Damien Gauthier 2001

Rapport de projet

Dimensions et plongements

Etude de quelques propriétés

Prof. M. Troyanov

Table des matières

Chapitre 1

Généralités

1.1 Espaces métriques et topologiques

1.1.1 Espace topologique

Définition 1.1.1 (topologie)
Un topologie sur un ensemble X est une collection de sous-ensembles telle que les conditions suivantes soient réalisées :

$$\begin{array}{ll} (1) & \emptyset, X \in \mathcal{T} \\ (2) & \forall A, B \in \mathcal{T},\ A \cap B \in \mathcal{T} \\ (3) & \forall \{A_i\}_{i\in I} \in \mathcal{T},\ \bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T} \end{array}$$

Remarque 1.1.1 (espace topologique et ouverts) On appelle espace topologique le couple $(X, \mathcal{T})$ et ouverts les éléments de $\mathcal{T}$ tandis que le complémentaire d'un ouvert est appellé fermé.

1.1.2 Espace métrique

Définition 1.1.2 (métrique)
Soit X un ensemble, une application $d : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ est une métrique (ou distance) si et seulement si

$$\begin{aligned} \forall x, y \in X,\ d(x, y) &= d(y, x) \\ \forall x, y \in X,\ d(x, y) &= 0 \Longleftrightarrow x = y \\ \forall x, y, z \in X,\ d(x, y) &\leq d(x, z) + d(z, y) \qquad \textit{(inégalité du triangle)} \end{aligned}$$

Remarque 1.1.2 (espace métrique) On appelle espace métrique le couple (X, d).

Définition 1.1.3 (diamètre d'un espace métrique)
Soit (X, d) un espace métrique, on appelle diamètre de X le nombre

$$|X| = \sup\{d(x, y)|x, y \in X\} \in [0, \infty]$$

Définition 1.1.4 (espace métrique borné)
Un espace métrique est dit borné si son diamètre est fini.

Définition 1.1.5 (ensembles positivement séparés)
Deux sous-ensembles $E, F \subset X$ sont positivement séparés si et seulement si

$$d(E, F) = \inf\{d(x, y)|x \in E, y \in F\} > 0$$

Lemme 1.1.1 (topologie et métrique) *Une métrique sur X engendre une topologie $\mathcal{T}$ sur X telle que*

$$A \in \mathcal{T} \iff \forall x \in A, \exists \delta > 0 \textit{ tel que } \underbrace{\{\ y \in X \mid d(y, x) < \delta\ \}}_{= B(x,\delta)} \subset A$$

Preuve : La preuve de ce lemme pourra être trouvée dans [Stuart, 2001].

□

Définition 1.1.6 (c-réseau)
Un c-réseau dans un espace métrique X est un sous-ensemble de X dont le c-voisinage est X tout entier et qui est tel que deux points distincts sont distants d'au moins c.

Proposition 1.1.1 (existence de c-réseaux) *Il existe un c-réseau dans un espace métrique X pour tout $c > 0$.*

Preuve : Soit $A = \{x | d(x, y) \geq c \forall y \in A\}$ maximal dans le sens suivant : quelque soit $x \in X$ tel que $d(x, A) \geq c$ alors $x \in V_c A$ où $V_c A$ est le c-voisinage de A.
Un tel A existe car l'ensemble $\mathcal{A}$ des A comme ci-dessus est inductif pour la relation d'ordre inclusion (de borne supérieure l'union des éléments de la chaine) et donc, par le lemme de Zorn (cf [Nier, 2000]), $\mathcal{A}$ possède un élément maximal.
Il est alors clair que $V_c A \supset X$ car le contaire contredirais le caratère maximal de A.

□

1.2 Dimension topologique

Définition 1.2.1 (ordre d'une collection)
Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ une collection de sous-ensembles de X. On dit que cette collection est d'ordre $m+1$ si il existe au moins un point de X appartenant à $m+1$ éléments de $\mathcal{A}$ et aucun point de X appartenant à plus de $m+1$ éléments de $\mathcal{A}$.

Définition 1.2.2 (raffinement)
Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ une collection de sous-ensembles de X. On dit que la collection $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ est un raffinement de $\mathcal{A}$ ou que $\mathcal{B}$ raffine $\mathcal{A}$ si tout élément de $\mathcal{B}$ est contenu dans au moins un élément de $\mathcal{A}$.

Définition 1.2.3 (dimension topologique)
Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. On dit que X est de dimension topologique finie si pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{A}$ de X il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{B}$ qui raffine $\mathcal{A}$ d'ordre $m+1$.
On appelle dimension topologique de X le plus petit entier m satisfaisant ces conditions, et on la note $dim_T\ X$.

1.3 Mesure sur un ensemble

1.3.1 σ-algèbre

Définition 1.3.1 (σ-algèbre)
Une collection non-vide $\mathcal{A}$ de sous-ensembles d'un ensemble X est une σ-algèbre (ou tribu) si et seulement si elle est stable par passage au complémentaire et par réunion dénombrable, en d'autres termes :

$$E \in \mathcal{C} \implies X \setminus E \in \mathcal{A}$$

et

$$\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{C} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{A}$$

Propriété : Une σ-algèbre est stable par intersection dénombrable ainsi que par différence ensembliste.
De plus, elle contient l'ensemble total X et l'ensemble vide $\emptyset$.

Définition 1.3.2 (σ-algèbre engendrée)
Soit $\mathcal{C}$ une collection de sous-ensembles de X. La σ-algèbre engendrée par $\mathcal{C}$, notée $\sigma(\mathcal{C})$ est l'intersection de toutes les σ-algèbres contenant $\mathcal{C}$.

Remarque 1.3.1 Une telle σ-algèbre existe toujours car $\mathcal{P}(X)$ est une σ-algèbre.

Définition 1.3.3 (ensemble des boreliens)
L'ensembles des boreliens, ou σ-algèbre borelienne, est la σ-algèbre engendrée par les ouverts.

1.3.2 mesure sur une σ-algèbre

Définition 1.3.4 (mesure)
Soit une σ-algèbre $\mathcal{A}$, une fonction $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$ est une mesure si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifées :

$$\mu(\emptyset) = 0$$

et

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

pour toute suite $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ disjoints deux à deux.

Propriété : Si $E \subset F$ et $E, F \in \mathcal{A}$ alors $\mu(E) \leq \mu(F)$.

Définition 1.3.5 (mesure extérieure)
Soit une σ-algèbre $\mathcal{A}$, une fonction $\mu^* : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$ est une mesure extérieure si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifées :

$$\mu^*(\emptyset) = 0$$

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(F) \text{ si } E \subset F$$

et

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$$

pour toute suite $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ d'éléments de $\mathcal{A}$.

Définition 1.3.6 (ensemble mesurable)
Un sous-ensemble $A \subset X$ est dit μ^*-mesurable ou simplement mesurable si et seulement si pour tout sous-ensemble $E \subset X$ on a

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)$$

Théorème 1.3.1 (caratheodory)
La collection des ensembles μ^*-mesurables est une σ-algèbre et la restriction μ de μ^* à cette dernière est une mesure.

Preuve : La preuve étant donnée en détail dans [Troyanov, 2000] ainsi que dans [Falconer, 1985], elle ne sera pas développée ici.

□

Définition 1.3.7 (mesure métrique extérieure)
Une mesure extérieure μ^* est appellée mesure métrique extérieure si pour tout ensembles $E, F \subset X$ positivement séparés (cf définiton 1.1.5) on a

$$\mu^*(E \cup F) = \mu^*(E) + \mu^*(f)$$

Définition 1.3.8 (mesure borelienne)
Une mesure est dite borelienne si tout les ensembles boreliens sont mesurables.

Chapitre 2

Dimension de Hausdorf

2.1 Définitions

Définition 2.1.1 (δ-recouvrement)
Un recouvrement $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ de E est un δ-recouvrement si et seulement si

$$E \subset \bigcup_i U_i \text{ et } 0 < \operatorname{diam} U_i \leq \delta$$

2.1.1 Mesure de Hausdorff

Définition 2.1.2 ($\mathcal{H}_\delta^s$, mesure extérieure)
Comme préliminaire à la mesure de Hausdorff, nous définirons la fonction $\mathcal{H}_\delta^s$ comme suit :

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam} {U_i}^s$$

où l'infimum est pris sur tout les δ-recouvrements dénombrables $\{U_i\}$ de E.

Remarque 2.1.1 $\mathcal{H}_\delta^s$ est une mesure extérieure.

Définition 2.1.3 (mesure de Hausdorff, $\mathcal{H}^s$)
On définit la mesure de Hausdorf s-dimensionnelle par

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \longrightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(E) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(E)$$

Propriété : La mesure de Hausdorff $\mathcal{H}^s$ est une mesure métrique extérieure (cf définition 1.3.7).

Proposition 2.1.1 (espaces de mesure nulle) *Un espace X est de mesure de Hausdorff nulle si et seulement si il existe une suite $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ de sous-ensembles de X telle que $\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam} {E_i}^s < \infty$ et telle que tout point de X appartient à une infinité de E_i.*

PREUVE :

- $\Longrightarrow$: Supposons $\mathcal{H}^s(X) = 0$, par la définition de la mesure de Hausdorff il existe pour tout entier $i \geq 1$ une suite d'ensembles $\left\{E_n^{(i)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ telle que

$$X \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^{(i)} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{diam} E_n^{(i)}\right)^s < 2^{-i}$$

A partir de cela, il viens que l'on peut réarranger ces ensembles afin d'obtenir une unique suite telle que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{diam} E_n^{(i)}\right)^s < 1$$

De plus, par construction de cette suite, tout point de X appartient à une infinité d'ensembles de la suite.
Cette suite est donc celle cherchée. $\sharp$

- $\Longleftarrow$: Supposons maintenant que la suite $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisfait l'hypothèse de la proposition.
Soit $\epsilon > 0$ et $\delta > 0$ donnés. On a $\delta^s > 0$ et ainsi $\operatorname{diam} E_i \geq \delta$ pour au plus un nombre finis de valeurs de i.
Ainsi donc, on peut choisir un entier N tel que $\operatorname{diam} E_i < \delta$ pour tout $i \geq N$.
On peut en outre supposer N assez grand pour que

$$\sum_{i=N}^{\infty} \operatorname{diam} E_i{}^s < \epsilon$$

Ainsi, puisque chaque point de X appartient à une infinité de E_i, on a

$$X \subset \bigcup_{i=N}^{\infty} E_i$$

avec

$$\operatorname{diam} E_i < \delta \quad \text{pour } i \geq N \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=N}^{\infty} \operatorname{diam} E_i{}^s < \epsilon$$

D'où $\mathcal{H}_\delta^s(X) < \epsilon$ et donc $\mathcal{H}^s(X) = 0$ $\sharp$
Ainsi la proposition a été prouvée.

□

2.1.2 Dimension de Hausdorff

LEMME 2.1.1 (DÉCROISSANCE DE LA MESURE DE HAUSDORFF) *La mesure de Hausdorff s-dimensionnelle décroît à mesure que s croît. De plus, $\mathcal{H}_\delta^s(E) \geq \delta^{s-t}\mathcal{H}_\delta^t(E)$ si $s < t$.*

Preuve : Ce résultat découle directement du fait que, si $s < t$, on a que, pour tout ensemble A tel que $\operatorname{diam} A < \delta$, $\operatorname{diam} A^t < \delta^{t-s}\operatorname{diam} A^s$.
Le lecteur désireux d'une preuve rigoureuse pourra ici se référer à [Edgar, 1992, page 149].

□

Remarque 2.1.2 (variation de la mesure de Hausdorff) Avec le Lemme ci-dessus, l'on voit que si $s < t$ et $\mathcal{H}^t(E) > 0$ alors $\mathcal{H}^s(E) = \infty$.

Définition 2.1.4 (dimension de Hausdorff)
La dimension de Hausdorff de E est l'unique s tel que $\mathcal{H}^t(E) = \infty$ si $0 \leq t < s$ et $\mathcal{H}^s(E) = 0$ si $s < t < \infty$.

Proposition 2.1.2 (dimension topologique vs Hausdorff) *Soit (X, d) un espace métrique, l'inégalité suivante a lieu :*

$$\dim_T X \leq \dim_H X$$

Preuve : La preuve de ceci se retrouve dans [Edgar, 1992, page 155] ainsi que dans [Heinonen, 1999, page 57] elle ne sera pas développée ici.

□

Définition 2.1.5 (espace Ahlfors-régulier)
Un espace métrique mesuré où la mesure est telle que , pour toute boule B_R de rayon R,

$$C^{-1}R^s \leq \mu(B_r) \leq CR^s$$

est un espace Ahlfors-régulier (ou s-régulier).

Proposition 2.1.3 (estimation de la dimension de Hausdorff)
Soit X un espace métrique admettant une mesure borelienne μ (cf 1.3.8) telle que (X, d, μ) soit Ahlfors-s-régulier ($C^{-1}R^s \leq \mu(B_r) \leq CR^s$) alors la dimension de Hausdorff de X est précisément s.

Preuve :
• $\mu(B_R) \geq C^{-1}R^s \implies \dim_H X \leq s$: Sans limiter la généralité, on supposeras que X est borné. S'il ne l'est pas, il suffit de considérer chaque boule fermée de X.
Recouvrons X avec des boules fermées B_i de rayon R_i au plus δ telles que $\frac{1}{5}B_i \cap \frac{1}{5}B_j = \emptyset$ où $i \neq j$ (pour l'existence d'un tel recouvrement, voir [Heinonen, 1999, théorème 1.2, page 4]).

On peut alors conclure que

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s_\delta(X) &\leq \sum (\operatorname{diam} B_i)^n \\ &\leq 10^n \sum \left(\frac{1}{5}R_i\right)^n \\ &\leq C \sum \mu\left(\frac{1}{5}B_i\right) \\ &\leq C\mu(X) < \infty\end{aligned}$$

D'où l'on tire que $\mathcal{H}^s(X) < \infty$ et donc que $\dim_H X \leq s$ ♯
D'un manière analogue, on montre que $\mu(B_R) \leq CR^s \implies \dim_H X \geq s$.
La proposition est donc démontrée.

□

2.2 Espace flocon

Définition 2.2.1 (Espace flocon)
Soit un espace métrique (X, d) on appelle ϵ-espace flocon de X (ou version flocon de X) tout espace métrique (X, d^ϵ) où $d^\epsilon(x, y) = \big(d(x, y)\big)^\epsilon$ pour $\epsilon \in (0, 1)$.

Proposition 2.2.1 (dimension de Hausdorff d'un flocon) *Un α-espace flocon de $\mathbb{R}$ est de dimension de Hausdorff $1/\alpha$.*

Preuve : Soit $\{I_n^\epsilon\}_{n=1}^\infty$ la suite de sous-ensembles de X définie par

$$I_i^\epsilon = \left[x - \frac{\epsilon}{2i}, x + \frac{\epsilon}{2i}\right]$$

pour tout $x \in \mathbb{Q}$, les i correspondants au rang de x dans la numérotation en diagonale.
Il est facile de voir que

$$\operatorname{diam} I_{i,x}^\epsilon = \left(\frac{\epsilon}{i}\right)^\alpha$$

D'où l'on peut tirer que, pour $\epsilon \leq \delta$,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s_\delta(X) &\leq \inf_{\epsilon\in(0,\delta]} \sum_{i=1}^\infty \operatorname{diam} I_{i,x}^\epsilon \\ &\leq \inf_{\epsilon\in(0,\delta]} \sum_{i=1}^\infty \frac{\epsilon}{i}^{\alpha s} \\ &\leq \inf_{\epsilon\in(0,\delta]} \epsilon^{s\alpha} \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{i^{s\alpha}}\end{aligned}$$

De plus,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{s\alpha}} = \begin{cases} C \text{ si } s > \dfrac{1}{\alpha} \\ \infty \text{ si } s < \dfrac{1}{\alpha} \end{cases}$$

Où C est une constante finie indépendante de ϵ. Donc

$$\mathcal{H}^s_\delta(X) = \begin{cases} 0 \text{ si } s > \dfrac{1}{\alpha} \\ \infty \text{ si } s < \dfrac{1}{\alpha} \end{cases}$$

On a donc que $\mathcal{H}^s(X) = \mathcal{H}^s_\delta(X)$ car $\mathcal{H}^s_\delta(X)$ est indépendant de δ. et l'on peut donc en conclure que $\dim_H X = 1/\alpha$.

$\square$

Chapitre 3

Un exemple : l'ensemble de Cantor

3.1 Construction de l'ensemble de Cantor

Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in (0, 1)$ un nombre.
On note $M_\alpha(I)$ l'intervalle ouvert, centré au milieu de I et de longueur $\alpha \cdot \operatorname{diam} I$, c'est à dire

$$M_\alpha(I) = \{x \mid a(1 + \alpha) + b(1 - \alpha) \leq 2x \leq a(1 - \alpha) + b(1 + \alpha)\}$$

Soit $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0, 1)$ une suite quelconque de nombres.
On définit de manière récursive une suite d'ensembles fermés $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ par $K_0 = [0, 1]$ et K_{i+1} est la réunion de 2^{i+1} intervalles fermés obtenus en enlevant à chaque intervalle $K_{i1}, K_{i2}, \ldots, K_{i2^i}$ de K_i l'intervalle ouvert $M_\alpha(K_{is})$.
Pour être clair, chaque intervalle K_{is} de niveau i est remplacé par les deux intervalles formant l'ensemble $K_{is} \setminus M_\alpha(K_{is})$.

Définition 3.1.1 (ensemble de Cantor)
On définit alors l'ensemble de Cantor K comme

$$K = \bigcap_{j=0}^{\infty} K_j$$

FIG. 3.1 – Exemple d'un ensemble de Cantor

Proposition 3.1.1 (propriétés de K) *L'ensemble de Cantor K est compact, nulle part dense, parfait (i.e. chaque point de K est un point d'accumulation de K) et n'ayant aucun point isolé.*
De plus, K a la puissance du continu (i.e. en bijection avec $\mathbb{R}$).

Preuve : La preuve se trouvant déja dans [Troyanov, 2000, série 9] elle ne sera pas développée ici.

□

3.2 Dimension topologique

Proposition 3.2.1 (K est disconnecté) *L'ensemble de Cantor K est totalement disconnecté (i.e. toute composante connexe est réduite à un point).*

Preuve : Comme $K \subset \mathbb{R}$ les composantes connexes sont les intervalles. Supposons qu'il existe une composante connexe C non réduite à un point, donc il existe $a, b \in C$ tels que $]a, b[\subset C \subset K$.
Or, par la proposition 3.1.1 on a que K est nulle part dense, donc il n'exite pas d'intervalle non vide inclus dans K.
On a donc que K est totalement disconnecté.

□

Proposition 3.2.2 (dimension topologique de K) *La dimension topologique de l'ensemble de Cantor est nulle.*

Preuve : L'ensemble de Cantor est totalement disconnecté donc pour tout recouvrement ouvert U de K, il existe un recouvrement d'ouverts disjoints deux à deux qui raffine U.
Ce recouvrement est donc d'ordre 1, et par la définition de la dimension topologique, $\dim_T K = 0$

□

Proposition 3.2.3 (K et l'ensemble des messages) *K est homéomorphe à l'ensemble des messages binaires $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.*

Preuve : Pour une preuve détaillée voir [Troyanov, 2000, série 9].

□

3.3 Dimension de Hausdorf

Proposition 3.3.1 (dimension de Hausdorff de K) *La dimension de Hausdorff de l'ensemble de Cantor K est $s = \frac{\log 2}{\log \kappa}$ avec*

$$\kappa = 2 \left(1 + \lim_{n \to \infty} \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{1-\alpha_j} \right)^{\frac{1}{n}} \right)$$

De plus, $\mathcal{H}^s(K) = 1$.

Ce, dès que la suite $\left\{ a_n = \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{1-\alpha_j} \right)^{\frac{1}{n}} \right\}_{n=1}^{\infty}$ converge de telle manière que $\lim_{n \to \infty} a_n \leq a_N$ pour tout $N \in \mathbb{N}$.

Preuve :

• $\mathcal{H}^s(K) \leq 1$: Pour tout $j \in \mathbb{N}$ on peut recouvrir K par 2^j intervalles I de diamètre $\prod_{i=1}^{j} \frac{1-\alpha_i}{2}$.

On a donc que

$$\operatorname{diam} I = \left(\prod_{i=1}^{j} \frac{1-\alpha_i}{2} \right)^s = 2^\gamma$$

où

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\log 2^{-j} + \log \left(\prod_{i=1}^{j} (1-\alpha_i) \right)}{\log \kappa} \\ &= -j \frac{\log 2}{\log \kappa} + \frac{\log \left(\prod_{i=1}^{j} (1-\alpha_i) \right)}{\log \kappa} \\ &\leq -j \end{aligned} \tag{3.1}$$

La dernière étape étant obtenue en réalisant que $\kappa \geq 2$ quelque soit la suite $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$. On a

$$\begin{aligned} \frac{\log \left(\prod_{i=1}^{j} (1-\alpha_i) \right)}{\log \kappa} &\leq 0 \qquad \text{car } \kappa \geq 1 \\ \frac{\log 2}{\log \kappa} &\leq 1 \qquad \text{car } \kappa \geq 2 \end{aligned}$$

De là, on peut dire que, en posant $\delta = \prod_{i=1}^{j} \frac{1-\alpha_i}{2}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s_\delta(K) &\leq 2^j \left(\prod_{i=1}^{j} \frac{1-\alpha_i}{2} \right)^s \\ &\leq 2^j 2^{-j} \\ &\leq 1 \end{aligned} \tag{3.2}$$

$\sharp$

• $\mathcal{H}^s(K) \geq 1$: Afin de prouver l'inégalité opposée, nous allons prouver que, si $\mathcal{C}$ est un recouvrement quelconque de K, l'inégalité suivante a lieu :

$$1 \leq \sum_{I \in \mathcal{C}} (\operatorname{diam} I)^s$$

Par la compacité de K (cf. proposition 3.1.1) et en étendant chaque intervalle nous pouvons nous restreindre à prouver le résultat pour une collection finie $\mathcal{C}$ d'intervalles fermés.
Sans limiter la généralité, nous pouvons même imposer que chaque $I \in \mathcal{C}$ soit le plus petit intervalle contenant une certaine paire d'intervalles J et J' entrant dans la construction de K.
Si J et J' sont les plus grands de ces intervalles I est formé de J suivit d'un intervalle $\tilde{K}$ dans le complément de K et de J'.
D'après la construction de K on a

$$\operatorname{diam} J, \operatorname{diam} J' \leq \beta^{-1} \operatorname{diam} \tilde{K}$$

Avec

$$\beta = 2\left(\frac{\prod_{i=1}^{N} \alpha_i}{\prod_{i=1}^{N}(1-\alpha_i)}\right)^{\frac{1}{N}} = 2a_N$$

Donc

$$\begin{aligned}(\operatorname{diam} I)^s &= \left(\operatorname{diam} J + \operatorname{diam} \tilde{K} + \operatorname{diam} J'\right)^s \\ &\geq (2+\beta)^s \left(\frac{1}{2}\operatorname{diam} J + \frac{1}{2}\operatorname{diam} J'\right)^s \\ &\geq (2+\beta)^s \left(\frac{1}{2}\operatorname{diam} J^s + \frac{1}{2}\operatorname{diam} j'^s\right)\end{aligned} \tag{3.3}$$

Où la dernière inégalité est obtenue par la concavité de la fonction
$x \mapsto x^s$.
D'autre part,

$$\begin{aligned}(2+\beta)^s &= \{2\,(1+a_N)\}^s \\ &\geq 2^\gamma \\ &\geq 2\end{aligned} \tag{3.4}$$

Car

$$\gamma = (\log \kappa)^{-1} \cdot \log\{2\,(1+a_N)\} \geq 1 \qquad \text{par construction des } a_i.$$

$\sharp$

$\square$

NOTE : Le lecteur interressé pourras consulter [Falconer, 1990, page 226] où l'auteur développe le cas d'un ensemble de Cantor probabiliste où le rapport entre la longueur de $I_{k_1 \dots k_n}$ et de $I_{k_1 \dots k_{n-1}}$ suit les réalisations d'une variable aléatoires.
De plus, il y a deux variables distinctes selons que l'on considère l'intervalle de gauche ou de droite. L'auteur montre alors que la dimension de Hausdorff s de cet ensemble est la solution de l'équation

$$E(C_1^s + c_2^s) = 1$$

où E correspond à l'espérance mathématique et C_1 et C_2 aux variables aléatoires sus-mentionnées.

Chapitre 4

Plongements : généralités

4.1 La dimension comme invariant toplogique

Proposition 4.1.1 (invariance de la dimension topologique) *La dimension topologique est un* ***invariant topologique*** *(ie : invariant par homéomorphisme).*

Preuve : Soit X un espace topologique de dimension $\dim_T X = m < \infty$ et Y un espace topologique homéomorphe à X. Soit également $f : X \longrightarrow Y$ un homéomorphisme.
Alors pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{A}$ de Y, il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{B} = f^{-1}(\mathcal{A})$ de X que l'on peu raffiner en un recouvrement $\mathcal{B}'$ d'ordre $m + 1$.
On a alors que $f(\mathcal{B}')$ est un raffinement de $\mathcal{A}$ d'ordre $m + 1$. En effet, si $x \in X$ est contenu dans n éléments de $\mathcal{B}'$ alors $f(x)$ est contenu dans l'image de ces n éléments.
En outre, s'il existait un recouvrement ouvert d'ordre $n < m + 1$ de Y, son image par f^{-1} serait un recouvrement ouvert d'ordre n de X, ce qui est impossible.

$\square$

Proposition 4.1.2 (invariance de la séparabilité) *La propriété d'être séparable est un invariant topologique.*

Preuve : Soit $y, y' \in Y$ tels que $y \neq y'$. Alors il existe deux ouverts $U, V \subset X$ distincts tels que $f^{-1}(y) \in U$ et $f^{-1}(y') \in V$.
D'où l'on tire que $y \in f(U)$ et $y' \in f(V)$ avec $f(U)$ et $f(V)$ distincts.

$\square$

Application (dimension de l'espace des messages) : L'ensemble de Cantor définit en 3.1.1 étant de dimension topologique nulle (par 3.2.2) et étant homéomorphe à l'ensemble des messages binaires $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ (par 3.2.3), on a que l'ensemble des messages est de dimension topologique nulle.

4.2 Plongement topologique

Théorème 4.2.1 (plongement topologique)
Tout espace topologique $(X, \mathcal{T})$ de dimension topologique finie $n < \infty$ se plonge de manière topologique (ie : par un homéomorphisme) dans l'espace topologique $\mathbb{R}^{2n+1}$ muni de la topologie usuelle.

4.3 Plongement isométrique dans un Banach

Théorème 4.3.1
Tout espace métrique (X, d) se plonge de manière isométrique (donc topologique) dans l'espace de Banach $L^\infty(X)$.

Preuve : Soit $x_0 \in X$ fixé et l'application $f : X \longrightarrow L^\infty(X)$ telle que $f(x) = y \mapsto d(y, x_0) - d(y, x)$.
Comme

$$\sup_{y \in X} |d(y, x_0) - d(y, x)| \leq \sup_{y \in X} |d(y, x) + d(x, x_0) - d(y, x)| = d(x, x_0) < \infty$$

f est bien définie.
En outre, f est une isométrie car, d'une part,

$$\begin{aligned}
\left\|f(x) - f(x')\right\|_\infty &= \sup_{y \in X} \left|(d(y, x_0) - d(y, x)) - (d(y, x_0 - d(y, x'))\right| \\
&= \sup_{y \in X} \left|d(y, x') - d(y, x)\right| \\
&\leq d(x, x')
\end{aligned}$$

et d'autre part $d(x, x')$ est une valeur atteinte par la fonction $y \mapsto d(y, x_0) - d(y, x)$, donc $\|f(x) - f(x')\|_\infty = d(x, x')$. Ce qui suffit à prouver que f est le plongement isométrique cherché.

□

4.4 Application à l'ensemble de Cantor

Proposition 4.4.1 (plongement dans l'ensemble de Cantor)
Soit X un espace métrique séparable non-vide alors X est de dimension topologique nulle si et seulement si X se plonge dans l'ensemble de Cantor.

Preuve : La preuve de ceci se trouve dans [Edgar, 1992, page 83]

□

Chapitre 5

Plongements quasisymétriques

5.1 Definitions et résultats préliminaires

Définition 5.1.1 (fonction bi-Lipschitz)
Une fonction $f : X \longrightarrow Y$ est dite bi-Lipschitz de constante de Lipschitz L (L-bi-Lipschitz) si f et f^{-1} sont toutes les deux de Lipschitz de constante L. En d'autre termes, une fonction bi-Lipschitz est telle qu'il existe une constante L telle que, pour tout $x, y \in X$, on a :

$$\frac{1}{L}\ d_{Y}\left(f(x), f(y)\right) \leq d_{X}\left(x, y\right) \leq L\ d_{Y}\left(f(x), f(y)\right)$$

Définition 5.1.2 (fonction quasisymétrique)
Une fonction $f : X \longrightarrow Y$ est dite quasisymétrique ($\eta(t)$-quasisymétrique) si il existe un homéomorphisme $\eta : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ tel que la condition suivante soit satisfaite pour tout $a, b, x \in X$ et pour tout $t > 0$

$$d_{X}\left(x, a\right) \leq t\ d_{X}\left(x, b\right) \implies d_{Y}\left(f(x), f(a)\right) \leq \eta(t)\ d_{Y}\left(f(x), f(b)\right)$$

Remarque 5.1.1 De manière intuitive, une fonction quasisymétrique admet une distortion (contrôlée) du rapport entre les distances — distances relatives — alors qu'une fonction bi-Lipschitz n'admet qu'une variation (contrôlée) des distances elle-mêmes — distances absolues — , ce qui est une condition bien plus forte.

Lemme 5.1.1 (bi-Lipschitz implique quasisymétrique) *Une fonction L-bi-Lipschitz est $L^2 t$-quasisymétrique.*

Preuve : Soit $f : X \longrightarrow Y$ une fonction L-bi-Lipschitz.
On a

$$\frac{1}{L} d_{X}\left(x, y\right) \leq d_{Y}\left(f(x), f(y)\right) \leq L d_{X}\left(x, y\right)$$

En particulier, $d_{X}\left(x, , a\right) \leq L d_{Y}\left(f(x), f(a)\right)$.
Soit $a, b, x \in X$ tels que $d_{X}\left(x, a\right) \leq t d_{X}\left(x, b\right)$

alors

$$d_Y\left(f(x), f(a)\right) \leq L\ d_X\left(x, a\right) \leq Lt\ d_X\left(x, b\right) \leq L^2 t\ d_Y\left(f(x), f(b)\right)$$

$\square$

Proposition 5.1.1 (image quasisymétrique d'un espace borné) *Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application η-quasisymétrique et soient $A \subset B \subset X$ des ensembles tels que $0 < \operatorname{diam} A < diamB < \infty$ alors $\operatorname{diam} f(B) < \infty$ et*

$$\left\{2\eta\left(\frac{\operatorname{diam} B}{\operatorname{diam} A}\right)\right\}^{-1} \leq \frac{\operatorname{diam} f(A)}{\operatorname{diam} f(B)} \leq \eta\left(\frac{2\operatorname{diam} A}{\operatorname{diam} B}\right)$$

Preuve : La preuve étant très technique elle ne sera pas présentée ici. Le lecteur intéressé pourras consulter [Heinonen, 1999, page 72] pour de plus amples informations.

$\square$

5.2 Plongement d'espaces doublants

Définition 5.2.1 (espace métrique doublant) *Un espace métrique est dit doublant si il existe une constante $C_1 \geq 1$ telle que tout ensemble de diamètre d peut être recouvert par au plus C_1 ensembles de diamètre au plus $d/2$.*
*Cette constante C_1 est appellée la **constante de doublement** de X.*

Remarque 5.2.1 Il est clair que tout sous-ensemble d'un espace doublant est doublant (avec la même constante C_1).

Proposition 5.2.1 (image quasisymétrique d'un doublant) *L'image d'un espace doublant par une application quasisymétrique est un espace doublant.*

Preuve : Soit $f : X \longrightarrow Y$ un homéomorphisme quasisymétrique. Il faut montrer que toute boule B de diamètre d peut être recouverte par au plus C_2 ensembles de diamètre au plus $d/4$.
Soit $B = B(y, R)$ et $L \in \mathbb{R}$ tel que

$$L = \sup_{z \in B} d\left(f^{-1}(y), f^{-1}(z)\right)$$

Comme X est doublant, on peut recouvrir $f^{-1}(B)$ par au plus $C_1(\epsilon)$ ensembles de diamètre au plus $\epsilon 2L$ pour tout $\epsilon \leq \frac{1}{2}$. Soient $A_1, \ldots, A_p$ de tels ensembles avec $p = p(\epsilon) \leq C_1(\epsilon)$.
Sans limiter la généralité, on peut supposer que $A_i \subset f^{-1}(B)$ pour tout $i = 1, \ldots, p$. Ainsi, on a $f(A_i) \subset B$ pour tout $i = 1, \ldots, p$ et $f(S_1), \ldots, f(A_p)$

recouvrent B.
Par la proposition 5.1.1 on a

$$\begin{aligned} \operatorname{diam} f(A_i) &\leq \operatorname{diam} B \cdot \eta\left(\frac{2\operatorname{diam} A_i}{\operatorname{diam} f^{-1}(B)}\right) \\ &\leq d\cdot\eta\left(\frac{4\epsilon L}{L}\right) \\ &\leq d\eta(4\epsilon) \end{aligned} \tag{5.1}$$

Il suffis de choisir un ϵ suffisament petit pour que $\eta(4\epsilon) \leq 1/4$ pour que la proposition soit démontrée.

□

5.3 Plongement d'un espace flocon

Lemme 5.3.1 *Soit X un espace métrique, (E, d_E) un espace de Hilbert de dimension finie, A,B et C trois constantes positives et $\tau \in (0,1)$. Si il existe une suite de fonctions $\phi_j : X \longrightarrow E$ telles que*

(1) $d_E(\phi_j(s), \phi_j(t)) \geq A$ *si $s,t \in X$ tels que $\tau^{j+1}C < d(s,t) \leq \tau^j C$*

(2) $d_E(\phi_j(s), \phi_j(t)) \leq B \min\{\tau^{-j} d(s,t), 1\}$ $\forall s,t \in X$

alors pour tout $\epsilon \in (0,1)$ il existe un plongement L-bi-Lipschitz f de (X, d^ϵ) dans $\mathbb{R}^N$ avec $L \geq 1$ tel que

$$\forall s,t \in X, \qquad \frac{1}{L} d^\epsilon(s,t) \leq \|f(s) - f(t)\| \leq L d^\epsilon(s,t)$$

De plus, L et N ne dépendent que des données ($\operatorname{dim} E, A, B, \tau$ et ϵ).

Preuve : Soit F un espace de Hilbert de dimension $2d$, $d \geq 1$, et $(e_1, \ldots, e_{2d})$ une base orthonormée de F. On peut étendre cette base (e_j) périodiquement à tout les entiers $j \in \mathbb{Z}$ en posant $e_{2d+j} = e_j$.
Nous definissons maintenant la fonction $f : X \longrightarrow E \otimes F$ telle que, pour tout $s \in X$,

$$f(s) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \tau^{j\epsilon} \phi_j(s) \otimes e_j$$

Affirmation : f satisfait la conclusion du lemme
Nous allons estimer $d_{E\otimes F}(f(s), f(t))$ pour $s,t \in X$ donnés.
Soit l l'unique entier tel que $\tau^{l+1} < d(s,t) \leq \tau^l$. On a que, pour tout $j \geq l$ et $k < l$ entiers, $\tau^{l+1-j} > 1$ et $\tau^{l-k} < 1$ d'où

$$1 < \tau^{l+1-j} < d(s,t)\,\tau^{-j}$$

et

$$d(s,t)\,\tau^k \leq \tau^{l-k} < 1$$

• borne supérieure : On a

$$\begin{aligned}
d_{E\otimes F}\left(f(s),f(t)\right) &\leq \sum_{j\geq l} \tau^{j\epsilon} d_E\left(\phi_j(s),\phi_j(t)\right) + \sum_{j<l} \tau^{j\epsilon} d_E\left(\phi_j(s),\phi_j(t)\right) \\
&\leq B\sum_{j\geq l}\tau^{j\epsilon} + B\sum_{j<l}\tau^{j\epsilon} d\left(s,t\right)\tau^{-j} && \text{par (2)} \\
&\leq B\tau^{l\epsilon}\sum_{j\geq 0}\left(\tau^{\epsilon}\right)^j + B\tau^{j(\epsilon-1)} d\left(s,t\right)\sum_{j>0}\left(\tau^{(1-\epsilon)}\right)^j \\
&\leq C\left(\tau^{l\epsilon} + d\left(s,t\right)\tau^{l(\epsilon-1)}\right) \\
&\leq C\left(d^{\epsilon}(s,t)\right)
\end{aligned}$$

Avec C est une constante ne dépendant que des données, car $d\left(s,t\right)\leq\tau^l$. $\sharp$

• borne inférieure : On a

$$\begin{aligned}
d_{E\otimes F}\left(f(s),f(t)\right) \geq & d_{E\otimes F}\left(\sum_{-d\leq j-l<d}\tau^{j\epsilon}\left(\phi_j(s),\phi_j(t)\right)\right) \\
& - \sum_{j\geq d+l}\tau^{j\epsilon} d_E\left(\phi_j(s),\phi_j(t)\right) - \sum_{j<l-d}\tau^{j\epsilon} d_E\left(\phi_j(s),\phi_j(t)\right)
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Or, pour les mêmes raisons que dans la première partie, les deux sommes du milieu valent au moins $-C\tau^{(d+l)\epsilon}$ pour celle du milieu et $-C\tau^{(l-d)(\epsilon-1)}d\left(s,t\right)$ pour la dernière.
De plus, la base $e_1,\ldots,e_{2d}$ étant orthonormale, les termes de la première somme sont mutuellement orthogonaux, donc sa norme vaut au moins $\tau^{l\epsilon}d\left(\phi_l(s),\phi_l(t)\right)\geq\tau^{l\epsilon}A$ par (1).
Nous avons donc

$$\begin{aligned}
d\left(f(s),f(t)\right) &\geq \tau^{l\epsilon}A - C\tau^{(d+l)\epsilon} - C\tau^{(l-d)(\epsilon-1)}d\left(s,t\right) \\
&\geq Ad^{\epsilon}(s,t) - Cd^{\epsilon}(s,t)\tau^{d\epsilon} - Cd^{\epsilon}(s,t)\tau^{-d(\epsilon-1)} \\
&\geq \left(A - C\tau^{d\epsilon} - C\tau^{-d(\epsilon-1)}\right)d^{\epsilon}(s,t)
\end{aligned} \tag{5.3}$$

En choisissant maintenant un d sufisament grand nous obtenons la borne cherchée. $\sharp$
Dès lors, si nous posons $N=\dim E\cdot\dim F$, on a que $E\otimes F$ est isomorphe à $\mathbb{R}^N$, ce qui suffit à démontrer le lemme.

□

Le théorème suivant est dû à Assouad.

THÉORÈME 5.3.1 (PLONGEMENT BI-LIPSCHITZ D'UN FLOCON)
Toute version flocon d'un espace métrique doublant admet un plongement bi-Lipschitz dans un certain espace Euclidien.

PREUVE : Fixons $\tau = \frac{1}{2}$ et $j \in \mathbb{Z}$.
Nous allons construire une fonction $\phi = \phi_j : X \longrightarrow \mathbb{R}^M$ telle que les conditions (1) et (2) du lemme 5.3.1 seront vérifiées avec $A = \frac{1}{2}$ et $B = 8C_0$. Ici M et C_0 sont des constantes dépendant uniquement de la constante de doublement de X.
Par le lemme 5.3.1 cela suffit.

Posons $c = \frac{1}{4}\tau^{j+1}$ et soit Y un c-réseau dans X. On a

$$\bigcup_{y \in Y} B(y, c) = X \qquad \text{et } d\left(y, y'\right) \geq c$$

pour tout $y, y' \in Y$. Par la proposition 1.1.1 un tel c-réseau existe.

Dès lors, pour tout $y \in Y$, l'ensemble $Y_y = Y \cap \{x \in X | d(x, y) \leq 12c\}$ est de cardinalité au plus M, avec M ne dépendant que de la constante de doublement de X.

Considérons maintenant une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_M)$ de $\mathbb{R}^M$ en pensant aux vecteurs e_i comme des **couleurs** .
Une **coloration** de Y est une application

$$k : Y \longrightarrow \{1, \ldots, M\}$$

telle que $k(y) \neq k(y')$ si $d(y, y') \leq 12c$. Une telle coloration existe, car l'on peut modéliser l'ensemble Y par un graphe dont le degré maximal d'un sommet est M en reliant entre eux tout les points de Y se trouvant à une distance moindre que $12c$. Par [Bollobàs, 1998, théorème 1, chapitre V], une coloration de ce graphe n'utilisera au plus que M couleurs.

Fixons donc une telle coloration k de Y et définissons une fonction
$\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}^M$ telle que, pour tout $s \in X$,

$$\phi(s) = \sum_{y \in Y} g_y(s) e_{k(y)} \tag{5.4}$$

où $g_y(s) = \frac{1}{2c} \max\{2c - d(s, y), 0\}$.

AFFIRMATION : ϕ est la fonction cherchée.

En effet, il faut tout d'abord observer que $g_y(s) \neq 0$ si et seulement si $d(s, y) \leq 2c$. En particulier, il existe une constante C_0 telle que la somme dans la definition de ϕ (équation 5.4) comporte au plus C_0 termes non nuls. On peut de plus remarquer que

$$|g_y(s) - g_y(t)| \leq \frac{1}{2c} d(s,t) = 2\tau^{-(j+1)} d(s,t) = 4\tau^{-j} d(s,t)$$

puisque $c = \frac{1}{4}\tau^{j+1}$ et $\tau = \frac{1}{2}$.
On tire de cela que

$$\|\phi(s) - \phi(t)\| \leq 2C_0 4\tau^{-j} d(s,t)$$

et que

$$\|\phi(s) - \phi(t)\| \leq \|\phi(s)\| + \|\phi(t)\| \leq 2\sqrt{C_0}$$

puisque $|g_y(s)| \leq 1$ pour tout $s \in X$.
On a donc prouver la deuxième hypothèse du lemme 5.3.1.

Finalement, posons s, t tels que $4c = \tau^{j+1} < d(s,t) < \tau^j = 8c$. Les vecteurs $\phi(s)$ et $\phi(t)$ sont orthogonaux — car la base $(e_1, \ldots, e_M$ est orthonormale. On a donc

$$\|\phi(s) - \phi(t)\|^2 = \sum_{y \in Y} |g_y(s)|^2 + \sum_{y \in Y} |g_y(t)|^2$$

De plus, il existe $y \in Y$ tel que $d(y,s) < c$ (car Y est un c-réseau) donc il existe $y \in Y$ tel que $|g_y(s)| = \frac{1}{2c}(2c - d(s,y)) = \frac{1}{2}$. En d'autre termes,

$$\|\phi(s) - \phi(t)\|^2 \geq \frac{1}{2}$$

et la première hypothèse du lemme 5.3.1 est vérifiée.

Le théorème est donc prouvé par application du lemme 5.3.1.

□

5.4 Le théorème de plongement quasisymétrique

Théorème 5.4.1 (plongement quasisymétrique)
Un espace métrique se plonge de manière quasisymétrique dans un certain espace Euclidien si et seulement si il est doublant.

Preuve : La nécessité a été prouvée par la proposition 5.2.1 (p 21) car l'application inverse du plongement est encore quasisymétrique. La suffisance est en outre assurée par le théorème 5.3.1 (p 24).

□

Chapitre 6

Mesures doublantes

6.1 Espaces doublants

6.1.1 Mesure doublante

Définition 6.1.1 (mesure doublante)
Une mesure μ sur un espace métrique X est dite doublante (ou possédant la propriété de doublement) si il existe une constante $C(\mu) \geq 1$ telle que

$$\mu(B(x, 2r)) \leq C(\mu) \cdot \mu(B(x, r)), \qquad \forall x \in X \ r > 0$$

6.1.2 Espace doublant

Définition 6.1.2 (espace doublant)
Un espace X est dit doublant si et seulement si il existe une constante $C_1 \geq 1$ telle que tout ensemble de diamètre d peut être recouvert par au plus C_1 ensembles de diamètres au plus $\frac{d}{2}$.

6.2 Dimension de Assouad et mesures α-homogènes

6.2.1 dimension de Assouad et autres dimensions

Remarque 6.2.1 (recouvrement des espaces doublants) Tout sous-ensemble de diamètre d peut être recouvert par au plus $C_1(\epsilon)$ sous-ensembles de diamètre au plus ϵd.
On appelle **fonction de recouvrement de X** la fonction C_1, qui peut être choisie de la forme

$$C_1(\epsilon) = C\epsilon^{-\beta} \qquad \text{avec } C \geq 1 \text{ et } \beta > 0$$

Définition 6.2.1 (dimension de Assouad)
On appelle dimension de Assouad de X, notée $\dim_A X$, l'infimum des β définis comme dans la remarque 6.2.1.

Proposition 6.2.1 (comparaison des dimensions) *Soit (X,d) un espace métrique, l'inégalité suivante à lieu :*

$$\dim_T X \leq \dim_H X \leq \dim_A X$$

Preuve :

• $\dim_T X \leq \dim_H X$: Ce résultat à déja été prouvé par la proposition 2.1.2 ♯

• $\dim_H X \leq \dim_A X$: Soit $s = dim_H X$ et $\beta = \dim_A X$.
Sans limiter la généralité, on peut supposer $\beta < \infty$, car sinon la proposition est triviale.
Il faut prouver que $\mathcal{H}^\beta(X) < \infty$, car cela implique que $\beta \geq s$.
Or

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^\beta(X) &= \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \inf \sum_{U_i} (\operatorname{diam} U_i)^\beta \\
&\leq \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} C\epsilon^{-\beta}(\epsilon d)^\beta \\
&\leq Cd^\beta \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \epsilon^{\beta-\beta} \\
&\leq Cd^\beta < \infty
\end{aligned}$$

♯

Ce qui prouve la proposition.

□

6.2.2 mesures α-homogènes

Définition 6.2.2 (mesure α-homogène)
Une mesure μ sur un espace métrique X est dite α-homogène si il existe deux constantes $\alpha > 0$ et $C \geq 1$ telles que

$$\frac{\mu(B(x,r))}{\mu(B(x,R))} \geq C^{-1}\left(\frac{r}{R}\right)^\alpha \qquad \forall x \in X, 0 < r \leq R$$

6.3 Espaces métriques complets et mesure doublante

Théorème 6.3.1 (espaces complets et mesure α-homogène)
Un espace doublant complet admet une mesure α-homogène pour tout α supérieur à sa dimension de Assouad.

Preuve : Cette preuve s'appuye sur le cas compact qui a déja été traité dans [Heinonen, 1999, page 92], nous nous intéressons ici au cas où X est un espace doublant non-compact et nous construisons une suite croissante de compacts convergant vers X.
Considérons $x_0 \in X$ et définissons $X_k = B(x_0, k)$ pour chaque $k \in \mathbb{N}$. On

a alors X_k doublant et borné, donc X_k est **totalement borné** (pour tout $\epsilon > 0$ il existe un ϵ-réseau fini dans X_k) et complet, donc compact.
Il existe donc une mesure α-homogène μ_k sur X_k pour tout $k \in \mathbb{N}$ que l'on peut normaliser. On obtiens donc une mesure μ_k telle que $\mu_k(X_1) = 1$ et $\mu_k(X_p) \leq cp^\alpha \mu_k(X_1) = cp^\alpha$ pour tout $p \leq k$.
Considérons maintenant $p \in \mathbb{N}$ et une sous-suite $\{\tilde{\mu_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ de $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Soit $C(X_p)$ l'espace de Banach des fonctions continues de X_p dans $\mathbb{R}$ munit de la norme du supremum. Pour $j \geq p$ nous définissons une fonctionnelle linéaire $I_j : C(X_p) \longrightarrow \mathbb{R}$ en posant $I_j(f) = \int_{X_p} f d\tilde{\mu_j}$ pour tout $f \in C(X_p)$. On a alors $\|I_j\|_\infty = \tilde{\mu_j}(X_p) \leq cp^\alpha$. Comme la boule fermée unité induite par la topologie faible-$\star$ est compacte (cf. [Stuart, 2001]) et que $C(X_p)$ est séparable et que l'on peut munir d'une métrique, on peut considérer la suite $\left\{\frac{I_j}{cp^\alpha}\right\}_{j\geq p}$.
On obtient ainsi une fonctionnelle $J_p \in C(X_p)^\star = \{f : C(X_p) \longrightarrow \mathbb{R} \| \|f\|_\infty < \infty\}$ telle que pour tout $f \in C(X_P)$ il existe une sous-suite $\{I_{j_i}\}_{j\geq p}$ telle que $I_{j_i}(f) \xrightarrow[i\to\infty]{} J_p(f)$.
Ainsi, par induction sur p, nous pouvons construire une sous-suite $\{\mu_j^*\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\left\{\int_{X_p} f d\mu_j^*\right\}_{j\geq p}$ converge pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $f \in C(X_p)$.

Notons par $C_{co}(X_p)$ l'espace vectoriel des fonctions continues de X_p dans $\mathbb{R}$ à support compact. On peut alors définir une fonctionnelle $I : C_{co}(X_p) \longrightarrow \mathbb{R}$ en posant

$$I(f) = \lim_{p\leq j\to\infty} \int_{X_p} f d\mu_j^* \qquad \text{si } f \in C_{co}(X_p),\ p \in \mathbb{N},\ \text{et } \operatorname{supp}(f) \subset X_p$$

Ainsi, I est une fonctionnelle linéaire **non-négative** ($I(f) \geq 0$ si $f \geq 0$), alors, par le théorème de représentation de Riesz, il existe une mesure borellienne μ sur X telle que $I(f) = \int_X f d\mu$ pour toute fonction $f \in C_{co}(X)$ et $\mu(F) < \infty$ si $F \subset X$ compact.
Affirmation : μ est la mesure cherchée
Tout d'abord $\mu(X_1) = \mu(B(x_0, 1)) < \infty$.
Il reste a voir l'inégalité de 6.2.2.
Soit $x \in X,\ r > 0,\ \lambda \geq 1,$ et $\epsilon \in (0, 1)$. Choisisons $f, g \in C_{co}(X_p)$ telles que les six conditions (f_1) à (g_3) soient remplies,

$$0 \leq f \leq 1\ (f_1), \quad f\Big|_{B(x,\lambda r)} = 1\ (f_2), \quad \operatorname{supp}(f) \subset B(x, (1+\epsilon)\lambda r)\ (f_3)$$
$$0 \leq g \leq 1\ (g_1), \quad g\Big|_{B(x,(1-\epsilon) r)} = 1\ (g_2), \quad \operatorname{supp}(g) \subset B(x, r)\ (g_3)$$

Choisissons $p \in \mathbb{N}$ tel que $B(x, 2\lambda r) \subset X_p$, $j \geq p$ assez grand pour que $|\int_{X_p} h d\mu - \int_{X_p} h d\mu_j^*| < \epsilon$ pour $h = f$ et $h = g$. Posons $a_\epsilon = c\left(\lambda\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}\right)^\alpha$, on a alors

$$\begin{aligned}
\mu(B(x,\lambda r)) &\leq \int_{X_p} f d\mu \leq \int_{X_p} f d\mu_j^* + \epsilon \\
&\leq \mu_j^*(B(x,(1+\epsilon)\lambda r) + \epsilon \quad \text{par } (f_3),\ (f_1) \text{ et } (f_2) \\
&\leq a_\epsilon \mu_j *(B(x,(1-\epsilon)r) + \epsilon \quad \text{car } \mu_j\ \alpha\text{-homogène} \\
&\leq a_\epsilon \int_{X_p} g d\mu_j^* + \epsilon \quad \text{par } (g_2),\ (g_1) \text{ et } (g_3) \\
&\leq a_\epsilon \int_{X_p} g d\mu + a_\epsilon \epsilon + \epsilon \\
&\leq a_\epsilon \mu(B(x,r) + a_\epsilon \epsilon + \epsilon \quad \text{par } (g_3),\ (g_1) \text{ et } (g_2)
\end{aligned}$$

Faisant maintenant tendre ϵ vers 0, on obtient $\mu(B(x,\lambda r)) \leq c\lambda^\alpha \mu(B(x,r))$ puisque $a_\epsilon \to c\lambda^\alpha$.
Enfin, pour trouver une boule B de mesure non nulle, il suffit de considérer une fonction $f \in C_{co}(X)$ telle que $0 \leq f \leq 1$, $f\Big|_{X_1} = 1$ et $\mathrm{supp}(f) \subset X_2$. On a alors $\int_{X_2} f d\mu_j^* \geq \mu_j^*(X_1) = 1$ pour tout $j \geq 2$, ainsi $\mu(X_2) \geq \int_{X_2} f d\mu \geq 1$

$\square$

Théorème 6.3.2 (Espaces complets et mesure doublante)
Un espace doublant complet admet une mesure doublante si et seulement si sa dimension de Assouad est finie.

Preuve : Ce théorème est en fait un corollaire du théorème 6.3.1.
En effet, toute mesure α-homogène est doublante de constante $C_1 = 2^\alpha C$.

$\square$

Bibliographie

[Ambrosio, 1999] Ambrosio, L. (1999). Geometric measure theory and application to the calculus of variations. Projet de notes de cours.

[Bollobàs, 1998] Bollobàs, B. (1998). *Modern Graph Theory.* Springer-Verlag.

[Edgar, 1992] Edgar, G. A. (1992). *Measure, Topology, and Fractal Geometry.* Springer-Verlag.

[Evans and Gariepy, 1992] Evans, L. C. and Gariepy, R. F. (1992). *Measure Theory and Fine Properties of Functions.* CRC Press.

[Falconer, 1985] Falconer, K. J. (1985). *The Geometry of Fractal Sets.* Cambridge University Press.

[Falconer, 1990] Falconer, K. J. (1990). *Fractal Geometry Mathematical Foundations and Applications* . John Wiley & Sons.

[Heinonen, 1999] Heinonen, J. (1999). Lectures on analysis on metric spaces. Projet de livre.

[Luukkainen and Sakman, 1998] Luukkainen, J. and Sakman, E. (1998). Every complete doubling metric space carries a doubling mesure.

[Massopust, 1994] Massopust, P. R. (1994). *Fractal Functions, Fractal Surfaces, and Wavelets.* Academic Press.

[Munkres, 1975] Munkres, J. R. (1975). *Topology, a First Course.* Prentice Hall.

[Nier, 2000] Nier (2000). Axiome du choix et conséquences. http ://www.maths.univ-rennes1.fr/ nier/enseignement.html.

[Rogers, 1998] Rogers, C. (1998). *Hausdorff Measures.* Cambridge University Press, seconde edition.

[Stuart, 2001] Stuart, C. (2001). Cours d'analyse avancée b : analyse fonctionelle dans les espaces normés. notes manuscrites et polycopiées du cours.

[Troyanov, 2000] Troyanov, M. (2000). Cours d'analyse avancée a : mesure et intégration. notes manuscrites du cours.

[Wilansky, 1970] Wilansky, A. (1970). *Toplogy for Analysis.* Ginn and Company.

Index

F

H

I

L

M

N

O

P

Q

R

S

T