuite une définition équivalente grâce à un résultat dû aux mathématiciens Meyers et Serrin. Nous aborderons ensuite les résultats concernant les plongements des espaces de Sobolev. Nous généraliserons enfin ces résultats sur les espaces de Sobolev sur les variétés et fibrés vectoriels

Table des notations

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long du travail:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2...\}$	
$\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$	multi-indice avec $\alpha_i \in \mathbb{N}$ pour tout $i = 1, ..., n$
$\lvert\alpha\rvert = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$	
$D^\alpha u = \frac{\partial^{\lvert\alpha\rvert}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot \partial x_n^{\alpha_n}} u$	α-ième dérivée partielle
p.p	presque partout
$\operatorname{supp} u$	support de la fonction u
$\lvert\Omega\rvert$	mesure (de Lebesgue) de l'ensemble Ω
$f * g$	produit de convolution
$\omega \subset\subset \Omega$	ouvert ω fortement inclus dans Ω, c'est-à-dire $\overline{\omega}$ compact et $\overline{\omega} \subset \Omega$
ρ_ε	fonction régularisante
$u_\varepsilon = \rho_\varepsilon * u$	régularisation de la fonction u

CHAPITRE 1

Introduction

Le principal intérêt de la théorie des espaces de Sobolev réside dans l'existence de plongements continus de Sobolev, et dans l'existence de plongements compacts de Rellich-Kondrakov. À ceux-ci, on rajoute bien entendu l'existence de théorèmes de régularité, particulièrement précieux dans l'étude des équations aux dérivées partielles. Nous traiterons dans un premier temps la théorie des espaces de Sobolev dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, essentielle pour la suite. Nous aborderons ensuite les espaces de Sobolev sur les variétés compactes et finalement la théorie des espaces de Sobolev sur les fibrés vectoriels. Nous supposerons le lecteur familier avec la théorie de la mesure et de l'intégrale de Lebesgue. On trouvera en annexe un bref rappel des propriétés constamment utilisées dans ce projet.

CHAPITRE 2

Les espaces de Sobolev dans $\mathbb{R}^n$

1. Introduction aux espaces de Sobolev

1.1. Dérivées aux sens des distributions.

Les espaces de Sobolev requièrent quelques notions clés et techniques de la théorie des distributions de Schwartz. Sans entrer trop dans les détails, nous introduirons le concept de dérivée au sens des distributions ainsi que les espaces de distributions (au sens de Schwartz).

Définition 2.1. Soit Ω un domaine ouvert de $\mathbb{R}^n$.
Une suite $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ est dite convergente au sens de l'espaces $\mathcal{D}(\Omega)$ vers la fonction $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ si les conditions suivantes sont satisfaites :

(1) Il existe $K \subset\subset \Omega$ tel que $\operatorname{supp}(\phi_n - \phi) \subset K$, pour tout naturel $n \in \mathbb{N}$
(2) $\lim_{n\to\infty} D^\alpha \phi_n(x) = D^\alpha \phi(x)$ uniformément sur K, pour tout multi-indice α

Remarques 2.2.

(1) Pour tout $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ il existe une distribution $T_u \in \mathcal{D}(\Omega)^*$, le dual de l'espace fonctionnel $\mathcal{D}(\Omega)$, définie par

$$T_u(\phi) = \int_\Omega u(x)\phi(x)dx, \ \ \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{1}$$

En effet, il est clair, par définition et par la linéarité de l'intégral de Lebesgue, que T_u est une application linéaire. Montrons alors que T_u est continue. Pour le voir, supposons qu'il existe une suite $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers ϕ dans $\mathcal{D}(\Omega)$. Alors, par définition, il existe $K \subset\subset \Omega$ tel que $\operatorname{supp}(\phi_n - \phi) \subset K$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi,

$$|T_u(\phi_n) - T_u(\phi)| \leq \sup_{x\in K} |\phi_n(x) - \phi(x)| \int_K |u(x)|dx$$

Or, vu que l'intégrale $\int_K |u(x)|dx$ est finie et que ϕ_n converge vers ϕ uniformément sur K lorsque n tend vers l'infini, le membre de droite de l'inégalité précédente tend vers 0, montrant ainsi la continuité de T_u

(2) Vu que toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ s'annule identiquement en dehors d'un sous-ensemble compact de Ω, il est clair, grâce à une intégration par parties, que pour toute fonction $u \in C^1(\Omega)$ la relation suivante est vérifiée :

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x_i} u(x)\right) \phi(x) dx = -\int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \phi(x)\right) u(x) dx \tag{2}$$

Pour $i = 1, ..., n$ quelconque.
De même, pour tout multi-indice α, par intégration par parties $|\alpha|$-fois on a

$$\int_\Omega (D^\alpha u(x))\, \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega (D^\alpha \phi(x))\, u(x) dx \tag{3}$$

Ces résultats motivent ainsi la définition de la dérivée $D^\alpha T$ d'une distribution $T \in \mathcal{D}(\Omega)^*$. On pose alors

$$D^\alpha T(\phi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \phi) \tag{4}$$

Vu que $D^\alpha \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, pour autant que $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $D^\alpha T$ est bien définie sur $\mathcal{D}(\Omega)$. Clairement $D^\alpha T$ est linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$. Soient alors $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et une suite $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ telles que $\phi_n \to \phi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$. Alors,

$$\operatorname{supp}(D^\alpha(\phi_n - \phi)) \subset \operatorname{supp}(\phi_n - \phi) \subset K$$

pour un certain $K \subset\subset \Omega$. De plus, on a

$$D^\beta \left(D^\alpha(\phi_n - \phi)\right) = D^{\beta+\alpha}(\phi_n - \phi)$$

qui converge uniformément vers 0 sur K lorsque n tend vers l'infini et ceci pour tout multi-indice β. Ainsi, $D^\alpha \phi_n \to D^\alpha \phi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$. Vu que $T \in \mathcal{D}(\Omega)^*$ il en découle que

$$D^\alpha T(\phi_n) = (-1)^{|\alpha|} T\left(D^\alpha(\phi_n)\right) \to (-1)^{|\alpha|} T\left(D^\alpha(\phi)\right) = D^\alpha T(\phi)$$

montrant ainsi la continuité de $D^\alpha T$ et donc le fait que $D^\alpha T \in \mathcal{D}(\Omega)^*$.

Ces préliminaires nous permettent ainsi de bien définir le concept de dérivées partielles au sens des distributions. Pour cela, considérons une fonction $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. En vertu des résultats précédents, il se peut qu'il existe une fonction $v_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que $T_{v_\alpha} = D^\alpha(T_u)$ dans $\mathcal{D}(\Omega)^*$. Si une telle fonction v_α existe, on peut montrer qu'elle est unique, bien entendu en dehors d'un ensemble de mesure nulle. On définit alors la dérivée partielle au sens des distributions de u de la manière suivante :

Définition 2.3. Soient Ω un domaine ouvert de $\mathbb{R}^n$, $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ et α un multi-indice quelconques. On dit que u admet une dérivée partielle au sens des distributions d'ordre α, s'il existe une fonction $v_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que

$$T_{v_\alpha} = D^\alpha(T_u) \tag{5}$$

En d'autres termes, $v_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ est la α-ième dérivée partielle au sens des distributions de u si

$$\int_\Omega v_\alpha(x)\phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u(x) D^\alpha \phi(x) dx \tag{6}$$

et ceci pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.
On note alors $D^\alpha u = v_\alpha$.

Exemple 2.4. Posons $n = 1$ et $\Omega =]-1,1[$ et considérons la fonction u définie sur Ω par :

$$u(x) = \frac{1}{2}(|x| + x)$$

On vérifie alors assez facilement que la fonction v définie par :

$$v(x) = \begin{cases} +1 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad -1 < x < 0 \end{cases}$$

correspond à la première dérivée partielle au sens des distributions de la fonction u.

Remarque 2.5. On se convainc alors assez facilement, en vertu des développements précédents, que si u est suffisamment lisse pour avoir une dérivée partielle $D^\alpha u$ au sens usuel, celle-ci correspond également à la dérivée partielle au sens des distributions.

Tous ces préliminaires nous permettent donc de définir les espaces de Sobolev.

1.2. Définitions et propriétés élémentaires des espaces de Sobolev. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine ouvert, $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$ et k un entier non nul.

Définition 2.6. L'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ est défini par

(7)
$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) |\text{ pour tout multi-indice } \alpha \text{ avec } |\alpha| \leq k,\ D^\alpha u \in L^p(\Omega)\}$$

Dans cette définition la dérivée partielle D^α est entendue au sens des distributions.

Remarque 2.7. Les espaces $L^p(\Omega)$ sont caractérisés par des classes de fonctions identifiées en dehors d'ensembles de mesure nulle, nous conviendrons de parler d'une fonction $u \in W^{k,p}(\Omega)$ continue, bornée, etc. s'il existe une fonction $\widehat{u}$ telle que $u = \widehat{u}$ p.p. $x \in \Omega$ et bénéficiant de telles propriétés. Dans la suite, lorsque cela deviendra utile, par exemple pour donner un sens à $u(x)$, on remplacera systématiquement u par son représentant.

On vérifie sans difficulté que l'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ est, comme son nom l'indique, un espace fonctionnel. Munissons alors celui-ci de la norme suivante :

Lemme 2.8. *La fonction* $\| \, \|_{W^{k,p}(\Omega)} : W^{k,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \tag{8}$$

est une norme sur l'espace vectoriel $W^{k,p}(\Omega)$.

□

La preuve de ce lemme est relativement simple, en se souvenant que la fonction $\| \, \|_{L^p(\Omega)}$ définit une norme sur l'espace fonctionnel $L^p(\Omega)$. Nous laisserons donc la preuve de ce lemme en exercice.

Lemme 2.9. *L'espace* $W^{k,p}(\Omega)$ *muni de cette norme est un espace de Banach.*

Démonstration. Soit $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans l'espace fonctionnel $W^{k,p}(\Omega)$. Alors, pour tout multi-indice α d'ordre inférieur ou égal à k, la suite $\{D^\alpha u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^p(\Omega)$. Rappelons alors que l'espace $L^p(\Omega)$ est complet et de ce fait, il existe des fonctions u et u_α pour tout multi-indice α, $0 \leq |\alpha| \leq k$, telles que u_n, $D^\alpha u_n$ convergent vers u, respectivement vers u_α dans

$L^p(\Omega)$ et ceci pour tout multi-indice. De plus, vu que $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$, chacune des fonctions u_n détermine une distribution $T_{u_n} \in \mathcal{D}(\Omega)^*$. Ainsi, pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$|T_{u_n}(\phi) - T_u(\phi)| \leq \int_\Omega |u_n(x) - u(x)||\phi(x)|dx \leq \|\phi\|_{L^{p'}(\Omega)} \|u_n - u\|_{L^p(\Omega)}$$

grâce à l'inégalité de Hölder (103), où p' est l'exposant conjugué à p. Ainsi, $T_{u_n}(\phi) \to T_u(\phi)$ pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ lorsque $n \to \infty$. Par un même raisonnement, $T_{D^\alpha u_n}(\phi) \to T_{u_\alpha}(\phi)$ pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et tout multi-indice α d'ordre compris entre 0 et k. Il en découle

$$T_{u_\alpha}(\phi) = \lim_{n\to\infty} T_{D^\alpha u_n}(\phi) = \lim_{n\to\infty} (-1)^{|\alpha|} T_{u_n}(D^\alpha \phi) = (-1)^{|\alpha|} T_u(D^\alpha \phi) = D^\alpha(T_u)(\phi)$$

pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Ainsi, $u_\alpha = D^\alpha u$ au sens des distributions pour tout multi-indice α vérifiant $0 \leq |\alpha| \leq k$. Finalement, vu que $\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0$, l'espace fonctionnel $W^{k,p}(\Omega)$ est complet. □

Définition 2.10. Etant donnés k, p, Ω, on définit l'espace de Sobolev

$$H^{k,p}(\Omega) = \text{le complété de } \{u \in C^\infty(\Omega) |\ \|u\|_{H^{k,p}(\Omega)} := \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} < \infty\} \tag{9}$$

Pendant longtemps, jusque vers les années 60, les espaces définis en (7) et (9) furent considérés comme distincts. Cette confusion fut rétablie grâce au théorème de Meyers-Serrin qui identifie ces deux espaces. On peut cependant déjà remarquer que la complétude de l'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ nous induit l'inclusion de l'espace fonctionnel $H^{k,p}(\Omega)$ dans l'espace fonctionnel $W^{k,p}(\Omega)$. En effet, comme les dérivées distributionnels et classiques coïncident lorsque ses dernières existent et sont continues sur Ω l'espace

$$S = \{u \in C^\infty(\Omega) |\ \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} < \infty\}$$

est contenu dans $W^{k,p}(\Omega)$. Ainsi, vu que l'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ est complet, l'opérateur d'identité sur S s'étend en un isomorphisme isométrique entre $H^{k,p}(\Omega)$, le complété de S, et la fermeture de S dans $W^{k,p}(\Omega)$. On peut de ce fait identifier l'espace fonctionnel $H^{k,p}(\Omega)$ avec cette fermeture.

2. Le théorème de Meyers-Serrin

Lemme 2.11. *Soit $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Alors la régularisation de u, u_ε a la propriété suivante*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon - u\|_{W^{k,p}(\Omega')} = 0 \tag{10}$$

pour tout $\Omega' \subset\subset \Omega$. Dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^n$, alors $\lim_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon - u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} = 0$

DÉMONSTRATION. Vu que Ω' est borné, il existe ε_0 tel que $\varepsilon_0 < dist(\Omega', \partial\Omega)$. Soient alors $\varepsilon < \varepsilon_0$, $x \in \Omega'$, α un multi-indice avec $|\alpha| \leq k$ arbitrairement choisis. Différentiant sous l'intégrale on trouve :

$$\begin{aligned}
D^\alpha u_\varepsilon(x) =& \int_\Omega D_x^\alpha \rho_\varepsilon(x-y)u(y)dy \\
=& \varepsilon^{-n} \int_\Omega D_x^\alpha \rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)u(y)dy \\
=& (-1)^{|\alpha|}\varepsilon^{-n} \int_\Omega D_y^\alpha \rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)u(y)dy \\
=& \varepsilon^{-n} \int_\Omega \rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)D_y^\alpha u(y)dy && \text{par (7)} \\
=& \int_\Omega \rho_\varepsilon(x-y)\, D_y^\alpha u(y)dy && \text{par (7)} \\
=& (D^\alpha u)_\varepsilon(x) && \text{par (107)}
\end{aligned}$$

La conclusion découle alors du corollaire 5.7

□

Par le lemme précédant, on observe que pour toute fonction $u \in W^{k,p}(\Omega)$, il existe une suite de fonction $\{u_\varepsilon\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ convergente vers u dans $W^{k,p}(\Omega')$ quel que soit Ω' de fermeture compacte dans Ω. Le résultat que l'on démontrera par le théorème 2.12 nous donne un résultat semblable valable sur tout ouvert Ω, et non uniquement pour tout sous-domaine de fermeture compacte dans Ω

THÉORÈME 2.12. *(Meyers-Serrin)*
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert quelconque. Alors

$$H^{k,p}(\Omega) = W^{k,p}(\Omega)$$

DÉMONSTRATION.
Pour $i = 1, 2, ..$ définissons Ω_k le sous-domaine de Ω par :

$$\Omega_i = \{x \in \Omega |\, |x| < i \text{ } et \text{ } dist(x, \partial\Omega) > 1/i\}$$

et posons $\Omega_{-1} = \Omega_0 = \emptyset$.
On remarque que pour $i = 1, 2, ...$ on a $\Omega_i \subset\subset \Omega_{i+1}$ et de plus $\cup_{i=1}^\infty \Omega_i = \Omega$. Considérons alors la famille $\mathcal{O}$ de sous-domaines de Ω définie par :

$$\mathcal{O} = \left\{U_i |\, U_i = \Omega_{i+1} \setminus \overline{\Omega}_{i-1},\, i = 1, 2, ...\right\}$$

Soit alors $\mathcal{F}$ une partition de l'unité subordonnée à la famille $\mathcal{O}$. Posons

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_i &= \{f \in \mathcal{F} |\, \operatorname{supp} f \subset U_i\} \\
f_i &= \sum_{f \in \mathcal{F}_i} f
\end{aligned} \tag{11}$$

Vu que $\overline{\Omega}_{i+1}$ est compacte, on a que $\mathcal{F}_i$ est un ensemble fini et par suite $f_i \in C_0^\infty(U_i)$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^\infty f_i \equiv 1$ sur Ω.
Soient alors $\varepsilon > 0$ et $u \in W^{k,p}(\Omega)$ arbitrairement choisis. Si $0 < \varepsilon < 1/(k+1)(k+2)$, alors le support de la régularisation $(f_i u)_\varepsilon$ est contenu dans l'intersection

$V_i = \Omega_{i+2} \cap (\Omega_{i-2})^c$, sous-ensemble d'adhérence compacte dans Ω. Ainsi, vu que $f_i u \in W^{k,p}(\Omega)$ quel que soit $i = 1, 2, ...$, on peut choisir ε_i tel que

$$\|(f_i u)_{\varepsilon_i} - f_i u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \|(f_i u)_{\varepsilon_i} - f_i u\|_{W^{k,p}(V_i)} < \frac{\varepsilon}{2^i} \tag{12}$$

Posant alors $v_i \equiv (f_i u)_{\varepsilon_i}$, on remarque qu'uniquement un nombre fini des fonctions v_i ne s'annule pas sur $\Omega' \subset\subset \Omega$ arbitraire. De ce fait, la fonction $v \equiv \sum_{i=1}^{\infty} v_i$ est bien défini et appartient à $C^\infty(\Omega)$ grâce notamment au corollaire 5.5, et le fait qu'une somme de fonctions continues reste continue.
Choisissons $x \in \Omega_i$ quelconque, on a

$$u(x) = \sum_{j=1}^{i+2} f_j(x)\, u(x) \qquad \text{par (11)}$$

$$v(x) = \sum_{j=1}^{i+2} (f_j u)_{\varepsilon_j}(x)$$

d'où

$$\|u - v\|_{W^{k,p}(\Omega_i)} \le \sum_{j=1}^{i+2} \left\|(f_j u)_{\varepsilon_j} - f_j u\right\|_{W^{k,p}(\Omega)} < \varepsilon \sum_{j=1}^{i+2} 2^{-j} < \varepsilon.$$

Laissant i tendre vers l'infini, on obtient le résultat. $\square$

3. Les plongements de Sobolev

Dans ce chapitre, nous allons traiter les plongements des espaces de Sobolev dans d'autres espaces, à savoir d'autres espaces de Sobolev d'ordres plus petits mais défini sur une norme L^p plus grande. En effet, de manière générale, l'inclusion $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ pour $1 \le p \le q \le \infty$ est fausse.
Par le terme de plongement, de l'espace vectoriel normé $(X, \| \|_X)$ dans l'espace vectoriel normé $(Y, \| \|_Y)$, que le notera $X \hookrightarrow Y$ on entend de manière générale les faits suivants. D'une part X est un sous-espace vectoriel de Y et d'autre part l'identité est un opérateur continue. En d'autres termes, l'identité étant linéaire, par un résultat d'analyse fonctionnelle, la continuité de l'opérateur identité est équivalente à l'existence d'une constante C (indépendante de toute fonction considérée) telle que

$$\|u\|_Y \le C\|u\|_X, \;\; u \in X$$

Résultat que l'on exploitera à maintes reprises. Parfois, on ne requiert par la première condition, et de plus, l'application identité est allégée pour justifier certains plongements canoniques, notamment en ce qui concerne les opérateurs de traces.
Pour ces cas particuliers, nous redéfinirons au besoin ce que l'on entendra par les symboles $X \hookrightarrow Y$.
Un grand nombre d'auteurs ont traités ces plongements par différents types d'arguments. La première approche regroupe des résultats concernant la théorie des potentiels et la seconde fait appel à des résultats de moyennes et de combinatoire.

Chacune a ses avantages et les résultats clés sont de difficulté théorique égale. Nous privilégierons l'utilisation de la seconde. Pour l'obtention des résultats par la théorie des potentiels, le lecteur pourra consulter l'ouvrage de Adams [**1**]. Définissons en premier lieu un nouvel espace de fonctions, qui sera notre principal centre d'intérêt par la suite.

DÉFINITION 2.13. L'espace $W_0^{k,p}(\Omega)$ est défini par la fermeture de l'espace $C_0^\infty(\Omega)$, relativement à la norme (8).

L'avantage que porte les espaces $W_0^{k,p}(\Omega)$ sur les espaces $W^{k,p}(\Omega)$ est principalement illustrés par les plongements de Sobolev. En effet, tous les résultats que nous démontrerons ne sont en général pas valables pour les espaces $W^{k,p}(\Omega)$ avec Ω domaine ouvert quelconque. Ils le sont cependant, moyennant certaines hypothèses géométriques sur le domaine Ω considéré. Nous nous bornerons à démontrer les résultats sur les espaces $W_0^{k,p}(\Omega)$. Pour les résultats généraux sur les espaces $W^{k,p}(\Omega)$, le lecteur pourra trouvé toutes les démonstrations dans l'ouvrage de Adams [**1**]. Citons cependant, que dans la plupart des cas, les espaces $W_0^{k,p}(\Omega)$ et $W^{k,p}(\Omega)$ ne coïncident pas.

Définissons encore des espaces de fonctions que l'on considérera dans la suite, tout particulièrement les espaces de Hölder. Nous démontrerons par la suite quelques propriétés concernant ces espaces. En particulier, nous verrons que les espaces de Sobolev, sous certaines hypothèses concernant les indices k, n et p, se plongent dans de tels espaces. Nous reviendrons, suite à la définition de ces espaces, à ce que l'on entend par de tels plongements.

DÉFINITION 2.14. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $0 < \alpha \leq 1$ et m un entier non négatif.

(1) On définit l'espace $C_B^m(\Omega)$ par l'ensemble des fonction $C^m(\Omega)$ telles que toutes les dérivées d'ordre inférieur ou égal à m sont bornées. On munit l'espace $C_B^m(\Omega)$ de la norme $\| \, \|_{C_B^m(\Omega)}$ défini par
$$\|u\|_{C_B^m(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|$$

(2) De même, on définit l'espace $C^m(\overline{\Omega})$ par
$$C^m(\overline{\Omega}) = \{u \in C^m(\Omega) |\, D^\alpha u \text{ s'étend par continuité à } \overline{\Omega}, \forall\, 0 \leq \alpha \leq m\}$$
muni de la norme $\| \, \|_{C^m(\overline{\Omega})}$ défini par
$$\| \, \|_{C^m(\overline{\Omega})} = \|u\|_{C_B^m(\Omega)}$$

(3) Espaces de Hölder
Une fonction u est dite Hölder-continue d'exposant ν sur Ω si il existe une constante C telle que
$$|u(x) - u(y)| \leq C\, |x - y|^\nu, \; x, y \in \Omega$$
On note $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ l'espace de toutes les fonctions u satisfaisant la condition précédente sur Ω
De même on note
$$C^{m,\alpha}(\overline{\Omega}) = \{u \in C^m(\overline{\Omega}) |\, D^\alpha u \in C^{0,\nu}(\overline{\Omega}), \forall\, 0 \leq \alpha \leq m\}$$
On muni les espaces de Hölder de la norme $\| \, \|_{C^{m,\nu}(\overline{\Omega})}$ définie par

$$\|u\|_{C^{m,\nu}(\overline{\Omega})} = \|u\|_{C^m(\overline{\Omega})} + \max_{0\le|\alpha|\le m} \sup_{\substack{x,y\in\Omega\\ x\neq y}} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\nu}$$

PROPOSITION 2.15. *Tous les espaces définis précédemment, munis de leur norme respective sont des espaces de Banach.* □

Bien entendu, toute fonction $u \in W^{k,p}(\Omega)$, n'est à priori que définie presque partout sur Ω. Cette fonction représente un membre particulier d'une classe de fonctions égales en dehors d'un ensemble de mesure nulle. On parlera ainsi d'un plongement du type

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{m,\nu}(\overline{\Omega})$$

si pour toute fonction $u \in W^{k,p}(\Omega)$, sa "classe d'équivalence" contient un membre $\widehat{u} \in C^{m,\nu}(\overline{\Omega})$ tel que

$$\|\widehat{u}\|_{C^{m,\nu}(\overline{\Omega})} \le C\ \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$$

Comme précédemment mentionné, nous ne distinguera dès lors pas u et $\widehat{u}$.

THÉORÈME 2.16. *(Plongements de Sobolev)*
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine ouvert, k un entier positif, j un entier non négatif et $1 \le p < \infty$ un réel. Alors

Cas 1 *Si $kp < n$*

$$W_0^{j+k,p}(\Omega) \to W_0^{j,q}(\Omega),\ \ \forall\, q \in \left[p, \frac{n\,p}{n-kp}\right] \tag{13}$$

Cas 2 *Si $kp = n$*

$$W_0^{j+k,p}(\Omega) \to W_0^{j,q}(\Omega),\ \ \forall\, q \in [p, \infty) \tag{14}$$

Cas 3 *Si $kp > n$.*

(a) *Si $kp > n > (k-1)\,p$*

$$W_0^{j+k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\nu}(\overline{\Omega}),\ \ \forall\, 0 < \nu \le k - \frac{n}{p} \tag{15}$$

En particulier

$$W_0^{j+k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j}(\overline{\Omega}) \tag{16}$$

(b) *Si $(k-1)\,p = n$*

$$W_0^{j+k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\nu}(\overline{\Omega}),\ \ \forall\, 0 < \nu < 1 \tag{17}$$

En particulier

$$W_0^{j+k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j}(\overline{\Omega}) \tag{18}$$

REMARQUES 2.17.

(1) Si Ω est de mesure finie, il est évident, en vertu du théorème 5.1, que les résultats du théorème précédant restent également valables pour $q \in [1, p]$.

(2) Il nous suffira de traiter les plongements considérant $j = 0$. En effet, supposons par exemple le plongement

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

établi, avec q satisfaisant aux hypothèses respectives.
Alors, quelle que soit $u \in W_0^{j+k,p}(\Omega)$, on a $D^\alpha u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ pour $|\alpha| \leq j$ et ainsi $D^\alpha u \in L^q(\Omega)$. Il en découle que $u \in W_0^{j,q}(\Omega)$ et

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{j,q}(\Omega)} &= \sum_{|\alpha|\leq j} \|D^\alpha u\|_{L^q(\Omega)} \\ &\leq C_1 \sum_{|\alpha|\leq j} \|D^\alpha u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \\ &\leq C_2 \|u\|_{W^{j+k,p}(\Omega)} \end{aligned}$$

et ainsi

$$W_0^{j+k,p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{j,q}(\Omega)$$

(3) Par densité, ils nous suffira, dans le plupart des cas, de traiter dans un premier temps les plongements considérant $u \in C_0^\infty(\Omega)$. L'avantage étant que les dérivées partielles au sens des distributions peuvent être remplacées par celles au sens usuel.

NOTATION 2.18. Pour $\alpha = (0, ..., 0, 1, 0, ...0)$ un multi-indice tel que $|\alpha| = 1$ dont l'élément non nul se trouve à la i-ième position, nous noterons $D^\alpha u = D_i u$.

Dans les paragraphes qui suivent, nous allons démontrés ce théorème. Nous traiterons chaque cas les eux après les autres.

Nous utiliserons à maintes reprises le lemme suivant, dont on trouvera une preuve simple dans l'ouvrage d'Adams [**1**].

LEMME 2.19. *Soient $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$. Posons*

$$\widetilde{u} = \begin{cases} u(x) & si \quad x \in \Omega \\ 0 & si \quad x \in \Omega^c \end{cases}$$

Si $|\alpha| \leq k$, alors $D^\alpha \widetilde{u} = \widetilde{D^\alpha u}$ dans le sens des distributions. En d'autres termes $\widetilde{u} \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ et $\|\widetilde{u}\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ □

Ce lemme nous permet alors de ne plus nous soucier du domaine Ω considéré. Pour nos besoins, nous ne traitons que des domaines ouverts de $\mathbb{R}^n$. Cependant grâce à ce lemme, on se laisse convaincre que certains des résultats suivants sont valables pour des ouverts Ω quelconques.

3.1. Cas $kp < n$.

THÉORÈME 2.20. *(Sobolev, Gagliardo, Nirenberg)*
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine ouvert et $1 \leq p < n$ un réel. Alors,

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega) \tag{19}$$

où p^* est donné par

$$p^* = \frac{n\,p}{n-p}$$

De plus, il existe une constante $C = C(n,p)$ telle que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C\,\|Du\|_{L^p(\Omega)} \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{20}$$

REMARQUE 2.21. Pour des raisons mnémotechniques, on remarque sans difficulté que p^* est donné par la relation suivante :

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$$

Pour la preuve de ce théorème, on utilisera le lemme suivant.

LEMME 2.22. *Soient $n \geq 2$ et $f_1, ..., f_n \in L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $1 \leq i \leq n$, on pose*

$$\widetilde{x_i} = (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$$

Alors la fonction

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} f_i(\widetilde{x_i}),\ x \in \mathbb{R}^n$$

appartient à $L^1(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

□

La preuve de ce lemme s'obtient sans réelle difficulté par induction. On en trouvera une preuve par exemple dans l'ouvrage de Brezis [**2**].

DÉMONSTRATION. (Théorème 2.20)
Supposons $p = 1$ et $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Prolongeons u par 0 en dehors de Ω. Alors, la fonction ainsi obtenue, que l'on notera également u appartient à $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Pour $x \in \Omega$ et $1 \leq i \leq n$ arbitrairement choisis, on a

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} D_i u(x_1, ..., t, ..., x_n)\, dt$$

et par suite

$$|u(x)| = \int_{-\infty}^{x_i} |D_i u(x_1, ..., t, ..., x_n)|\, dt \leq \int_{\mathbb{R}} |D_i u(x_1, ..., t, ..., x_n)|\, dt =: h_i(\widetilde{x_i})$$

Ce qui entraîne que

$$\begin{aligned} &|u(x)|^n \leq \prod_{i=1}^{n} h_i(\widetilde{x_i}) \\ &\Rightarrow f(x) := |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{i=1}^{n} h_i(\widetilde{x_i})^{\frac{1}{n-1}} =: \prod_{i=1}^{n} f_i(\widetilde{x_i}) \end{aligned}$$

Par le lemme 2.22

$$\begin{aligned}\|u\|^{n/(n-1)}_{L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} &= \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\\ &\leq \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})}\\ &= \prod_{i=1}^{n}\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f_i(\widetilde{x}_i)|^{n-1} d\widetilde{x}_i\right)^{\frac{1}{n-1}}\\ &= \prod_{i=1}^{n}\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left(\int_{\mathbb{R}} |D_i u(x_1, ..., t, ...x_n)|dt\right) d\widetilde{x}_i\right)^{\frac{1}{n-1}}\\ &= \prod_{i=1}^{n}\left(\int_{\mathbb{R}^{n}} |D_i u(x)|dx\right)^{\frac{1}{n-1}}\end{aligned}$$

ou encore

$$\|u\|_{L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \leq \prod_{i=1}^{n}\left(\int_{\mathbb{R}^{n}} |D_i u(x)|dx\right)^{\frac{1}{n}}$$

Utilisant la relation entre la moyenne géométrique et la moyenne arithmétique, on obtient

$$\|u\|_{L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{i=1}^{n} |D_i u(x)|dx \leq \frac{\sqrt{n}}{n}\|Du\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

Supposons maintenant $1 \leq p < n$ et $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Par un même prolongement et appliquant l'inégalité précédant à $|u|^t$ pour $t > 1$ on trouve, grâce à l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned}\left\||u|^t\right\|_{L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} &\leq \frac{\sqrt{n}}{n}\left\|D(|u|^t)\right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \frac{t\sqrt{n}}{n}\left\| |u|^{t-1}|Du| \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\\ &\leq \frac{t\sqrt{n}}{n}\left\| |u|^{t-1} \right\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \text{ avec } p' = \frac{p}{p-1}\end{aligned}$$

Ou encore

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{t\,n}{n-1}} dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \frac{t\sqrt{n}}{n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{(t-1)\,p}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{21}$$

Choisissons t tel que

$$\frac{t\,n}{n-1} = \frac{(t-1)\,p}{p-1} \Leftrightarrow t = \frac{(n-1)\,p}{n-p}$$

L'inégalité (21) devient

(22)

$$\|u\|_{L^{np/(n-p)}(\Omega)} = \|u\|_{L^{np/(n-p)}(\mathbb{R}^n)} \leq \underbrace{\frac{t}{\sqrt{n}}}_{:=C}\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = C\,\|Du\|_{L^p(\Omega)} \leq C\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

Supposons maintenant $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

Soit alors $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ une suite telle que $u_n \to u$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. Soit $\varepsilon > 0$

quelconque. Par définition, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > m \geq N$

$$\|u_n - u_m\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \varepsilon/C$$

D'où, appliquant l'inégalité (22) à la différence $u_n - u_m$, on obtient

$$\|u_n - u_m\|_{L^{p^*}(\Omega)} < \varepsilon$$

Autrement dit la suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans l'espace de Banach $L^{p^*}(\Omega)$, ainsi $u \in L^{p^*}(\Omega)$ □

COROLLAIRE 2.23. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine ouvert, k un entier non négatif, $1 \leq p < \infty$ un réel tel que $kp < n$. Posons*

$$p^* = \frac{n\,p}{n - kp}$$

Alors,

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega) \tag{23}$$

REMARQUE 2.24. Il est parfois plus commode de se souvenir que le réel p^* du corollaire 2.23 est donné par

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$$

DÉMONSTRATION. Par récurrence sur k.

(1) Pour $k = 1$, c'est le résultat du théorème 2.20.

(2) Supposons $k \geq 2$ et le résultat vrai pour $k - 1$, i.e., pour toute fonction $v \in W_0^{k-1,p}(\Omega)$,

$$\|v\|_{L^{\frac{np}{n-(k-1)p}}(\Omega)} \leq C\,\|v\|_{W^{k-1,p}(\Omega)}$$

Posons $q_k = \dfrac{np}{n - kp}$. Soit alors une fonction $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ arbitrairement choisie et supposons $kp < n$. Par l'injection naturelle de l'espace de Sobolev $W_0^{k,p}(\Omega)$ dans l'espace de Sobolev $W_0^{k-1,p}(\Omega)$, il en découle que la fonction u appartient à l'espace $W_0^{k-1,p}(\Omega)$ et qu'il existe une constante C telle que

$$\|u\|_{L^{q_{k-1}}(\Omega)} \leq C\,\|v\|_{W^{k-1,p}(\Omega)}$$

Ainsi, on a

$$\|u\|_{W^{1,q_{k-1}}(\Omega)} = \|u\|_{L^{q_{k-1}}(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|_{L^{q_{k-1}}(\Omega)} \leq C(n+1)\,\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$$

car chacune des fonctions $D_i u$ appartient à l'espace de Sobolev $W_0^{k-1,p}(\Omega)$. Or, vu que $kp < n$, on a $q_{k-1} < n$ et ainsi, par le théorème 2.20, il existe une constante C' telle que

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C'\,\|u\|_{W^{1,q_{k-1}}(\Omega)}$$

avec q donné par

$$q = \frac{nq_{k-1}}{n - q_{k-1}} = \frac{np}{n - kp} = p^*$$

Posant $C'' = C'\,C\,(n+1)$, on a

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C''\,\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$$

(3) On conclue par induction.

□

COROLLAIRE 2.25. *(Généralisation du corollaire 2.23)*
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine ouvert, j, k deux entiers non négatifs, $1 \leq p < \infty$. Supposons $kp < n$. Posons

$$p^* = \frac{n\,p}{n - kp}$$

Alors, on a les plongements suivants :

$$W_0^{j+k,p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{j,p^*}(\Omega) \tag{24}$$

De plus, grâce a l'inégalité d'interpolation, on a

$$W_0^{j+k,p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{j,q}(\Omega) \tag{25}$$

Quel que soit $q \in [p, p^*]$. □

3.2. Cas $kp = n$.
Dans ce paragraphe, nous allons traiter le cas limite $kp = n$.
Nous supposerons dans un premier temps que $k = 1$ et nous déduirons le résultat par induction.

THÉORÈME 2.26. *(Cas limite $p = n$)*
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine ouvert. Alors

$$W_0^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),\ \forall q \in [n, \infty) \tag{26}$$

DÉMONSTRATION. Soit $u \in C_0^{\Omega}(\infty)$ quelconque. Par le Lemme 2.19 étendons u par 0 en dehors de Ω

(1) Supposons de plus $p = 1$
Alors, vu que $kp = n$ avec $k = 1$, on a $n = 1$. Vu que u est à support compact, on a pour $x \in \mathbb{R}$

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x} u'(t)dt$$

Ainsi

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{x} |u'(t)|dt \leq \|u'\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|u\|_{W^{1,1}(\mathbb{R})} = \|u\|_{W^{1,1}(\Omega)}$$

D'où,

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u\|_{W^{1,1}(\Omega)}$$

Ainsi, vu que $u \in L^1(\Omega)$, grâce à l'inégalité d'interpolation il existe $\theta \in [0,1]$ tel que

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq \|u\|^{\theta}_{L^1(\Omega)}\,\|u\|^{1-\theta}_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u\|_{W^{1,1}(\Omega)}$$

quel que soit $q \in [1, \infty]$.

(2) Supposons maintenant $p > 1$

Dans ce cas, l'égalité $kp = n$ avec $k = 1$ impose $n > 1$. De ce fait, $\dfrac{1}{n-1}$ a un sens. Procédant comme dans la preuve du théorème 2.20, on obtient, quel que soit $t > 1$

$$\|u\|^t_{L^{\frac{t\,n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq t\,\|u\|^{t-1}_{L^{\frac{(t-1)n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \left(\prod_{i=1}^n \|D_i u\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}\right)^{1/n}$$

Utilisant à nouveau l'inégalité entre les moyennes géométriques et arithmétiques, l'inégalité précédente devient

$$\|u\|^t_{L^{\frac{t\,n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq t\,\|u\|^{t-1}_{L^{\frac{(t-1)n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \|D_i u\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}$$

Ou encore

$$\|u\|_{L^{\frac{t\,n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|^{\frac{t-1}{t}}_{L^{\frac{(t-1)n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \sqrt[t]{t/n}\left(\sum_{i=1}^n \|D_i u\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{t}}$$

Posons alors

$$\begin{aligned}
a &= \sqrt[t]{t/n}\left(\sum_{i=1}^n \|D_i u\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{t}}\\
b &= \|u\|^{\frac{t-1}{t}}_{L^{\frac{(t-1)n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)}\\
p &= t\\
p' &= \frac{t}{t-1}
\end{aligned}$$

Appliquant l'inégalité de Young $a\,b \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^{p'}}{p'}$ on en déduit l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^{\frac{t\,n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} &\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \|D_i u\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} + \frac{t-1}{t}\,\|u\|_{L^{\frac{(t-1)n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)}\\
&\leq \sum_{i=1}^n \|D_i u\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L^{\frac{(t-1)n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \qquad (27)
\end{aligned}$$

car $t, n > 1$.

Posons $t = n$. L'inégalité précédente devient

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^{\frac{n^2}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} &\leq \sum_{i=1}^n \|D_i u\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}\\
&= \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}\\
&= \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}
\end{aligned}$$

Appliquant alors l'inégalité d'interpolation (104), on a pour $q \in \left[n, \frac{n^2}{n-1}\right]$ quelconque,

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

Posant maintenant $t = n+1$ dans l'inégalité (27), on trouve

$$\|u\|_{L^{\frac{(n+1)\,n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq \sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L^{\frac{n^2}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \tag{28}$$

$$\leq 2\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \tag{29}$$

Appliquant à nouveau l'inégalité d'interpolation (104), il en découle que pour $q \in \left[\frac{n^2}{n-1}, \frac{(n+1)n}{n-1}\right]$ quelconque

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

Réitérant cet argument avec $t = n+2, n+3, \ldots$ on aboutit à

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \tag{30}$$

pour tout $u \in C_0^\infty(\Omega)$ et tout $q \in [n, \infty)$

L'inégalité (30) se prolonge alors par densité à toute fonction $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ □

Corollaire 2.27. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine ouvert, k un entier positif et $1 \leq p < \infty$ un réel. Supposons $kp = n$. Alors*

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),\ \forall q \in [p, \infty) \tag{31}$$

Démonstration. Par induction sur k.

(1) Si $k = 1$, le résultat découle du théorème 2.26.
(2) Soit $k \geq 2$ quelconque et supposons le résultat vrai pour tout $1 \leq l \leq k-1$, à savoir

$$W_0^{l,p_l}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

pour tout $q \in [p_l, \infty)$ avec $p_l = \dfrac{n}{l}$.
Soit alors $1 \leq p < \infty$ tel que $kp = n$. Montrons que

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

pour tout $q \in [p, \infty)$.
Posons $k' = 1$ et $j = k-1$. Par le 2.25, on a, vu que $k'p = p < n$

$$W_0^{k,p}(\Omega) = W_0^{j+k',p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{j,p^*}(\Omega)$$

avec $p^* = \dfrac{n\,p}{n-k'p} = \dfrac{np}{n-p}$.
Or, $k-1 = \dfrac{n}{p} - 1 = \dfrac{n-p}{p}$ et par conséquent $(k-1)p^* = \dfrac{n-p}{p}\dfrac{np}{n-p} = n$.
Par hypothèse d'induction

$$W_0^{k-1,p^*}(\Omega) = W_0^{j,p^*}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

pour tout $q \in [p^*, \infty)$. En composant nos différents plongements on trouve

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

pour tout $q \in [p^*, \infty)$. Finalement, vu que trivialement

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

On applique l'inégalité d'interpolation (104) pour en déduire qu'également

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

pour tout $q \in [p, p^*]$.

□

Corollaire 2.28. *(généralisation du théorème 2.27)*
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine ouvert, k un entier positif, j un entier non négatif et $1 \le p < \infty$ un réel. Supposons $kp = n$. Alors

$$W_0^{j+k,p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{j,q}(\Omega),\ \forall q \in [1, \infty) \tag{32}$$

□

3.3. Cas $kp > n$.

Dans ce paragraphe, nous allons voir les cas particuliers où $kp > n$. Mais avant cela, citons quelques propriétés de plongements entre les espaces de Hölder.

Théorème 2.29. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine ouvert, m un entier non négatif, $0 < \nu < \lambda \le 1$ deux réels. Alors*

$$C^{m+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega}) \tag{33}$$

$$C^{m+1,\lambda}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}) \tag{34}$$

$$C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega}) \tag{35}$$

$$C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{m,\nu}(\overline{\Omega}) \tag{36}$$

Démonstration.
Les plongements (33)-(35) découle immédiatement des définitions. Pour établir (36), on remarque dans un premier temps que si x, y sont deux points de Ω qui satisfont $0 < |x-y| < 1$ alors

$$\begin{aligned}\frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\nu} &= \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\nu}\frac{|x-y|^{\lambda-\nu}}{|x-y|^{\lambda-\nu}} \\ &\le \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\lambda}\end{aligned}$$

quel que soit α, un multi-indice d'ordre inférieur ou égal a m et pour toute fonction $u \in C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$. Par conséquent

$$\sup_{\substack{x,\, y\, \in\, \Omega \\ 0\, <\, |x-y|\, <\, 1}} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\nu} \le \sup_{x,y\in\Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\lambda}$$

De même si x, y vérifient $|x-y| \ge 1$ on a

$$\begin{aligned}\sup_{\substack{x,\, y\, \in\, \Omega \\ 0\, <\, |x-y|\, <\, 1}} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\nu} &\le \sup_{x,y\in\Omega} |D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \\ &\le 2\|u\|_{C^m(\overline{\Omega})}\end{aligned}$$

De nos deux inégalités, on en déduit que

$$\|u\|_{C^{m,\nu}(\overline{\Omega})} \leq 2\|u\|_{C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})}$$

□

THÉORÈME 2.30. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine ouvert et $n < p < \infty$ un réel. Alors,*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega}) \tag{37}$$

Plus encore

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\nu}(\overline{\Omega}) \tag{38}$$

avec $\nu = 1 - n/p$.

DÉMONSTRATION. Soit $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Grâce au lemme 2.19, pour tout $x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega$ posons $u(x) = 0$.
Soit alors Q un cube ouvert, contenant 0, dont les côtés, de longueur r, sont parallèles aux axes de coordonnées.
Pour $x \in Q$, on a

$$u(x) - u(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} u(t\,x)\, dt$$

D'où

$$|u(x) - u(0)| \leq \int_0^1 \sum_{i=1}^n |x_i|\, |D_i u(t\,x)|\ dt \leq r \sum_{i=1}^n \int_0^1 |D_i u(t\,x)|\ dt \tag{39}$$

Posons $\overline{u} = \dfrac{1}{|Q|} \displaystyle\int_Q u(x)\, dx$, la moyenne de u sur Q. Par intégration sur Q on trouve

$$\begin{aligned}
|\overline{u} - u(0)| &= \left| \frac{1}{|Q|} \int_Q u(x)dx - u(0) \right| \\
&= \left| \frac{1}{|Q|} \int_Q u(x)dx - \frac{1}{|Q|} \int_Q u(0)dx \right| \\
&\leq \frac{1}{|Q|} \int_Q |u(x) - u(0)| dx \\
&\leq \frac{r}{|Q|} \int_Q dx \sum_{i=1}^n \int_0^1 |D_i u(t\,x)|\ dt & \textit{par } (39) \\
&= \frac{1}{r^{n-1}} \int_0^1 dt \sum_{i=1}^n \int_Q |D_i u(t\,x)|\ dx \\
&= \frac{1}{r^{n-1}} \int_0^1 dt \sum_{i=1}^n \int_{tQ} |D_i u(y)|\ \frac{dy}{t^n}
\end{aligned}$$

Ainsi, vu que $tQ \subset Q$ pour $0 < t < 1$, grâce à l'inégalité de Hölder, on a

$$\int_{tQ} |D_i u(y)|\ dy \leq \|D_i u\|_{L^p(Q)}\, |tQ|^{1/p'}$$

D'où

$$\begin{aligned}|\overline{u} - u(0)| &\leq \frac{1}{r^{n-1}} \left(\sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|_{L^p(Q)} \right) r^{n/p'} \int_0^1 \frac{t^{n/p'}}{t^n} dt \\ &\leq C\, r^{1-n/p} \left(\sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|_{L^p(Q)} \right) \\ &\leq C'\, r^{1-n/p} \left(\sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right)\end{aligned}$$

Par translation, cette inégalité reste valable pour tout cube Q de côté r contenant x, i.e.

$$|\overline{u} - u(x)| \leq C'\, r^{1-n/p} \left(\sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right) \tag{40}$$

pour tout $x \in Q$.
Soient $x \in \Omega$ et Q un cube de côté $r = 1$ contenant x. Par l'inégalité (40) on en déduit que

$$\begin{aligned}|u(x)| \leq |\overline{u}| + C' \left(\sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right) &\leq C'' \left(\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right) \\ = C'' \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = C'' \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}\end{aligned}$$

De plus, Vu que u est à support compact, u est uniformément continu et donc $u \in C^0(\overline{\Omega})$ Par l'inégalité du triangle appliquée à l'inégalité (40), on obtient

$$|u(x) - u(y)| \leq 2\, C'\, r^{1-n/p} \left(\sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right)$$

pour tout $x, y \in Q$.
Pour $x, y \in \Omega$, il existe un cube $Q \subset \mathbb{R}^n$ de côté $r = 2|x - y|$ contenant x et y, ainsi

$$|u(x) - u(y)| \leq K \left(\sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|_{L^p(\Omega)} \right) |x - y|^{1-n/p}$$

où $K = K(n, p)$. Ainsi $u \in C^{0,\nu}(\Omega)$.
Si maintenant, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, on utilise une suite régularisante $u_i \in C_0^\infty(\Omega)$ qui converge vers u dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et telle que $u_i(x)$ converge vers $u(x)$ pour presque tout $x \in \Omega$. On obtient que la suite est fondamental pour la norme du sup sur $\overline{\Omega}$. $\square$

Corollaire 2.31. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine ouvert, k un entier positif et $1 \leq p < \infty$ un réel. Supposons $kp > n$. Alors*

(1) *Si $kp > n > (k-1)\, p$*

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\nu}(\overline{\Omega}), \tag{41}$$

Avec $\nu = k - \dfrac{n}{p}$. En particulier

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega}) \tag{42}$$

(2) *Si* $n = (k-1)\,p$

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\nu}(\overline{\Omega}) \tag{43}$$

Pour $0 < \nu < 1$ *quelconque. En particulier*

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0}(\overline{\Omega}) \tag{44}$$

Démonstration.

(1) Supposons $n > (k-1)p$.
On a, par le corollaire 2.25,

$$W_0^{k,p}(\Omega) = W_0^{1+(k-1),p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,p^*}(\Omega)$$

avec $p^* = \dfrac{np}{n-(k-1)p}$. D'où

$$1 - \frac{n}{p^*} = 1 - \frac{(n-(k-1)p)\,n}{np} = k - \frac{n}{p}$$

Par le théorème 2.30

$$W_0^{1,p^*}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\nu}(\overline{\Omega})$$

avec $\nu = 1 - \dfrac{n}{p^*} = k - \dfrac{n}{p}$

(2) Supposons $n = (k-1)p$.
Par le même raisonnement, et appliquant cette fois-ci le corollaire 2.32

$$W_0^{k,p}(\Omega) = W_0^{1+(k-1),p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,q}(\Omega)$$

pour tout $p \leq q < \infty$. Soit alors $0 < \nu < 1$ quelconque. Il existe $p \leq q < \infty$ tel que $q > n$ et $\nu < 1 - \frac{n}{q}$. Par le théorème 2.30

$$W_0^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$$

avec $\lambda = 1 - \dfrac{1}{q}$. Finalement, vu que $\nu < \lambda$, on a, grâce au théorème 2.29

$$C^{0,\lambda}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{0,\nu}(\overline{\Omega})$$

Composant ces deux plongements, on obtient bien le résultat cherché.

□

Corollaire 2.32. *(Généralisation du corollaire 2.31)*
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un domaine ouvert,* k *un entier positif et* $1 \leq p < \infty$ *un réel. Supposons* $kp > n \geq (k-1)p$. *Alors*

(1) *Si* $n > (k-1)p$

$$W_0^{j+k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\nu}(\overline{\Omega}), \tag{45}$$

Avec $\nu = k - \dfrac{n}{p}$. *En particulier*

$$W_0^{j+k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j}(\overline{\Omega}) \tag{46}$$

(2) *Si* $n = (k-1)p$

$$W_0^{j+k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\nu}(\overline{\Omega}) \tag{47}$$

Pour $0 < \nu < 1$ *quelconque. En particulier*

$$W_0^{j+k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j}(\overline{\Omega}) \tag{48}$$

□

Remarque 2.33. Si $kp > n$ de manière générale, il existe $0 \leq j < k$ tel que

$$(k-j)\,p > n \geq (k-j-1)\,p$$

posant $k_0 = k - j$, on a $W_0^{k,p}(\Omega) = W_0^{j+k_0,p}(\Omega)$. On est alors ramené à l'un des deux cas précédant.

4. Extension de domaines

On connaît désormais les principaux résultats pour les espaces $W_0^{k,p}(\Omega)$. L'idée serait alors de travailler sur de tels espaces, remplaçant les espaces $W^{k,p}(\Omega)$ par les espaces $W_0^{k,p}(\Omega')$ pour Ω' un domaine borné contenant l'adhérence de Ω. Sous certaine hypothèse, à savoir pour des domaines Ω suffisamment réguliers et bornés, il existe un opérateur continu

$$L : W^{k,p}(\Omega) \to W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$$

ayant les propriétés suivantes

(1) $L(u)(x)|_{\Omega} = u(x)$ p.p. $x \in \Omega$
(2) il existe une constante $C = C(k,p)$ telle que $\|L(u)\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\,\|L(u)\|_{W^{k,p}(\Omega)}$

Par suite, on considère une fonction $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $f \equiv 1$ sur Ω. Ainsi, si $u \in W^{k,p}(\Omega)$, alors $f \cdot L(u) \in W_0^{k,p}(\Omega')$ où Ω' est un domaine borné contenant le support de la fonction f. Les résultats des sections précédents (plongements) sont alors valable moyennant la chaîne d'inégalités suivantes, dans le cas où l'injection

$$W_0^{k,p}(\Omega') \hookrightarrow L^q(\Omega')$$

est vérifiée :

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^q(\Omega)} &\leq C_1\,\|f \cdot L(u)\|_{L^q(\Omega')} \\
&\leq C_2\,\|f \cdot L(u)\|_{W^{k,p}(\Omega')} \\
&= C_2\,\|f \cdot L(u)\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} && \text{par le lemme 2.19} \\
&\leq C_3\,\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}
\end{aligned}$$

L'établissement de telles extensions est relativement difficile, nous ne démontrerons de ce fait pas les résultats. On en trouvera les énoncés dans la plupart des ouvrages cités en référence.

5. Le théorème de compacité de Rellich-Kondrachov

Nous avons traité les différentes injections continues possibles des espaces de Sobolev les espaces de Banach de la forme $(X, \| \|_X)$. Cependant, dans cette section nous allons pousser ces résultats encore plus loin, pour montrer, du moins partiellement, que certaine de ces injections possèdent des propriétés de compacités. Pour motiver cela, rappelons quelques définitions et résultats essentielles.

DÉFINITION 2.34. Soient $(X, \| \|_X)$ et $A \subset X$ un sous-ensemble.

(1) On dit que A est compact dans X si pour toute suite $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$, il existe une sous-suite $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge dans X et dont la limite $a \in A$

(2) A est dit précompact si $\overline{A}$ est compact.

DÉFINITION 2.35. Soient X, Y deux espaces normés, $L : X \to Y$ un opérateur linéaire. Alors

(1) L est dit compact si $L(A)$ est précompacte dans Y, pour toute partie bornée $A \subset X$.

(2) L est dit complètement continue si il est continue et compact. On notera alors $X \to Y$

THÉORÈME 2.36. *(Ascoli-Arzela)*
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné, $K \subset C^0(\overline{\Omega})$. Alors K est précompact si les conditions suivantes sont satisfaites :

(1) *Il existe une constante M telle que pour toute fonction $u \in K$ et tout point $x \in \Omega$*
$$|u(x)| \leq M$$

(2) *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, pour tout $x, y, \in \Omega$ avec $|x - y| < \delta$, on a $|u(x) - u(y)| < \varepsilon$*

COROLLAIRE 2.37. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine ouvert borné, m un entier non négatif, $0 < \nu < \lambda \leq 1$ deux réels. Alors*

$$C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}) \to C^m(\overline{\Omega}) \tag{49}$$

$$C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}) \to C^{m,\nu}(\overline{\Omega}) \tag{50}$$

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble borné dans $C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$. Alors, il existe M telle que $\|u\|_{C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})} \leq M$, pour toute fonction $u \in \mathcal{F}$. D'où $|u(x) - u(y)| \leq M|x - y|$, pour toute fonction $u \in \mathcal{F}$, et tout $x, y \in \Omega$, ainsi par le théorème 2.36, $\mathcal{F}$ est précompact dans $C^0(\overline{\Omega})$, prouvant le résultat de (49) pour $m = 0$.
Si $m \geq 1$, tout sous-ensemble borné dans $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ l'est également dans $C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$. Par les considérations précédents, il existe une suite, $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ convergente vers u dans $C^0(\overline{\Omega})$. De plus, la suite $\{D_1 u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ est borné dans $C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$. Il existe donc une sous-suite de la suite $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, que l'on notera également $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $D_1 u_i \to \psi_1$ dans $C^0(\overline{\Omega})$. La convergence dans $C^0(\overline{\Omega})$ étant une convergence uniforme sur Ω, on a $\psi_1 = D_1 u$. Réitérant ce procédé, on peut extraire une sous-suite, toujours noté $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, telle que $D^\alpha u_i \to D^\alpha u$ dans $C^0(\overline{\Omega})$ pour tout multi-indice α vérifiant $0 \leq |\alpha| \leq m$. On a donc prouver la compacité de (49) de manière

générale.
Pour (50), on procède comme suit :

$$\frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\nu} = \left(\frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\lambda}\right)^{\nu/\lambda} |D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^{1-\nu/\lambda}$$
$$\leq C|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^{1-\nu/\lambda} \tag{51}$$

Pour toute fonction u dans un sous-ensemble borné de $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$. Ainsi l'inégalité (51) nous dit toute suite bornée dans $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ et convergente dans $C^m(\overline{\Omega})$ converge également dans $C^{m,\nu}(\overline{\Omega})$. Ainsi, la compacité de (50) découle de celle de (49). □

Le théorème qui suit est une version "L^p" du théorème d'Ascoli-Arzela. Nous ne démontrerons pas ce résultat. Une preuve relativement technique, qui montre en particulier la nécessité et la suffisance des hypothèses du théorème, peut être trouvé dans l'ouvrage de Adams [**1**].

Théorème 2.38. *(Riesz-Fréchet-Kolmogorov)*
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine ouvert et soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble borné de $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p < \infty$. Pour toute fonction $u \in \mathcal{F}$ on note $\widetilde{u}$ son extension par 0 en dehors de Ω. Supposons satisfaites les hypothèses suivantes :
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ et un sous-domaine $\omega \subset\subset \Omega$ tels que

(1)
$$\left(\int_\Omega |\widetilde{u}(x+h) - \widetilde{u}(x)|^p \, dx\right)^{1/p} < \varepsilon$$
pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ avec $|h| < \delta$ et pour toute fonction $u \in \mathcal{F}$.

(2) $\|u\|_{L^p(\Omega \setminus \overline{\omega})} < \varepsilon$*, pour toute fonction $u \in \mathcal{F}$.*

Alors $\mathcal{F}$ est précompact dans $L^p(\Omega)$ □

Théorème 2.39. *(Rellich-Kondrachov)*
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine ouvert borné, k un entier naturel, j, m deux entiers non négatifs, $1 \leq p < \infty$ un réel. Alors

(1) *Si $kp < n$*
$$W_0^{j+k,p}(\Omega) \to W_0^{j,q}(\Omega), \ \ \forall q \in \left[1, \frac{n\,p}{n-kp}\right) \tag{52}$$

(2) *Si $kp = n$*
$$W_0^{j+k,p}(\Omega) \to W_0^{j,q}(\Omega), \ \ \forall q \in [1, \infty) \tag{53}$$

(3) *Si $kp > n$.*

(a) *Si $kp > n \geq (k-1)\,p$*
$$W_0^{j+k,p}(\Omega) \to C^{j,\nu}(\overline{\Omega}), \ \ \forall\, \nu \in \left(0, k - \frac{n}{p}\right) \tag{54}$$
En particulier
$$W_0^{j+k,p}(\Omega) \to C^j(\overline{\Omega}) \tag{55}$$

(b) *Si $kp > n$ (de manière générale)*

(56) $$W_0^{k,p}(\Omega) \to C^m(\overline{\Omega}), \ \forall\, 0 \leq m < k - \frac{n}{p}$$

(57) $$W_0^{j+k,p}(\Omega) \to W_0^{j,q}(\Omega), \ \forall\, q \in [1, \infty]$$

REMARQUES 2.40.

(1) Pour prouver la compacité des injections (52)-(55) et (57), il suffit de considérer le cas $j = 0$.
En effet, prenons par exemple (52) (les autres se traitent de manière similaire).
Pour $j \geq 1$ et pour toute suite bornée $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ dans $W_0^{j+k,p}(\Omega)$, la suite $\{D^\alpha u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ est borné dans $W_0^{k,p}(\Omega)$ pour tout multi-indice α vérifiant $|\alpha| \leq j$. Du fait que

$$W_0^{k,p}(\Omega) \to L^q(\Omega), \quad \forall\, q \in \left[1, \tfrac{np}{n-kp}\right)$$

il est possible, par induction finie, d'y extraire une sous-suite $\{u_i'\}_{i \in \mathbb{N}}$ telle que la suite $\{D^\alpha u_i'\}_{i \in \mathbb{N}}$ converge dans $L^q(\Omega)$ pour tout multi-indice α avec $|\alpha| \leq j$.
Par construction, la suite $\{u_i'\}_{i \in \mathbb{N}}$ converge dans $W_0^{j,q}(\Omega)$.

(2) Vu que Ω est borné, $C^0(\overline{\Omega}) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall\, 1 \leq q \leq \infty$. Ainsi la compacité de (57) découle immédiatement de celle de (56) (pour $j = 0$).

DÉMONSTRATION.

(1) Supposons $kp < n$
Soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble borné dans $W_0^{k,p}(\Omega)$. Posons

$$\Omega_j = \{x \in \Omega |\, dist(x, \partial\Omega) > 1/j\}$$

Notons, pour toute fonction $u \in \mathcal{F}$, $\widetilde{u}$ son extension par 0 en dehors de Ω.
Par l'inégalité de Hölder et le corollaire 2.23

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_j} |u(x)|\, dx \leq C_1 \, \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \, |\Omega \setminus \Omega_j|^{1-1/p^*}$$

avec $p^* = \dfrac{n\,p}{n - kp}$ et C_1 indépendante de u.
Vu que Ω est de volume fini, on peut choisir j suffisamment grand de sorte que pour toute fonction $u \in \mathcal{F}$

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_j} |u(x)|\, dx < \varepsilon$$

et de même pour tout $h \in \mathbb{R}^n$

(58) $$\int_{\Omega \setminus \Omega_j} |\widetilde{u}(x+h) - \widetilde{u}(x)| < \varepsilon/2$$

Ainsi, si $|h| < 1/j$, $x + th \in \Omega_{2j}$, pour tout $x \in \Omega_j$ et pour tout $t \in [0,1]$. Si $u \in C_0^\infty(\Omega)$ on trouve

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_j} |u(x+h) - u(x)|\, dx &\leq \int_{\Omega_j} dx \int_0^1 \left| \frac{d}{dt} u(x+th) \right| dt \\
&\leq |h| \int_0^1 dt \int_{\Omega_{2j}} |Du(y)|\, dy \\
&\leq |h| \, \|u\|_{W^{1,1}(\Omega)} \\
&\leq C_2 |h| \, \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \qquad (59)
\end{aligned}$$

De même l'inégalité précédente reste valable pour toute fonction $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ par densité.

Ainsi pour $|h|$ suffisamment petit, on a, grâce aux inégalités (58) et (59) que

$$\int_\Omega |\widetilde{u}(x+h) - \widetilde{u}(x)|\, dx < \varepsilon$$

D'où, par le théorème 2.38, $\mathcal{F}$ est précompact dans $L^1(\Omega)$.

Par suite on sait que $W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p*}(\Omega)$ et grâce à l'inégalité d'interpolation on obtient, on a, pour $q \in [1, p^*)$

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq \|u\|^\alpha_{L^1(\Omega)} \, \|u\|^{1-\alpha}_{L^{p*}(\Omega)} \leq C \, \|u\|^\alpha_{L^1(\Omega)} \, \|u\|^{1-\alpha}_{W^{k,p}(\Omega)} \qquad (60)$$

Soient alors $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $\mathcal{F}$. Vu que $W^{k,p}(\Omega) \to L^1(\Omega)$, il existe une sous-suite $\{u_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ convergente dans $L^1(\Omega)$. Cette sous-suite est alors de Cauchy dans $L^1(\Omega)$. Par l'inégalité (60), elle l'est également dans $L^q(\Omega)$ qui est complet. D'où,

$$W^{k,p}(\Omega) \to L^q(\Omega), \, \forall\, q \in [1, p^*)$$

(2) Supposons $kp = n$

Soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble borné dans $W_0^{k,p}(\Omega)$. Alors $\mathcal{F}$ est borné dans $W_0^{k-1,p}(\Omega)$ vu que $W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{k-1,p}(\Omega)$. Ainsi, vu la partie précédente, $\mathcal{F}$ est précompact dans $L^1(\Omega)$

Soit alors $1 \leq q < \infty$ arbitraire, il existe donc $q < q_1 < \infty$. Vu le théorème 2.26, on sait que $W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q_1}(\Omega)$. D'où, par un raisonnement similaire à la fin de la partie précédente, on obtient que $\mathcal{F}$ est précompact dans $L^q(\Omega)$.

(3) Supposons $kp > n$

– Supposons $kp > n \geq (k-1)\,p$, et $m = 0$ et montrons que

$$W_0^{k,p}(\Omega) \to C^{0,\nu}(\overline{\Omega}), \qquad \forall\, 0 < \nu < k - \frac{n}{p}$$

En effet, soit $\nu < k - \frac{n}{p}$ quelconque, il existe $\nu < \lambda < k - \frac{n}{p}$. Par le corollaire 2.32 on sait que $W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$. Vu que Ω est borné, par le corollaire 2.37, $C^{0,\lambda}(\overline{\Omega}) \to C^{0,\nu}(\overline{\Omega})$. Ainsi, $W_0^{k,p}(\Omega) \to C^{0,\nu}(\overline{\Omega})$.

En effet, toute suite bornée dans $W_0^{k,p}(\Omega)$ est également borné dans

$C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$ et par compacité de l'injection $C^{0,\lambda}(\overline{\Omega}) \to C^{0,\nu}(\overline{\Omega})$, elle admet une sous-suite qui converge dans $C^{0,\nu}(\overline{\Omega})$.
De même vu que $C^{0,\nu}(\overline{\Omega}) \to C^{0}(\overline{\Omega})$ on a également que $W_0^{k,p}(\Omega) \to C^0(\overline{\Omega})$

– Si $kp > n$ de manière générale (plus particulièrement si $(k-1)\,p > n$)
Alors, il existe $0 \leq j \leq k$ tel que
$$(k-j)\,p > n \geq (k-j-1)\,p.$$
Posant $k_0 = k - j$, on a $W_0^{k,p}(\Omega) = W_0^{j+k_0,p}(\Omega)$.
Vu la partie précédente et la remarque, on a que
$$W_0^{j+k_0,p}(\Omega) \to C^j(\overline{\Omega}), \;\; \forall\, 0 \leq m \leq j$$
Or $(k-j)\,p > n \Leftrightarrow j < k - \frac{n}{p}$ d'où
$$W_0^{k,p}(\Omega) \to C^m(\overline{\Omega}), \;\; \forall\, 0 < m < k - \frac{n}{p} \quad (m \text{ entier})$$

□

6. Opérateurs de traces

Alors que les plongements sont valables dans le cas d'un domaine ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on peut maintenant se poser la question de cette validité si l'on considère l'intersection de Ω avec un plan de dimension $r \leq n$. Pour cela posons $\Omega^r = \Omega \cap \Pi_r$ où Π_r est un plan de $\mathbb{R}^n$ quelconque de dimension r. Bien entendu, on supposera que $\Omega^r \neq \emptyset$. Pour $r = n$, les résultats ont déjà été prouvés, nous démontrerons les résultats pour $r < n$. Par conséquent imposons $n \geq 2$.
On s'intéresse alors à la validité des plongements du type
$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{m,q}(\Omega^r) \tag{61}$$
Ici, le symbole "$\hookrightarrow$" doit être interpréter de la manière suivante :
Toute fonction $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ est la limite d'une suivante $\{u_n\}$ de fonctions $C_0^\infty(\Omega)$. Ces mêmes fonctions ont des traces sur Ω^r qui appartiennent à $C_0^\infty(\Omega^r)$. Ainsi, les plongements du type (61) signifient donc que ces traces convergent dans $W_0^{m,q}(\Omega^r)$ vers une fonction $\widetilde{u}$ satisfaisant $\|\widetilde{u}\|_{W^{m,q}(\Omega^r)} \leq C\,\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$, où C est une constante indépendante de u.
De même, sous certaines hypothèses de régularité sur Ω, on peut interpréter de manière similaire, grâce notamment au théorème de Meyers-Serrin, les plongements du type
$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,q}(\Omega^r) \tag{62}$$
De tels opérateurs sont appelés opérateurs de traces, ils permettent notamment de généraliser, comme on le verra plus tard, les notions de plongements des espaces de Sobolev sur les variétés aux sous-variétés, ainsi que sur les fibrés vectoriels restreints aux sous-variétés. Nous verrons, une fois la définition des espaces de Sobolev sur les variétés et fibrés vectoriels donnée, que les résultats de ce paragraphe s'étendent naturellement. Il est de ce fait essentiel de bien comprendre ces types d'opérateur.

Nous allons donc établir les résultats concernant les espaces euclidiens $\mathbb{R}^n$.

THÉORÈME 2.41. *(Généralisation des plongements de Sobolev)*
Soient

(1) j, k, n, r *quatre entiers non négatifs tels* $1 \le r \le n$
(2) $1 \le p < \infty$ *un réel*
(3) Ω *un domaine ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$
(4) Π_r *un plan de dimension* r *tel* $\Pi_r \cap \Omega \neq \emptyset$

Posons $\Omega^r = \Pi_r \cap \Omega$.
Les plongements du type

$$W_0^{j+k,p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{j,q}(\Omega^r) \tag{63}$$

sont vérifiés dans tous les cas suivant :

(1) *si* $kp < n$, $n - kp < r \le n$, $1 \le q \le \frac{rp}{n-kp}$. *De plus, le plongement est complètement continu si* $q < \frac{rp}{n-kp}$
(2) *si* $kp = n$, $1 \le r \le n$, $1 \le q < \infty$. *Plus encore, le plongement est complètement continu dans tous les cas.*
(3) *si* $kp > n$, $1 \le r \le n$, $1 \le q \le \infty$, *avec plongement complètement continu dans tous les cas.*

REMARQUE 2.42.

(1) Nous avons déjà montré le résultat pour le cas $r = n$ par les résultats précédents, nous supposerons dès lors $r < n$ imposant de ce fait $n \ge 2$
(2) Comme dans le cas particulier $r = n$, il nous suffira de considérer le cas $j = 0$. En effet, soient k, n, r, et p satisfaisant l'une ou l'autre des hypothèses, alors
   (a) Supposons que le plongement
   $$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega^r)$$
   établi, avec q satisfaisant aux hypothèses respectives.
   Alors, quel que soit $u \in W_0^{j+k,p}(\Omega)$, on a $D^\alpha u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ pour $|\alpha| \le j$ et ainsi $D^\alpha u \in L^q(\Omega^r)$. Il en découle que $u \in W_0^{j,q}(\Omega^r)$ et
   $$\begin{aligned} \|u\|_{W^{j,q}(\Omega^r)} &= \sum_{|\alpha| \le j} \|D^\alpha u\|_{L^q(\Omega^r)} \\ &\le C_1 \sum_{|\alpha| \le j} \|D^\alpha u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \\ &\le C_2 \|u\|_{W^{j+k,p}(\Omega)} \end{aligned}$$
   et ainsi
   $$W_0^{j+k,p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{j,q}(\Omega^r)$$
   (b) De même, supposons
   $$W_0^{k,p}(\Omega) \to L^q(\Omega^r)$$

Alors, pour toute suite bornée $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ dans $W_0^{j+k,p}(\Omega)$, la suite $\{D^\alpha u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ est borné dans $W_0^{k,p}(\Omega)$, quel que soit α avec $|\alpha| \leq j$. Par conséquent, la suite $\{D^\alpha u_i|_{\Omega^r}\}_{i\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente dans $L^q(\Omega^r)$. Par induction finie, il est alors possible d'extraire de la suite $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, une sous-suite $\{u_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $\{D^\alpha u_i'|_{\Omega^r}\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^q(\Omega^r)$ pour tout α avec $|\alpha| \leq j$.
Par construction, on voit que la suite $\{u_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge dans $W_0^{j,q}(\Omega^r)$.

La preuve du théorème 2.41 passe essentiellement dans l'obtention du résultat qui suit. Nous citerons ce résultat sans preuve. Une preuve simple se trouve dans l'ouvrage de Adams [**1**], qui utilise notamment une généralisation du lemme 2.22.

Lemme 2.43. *Soit Ω un domaine ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit k, r deux entiers positifs et $p > 1$. Supposons $kp < n$ et $n - kp < r \leq n$. Soit ν le plus grand entier inférieur à kp, tel que $n - \nu \leq r$. Soit $\Omega^r = \Omega \cap \Pi_r$, où Π_r est un plan de $\mathbb{R}^n$ quelconque de dimension r.*
Alors, il existe une constante C telle que pour tout $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ on a

$$\|u\|_{L^{rq/n}(\Omega^r)} \leq C\,\|u\|_{L^q(\Omega)}^{1-\theta}\,\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}^{\theta} \tag{64}$$

avec

$$q = p^* = \frac{n\,p}{n-kp} \qquad\qquad \theta = \frac{\nu\,p}{\nu\,p + (kp-\nu)\,q} \tag{65}$$

où θ vérifie $0 < \theta < 1$ □

Démonstration. (Théorème 2.41)
Soit $r < n$ quelconque

(1) Supposons $n - kp < r$

(a) Montrons que

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega^r),\ \forall\, 1 \leq q \leq \frac{rp}{n-kp} \tag{66}$$

(i) Supposons $p > 1$
Par le lemme 2.43, on a

$$\|u\|_{L^{rq/n}(\Omega^r)} \leq C\,\|u\|_{L^q(\Omega)}^{1-\theta}\,\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}^{\theta}$$

avec

$$q = p^* = \frac{n\,p}{n-kp}$$
$$\theta = \frac{\nu\,p}{\nu\,p + (kp-\nu)\,q}$$

Or, $\dfrac{r\,q}{n} = \dfrac{r\,p}{n-kp} < \dfrac{n\,p}{n-kp}$.
Ainsi

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^{rq/n}(\Omega^r)} &\leq C\,\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}^{1-\theta}\,\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}^{\theta}\\ &= C\,\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}\end{aligned}$$

Vu que Ω est borné, Ω^r l'est également. On conclut alors par l'inégalité d'inclusion 105.

(ii) Supposons maintenant $p = 1$
On doit avoir $0 < n - k < r < n$, imposant de ce fait $k \geq 2$.
Par le corollaire 2.25, on obtient

$$W_0^{k,1}(\Omega) = W_0^{(k-1)+1,1}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{k-1,l}(\Omega)$$

avec $l = \dfrac{n\,p}{n-1\,p} = \dfrac{n}{n-1} > 1$
Or $n - k = n - kp < r$ et donc $n - (k-1)\,l < n - (k-1) \leq r$.
Alors, par le point précédant, on trouve

$$W_0^{k-1,l}(\Omega) \to L^q(\Omega^r)$$

pour tout q satisfaisant $1 \leq q \leq p^*$ pour p^* donné par

$$p^* = \frac{r\,l}{n-(k-1)l} = \frac{r\,n/(n-1)}{n-(k-1)\,n/(n-1)} = \frac{r}{n-k}$$

(b) Montrons que

(67) $$W_0^{k,p}(\Omega) \to L^q(\Omega^r),\ \forall\, 1 \leq q < \frac{rp}{n-kp}$$

(i) Supposons de plus dans un premier temps que $p > 1$
Par la partie précédente, on a

(68) $$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{rp}{n-kp}}(\Omega)$$

Pour $q < \dfrac{rp}{n-kp}$, choisissons l un réel tel que $1 \leq l < p$ et $n - k\,l < r$ et $q \leq \frac{rl}{n-kl} < \frac{rp}{n-kp}$. Vu que Ω est borné, le plongement suivant existe :

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{m,l}(\Omega)$$

Utilisant à nouveau le lemme 2.43, et l'inégalité d'inclusion (105), on a

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^q(\Omega^r)} &\leq C_1\,\|u\|_{L^{rl/(n-kl)}(\Omega^r)}\\ &\leq C_2\,\|u\|^{1-\theta}_{L^{nl/(n-kl)}(\Omega)}\,\|u\|^{\theta}_{W^{k,p}(\Omega)}\end{aligned}$$

Comme $\dfrac{nl}{n-kl} < \dfrac{n\,p}{n-kp}$, le théorème de Rellich-Kondrachov nous permet de dire que si $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de $W_0^{k,p}(\Omega)$, il existe une sous-suite $\{u_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $L^{nl/(n-kl)}(\Omega)$. Cette sous-suite est de Cauchy dans $L^{nl/(n-kl)}(\Omega)$ et donc également dans l'espace de Banach $L^q(\Omega^r)$. Elle y converge donc.

(ii) Supposons maintenant $p = 1$
On doit avoir $0 < n - k < r < n$, imposant de ce fait $k \geq 2$.
Par le corollaire 2.25, on obtient

$$W_0^{k,1}(\Omega) = W_0^{(k-1)+1,1}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{k-1,l}(\Omega)$$

avec $l = \dfrac{n\,p}{n-1\,p} = \dfrac{n}{n-1} > 1$
Or $n - k = n - kp < r$ et donc $n - (k-1)\,l < n - (k-1) \leq r$.

Alors, par le point précédant, on trouve

$$W_0^{k-1,l}(\Omega) \to L^1(\Omega^r)$$

et donc de même,

$$W_0^{k,1}(\Omega) \to L^1(\Omega^r)$$

nous permettant de conclure en appliquant un résonnement similaire à la fin de la preuve du cas 1 du théorème de Rellich-Kondrachov.

(2) Montrons que

$$W_0^{k,p}(\Omega) \to L^q(\Omega^r),\ \forall\, 1 \le q < \infty \tag{69}$$

(a) Supposons $p > 1$ et soient $m\,p = n$ et $1 \le q < \infty$ quelconques Choisissons $1 \le l < p$ tel que $r > n - \ kl > 0$ et $\dfrac{r\,l}{n - kl} > q$. D'où

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{k,l}(\Omega) \to L^q(\Omega^k)$$

par la partie précédente.

(b) Supposons $p = 1$ et soient $n = m \ge 2$ et $1 \le q < \infty$ quelconques Alors, posant $l = \dfrac{n}{n-1} > 1 \Leftrightarrow n = (n-1)\,l$, on a grâce au cas $p > 1$ et au corollaire 2.28

$$W_0^{n,1}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{n-1,l}(\Omega) \to L^q(\Omega^k)$$

(3) Montrons que

$$W_0^{k,p}(\Omega) \to L^q(\Omega^r),\ \forall\, 1 \le q \le \infty \tag{70}$$

(a) Montrons que

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega^r),\ \forall\, 1 \le r \le n, \forall\, 1 \le q \le \infty$$

Soit $u \in C_0^\infty(\Omega)$ quelconque. Grâce au corollaire 2.32 on sait que

$$|u(x)| \le C\, \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}\,,\ \forall\, x \in \Omega$$

Donc en particulier $\forall\, x \in \Omega^r$.
Ainsi,

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega^r)$$

Or, Ω est borné, et par suite Ω^r aussi, d'où, grâce toujours à l'inégalité d'inclusion (105)

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega^r), \forall\, 1 \le q \le \infty$$

On conclut alors par densité.

(b) Montrons maintenant que

$$W_0^{k,p}(\Omega) \to L^q(\Omega^r),\ \forall\, 1 \le q < \infty$$

En effet, soit $1 \le q < \infty$ quelconque. Par le théorème de Rellich-Kondrachov et l'inégalité d'inclusion (105) on obtient la suite de plongements suivante :

$$W_0^{k,p}(\Omega) \to C^0(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^0(\Omega^r) \hookrightarrow L^\infty(\Omega^r) \hookrightarrow L^q(\Omega^r)$$

Ainsi, toute suite bornée dans $W_0^{k,p}(\Omega)$ admet une sous-suite convergente dans $C^0(\overline{\Omega})$ par compacité du plongement. Cette sous-suite est alors de Cauchy dans $C^0(\overline{\Omega})$. Vu la suite d'inclusion, elle est également de Cauchy dans l'espace de Banach $L^q(\Omega^r)$, et par conséquent converge dans ce même espace.

$\square$

Corollaire 2.44. *Soient*

(1) Ω *un domaine ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$*, à bord lisse*
(2) m, k *deux entiers non négatifs tels que*
  – $k \geq 1$
  – $m \leq \min\{n, k\}$
(3) $1 < p < \infty$ *un réel*

Alors

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k-m,p}(\Omega^{n-m}) \tag{71}$$

En particulier, si $k = m = 1$*, alors*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega^{n-1}) \tag{72}$$

$\square$

La preuve du corollaire précédant est immédiate en vertu du théorème 2.41. Nous mettons en avant ce résultat pour une simple comparaison avec le cas particulier $p = 2$ qui suit.

Remarque 2.45. Cas particulier : $p = 2$
Moyennant une définition convenable, grâce notamment à la transformée de Fourier, il est possible de définir les espaces de Sobolev

$$W^{s,2}(\Omega) \text{ et } W_0^{s,2}(\Omega)$$

pour tout réel $s \geq 0$. On peut alors également montrer que pour $s \geq 1/2$, il existe un plongement continu

$$W^{s,2}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^{s-1/2,2}(\mathbb{R}^{n-1})$$

Ainsi, sous certaines hypothèses de régularité sur Ω domaine ouvert borné dont l'intersection avec le plan $\mathbb{R}^{n-1} \times 0$ est non vide, posant $\Omega^{n-1} = \Omega \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times 0)$, on a

$$W^{s,2}(\Omega) \hookrightarrow W^{s-1/2,2}(\Omega^{n-1})$$

En effet, on a la suite de plongements suivante :

$$W^{s,2}(\Omega) \hookrightarrow W^{s,2}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^{s-1/2,2}(\mathbb{R}^{n-1}) \hookrightarrow W^{s-1/2,2}(\Omega^{n-1})$$

Par induction, notant $\mathbb{R}^{n-r} \times 0 = \{(x', 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n | \, x' \in \mathbb{R}^{n-r}\}$ et identifiant $\mathbb{R}^{n-r} \times 0$ à $\mathbb{R}^{n-r}$ on peut montrer que si $s \geq r/2$ alors

$$W^{s,2}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^{s-r/2,2}(\mathbb{R}^{n-r})$$

et de même si $\Omega^{n-r} := \Omega \cap (\mathbb{R}^{n-r} \times 0) \neq \emptyset$ alors

$$W^{s,2}(\Omega) \hookrightarrow W^{s-r/2,2}(\Omega^{n-r})$$

Réciproquement, il est possible de montrer qu'il existe un plongement inverse

$$W^{s-1/2,2}(\mathbb{R}^{n-1}) \hookrightarrow W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$$

Ainsi, par induction, que si $s \geq r/2$

$$W^{s-\frac{r}{2},2}(\mathbb{R}^{n-r}) \hookrightarrow W^{s-\frac{r-1}{2},2}(\mathbb{R}^{n-r+1}) \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$$

et donc de même si $\Omega^{n-r} := \Omega \cap (\mathbb{R}^{n-r} \times 0) \neq \emptyset$

$$W^{s-\frac{r}{2},2}(\Omega^{n-r}) \hookrightarrow W^{s,2}(\Omega)$$

7. Les inégalités de Poincaré

Nous avons vu, par le théorème 2.20 et la preuve du théorème 2.30 deux résultats très intéressants, à savoir que pour $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

(1) Si $p > n$

$$|\overline{u} - u(x)| \leq C_1\, r^{1-n/p}\, \|Du\|_{L^p(\Omega)} \qquad \overline{u} = \frac{1}{|Q|}\int_Q u(x)\,dx \tag{73}$$

(74)

(2) Si $p < n$

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C_2 \sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|_{L^p(\Omega)} \tag{75}$$

où chacune des constantes ne dépend que de n et p, r étant le côté du cube Q et $p^* = \dfrac{n\,p}{n-p}$.

Par l'inégalité d'inclusion (105), on remarque ainsi que l'inégalité (75) est vérifiée remplaçant p^* par p, pour autant que Ω soit de mesure fini.

Nous allons généraliser cette inégalité à tout $1 \leq p < \infty$ et $k \geq 1$. Nous démontrerons dans un premier temps le résultat suivant :

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|_{L^p(\Omega)} \tag{76}$$

pour $u \in C_0^\infty(\Omega)$ quelconque.

Il deviendra alors aisé de se convaincre que le résultat reste valable pour toute fonction $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. L'inégalité précédente est une version particulière des inégalités de Poincaré.

On verra par la suite qu'elle permet de définir une norme équivalente à la norme standard sur $W_0^{k,p}(\Omega)$.

Théorème 2.46. *(Inégalité de Poincaré)*
Soient $1 \leq p < \infty$ et Ω un domaine de mesure finie. Alors, il existe une constante $C = C(p)$ telle que pour toute fonction $u \in C_0^\infty(\Omega)$ on a

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\, \|Du\|_{L^p(\Omega)} \tag{77}$$

Démonstration. Soient $u \in C_0^\infty(\Omega)$ et $1 \leq p < \infty$ quelconques. Soit p' l'exposant conjugué de p au sens de Hölder. Sans perte de généralité, supposons que le domaine Ω est contenu entre les hyperplans $x_n = 0$ et $x_n = c > 0$. On étend u par 0 en dehors de Ω.
Notons alors $x = (x', x_n)$ avec $x' = (x_1, ..., x_n)$. Vu que u est à support compact dans Ω,

$$u(x) = \int_0^{x_n} D_n u(x', t) dt$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\|u\|^p_{L^p(\Omega)} &= \|u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} |u(x', x_n)|^p dx_n \right) dx'\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |u(x', x_n)|^p dx_n &= \int_0^c |u(x', x_n)|^p dx_n \\ &= \int_0^c \left| \int_0^{x_n} D_n u(x', t) dt \right|^p dx_n\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}\left| \int_0^{x_n} D_n u(x', t) dt \right|^p &\leq \left(\int_0^{x_n} |D_n u(x', t)| dt \right)^p \\ &= \|D_n u\|^p_{L^1([0,x_n])} \\ &\leq \|D_n u\|^p_{L^p([0,x_n])} \|1\|^p_{L^{p'}([0,x_n])} \\ &\leq \left(\int_0^c |D_n u(x', t)|^p dt \right) x_n^{p-1}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |u(x', x_n)|^p dx_n &\leq \int_0^c \left(\int_0^c |D_n u(x', t)|^p dt \right) x_n^{p-1} dx_n \\ &= \frac{c^p}{p} \int_0^c |D_n u(x', t)|^p dt\end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}\|u\|^p_{L^p(\Omega)} &\leq \frac{c^p}{p} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_0^c |D_n u(x', t)|^p dt \right) dx' \\ &= \frac{c^p}{p} \int_{\mathbb{R}^n} |D_n u(x)|^p dx \\ &= \frac{c^p}{p} \|D_n u\|^p_{L^p(\mathbb{R})}\end{aligned}$$

L'inégalité précédente nous permet de conclure que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{c}{p^{1/p}} \sum_{i=1}^n \|D_i u\|_{L^p(\Omega)}$$

Achevant de ce fait la preuve de ce théorème. □

REMARQUE 2.47. Il est évident que cette inégalité ne peut être généralisée aux espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer les fonctions constantes sur Ω borné (ou de mesure finie).

Nous allons maintenant tirer un corollaire de l'inégalité de Poincaré, définissons pour cela la fonction $|\cdot|_{W^{k,p}(\Omega)}$ de la manière suivante :

DÉFINITION 2.48. Soit $u \in W^{k,p}(\Omega)$ quelconque, on pose

$$|u|_{W^{k,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \tag{78}$$

En vertu de la remarque précédente, il est clair que la fonction $|\cdot|_{W^{k,p}(\Omega)}$ ne peut être une norme sur l'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$. Nous allons cependant montrer qu'elle l'est sur l'espace de Sobolev $W_0^{k,p}(\Omega)$, pour autant que le domaine Ω soit de mesure finie.

COROLLAIRE 2.49. *Si Ω est de mesure finie, la fonction $|\cdot|_{W^{k,p}(\Omega)}$ est une norme sur l'espace de Sobolev $W_0^{k,p}(\Omega)$ équivalente à la norme standard $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$.*

DÉMONSTRATION. Nous allons démontrer ce corollaire par induction sur k. Remarquons en premier lieu que si $u \in C_0^\infty(\Omega)$, toutes ces dérivées appartiennent également à l'espace de fonctions $C_0^\infty(\Omega)$. De plus, par définition, il est clair que l'inégalité suivant est toujours vérifiée :

$$|u|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$$

Il nous suffit de montrer qu'il existe une constante K vérifiant

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq K\, |u|_{W^{k,p}(\Omega)}$$

quel que soit $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$.

(1) Supposons $k = 1$
Appliquant l'inégalité de Poincaré, on trouve

$$\begin{aligned}\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} &= |u|_{W^{1,p}(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq |u|_{W^{1,p}(\Omega)} + C\, |u|_{W^{1,p}(\Omega)} \\ &= (1+C)\, |u|_{W^{1,p}(\Omega)}\end{aligned}$$

On pose alors $K = (1 + C)$

(2) Soit $k \geq 2$ et supposons le résultat vrai pour tout $1 \leq l \leq k-1$, à savoir qu'il existe une K_l vérifiant

$$\|u\|_{W^{l,p}(\Omega)} \leq K_l\, |u|_{W^{l,p}(\Omega)}$$

pour tout $u \in W_0^{l,p}(\Omega)$. On a

$$\begin{aligned}\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} &= \|u\|_{W^{k-1,p}(\Omega)} + |u|_{W^{k,p}(\Omega)} \\ &\leq K_l\, |u|_{W^{k-1,p}(\Omega)} + |u|_{W^{k,p}(\Omega)}\end{aligned}$$

Or, pour tout multi-indice α d'ordre $k-1$, par l'inégalité de Poincaré, on a

$$\|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \sum_{i=1}^{n} \|D_i D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
|u|_{W^{k-1,p}(\Omega)} &\leq C \sum_{i=1}^{n} \sum_{|\alpha|=k-1} \|D_i D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \\
&= C \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{|\alpha| = k \\ \alpha_i \geq 1}} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \\
&\leq n\, C\, |u|_{W^{k,p}(\Omega)}
\end{aligned}$$

Et finalement, combinant nos différentes inégalités, on obtient

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq (1 + n\, C\, K_l)\, |u|_{W^{k,p}(\Omega)}$$

□

Pour ce qui est de l'inégalité (73), elle peut ce généralisée comme suit :

THÉORÈME 2.50. *(Inégalité de Poincaré-Wirtinger)*
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine ouvert convexe. $p > n$ un réel. Alors, pour toute fonction $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et pour toute partie mesurable $B \subset \Omega$ de mesure non nulle, posons

$$u_B = \frac{1}{|B|} \int_B u(y) dy$$

Alors

$$\|u - u_B\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{\omega_n^{1-1/n}}{|B|} |\Omega|^{1/n} (diam\, \Omega)^n\ \|Du\|_{L^p(\Omega)} \tag{79}$$

En particulier, l'inégalité reste valable si l'on prend $B = \Omega$.

Pour la preuve de ce théorème, nous utiliserons les lemmes suivants, qui utilisent des résultats concernant la théorie des potentiels. On trouvera les preuves de ceux-ci dans l'ouvrage de Jost **[4]**.

LEMME 2.51. *Soit $\mu \in (0, 1]$, $f \in L^1(\Omega)$, posons*

$$(V_\mu f)(x) := \int_\Omega |x - y|^{n(\mu-1)} f(y)\, dy$$

Soient $1 \leq p \leq q \leq \infty$, vérifiant

$$0 \leq \delta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} < \mu$$

Alors V_μ est un opérateur linéaire et continue de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$, et de plus, pour toute fonction $f \in L^p(\Omega)$, on a

$$\|V_\mu f\|_{L^q(\Omega)} \leq \left(\frac{1 - \delta}{\mu - \delta} \right)^{1-\delta} \omega_n^{1-\mu}\, |\Omega|^{\mu-\delta}\ \|f\|_{L^p(\Omega)}$$

□

LEMME 2.52. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine ouvert convexe, $u \in W^{1,1}(\Omega)$ quelconque et $B \subseteq \Omega$ une partie mesurable de mesure non nulle. Alors, pour presque tout $x \in \Omega$, on a*

$$|u(x) - u_B| \leq (diam\, \Omega)^n \frac{1}{|B|} V_{\frac{1}{n}}(|Du|) \tag{80}$$

□

DÉMONSTRATION. (Inégalité de Poincaré-Wirtinger)
Par le lemme 2.52,

$$|u(x) - u_B| \leq (diam\,\Omega)^n \frac{1}{|B|} V_{\frac{1}{n}}(|Du|)$$

et par le lemme 2.51, avec $p = q$ et par conséquent $\delta = 0$, $\mu = 1/n$

$$\left\| V_{\frac{1}{n}}(|Du|) \right\|_{L^p(\Omega)} \leq n\,\omega^{1-\frac{1}{n}}\,|\Omega|^{\frac{1}{n}}\;\|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

Combinant les deux inégalités, on trouve bien le résultat cherché. □

8. Dualité

Nous allons dans ce paragraphe nous intéresser au dual d'un espace de Sobolev. Le dual d'un espace de Banach existe toujours, nous nous proposons d'identifier ses éléments dans le cas des espaces de Sobolev. Il est souvent commode de considérer les espaces de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ comme le produit de copie des espaces fonctionnels $L^p(\Omega)$. Nous introduirons pour cela un nouvel espace de fonctions, qui nous donnera notamment quelques nouveaux résultats concernant les espaces de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$.

DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS 2.53. Pour Ω, k et p fixés, on pose

(1) $N = \sum_{0\leq|\alpha|\leq k} 1$ le nombre de multi-indice α satisfaisant $0 \leq |\alpha| \leq k$

(2) $L^p_N(\Omega) = \prod_{i=1}^{N} L^p(\Omega)$ l'espace fonctionnel muni de la norme définie par :

$$\|u\|_{L^p_N(\Omega)} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} \|u_i\|_{L^p(\Omega)} & si\ 1 \leq p < \infty \\ \max_{1\leq i\leq N} \|u_i\|_{L^\infty(\Omega)} & si\ p = \infty \end{cases} \tag{81}$$

pour tout vecteur $(u_i)_{1\leq i\leq N} \in L^p_N(\Omega)$

(3) P l'opérateur linéaire défini par :

$$\begin{array}{rccl} P: & W^{k,p}(\Omega) & \longrightarrow & L^p_N(\Omega) \\ & u & \longmapsto & P\,u = (D^\alpha u)_{0\leq|\alpha|\leq m} \end{array}$$

On remarque sans difficulté que pour toute fonction $u \in W^{k,p}(\Omega)$, on a $\|Pu\|_{L^p_N(\Omega)} = \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$. Autrement dit, P est un isomorphisme isométrique de $W^{k,p}(\Omega)$ dans $W \subset L^P_N(\Omega)$.
On peut de plus montrer que

(1) $\forall\, 1 \leq p < \infty$, $L^p(\Omega)$ est séparable

(2) $\forall\, 1 < p < \infty$, $L^p(\Omega)$ est réflexif
(3) Le produit d'espaces vectoriels séparable, respectivement réflexif, est encore un espace séparable, resp. réflexif.

On peut donc conclure que $W^{k,p}(\Omega) = P^{-1}(W)$ possède les mêmes propriétés.

Avant de donner une caractérisation de l'espace dual d'un de l'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, rappelons deux principaux résultats d'analyse fonctionnelle bien connus, dont on trouvera les preuves respectives par exemple dans l'ouvrage de Brezis [**2**].

Théorème 2.54. *(Hahn-Banach)*
Soient $(E, \| \, \|)$ un espace normé sur le corps $\mathbb{K}$, $T : \mathcal{D}(T) \subset E \to \mathbb{K}$ une application linéaire et bornée. Alors il existe un élément $\widehat{T} \in E^*$ tel que

$$\widehat{T}(u) = T(u), \ \forall\, u \in \mathcal{D}(T) \ et$$
$$\|\widehat{T}\|_* = sup\,\{|T(u)| : \, u \in \mathcal{D}(T) \ et \ \|u\| = 1\}$$

□

Théorème 2.55. *(Théorème de Représentation de Riesz)*
Soient $1 \le p < \infty$, $T \in (L^p(\Omega))^*$ et p' le conjugué de p. Alors, il existe $v \in L^{p'}(\Omega)$ tel que pour tout $u \in L^p(\Omega)$

$$T(u) = \int_\Omega u(x)\, v(x)\, dx = \langle u, v\rangle \qquad et \qquad \|v\|_{L^{p'}(\Omega)} = \|T\|_*$$

□

Corollaire 2.56. *Soit $1 \le p < \infty$. Pour tout opérateur $T \in (L^p_N(\Omega))^*$, il existe un unique $v \in L^{p'}_N(\Omega)$ telle que pour toute fonction $u \in L^p_N(\Omega)$*

$$T(u) = \sum_{i=1}^n \langle u_i, v_i\rangle \qquad et \qquad \|v\|_{L^{p'}_N(\Omega)} = \|T\|_*$$

□

Théorème 2.57. *Soit $1 \le p < \infty$. Pour tout opérateur $T \in (W^{k,p}(\Omega))^*$, il existe un élément $v \in L^{p'}_N(\Omega)$ telle que pour tout $u \in W^{k,p}(\Omega)$*

$$T(u) = \sum_{1\le\alpha\le k}^n \langle D^\alpha u, v_\alpha\rangle \qquad et \qquad \min \|v\|_{L^{p'}_N(\Omega)} = \|T\|_*$$

où le minimum (atteint) est pris sur tout les $v \in L^{p'}_N(\Omega)$ pour qui vérifie la condition précédente.

Démonstration. Définissons

$$\begin{array}{rccl} T^* : & W & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & P\,u & \longmapsto & T^*(P\,u) = T(u) \end{array}$$

Vu que P est un isomorphisme isométrique, $T^* \in W^*$ et $\|L^*\|_* = \|L\|_*$.
Par le théorème de Hahn-Banach, il existe une extension $\widetilde{T}$ de T^* défini sur tout $L^p_N(\Omega)$, et par le corollaire précédant, il existe un élément $v \in L^{p'}_N(\Omega)$ tel que si $u = (u_\alpha)_{0\le|\alpha|\le k} \in L^p_N(\Omega)$ alors

$$\widetilde{T}(u) = \sum_{0\le\alpha\le k} \langle u_\alpha u, v_\alpha\rangle$$

Ainsi $\forall\, u \in W^{k,p}(\Omega)$ on a

$$T(u) = T^*(P\,u) = \widetilde{T}(P\,u) = \sum_{0 \leq \alpha \leq k} \langle D^\alpha u, v_\alpha \rangle$$

$$\|T\|_* = \|T^*\|_* = \|\widetilde{T}\|_* = \|v\|_{L_N^{p'}(\Omega)}$$

$\square$

CHAPITRE 3

Les espaces de Sobolev sur les variétés

1. Préliminaires et définitions

Dans tout ce chapitre on supposera que M est une variété de dimension n sans bord et compacte. Rappelons un résultat essentielle concernant l'existence d'une partition de l'unité.

LEMME 3.1. *Soit M une variété muni d'un atlas $\{(U_i, \phi_i)\}_{i\in I}$ localement fini, i.e., pour tout compact $K \subset M$, l'ensemble $\{i|\, U_i \cap K\}$ est de cardinalité finie. Il existe alors une partition de l'unité, à savoir une famille $\{\chi_i|\, i \in I\}$ de fonctions $C^\infty(M)$ telle que pour tout $i \in I$*

(1) $0 \leq \chi_i(x) \leq 1$, $\forall x \in M$
(2) $\operatorname{supp}(\chi_i) \subset U_i$
(3) $\displaystyle\sum_{i\in I} \chi_i(x) = 1$, $\forall x \in M$

□

Notons encore un résultat relativement simple découlant immédiatement du lemme 3.1

LEMME 3.2. *Si $f \in C^\infty(M)$, alors $f = \displaystyle\sum_{i\in I} f_i$ avec $f_i \in C^\infty(M)$ et* $\operatorname{supp}(f_i) \subset U_i$, $\forall i \in I$

DÉMONSTRATION. Posons $f_i = \chi_i\, f$, $\forall i \in I$. Alors

– $f_i \in C^\infty(M)$ et $\operatorname{supp}(f_i) \subset U_i$, $\forall i \in I$

– $f = 1\, f = \left(\displaystyle\sum_{i\in I} \chi_i\right) f = \displaystyle\sum_{i\in I} \chi_i\, f = \sum_{i\in I} f_i$

□

REMARQUE 3.3. Si M est une variété compacte sans bord, il existe un atlas fini et donc localement fini.

Définition 3.4. Soient M une variété compacte sans bord de dimension n munie d'un atlas fini $\mathcal{A} = \{\phi_i : U_i \to V_i\}_{i=1,\dots,m}$ avec V_i domaine borné (à bord lisse), $\{\chi_i\} \subset C^\infty(M)$ une partition C^∞ de l'unité et $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque, $\forall i = 1, ..., m$ on pose

$$f_i = \chi_i f : M \to \mathbb{R},\ \mathrm{supp}(f_i) \subset U_i \tag{82}$$

$$\widetilde{f_i} := f_i \circ \phi_i^{-1} : V_i \to \mathbb{R} \tag{83}$$

On dit alors que f est mesurable ssi $\widetilde{f_i}$ est mesurable $\forall i = 1, ..., m$ et on pose

$$\mathcal{L}^p(M) = \left\{ f : M \to \mathbb{R} \mid \int_M |f|^p d\mu := \sum_{i=1}^m \int_M |\widetilde{f_i}|^p dx < \infty \right\} \tag{84}$$

$$W^{k,p}(M) = \left\{ f : M \to \mathbb{R} \mid \widetilde{f_i} \in W^{k,p}(V_i),\ i = 1, ..., m \right\} \tag{85}$$

Lemme 3.5. *La fonction* $\| \|_{W^{k,p}(M)} : W^{k,p}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par :*

$$\|f\|_{W^{k,p}(M)} := \sum_{i=1}^m \left\| \widetilde{f_i} \right\|_{W^{k,p}(V_i)} \tag{86}$$

est une norme sur l'espace vectoriel $W^{k,p}(M)$

Remarques 3.6.
Cette norme trouve son sens par la compacité de notre variété. En effet, insistons sur le fait que la somme dans l'équation (86) est finie.

Cependant, la définition 3.4 et par conséquent la norme sous-jacente sont jusque là dépendante de l'atlas. Nous devrions de ce fait noter en premier lieu l'espace de Sobolev de la manière suivante :

$$W^{k,p}(M, \mathcal{A})$$

Nous allons cependant montrer, que toutes les normes définies par ce procédé sont équivalentes. Pour cela, commencer par énoncer un résultat complémentaire concernant les transformations dans les espaces de Sobolev sur $\mathbb{R}^n$.

Théorème 3.7. *Soient* Ω, Ω' *deux domaines de* $\mathbb{R}^n$, $\Phi : \Omega \to \Omega'$ *un difféomorphisme. Notons* $\Psi = \Phi^{-1}$.
Posons

$$\begin{array}{ll} y_1 = \Phi_1(x_1, ..., x_n) & x_1 = \Psi_1(y_1, ..., y_n) \\ y_2 = \Phi_2(x_1, ..., x_n) & x_2 = \Psi_2(y_1, ..., y_n) \\ \vdots & \vdots \\ y_n = \Phi_n(x_1, ..., x_n) & x_n = \Psi_n(y_1, ..., y_n) \end{array}$$

Supposons

(1) $\Phi_1, ..., \Phi_n \in C^k(\overline{\Omega})$
(2) $\Psi_1, ..., \Psi_n \in C^k(\overline{\Omega'})$
(3) *il existe* $0 < c \leq C$ *deux constantes telles que* $c \leq |det J_\Phi(x)| \leq C$, $\forall\, x \in \Omega$, *où la matrice* $J_\Phi(x)$ *désigne la matrice jacobienne de la transformation.*

Définissons les opérateurs de pullback Φ^* *et* Ψ^* *de la manière suivante :*

(1) $\Phi^* : W^{k,p}(\Omega') \to W^{k,p}(\Omega)$ *qui a une fonction* $u \in W^{k,p}(\Omega')$ *fait correspondre la fonction* $\Phi^* u \in W^{k,p}(\Omega)$ *définie par*

$$(\Phi^* u)(x) := u(\Phi(x)) = u(y)$$

(2) *De manière similaire* $\Psi^* : W^{k,p}(\Omega) \to W^{k,p}(\Omega')$ *associe à la fonction* $v \in W^{k,p}(\Omega)$ *la fonction* $\Psi^* v \in W^{k,p}(\Omega)$ *définie par*

$$(\Psi^* v)(y) := v(\Psi(y)) = v(x)$$

Alors, les opérateurs Φ^* *et* Ψ^* *sont continus. En d'autres termes, on a*

$$W^{k,p}(\Omega) \simeq W^{k,p}(\Omega')$$

□

On trouvera une preuve de ce théorème dans l'ouvrage de Adams [**1**].

THÉORÈME 3.8. *Soit* M *une variété compacte différentiable de dimension* n, $\mathcal{A}_1 = \{(U_i^1, \phi_{i,1})\}_{i=1,\ldots,m}$, $\mathcal{A}_2 = \{(U_j^2, \phi_{j,2})\}_{j=1,\ldots,r}$ *deux atlas finis et* $\{\chi_i^1\}$, $\{\chi_j^2\}$ *deux partitions de l'unité subordonnées. Alors les espaces* $W^{k,p}(M, \mathcal{A}_1)$ *et* $W^{k,p}(M, \mathcal{A}_2)$ *sont équivalents.*

DÉMONSTRATION.
Soit $f \in W^{k,p}(M, \mathcal{A}_1)$ arbitraire. On a

$$\|f\|_{W^{k,p}(M,\mathcal{A}_1)} = \sum_{i=1}^{m} \left\|(f\,\chi_i^1) \circ \phi_{i,1}^{-1}\right\|_{W^{k,p}\left(\phi_{i,1}(U_i^1)\right)}$$

Or $\forall\, x \in M$,

$$\sum_{j=1}^{r} (\chi_j^2\, f)(x) = f(x)$$

$$\Rightarrow (\chi_i^1\, f)(x) = \sum_{j=1}^{r} \left(\chi_i^1 f\, \chi_j^2\right)(x)$$

$$\Rightarrow \left\|(f\,\chi_i^1) \circ \phi_{i,1}^{-1}\right\|_{W^{k,p}\left(\phi_{i,1}(U_i^1)\right)} \leq C_i \sum_{j=1}^{r} \left\|\left(\chi_i^1 f\, \chi_j^2\right) \circ \phi_{i,1}^{-1}\right\|_{W^{k,p}\left(\phi_{i,1}(U_i^1 \cap U_j^2)\right)}$$

Posant $C = \max\limits_{1 \leq i \leq m} C_i$, on a

$$\|f\|_{W^{k,p}(M,\mathcal{A}_1)} \leq C \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{r} \left\|\left(\chi_i^1 f\, \chi_j^2\right) \circ \phi_{i,1}^{-1}\right\|_{W^{k,p}\left(\phi_{i,1}(U_i^1 \cap U_j^2)\right)}$$

D'où, par l'équivalence des systèmes de coordonnées $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ et des changements de cartes

$$\phi_{j,2} \circ \phi_{i,1}^{-1} : \phi_{i,1}(U_i^1 \cap U_j^2) \to \phi_{j,2}(U_i^1 \cap U_j^2)$$

On a, par le théorème précédant :

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{W^{k,p}(M,\mathcal{A}_1)} &\leq C' \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{r} \left\| \left(\chi_i^1 f \, \chi_j^2\right) \circ \phi_{j,2}^{-1} \right\|_{W^{k,p}\left(\phi_{j,2}(U_i^1 \cap U_j^2)\right)} \\
&= C' \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{m} \left\| \left(\chi_j^2 f \circ \phi_{j,2}^{-1}\right) \, \left(\chi_i^1 \circ \phi_{j,2}^{-1}\right) \right\|_{W^{k,p}\left(\phi_{j,2}(U_i^1 \cap U_j^2)\right)} \\
&\leq C' \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{m} K_i \left\| \left(\chi_j^2 f \circ \phi_{j,2}^{-1}\right) \right\|_{W^{k,p}\left(\phi_{j,2}(U_i^1 \cap U_j^2)\right)} \\
&\leq C' \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{m} K_i \left\| \left(\chi_j^2 f \circ \phi_{j,2}^{-1}\right) \right\|_{W^{k,p}\left(\phi_{j,2}(U_j^2)\right)} \\
&\leq C'' \sum_{j=1}^{r} \left\| \left(\chi_j^2 f \circ \phi_{j,2}^{-1}\right) \right\|_{W^{k,p}\left(\phi_{j,2}(U_j^2)\right)} \\
&= C'' \, \|f\|_{W^{k,p}(M,\mathcal{A}_2)}
\end{aligned}
$$

Inversant les rôles des systèmes, on obtient bien que $W^{k,p}((M, \mathcal{A}_1)) \simeq W^{k,p}((M, \mathcal{A}_2))$ □

2. Les plongements de Sobolev sur les variétés

Les normes étant équivalentes, on peut alors généraliser les théorèmes de plongements établis dans le chapitre précédant. La preuve du théorème suivant devient alors évidente par le simple fait que les plongements sont valables sur chacun des domaines de carte de l'atlas. Par sommation finie, les résultas restent alors également valables pour la variété elle-même.

Théorème 3.9. *(Rellich-Kondrachov appliqué aux variétés)*
Soient M une variété compacte de dimension n, j, k deux entiers non négatifs, $1 \leq p < \infty$ un réel. Alors

(1) *Si $kp < n$*

$$W^{j+k,p}(M) \hookrightarrow W^{j,q}(M), \quad \forall q \in \left[1, \frac{n\,p}{n-kp}\right] \tag{87}$$

De plus, si $q \in \left[1, \frac{n\,p}{n-kp}\right)$, l'injection est complètement continue

(2) *Si $kp = n$*

$$W^{j+k,p}(M) \to W^{j,q}(M), \, \forall q \in [1, \infty) \tag{88}$$

(3) *Si $kp > n$*

$$W^{k,p}(M) \hookrightarrow C^j(M), \quad \forall \, 0 \leq j \leq k - \tfrac{n}{p} \tag{89}$$

De plus, si $0 \leq j < k - \frac{n}{p}$*, l'injection est complètement continue.*
De même

$$W^{j+k,p}(M) \to W^{j,q}(M), \qquad \forall q \in [1, \infty] \tag{90}$$

□

3. Sous-variétés et plongements de Sobolev

DÉFINITION 3.10. Soit M une variété compacte sans bord de dimension n. Posons

(1) $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-r} \times \mathbb{R}^k$
(2) $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ $x = (x', x'')$ avec $x' \in \mathbb{R}^{n-r}$, $x'' \in \mathbb{R}^r$
(3) $\mathbb{R}^{n-r} \times 0 = \{(x', 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n |\, x' \in \mathbb{R}^{n-r}\}$

Une sous-variété Y de M de codimension r est un sous-ensemble $Y \subset M$ muni de la topologie induite de celle de M avec la propriété suivante :

$$\forall y \in Y,\, \forall\, (U, \phi) \text{ carte de } M \text{ telle que } y \in U \text{ on a}$$

$$\phi(U \cap Y) = \phi(U) \cap (\mathbb{R}^{n-r} \times 0) \tag{91}$$

PROPOSITION 3.11. *Soient M une variété compacte sans bord de dimension n munie d'un atlas $\mathcal{A} = \{\phi_i : U_i \to V_i\}_{i=1,\dots,m}$ avec V_i domaine borné (à bord lisse), Y une sous-variété de M de codimension r.*
Soit $\left\{\phi_{i_j} : U_{i_j} \to V_{i_j}\right\}_{j=1,\dots,t}$ une sous-famille de $\mathcal{A}$, telle que $Y \subset \bigcup_{j=1}^{t} U_{i_j}$
Alors, si l'on identifie $\mathbb{R}^{n-r} \times 0$ à $\mathbb{R}^{n-r}$,

$$\left\{\phi_{i_j}|_{U_{i_j} \cap Y}, U_{i_j} \cap Y\right\}_{j=1,\dots,t}$$

est un atlas sur Y □

COROLLAIRE 3.12. *(Opérateurs de traces sur les variétés)*
Soient

(1) *j, k, n, r quatre entiers non négatifs tels $0 \leq r \leq n - 1$*
(2) *$1 \leq p < \infty$ un réel*
(3) *M une variété compacte sans bord de dimension n*
(4) *Y une sous-variété de codimension r*

Les plongements du type

$$W^{j+k,p}(M) \hookrightarrow W^{j,q}(Y) \tag{92}$$

sont vérifiés dans tous les cas suivant :

(1) *si $r < kp < n$, $1 \leq q \leq \frac{(n-r)p}{n-kp}$, avec compacité si $q < \frac{(n-r)p}{n-kp}$.*
(2) *si $kp = n$, $1 \leq q < \infty$, avec compacité dans tous les cas.*

(3) *si* $kp > n$, $1 \leq q \leq \infty$, *avec compacité dans tous les cas.*

En particulier, pour tout réel $1 < p < \infty$, *et quels que soient* $k \geq r$

$$W^{k,p}(M) \hookrightarrow W^{k-r,p}(Y) \tag{93}$$

□

REMARQUE 3.13. On peut également généraliser aux sous-variétés le cas particulier $p = 2$ cité sur les ouverts de $\mathbb{R}^n$ comme suit :
Soient M une variété compacte sans bord de dimension n, Y une sous-variété de codimension r, $s \geq r/2$, alors la restriction canonique $\rho : C^\infty(M) \to C^\infty(Y)$ se prolonge en une application linéaire, continue et bijective

$$\overline{\rho} : W^{s,2}(M) \to W^{s-r/2,2}(Y)$$

CHAPITRE 4

Les espaces de Sobolev sur les fibrés vectoriels

Nous allons finalement nous intéresser brièvement aux espaces de Sobolev sur les fibrés vectoriels. Là encore, les résultats que nous énonceront sont immédiats par extension de leur équivalent démontré dans les espaces euclidiens. Nous les donnons de ce fait comme complément et ne seront pas démontrer pour alléger la rédaction.

1. Définition et plongements de Sobolev

Définition 4.1. Soient

(1) k un entier non négatif, $1 \leq p \leq \infty$ un réel

(2) M une variété compacte sans bord de dimension n munie d'un atlas $\{\phi_i : U_i \to V_i\}_{i=1,\dots,m}$ avec V_i domaine borné (à bord lisse), $\{\chi_i\} \subset C^\infty(M)$ une partition C^∞ de l'unité subordonnée

(3) (E, π, M) un fibré vectoriel de classe C^∞ de rang d
   - de fibre typique $F = \mathbb{R}^d$ et de groupe structural $G \subset GL(F) \subset \mathbb{R}^{d^2}$
   - muni d'un système de trivialisations

$$\left\{\psi_i : E|_{U_i} = \pi^{-1}(U_i) \xrightarrow{\sim} U_i \times F\right\}_{i=1,\dots,m}$$

   dont les transitions

$$\begin{array}{rccc} \psi_j \circ \psi_i^{-1} & : (U_i \cap U_j) \times F & \longrightarrow & (U_i \cap U_j) \times F \\ & (x, \theta) & \longmapsto & (x, \tau_{ji}(x)\theta) \end{array}$$

   sont de classe C^∞ de dérivées bornées.
   En particulier, pour tout $i, j \in \{1, \dots, m\}$, pour lesquels l'intersection $U_i \cap U_j$ est non vide, l'application $\tau_{ji} : U_i \cap U_j \to G$ est C^∞

(4) $\Gamma(E)$ l'ensemble des sections C^∞

Soit alors une section $\sigma \in \Gamma(E)$, on dit que σ appartient à l'espace de Sobolev $W^{k,p}(M, E)$ si la condition suivante est vérifiée :

(94) Quel que soit $i = 1, \dots, m$, l'application $\sigma_i = proj_2 \circ \psi_i \circ \sigma \circ \phi_i^{-1} : V_i \to \mathbb{R}^d$ appartient à l'espace de Sobolev $W^{k,p}(V_i, \mathbb{R}^d)$

En d'autres termes, pour $i = 1, ..., m$ quelconque, on a $\sigma_i = (\sigma_i^1, ..., \sigma_i^d)$, alors $\sigma \in W^{k,p}(M, E)$ si et seulement si

$$\sigma_i^j \in W^{k,p}(V_i),\ \forall\,(i,j) \in \{1, ..., m\} \times \{1, ..., d\} \tag{95}$$

On muni alors l'espace de Sobolev $W^{k,p}(M, E)$ de la norme définie par

$$\|\sigma\|_{W^{k,p}(M,E)} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq k} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{d} \left\|\sigma_i^j\right\|_{W^{k,p}(V_i)} \tag{96}$$

Tout comme dans le cas des variétés, on peut vérifier que toutes les normes relatives aux atlas et aux systèmes de trivialisations sont équivalentes. De plus, les plongements de Sobolev restent valables.

Théorème 4.2. *(Rellich-Kondrachov appliqué aux fibrés)*
Soient

1. M *une variété compacte* C^∞ *de dimension* n
2. (E, π, M) *un fibré vectoriel de classe* C^∞ *de rang* d*, de fibre typique* $F = \mathbb{R}^d$ *et de groupe structural* $G \subset GL(F)$
3. j, k*, deux entiers* $k \geq 1$ *et* $j \geq 0$
4. $1 \leq p < \infty$ *un réel*

Alors

1. *Si* $kp < n$
$$W^{j+k,p}(M, E) \hookrightarrow W^{j,q}(M, E), \quad \forall q \in \left[1, \tfrac{n\,p}{n-kp}\right] \tag{97}$$
De plus, si $q \in \left[1, \frac{n\,p}{n-kp}\right)$*, l'injection est complètement continue*
2. *Si* $kp = n$
$$W^{j+k,p}(M, E) \to W^{j,q}(M, E),\ \forall q \in [1, \infty) \tag{98}$$
3. *Si* $kp > n$
$$W^{k,p}(M, E) \hookrightarrow C^j(M, E), \quad \forall\, 0 \leq j \leq k - \tfrac{n}{p} \tag{99}$$
De plus, si $0 \leq j < k - \frac{n}{p}$*, l'injection est complètement continue.*
De même
$$W^{j+k,p}(M, E) \to W^{j,q}(M, E), \qquad \forall q \in [1, \infty] \tag{100}$$

Corollaire 4.3. *(Opérateurs de traces sur les fibrés)*
Soient

1. M *une variété compacte* C^∞ *de dimension* n
2. Y *une sous-variété de codimension* r
3. (E, π, M) *un fibré vectoriel de classe* C^∞ *de rang* d*, de fibre typique* $F = \mathbb{R}^d$ *et de groupe structural* $G \subset GL(F)$
4. j, k*, deux entiers avec* $k \geq 1$ *et* $j \geq 0$
5. $1 \leq p < \infty$ *un réel*

Alors, les plongements du type

$$W^{j+k,p}(M, E) \hookrightarrow W^{j,q}(Y, E|_Y) \tag{101}$$

sont vérifiés dans tous les cas suivant :

(1) *si* $r < kp < n$, $1 \leq q \leq \frac{(n-r)p}{n-kp}$, *avec compacité si* $q < \frac{(n-r)p}{n-kp}$.

(2) *si* $kp = n$, $1 \leq q < \infty$, *avec compacité dans tous les cas.*

(3) *si* $kp > n$, $1 \leq q \leq \infty$, *avec compacité dans tous les cas.*

En particulier, pour tout réel $1 < p < \infty$, *et quels que soient* $k \geq r$

$$W^{k,p}(M,E) \hookrightarrow W^{k-r,p}(Y, E|_Y) \tag{102}$$

□

CHAPITRE 5

Annexe

On trouvera une preuve de ces différents résultats dans l'ouvrage de Brezis [**2**].

1. Rappels sur les espaces $L^p(\Omega)$

1.1. Inégalités principales.

Théorème 5.1. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq q \leq \infty$ deux réels et p' l'exposant conjugué de p, i.e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.*

(1) *Inégalité de Hölder*
Si $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^{p'}(\Omega)$, alors $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ et

$$\|f \cdot g\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)} \tag{103}$$

(2) *Inégalité d'interpolation*
Si $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, alors $f \in L^r(\Omega)$, quel que soit $r \in [p, q]$ et

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|^{\alpha}_{L^p(\Omega)} \|f\|^{1-\alpha}_{L^q(\Omega)} \qquad \textit{avec} \qquad \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q} \tag{104}$$

pour un certain $0 \leq \alpha \leq 1$

(3) *Inégalité d'inclusion*
Si de plus $|\Omega| < \infty$ et $f \in L^q(\Omega)$, alors $f \in L^p(\Omega)$ et

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq |\Omega|^{1/p-1/q} \|f\|_{L^q(\Omega)} \tag{105}$$

En particulier

$$L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega), \ \forall\, 1 \leq p \leq q < \infty$$

1.2. Convolution et régularisation.

Définition 5.2. Soit $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ une fonction non négatives telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)dx = 1, \text{ supp } \rho \subset \overline{B}(0,1) \tag{106}$$

Pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement choisi,la fonction $\rho_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\rho(x/\varepsilon)$ appartient à $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et supp $\rho_\varepsilon \subset \overline{B}(0,\varepsilon)$. La fonction ρ_ε est appelée fonction régularisante et la convolution

$$u_\varepsilon(x) := (\rho_\varepsilon * u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x-y)u(y)dy \tag{107}$$

est appelé, pour autant que le membre de droite de l'égalité (107) ait un sens, la régularisation de u.

Corollaire 5.3. *Soient $p \geq 1$ $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Les assertions suivantes sont vérifiées :*

(1) *pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$.*

(2) *on pose*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy \tag{108}$$

Alors $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$.
En outre, on a $(f * g)(x) = (g * f)(x)$

Théorème 5.4. *Soient $f \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ et α un multi-indice tel que $|\alpha| \leq k$. Alors*

$$f * g \in C^k(\mathbb{R}^n) \text{ et } D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g$$

En particulier si $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, alors $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ici D^α représente la α-ième dérivée au sens usuel.

Corollaire 5.5. *Si $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon > 0$, alors $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et*
$D^\alpha(\rho_\varepsilon * u) = (D^\alpha \rho_\varepsilon) * u$

Théorème 5.6. *Soit $u \in C(\mathbb{R}^n)$, alors $\rho_\varepsilon * u \to u$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^n$*

Corollaire 5.7. *Soient Ω un domaine ouvert de $\mathbb{R}^n$ et u une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ qui s'annule identiquement en dehors de Ω. Les assertions suivantes sont vérifiées :*

(1) *Si $u \in L^1_{loc}(\overline{\Omega})$ alors $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$*

(2) *Si de plus* supp $u \subset\subset \Omega$, *alors $u_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ pour autant que* $\varepsilon < dist(\text{supp } u, \partial\Omega)$

(3) *Si $u \in L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p < \infty$, alors $u_\varepsilon \in L^p(\Omega)$. De plus*

$$\|u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \qquad \text{et} \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \|u_\varepsilon - u\|_{L^p(\Omega)} = 0.$$

(4) *Si $u \in C(\Omega)$ et $\Omega' \subset\subset \Omega$, alors $\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(x) = u(x)$ uniformément sur Ω'*

(5) *Si $u \in C(\overline{\Omega})$, alors $\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(x) = u(x)$ uniformément sur Ω*

(6) $C_0^\infty(\Omega)$ *est dense dans* $L^p(\Omega)$ *si* $1 \leq p < \infty$

$\square$

Bibliographie

[1] Adams, Robert A. *Sobolev spaces*, Acadamic Press 1975

[2] Brezis, Haïm. *Analyse fonctionnelle : Théorie et application.* Masson, 1996

[3] Ziemer, Williams P. *Weackly differentiable functions.* Springer-Verlag, 1989

[4] Jost, Jürgen. *Partial differential equations.* Springer, 2002

[5] Aubin, Thierry. *Nonlinear analysis on manifolds. Monge-Ampère equations.* Springer-Verlag, 1982

Index