ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Complexes simpliciaux et triangulation

Victor Mouquin

Professeur : Marc Troyanov

17 février 2006

Résumé

Le but de ce travail est d'introduire des espaces topologiques construits de manière très simple : les complexes simpliciaux.
La notion de simplex généralise celle de triangle en plus grande dimension. Un complexe simplicial est une réunion de simplex, ce qui en fait des objets très intuitifs. De nombreux problèmes peuvent être traités de manière purement combinatoire grâce à eux.
Dans ce travail nous verrons deux applications importantes des complexes simpliciaux. La première est le théorème d'approximation simpliciale, qui donne une méthode pour approximer des fonctions continues au moyen de fonctions linéaires par morceaux.

La deuxième application est le théorème de Rado : Toute surface est triangulable, c'est-à-dire que l'on peut "remplir" une surface à l'aide de triangles disjoints.

Table des matières

Chapitre 1

Complexes simpliciaux

1.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons introduire les objets de bases de notre travail, ainsi que leurs propriétés les plus fondamentales. Plusieurs théorèmes seront donnés sans leur démonstration et nous nous efforcerons de définir le minimum nécessaire une la bonne compréhension du projet.
Ce chapitre et le suivant sont essentiellement tirés de [5].

Définition 1.1. Soit V un espace vectoriel. On dit qu'un ensemble de vecteurs $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ est en *position générale* si les vecteurs $v_1-v_0, \dots, v_k-v_0$ sont linéairement indépendants.

Définition 1.2. Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ des vecteurs en position générale.
Le *simplex* (fermé) $[v_0, v_1, \dots, v_k]$ est le sous-ensemble convexe de V généré par les vecteurs $v_0, v_1, \dots, v_k$, i.e,

$$[v_0, v_1, \dots, v_k] := \{\sum_{i=0}^{k} a_i v_i \ \mid 0 \leq a_i \forall\ 0 \leq i \leq k, \sum_{i=0}^{k} a_i = 1\}.$$

k est appelé la *dimension* du simplex. On nomme un simplex de dimension k un k-simplex.

Par définition, tout $x \in [v_0, v_1, \dots, v_k]$ s'écrit $x = \sum_{i=0}^{k} a_i v_i$ pour des $a_i \geq 0$ avec $\sum_{i=0}^{k} a_i = 1$. Mais de plus on a unicité de l'écriture.

Proposition 1.1. *Tout $x \in [v_0, v_1, \dots, v_k]$ s'écrit de manière unique comme combinaison convexe des $v_0, v_1, \dots, v_k$. En d'autres termes, si*

$$\sum_{i=0}^{k} a_i v_i = \sum_{i=0}^{k} b_i v_i$$

pour des $a_i, b_i \geq 0$ avec $1 = \sum_{i=0}^{k} a_i = \sum_{i=0}^{k} b_i$, alors $a_i = b_i$ pour tout $i = 0, \dots, k$.

Démonstration. Ecrivons

$$v = \sum_{i=0}^{k} a_i v_i = \sum_{i=0}^{k} b_i v_i.$$

Alors

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^{k} (a_i - b_i) v_i \\ &= \sum_{i=0}^{k} (a_i - b_i) v_i - (\sum_{i=0}^{k} a_i - \sum_{i=0}^{k} b_i) v_0 \\ &= \sum_{i=0}^{k} (a_i - b_i)(v_i - v_0). \end{aligned}$$

Puisque les vecteurs $v_1 - v_0, \ldots, v_k - v_0$ sont linéairement indépendants, on a $a_i = b_i$, pour tout $i \geq 0$. □

Définition 1.3. Si $x = \sum_{i=0}^{k} a_i v_i \in [v_0, v_1, \ldots, v_k]$, on appelle les a_i (où $a_i(x)$) les *coordonées barycentriques* de x.

Définition 1.4. Soit $[v_0, v_1, \ldots, v_k]$ un k-simplex. L'ensemble des points x tels que $a_i(x) > 0$ est dit le *simplex ouvert*, et on le note $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$. On notera aussi un simplex fermé $[s]$ et le simplex ouvert correspondant (s).
Les *sommets* d'un simplex fermé $[s] = [v_0, v_1, \ldots, v_k]$ sont les vecteurs $v_0, \ldots, v_k$.
Les *faces fermées* de $[s]$ sont les simplex fermés $[v_{j_0}, v_{j_1}, \ldots, v_{j_l}]$, où $\{j_0, j_1, \ldots, j_l\}$ est un sous-ensemble non vide de $\{0, 1, \ldots, k\}$.
De même les *faces ouvertes* de $[s]$ sont les simplex ouverts $(v_{j_0}, v_{j_1}, \ldots, v_{j_l})$.

Remarques 1.1.

1. Un sommet de $[s]$ est une face ouverte et fermée de dimension 0.
2. Selon la définition, $[s]$ est lui-même une de ses faces.
3. Le simplex ouvert (s) est un ouvert de $[s]$ (par la topologie induite). Mais une face ouverte de $[s]$ n'est pas forcément un ouvert de $[s]$ (pensez à une face ouverte de dimension 1 qui est un segment).
4. Un simplex fermé est la réunion disjointe de ses faces ouvertes.

Nous sommes maintenant prêt pour la définition centrale de ce travail, celle de complexes simpliciaux. Un complexe simplicial est une collection finie de simplex.

Définition 1.5. Un *complexe simplicial* (géométrique) K est une réunion finie de simplex ouverts de $\mathbb{R}^n$ telle que :

1. si $(s) \in K$, alors toutes les faces ouvertes de (s) sont également dans K ;
2. si $(s_1), (s_2) \in K$ et $(s_1) \cap (s_2) \neq \emptyset$, alors $(s_1) = (s_2)$.

La *dimension* de K est la plus grande dimension des simplex de K.

Notation. Si K est un complexe simplicial, on note $|K|$ la réunion de ses simplex :

$$|K| := \bigcup_{(s)\in K} (s) = \bigcup_{(s)\in K} [s].$$

Remarques 1.2.

1. Si $[s]$ est un simplex fermé, la collection de toutes ses faces ouvertes est un complexe simplicial, que l'on notera s.
2. Pour la définition d'un complexe simplicial, nous avons repris celle de [5] qui restreint sa définition à $\mathbb{R}^n$. Mais à notre avis, on pourrait l'étendre à n'importe quel $\mathbb{R}$-espace vectoriel (topologique).

Définition 1.6. Soit K un complexe simplicial. Un *sous-complexe* L de K est un complexe simplicial tel que si $(s) \in L$ alors $(s) \in K$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \leq dim\ K$. Le *n-squelette* K^n de K est $K^n := \{(s) \in K \mid dim\ s \leq n\}$.

Il n'est pas difficile de se convaincre que le n-squelette d'un complexe simplicial est un sous-complexe.

1.2 Subdivisions

Si l'on se donne un complexe simplicial K, une opération naturelle consiste à subdiviser K, c'est-à-dire à obtenir un nouveau complexe à partir de K dont les simplex sont "plus petits".

Définition 1.7. Soit K un complexe simplicial. Une *subdivision* de K est un complexe S avec $|K| = |S|$ et tel que chaque simplex ouvert de S est contenu dans un simplex ouvert de K.

Un type de subdivision particulièrement agréable à utiliser est la subdivision barycentrique, car elle peut être facilement itérée.
Ce processus a une certaine importance pratique, quand on veut appliquer le théorème d'approximation simpliciale (voir le chapitre prochain).

Définition 1.8. Soit un k-simplex s. Le *barycentre* de s est le point $x \in s$ de coordonée barycentrique $a_i(x) = 1/(k+1)$, pour tout $i = 0, \ldots, k$. On le note $b(s)$.

Proposition 1.2. *Soit K un complexe simplicial. Définissons sur K un ordre partiel par $s_1 \leq s_2$ si et seulement si s_1 est une face de s_2. Alors*

$$K^{(1)} := \{(b(s_0), b(s_1), \ldots, b(s_k)) \mid s_0 < \ldots < s_k; s_0, \ldots, s_k \in K\}$$

(où $s_1 < s_2 \Leftrightarrow s_1 \leq s_2$ et $s_1 \neq s_2$) est une subdivision de K, appelée la ***première subdivision barycentrique*** *de K.*

On admettra cette proposition sans preuve.

Notation. $K^{(n)} := \underbrace{(((K^{(1)})^{(1)})\ldots)^{(1)}}_{\text{n fois}}$ est la n-ème subdivision barycentrique.

Définition 1.9. Soit K un complexe simplicial dans $\mathbb{R}^n$, où $\mathbb{R}^n$ est muni de la métrique usuelle. Alors

$$\text{mesh}(K) := \max_{s \in K} \text{diam}([s]).$$

Comme un simplex est un compact, cette définition a un sens.

Lemme 1.3. *Soit s un simplex (dans $\mathbb{R}^n$). Alors diam$([s]) = \|v_2 - v_1\|$, où v_1 et v_2 sont deux sommets de $[s]$.*
En particulier, si K est un complex simplicial, mesh$(K) = \|v_2 - v_1\|$, où v_1 et v_2 sont deux sommets d'un simplex de K.

Démonstration. Soient s un simplex et $v_1, v_2 \in [s]$ deux points tels que $\text{diam}([s]) = \|v_2 - v_1\|$ (ils existent, car $[s]$ est un compact).
Par l'absurde, supposons que v_2 n'est pas un sommet de s. Alors v_2 est dans un simplex ouvert de dimension > 0. Il existe donc $w_1, w_2 \in [s]$ avec $w_1 \neq w_2$ tels que

$$v_2 = tw_1 + (1-t)w_2, \quad t \in]0, 1[$$

(car $[s]$ est convexe). Mais la fonction

$$f(t) = \|(tw_1 + (1-t)w_2) - v_1\|, \quad t \in]0, 1[$$

n'admet pas de maximum, ce qui contredit la maximalité de $\|v_2 - v_1\|$. □

Proposition 1.4. *Soit K un complex simplicial de dimension m. Alors mesh$(K^{(1)}) \leq (m/(m+1))$mesh(K).*
En particulier, $\lim_{n \to \infty}$ mesh$(K^{(n)}) = 0$.

[Sans preuve]

1.3 Complexes abstraits

On peut observer que si plusieurs propriétés des complexes simpliciaux sont indépendantes de leur structure géométrique, elles dépendent uniquement de leur structure "combinatoire". C'est cette observation qui motive la prochaine

Définition 1.10. Un *complexe abstrait* est un couple (κ, Σ) où K est un ensemble (fini ou infini) et Σ une famille de sous-ensembles finis de κ, appelés les *simplex* telle que :

1. tout $\alpha \in \kappa$ appartient à au moins un simplex et au plus un nombre fini de simplex ;
2. si $s \in \Sigma$, alors $s' \in \Sigma$ pour tout $s' \subseteq s$ (hérédité).

La dimension d'un simplex $s \in \Sigma$ est par définition $|s| - 1$. Un simplex de dimension n est appelé un n-simplex. Un 0-simplex est un *sommet* de κ.
La dimension d'un complex abstrait κ est la dimension maximum de ses simplex (s'il n'y a pas de maximum, le complex est de dimension infinie).
En général, la famille Σ est implicite, et on appelle simplement κ un complex abstrait.

Si K est un complexe simplicial géométrique, on peut aisément se convaincre qu'il existe un complexe abstrait fini κ qui lui correspond. Réciproquement, on peut montrer qu'un complexe abstrait fini a une "réalisation" en tant que complexe géométrique. En fait il existe en général plusieurs réalisations qui le plus souvent ne sont pas isométriques entre elles.
Comme nous avons permis dans notre définition des complexes abstraits infinis, nous avons besoin de généraliser cette notion de réalisation.

Définition 1.11. Soit κ un complexe abstrait. La *réalisation* de κ est un ensemble κ_g de fonctions définies sur κ tel que :

1. $\lambda(\alpha) \geq 0$ pour tout $\alpha \in \kappa$ et tout $\lambda \in \kappa_g$;
2. pour tout $\lambda \in \kappa_g$, l'ensemble des éléments $\alpha \in \kappa$ avec $\lambda(\alpha) > 0$ est un simplex ;
3. $\displaystyle\sum_{\alpha \in \kappa} \lambda(\alpha) = 1$ pour tout $\lambda \in \kappa_g$.

Si s est un simplex de κ, on obtient un sous-ensemble $s_g \subseteq \kappa_g$ en prenant tous les $\lambda \in \kappa_g$ avec $\lambda(\alpha) = 0$ si $\alpha \notin s$.
On en déduit de la condition (2) que κ_g est la réunion de tous les s_g.

Par exemple, si $s = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ est un 2-simplex, notons $\lambda_k = \lambda(\alpha_k)$, $(k = 1, 2, 3)$. Un élément de s_g peut être représenté par un triple $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ avec $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ et $\lambda_k \geq 0$, $k = 1, 2, 3$. On obtient ainsi un triangle dans $\mathbb{R}^3$.
Munissons chaque s_g de la topologie du simplex qu'il représente dans $\mathbb{R}^n$.

On munit ensuite κ_g de la topologie faible (un sous-ensemble $O \subseteq \kappa_g$ est ouvert si et seulement si $O \cap s_g$ est ouvert, pour tout simplex s de κ). On peut montrer que l'espace topologique ainsi défini est localement compact.

Chapitre 2

Le théorème d'approximation simpliciale

Le but de ce chapitre est d'exposer un résultat très important de la théorie des complexex simpliciaux.
On montrera que si l'on se donne deux complexes simpliciaux K et L, on peut approximer n'importe quelle application continue $f : |K| \to |L|$ par une fonction linéaire sur chaque simplex de K qui appartient à la même classe d'homotopie que f. De plus, cette approximation peut être aussi précise que l'on veut.

Définition 2.1. Soient K et L deux complexes simpliciaux. Une application $\varphi : |K| \to |L|$ est une *application simpliciale* si

1. pour tout sommet v de K, $\varphi(v)$ est un sommet de L ;
2. pour tout simplex $(v_0, \ldots, v_k) \in K$, les sommets $\varphi(v_0), \ldots, \varphi(v_k)$ sont les sommets d'un simplex de L ;
3. pour tout $(s) = (v_0, \ldots, v_k) \in K$ et tout $p = \sum_{i=0}^{k} a_i v_i$, on a

$$\varphi(p) = \sum_{i=0}^{k} a_i \varphi(v_i).$$

Remarques 2.1. La condition 3 revient à dire que φ est linéaire (en fait affine) sur chaque simplex de K.
φ est en particulier continue sur chaque simplex. Il n'est donc pas difficile de montrer qu'elle est continue sur tout $|K|$.
En vertu de la condition 3, φ est complétement déterminée par l'image des sommets de K.Réciproquement, si l'on se donne une application $K^0 \to L^0$ entre les sommets de K et ceux de L, elle peut être étendue en une application simpliciale si et seulement si elle satisfait la condition 2.

Notation. Puisqu'une application simpliciale φ ne dépend pas seulement de $|K|$ et de $|L|$ mais aussi de K et L, on la notera par $\varphi : K \to L$.

Définition 2.2. Soient K un complexe simplicial et v un sommet de K. *L'étoile de centre* v est par définition,

$$St(v) := \bigcup_{v\in[s]\ ;\ (s)\in K} (s).$$

Lemme 2.1. *Soit K un complexe simplicial. Pour tout sommet v de K, $St(v)$ est un ouvert de $|K|$ contenant v, et v est l'unique sommet de K qui appartient à $St(v)$.*
La famille $\{St(v)\}_{v\in K^0}$ est un recouvrement ouvert de $|K|$.

Démonstration. Fixons v un sommet de K. Pour montrer que $St(v)$ est un ouvert, montrons que son complémentaire est fermé.

$$|K| \setminus St(v) = (St(v))^c = \bigcup_{v\notin[s]\ ;\ (s)\in K} (s).$$

Mais si $v \notin [s]$, alors v n'appartient à aucune face de $[s]$, et donc $(s) \subseteq (St(c))^c$ implique que $[s] \subseteq (St(v))^c$. Donc

$$(St(v))^c = \bigcup_{(s)\subseteq(St(v))^c} [s]$$

est fermé, car un simplex fermé est un compact, donc un fermé.
v est le seul sommet dans $St(v)$, car le seul simplex ouvert qui contient un sommet est le simplex de dimension 0 qui est précisément ce sommet.
Finalement, $\{St(v)\}_{v\in K^0}$ est un recouvrement ouvert, car si $p \in |K|$, alors $p \in (s)$ pour un certain $(s) \in K$, et donc $p \in St(v)$ pour n'importe quel sommet v de (s). □

Définition 2.3. Soient K, L des complexes simpliciaux et $f : |K| \to |L|$ une fonction continue. Une application simpliciale $\varphi : K \to L$ est une *approximation simpliciale* de f si, pour tout sommet v de K,

$$f(St(v)) \subseteq St(\varphi(v)).$$

Cette définition peut sembler bizarre et difficile à se représenter intuitivement, mais les prochains résultats vont montrer qu'elle est correcte.
Le but du chapitre est de montrer qu'une telle approximation existe pour toute fonction continue.

Proposition 2.2. *Soient $f : |K| \to |L|$ une fonction continue et $\varphi : K \to L$ uneAlors pour tout $p \in |K|$, $f(p)$ et $\varphi(p)$ appartiennent à un même simplex de L.*

Démonstration. Soit $p \in |K|$. $p \in (s)$ pour un $(s) = (v_0, \dots, v_m) \in K$, et donc, pour tout $j = 0, \dots, m$,

$$f(p) \in f((s)) \subseteq f(St(v_j)) \subseteq St(\varphi(v_j)).$$

Maintenant, $f(p) \in (t)$ pour un simplex $(t) \in L$, ce qui veut dire que $(t) \cap St(\varphi(v_j)) \neq \emptyset$ pour tout $j = 0, \dots, m$. Mais puisque L est un complex simplicial et que $St(\varphi(v_j))$ est une réunion de simplex ouverts, $(t) \subseteq St(\varphi(v_j))$ pour tout j (condition 2 de la définition 2.1).
Ainsi, $\varphi(v_j))$ est un sommet de (t) pour tout $j = 0, \dots, m$. Ce qui veut dire que si, en coordonées barycentriques $p = \sum_{j=0}^{m} a_j v_j$, alors

$$\varphi(p) = \sum_{j=0}^{m} a_j \varphi(v_j) \in [t].$$

□

Corollaire 2.3. *Soit $\varphi : K \to L$ une approximation simpliciale de $f : |K| \to |L|$. Posons $d(f, \varphi) := \sup_{p \in |K|} \|f(p) - \varphi(p)\|$. Alors*

$$d(f, \varphi) \leq mesh(L).$$

Lemme 2.4. *Soit $f : K \to L$ une application simpliciale. Supposons que φ est approximation simpliciale de f. Alors $f = \varphi$.*

Démonstration. Pour tout sommet v de K, $f(v) \in f(St(v)) \subseteq St(\varphi(v))$.
Parce que f est simpliciale, $f(v)$ est un sommet de L, et par le lemme 2.1, $f(v) = \varphi(v)$. Ainsi, f et φ coïncident sur les sommets et par conséquent, ils coïncident partout puisque les deux applications sont simpliciales. □

Théorème 2.5. *Soient $f : |K| \to |L|$ une fonction continue et φ une approximation simpliciale de f. Soit K_1 un sous-complexe de K tel que la restriction de f à $|K_1|$ soit une application simpliciale.*
Alors il existe une homotopie de f à φ qui est stationnaire sur $|K_1|$.

Démonstration. Définissons $F : |K| \times [0, 1] \to |L|$ par

$$F(p, t) = t\varphi(p) + (1 - t)f(p).$$

F est bien définie, car par la proposition 2.2 $f(p)$ et $\varphi(p)$ sont dans un même simplex qui, étant un ensemble convexe, contient aussi le segment joignant les deux points. Donc $F(p, t) \in |L|$, $\forall (p, t) \in |K| \times [0, 1]$.
Il est clair que F est continue, et que $F(p, 0) = f(p)$ et $F(p, 1) = \varphi(p)$ pour tout $p \in |K|$.
F est stationnaire sur $|K_1|$ parce que $\varphi \mid_{|K_1|}$ est une approximation simpliciale de $f \mid_{|K_1|}$, et donc $f = \varphi$ par le lemme précédent. □

Remarques 2.2. En choisissant le sous-complexe vide, on obtient qu'une fonction continue est homotope à son approximation simpliciale.

Lemme 2.6. *Soit* $f : |K| \to |L|$ *une fonction continue et* $\varphi : K^0 \to L^0$ *une application entre les sommets de* K *et de* L*. Alors* φ *peut être étendue à une approximation simpliciale de* f *si et seulement si* $f(St(v)) \subseteq St(\varphi(v))$ *pour tout sommet* v *de* K*.*

Démonstration. $\underline{\Rightarrow}$: C'est évident.
$\underline{\Leftarrow}$: Il suffit juste de vérifier que φ peut être étendue en une application simpliciale, c'est-à-dire que la condition 2 de la définition 2.1 est vérifiée.
Soit $(s) = (v_0, \dots, v_r)$ un simplex de K. Alors, pour tout $j = 0, \dots, r$, $f((s)) \subseteq f(St(v_j)) \subseteq St(\varphi(v_j))$, et donc $\bigcap\limits_{j=0}^{r} St(\varphi(v_j)) \neq \emptyset$. Ce qui veut dire qu'il existe un simplex ouvert $(t) \subseteq St(\varphi(v_j))$ pour tout j. Les $\varphi(v_j)$ doivent être des sommets de (t), donc d'un simplex de L. $\square$

Avant de démontrer l'existence des approximations simpliciales, rappelons un lemme de topologie générale.

Proposition 2.7. (Lemme de Lebesgue) *Soit* (M, d) *un espace métrique compact. Alors pour tout recouvrement ouvert* $\{U_j \mid j \in J\}$ *il existe* $\epsilon > 0$ *tel que toute boule* $B(a, \epsilon)$*,* $a \in M$ *est contenue dans un ouvert* U_j *du recouvrement.*

Démonstration. Supposons le contraire : pour tout $\epsilon > 0$ il existe $a \in M$ tel que pour tout $j \in J$, $B(a, \epsilon) \not\subset U_j$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\epsilon = 1/n$. On obtient ainsi une suite $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset M$ tel que

$$\forall j \in J \;\; B(a, 1/n) \not\subset U_j. \tag{2.1}$$

Par compacité, $\lim\limits_{k \to \infty} a_{n_k} = a$ pour un certain $a \in M$ et un certaine sous-suite $\{a_{n_k}\}$. Il existe donc un $j(a) \in J$ tel que $a \in J_{j(a)}$.
Comme $U_{j(a)}$ est ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que $B(a, \delta) \subset U_{j(a)}$. Mais puisque $\lim_{k \to \infty} 1/n_k = 0$, pour un k assez grand, on aura

$$B(a_{n_k}, 1/n_k) \subset B(a, \delta) \subset U_{j(a)}.$$

Ceci contredit 2.1. $\square$

Maintenant, voici enfin le résultat tant attendu :

Théorème 2.8. *Soient* $f : |K| \to |L|$ *une fonction continue et* $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de subdivisions de* K *telle que* $\lim\limits_{n \to \infty}$ *mesh* $(K_n) = 0$ *(par exemple les subdivisions barycentriques).*
Alors il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ *et une application simpliciale* $\varphi : K_{n_0} \to L$ *qui est une approximation simpliciale de* f*.*

Démonstration. Par le lemme 2.1, on sait que $\{St(w)\}_{w\in L^0}$ est un recouvrement ouvert de $|L|$. Puisque f est continue, $\{f^{-1}(St(w))\}_{w\in L^0}$ est un recouvrement ouvert de $|K|$. Comme $|K|$ est un espace métrique compact, il existe un $\delta > 0$ tel que toute boule de $|K|$ de rayon δ est inclue dans un ouvert de ce recouvrement.
Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{mesh}(K_{n_0}) < \delta/2$. On a donc que $\mathrm{diam}([s]) \leq \delta/2$ pour tout $s \in K_{n_0}$.
Notons une boule de centre m et de rayon r par $B_m(r)$. Alors, pour tout sommet v de K_{n_0}, on a $St(v) \subseteq B_v(\delta)$. Mais $B_v(\delta) \subseteq f^{-1}(St(w_v))$ pour un sommet $w_v \in L^0$. Ainsi, pour tout sommet v de K_{n_0}, $St(v) \subseteq f^{-1}(St(w_v))$. Définissons, pour tout $v \in (K_{n_0})^0$, $\varphi(v) = w_v$. Ainsi, $\varphi : (K_{n_0})^0 \to L^0$ a la propriété que, pour tout $v \in (K_{n_0})^0$, $St(v) \subseteq f^{-1}(St(\varphi(v)))$, c'est-à-dire que $f(St(v)) \subseteq St(\varphi(v))$.
Vu le lemme 2.6, φ peut être étendue en une approximation simpliciale de f. □

Corollaire 2.9. *Soit $f : |K| \to |L|$ une fonction continue. Alors, pour tout $\epsilon > 0$ il existe des subdivisions K_n de K et L_m de L et une approximation simpliciale $\varphi : |K_n| \to |L_m|$ de f tel que $d(f, \varphi) < \epsilon$.*

Démonstration. On sait que pour tout complexe simplicial donné, il existe une subdivision de mesh arbitrairement petite.
Soit $\epsilon > 0$. Choisissons une subdivision L_m de L telle que $\mathrm{mesh}(L_m) < \epsilon$. Alors f envoie toujours $|K|$ dans $|L_m|$. Vu le théorème prédécent, il existe une subdivision K_n de K et une approximation simpliciale $\varphi : K_n \to L_m$ de f. Vu le corollaire 2.3,

$$d(f, \varphi) \leq \mathrm{mesh}(L_m) < \epsilon.$$

□

Chapitre 3

Notions de topologie des surfaces

Notre but est maintenant d'exposer un deuxième résultat important qui justifie l'étude des complexes simpliciaux : toute surface est triangulable, c'est-à-dire homéomorphe à un complexe simplicial.
Mais avant d'attaquer ce théorème, nous avons évidemment besoin de quelques notions concernant les surfaces (en particulier qu'est-ce qu'une surface ?). Comme la topologie des surfaces n'est pas l'objet principal de de travail, la plupart des propositions de ce chapitre seront énoncées sans démonstration.

Commençons avec la définition fondamentale, celle de variété topologique.

Définition 3.1. Un espace topologique M est dit une *variété topolologique de dimension n*, si les propiétés suivantes sont vérifiées :

1. M est un *espace de Hausdorff* : pour tout points $p, q \in M$, il existe des ouverts $U, V \subset M$ avec $p \in U$, $q \in V$ et $U \cap V = \emptyset$;
2. M admet une *base de la topologie dénombrable* ;
3. M est *localement homéomorphe à $\mathbb{R}^n$*, autrement dit, pour tout point $p \in M$, il existe un voisinage ouvert U de p et une application $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ telle que $\varphi : U \to \varphi(U)$ est un homéomorphisme.

Pour des exemples et une étude approfondie des variétés, référez vous à [6].

Nous pouvons maintenant définir précisément ce qu'est une surface.

Définition 3.2. Une *surface* est une variété topologique connexe de dimension 2.

Définition 3.3. Un ouvert (resp. un fermé) d'une surface S est appelé un *disque ouvert* (resp.fermé) ou une *région de Jordan ouverte* (resp. fermée) s'il est homéomorphe à un disque ouvert (resp.fermé) de $\mathbb{R}^2$.

Voici quelques propriétés de base des surfaces. La plupart sont sont aussi vraies pour des variétés quelconques.

Proposition 3.1. *Soit S une surface.*

1. *S est localement connexe par arcs (dans tout voisinage il y a un voisinage connexe par arcs).*
2. *S est connexe si et seulement si elle est connexe par arcs.*

Proposition 3.2. *Soit une surface S. Alors S admet une base dénombrable de disques relativement compacts (i.e. dont l'adhérence est compact).*

Démonstration. Supposons d'abord que S tout entier est homéomorphe à un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Soit φ l'homéomorphisme. Soit $\mathbb{D}$ la famille de tous les disques ouverts $D_r(x) \subset \mathbb{R}^2$ tels que r est rationnel, x a des coordonées rationnelles et que $\overline{D}_r(x) \subset U$. Clairement, chacun de ces disques est relativement compact dans U et il est facile de vérifier qu'il forment une base dénombrable pour la topologie induite de U. Il s'ensuit que la famille $\{\varphi^{-1}(D) \mid D \in \mathbb{D}\}$ est une base dénombrable de la topologie de S, formée de disques relativement compacts.
Supposons maintenant que S est une surface quelconque. Par définition, tout point admet un voisinage ouvert V homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Parce que tout recouvrement ouvert d'un espace admettant une base dénombrable a un sous-recouvrement dénombrable, S est recouverte par un nombre dénombrable de ces V. Par l'argument précédent, chaque V a une base dénombrable formée de disques relativement compacts, et la réunion de toutes ces bases est une base dénombrable de S. $\square$

Corollaire 3.3. *Une surface est un espace localement compact.* $\square$.

Au chapitre prochain, nous aurons besoin de manière cruciale du théorème de Jordan-Schönflies. Comme sa démonstration est assez compliquée et ne fait pas partie de notre sujet, nous ne la ferons pas. Elle peut être consultée dans [3].

Définition 3.4. Un *arc de Jordan* dans un espace topologique X est un chemin injectif.
Un *courbe fermée de Jordan* ou un *arc fermé de Jordan* est une application continue injective du cercle dans X.

Théorème 3.4. (Jordan-Schönflies) *Une courbe fermée de Jordan J sépare le plan E^2 en deux régions (i.e des ouverts connexes). Il existe un homéomorphisme de E^2 dans lui-même qui envoie J sur un cercle.*

Une conséquence du théorème de Jordan-Schönflies est qu'une des deux régions formée par une courbe de Jordan est une région de Jordan.
Réciproquement, le bord d'une région de Jordan peut être vu comme une courbe fermée de Jordan.

Chapitre 4

Le théorème de Rado

Les complexes simpliciaux sont des espaces topologiques très simples, et il est naturel de se demander quand un espace quelconque est en fait un complexe simplicial.
Nous étudierons cette question seulement dans le cas des surfaces, et allons prouver qu'effectivement toute surface est triangulable, c'est-à-dire qu'elle est homéomorphe à un complexe simplicial.
Ce chapitre s'appuie essentiellement sur [1].

4.1 Triangulation

Définissons d'abord l'objet de base de notre étude.

Définition 4.1. Soit S une surface. Une *triangulation* de S est un couple (κ, σ) où κ est un 2-complexe (abstrait) et $\sigma : \kappa \to F$ une application vérifiant les conditions suivantes :

1. $\sigma(s_1 \cap s_2) = \sigma(s_1) \cap \sigma(s_2)$ pour tout simplex s_1, s_2 de κ ;
2. pour tout simplex s, il existe un homéomorphisme de s_g sur $\sigma(s)$ qui, pour tout simplex $s' \subseteq s$, envoie s'_g sur $\sigma(s')$;
3. S est la réunion de tous les $\sigma(s)$ (où s est un simplex) ;
4. tout point de S admet un voisinage qui ne coupe qu'un nombre fini de $\sigma(s)$.

Le résultat suivant va rendre cette définition plus claire.

Proposition 4.1. *Soient S une surface et (κ, σ) un triangulation de S. Alors il existe un homéomorphisme $\varphi : \kappa_g \to F$ tel que pour tout simplex s, $\varphi(s_g) = \sigma(s)$.*

Démonstration. Commençons par définir φ sur chaque sommet par $\varphi(\alpha_g) = \sigma(\alpha)$, pour tout $\alpha \in \kappa$. On étend ensuite φ à tous les 1-simplex en utilisant

condition 2 de la définition. On a ainsi défini φ sur le bord de chaque 2-complexe géométrique.
On peut finalement étendre φ sur tous les 2-simplex en utilisant à nouveaux l'homéomorphisme γ donné par la condition 2. En effet, pour tout 2-simplex s_g, on peut trouver un homéomorphisme ψ de s_g sur lui-même tel que $\gamma \circ \psi$ coïncide avec φ sur les bords de s_g.
L'application φ ainsi définie est continue. Elle est injective grâce à la condition 1. Elle est surjective grâce à la condition 3. Finalement, l'inverse de φ est aussi continue à cause de la condition 4.
Ainsi, φ est bien un homéomorphisme, et par construction, $\varphi(s_g) = \sigma(s)$ pour tout simplex s. □

4.2 Le théorème de Rado

La preuve de ce théorème est en deux étapes. Dans la première nous montrerons qu'une surface est triangulable si elle admet un recouvrement ouvert vérifiant certaines propriétés.
Dans la seconde partie, nous construirons un tel recouvrement pour n'importe quelle surface. La raison de cette démarche en deux étapes est justifiée par le fait qu'on connait souvent dès le début un recouvrement de ce type.

Par la suite, J signifiera toujours une région de Jordan d'une surface S, et γ_J le bord d'une telle région.

Définition 4.2. Soit S une surface. Une recouvrement de S par des régions de Jordan $\{J_i\}_{i \in I}$ est dit *de type fini* si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. pour tout $i \in I$, J_i n'intersecte qu'un nombre fini de J_k, $k \in I$;
2. l'intersection de deux bords $\gamma_{J_i}, \gamma_{J_k}$ consiste en un nombre fini de points ou d'arcs.

Une conséquence immédiate de la première condition et de la connexité de S est qu'un recouvrement de type fini est forcément dénombrable. On le notera donc $\{J_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, et le bord de J_n sera noté γ_n.
Si γ_n n'est pas contenu dans J_m, alors par compacité il intersecte l'intérieur de J_m en un nombre fini de *coupure*. Plus précisément, une coupure de J_m est un arc à l'intérieur de J_m dont les extrémités, et seulement les extrémités sont sur le bord de J_m. Evidemment, l'ensemble des coupures de γ_n peut être vide.

Pour la suite nous aurons besoin d'un corollaire du théorème de Jordan.

Corollaire 4.2. *Soit J une région de Jordan d'une surface S. Une coupure de J divise J en deux régions de Jordan. Leur bord est formé par cette coupure et un des arcs entre les extrémités de la coupure.*

Démonstration. Appelons σ la coupure, et γ_1, γ_2 les deux arcs constituant le bord de J. Soit $\triangle_1$, $\triangle_2$ les deux régions de Jordan dont le bord sont $\gamma_1 \cup \sigma$, $\gamma_2 \cup \sigma$ respectivement. Puisque $\triangle_1$ a des points frontières dans J, alors que J n'en a pas dans $\triangle_1$, il s'ensuit (car J et $\triangle_1$ sont connexes) que $\triangle_1 \subset J$. De même pour $\triangle_2$.
Puisque $\triangle_1$ et $\triangle_2$ ont des bords différents et qu'aucun n'a de points frontières dans l'autre, on voit de la même manière que $\triangle_1$ et $\triangle_2$ sont disjoints.
Pour montrer que $J = \triangle_1 \cup \sigma \cup \triangle_2$, quotientons $\bar{J}$ par son bord $\gamma_1 \cup \gamma_2$. $\bar{J}$ devient ainsi une sphère, et σ une courbe fermée de Jordan. σ divise donc $\bar{J}$ en deux régions, qui doivent être (les images de) $\triangle_1$ et $\triangle_2$. □

Nous sommes maintenant prêt pour commencer la démonstration proprement dite.

Théorème 4.3. *Soit S une surface. Supposons que S admette une recouvrement par des ouverts de Jordan qui est de type fini. Alors elle est triangulable.*

Démonstration. On commence par enlever du recouvrement $\{J_n\}$ tous les J_n qui sont contenus dans un autre J_m, $n \neq m$. Les régions restantes forment toujours un recouvrement, car sinon, il existerait un point qui serait contenu dans une suite infinie $J_{n_1} \subset J_{n_2} \subset J_{n_3} \subset \ldots$, ce qui contredirait la condition (1). On appelle encore le nouveau recouvrement $\{J_n\}$.
S'il existe $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$ avec $\gamma_n \subset J_m$, alors, puisque J_n n'est pas contenu dans J_m, la région de Jordan dans J_m que γ_n entoure doit être le complémentaire de J_n, $F \backslash J_n$. Dans ce cas, S est topologiquement équivalent à une sphère, et une triangulation peut être trouvée facilement. On supposera donc que ce cas de figure ne survient pas.
On sait que chaque bord γ_n intersecte une région donnée J_m en un nombre fini de coupures. Considérons les coupures sur γ_1. La première coupure divise un certain J_m en deux sous-régions de Jordan. Une de ces sous-régions est elle-même divisée par la seconde coupure, et ainsi de suite. Ainsi, γ_1 divise J_m en un nombre fini de sous-régions de Jordan. Chacune est à son tour divisée par γ_2 en un nombre fini de sous-régions. Ce processus s'arrête après un nombre fini d'étapes, car J_m ne rencontre qu'un nombre fini de bords γ_n.
Soient $\{J_{mi}\}$ les sous-régions de J_m obtenues par ce processus. Par construction, leurs intérieurs sont disjoints. Soient $\{\gamma_{nj}\}$ les arcs obtenus en divisant γ_n par les points sur γ_m ($n \neq m$) ou bien par les extrémités des arcs communs à γ_n et γ_m. Ici aussi, γ_{nj} et γ_{mi} (avec $n \neq m$ et $i \neq j$) sont soit disjoints, soit n'ont en commun que leurs extrémités.
Par construction, le bord de chaque J_{mi} est une réunion finie d'arcs γ_{nj}.
Soit κ le complexe (abstrait) composé des extrémités de tous les arcs de Jordan γ_{nj} et d'un point à l'intérieur de chaque J_{mi}. On peut relier le point à l'intérieur d'un J_{mi} au sommet situé sur le bord par un arc de Jordan. On divise ainsi J_{mi} en un nombre fini de régions triangulaires. Il y a donc

une façon naturelle de définir les 1- et 2- simplexes de κ, ainsi que l'application $\sigma : \kappa \to F$, telle que $\sigma(s)$ soit une de ses régions triangulaires, pour tout simplex s. Les conditions 1 à 4 de la définition 4.1 sont ainsi facilement vérifiées.
Ainsi, (κ, σ) est une triangulation de S. $\square$

Nous commençons maintenant la partie difficile du théorème : montrer qu'un surface admet un recouvrement de type fini. Nous aurons d'abord besoin de plusieurs lemmes.

Lemme 4.4. *Soit S une surface. Alors il existe deux suites, peut-être finies, de régions de Jordan, $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ et $(W_n)_{n=1}^{\infty}$, qui admettent les propriétés suivantes :*

1. *$\overline{V}_n \subset W_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$;*
2. *$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = F$;*
3. *aucun point de S n'appartient à un nombre infini de $\overline{W}_n$, $n \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. Soit $\{U_i\}$ une base dénombrable de S formées de régions de Jordan. Chacunes de ces U_i est une réunion dénombrable de régions de Jordan U_{ij} avec $\overline{U}_{ij} \subset U_i$, $j \in \mathbb{N}$. De même, chacune de ces U_{ij} est une réunion dénombrable de régions de Jordan U_{ijk} avec $\overline{U}_{ijk} \subset U_{ij}$, $k \in \mathbb{N}$. Renommons la suite $\{U_{ijk}\}$ $\{V_n\}$ et si $U_{ijk} = V_n$, alors on pose $W_n := U_{ij}$.
Ainsi, tout ensemble ouvert O est une réunion d'ensembles V_n, avec $\overline{V}_n \subset W_n \subset \overline{W}_n \subset O$.
Nous allons définir inductivement une sous-suite de $\{V_n\}$ ainsi : posons $n_k = 1$, et pour $k > 1$, n_k est le plus petit entier tel que

$$\bigcup_{l=1}^{n_{k-1}} \overline{V}_l \subset \bigcup_{l=1}^{n_k} V_l.$$

Cette suite est bien définie. En effet, n_k existe toujours, car $\overline{V}_1 \cup \ldots \cup \overline{V}_{n_{k-1}}$ est compact et $\{V_n\}$ est un recouvrement ouvert. En outre, à moins que $S = V_1 \cup \ldots \cup V_{n_{k-1}}$, on a toujours $n_k > n_{k-1}$, car si $n_k \leq n_{k-1}$, alors on aurait

$$\overline{V}_1 \cup \ldots \cup \overline{V}_{n_{k-1}} \subset V_1 \cup \ldots \cup V_{n_{k-1}} \subset \overline{V}_1 \cup \ldots \cup \overline{V}_{n_{k-1}}.$$

Ce qui voudrait dire que $V_1 \cup \ldots \cup V_{n_{k-1}}$ serait à la fois ouvert et fermé, et donc égal à S tout entier. Ceci ne surviendra que si S est compact, et dans ce cas, les suites finies $V_1, \ldots, V_{n_{k-1}}$ et $W_1, \ldots, W_{n_{k-1}}$ remplissent les conditions voulues.
Si S n'est pas compact, posons

$$G_k := \bigcup_{l=1}^{n_k} V_l.$$

Par construction, on a $\overline{G}_{k-1} \subset G_k$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. On a aussi que $\overline{G}_k$ est compact, et que $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} G_k = S$.
Posons $H_k := \overline{G}_{k+1} \backslash G_k \subset G_{k+2} \backslash \overline{G}_{k-1}$. Parce que $G_{k+2} \backslash \overline{G}_{k-1}$ est ouvert, il peut s'écrire comme une réunion d'ensembles V_n, avec $V_n \subset \overline{W}_n \subset G_{k+2} \backslash \overline{G}_{k-1}$. Puisque H_k est compact il est recouvert par un nombre fini de ces V_n. Renommons ces ouverts V_{kl} et les W_n correspondant W_{kl}. On a bien que $\displaystyle\bigcup_{k,l} V_{kl} = S$.
Si $i \leq k-3$, alors l'ensemble $\overline{W}_{ij}$ ne peut pas intersecter un ensemble du type $\overline{W}_{kl}$, car $\overline{W}_{ij} \subset G_{i+2} \subset G_{k-1}$ et $\overline{W}_{kl} \cap G_{k-1} = \emptyset$. Ainsi, $\overline{W}_{ij}$ ne rencontre qu'un nombre fini de $\overline{W}_{kl}$, et donc les suites $\{V_{kl}\}$ et $\{W_{kl}\}$ satisfont les conditions du lemme. □

Nous aurons besoin d'encore un autre résultat sur les arcs de Jordan, que nous accepterons sans démonstration.

Lemme 4.5. *Soit $\gamma \subset G$ un arc de Jordan dans un ouvert connexe G. Alors soit γ ne divise pas G, soit il le divise en deux sous-ensembles connexes. Dans ce dernier cas, tout point intérieur de γ peut être relié à n'importe quel point des deux sous-ensembles par un arc de Jordan, lequel n'a qu'un seul point sur γ.* □

Définition 4.3. Une famille Γ d'arcs de Jordan sur une surface S est dite *localement finie* si chaque point de S admet un voisinage qui ne rencontre qu'un nombre fini d'arcs $\gamma \in \Gamma$.

Notons que l'intersection des arcs de Γ avec un ouvert connexe G forme toujours une famille localement finie sur G, même si un $\gamma \in \Gamma$ peut avoir plusieurs sous-arcs dans G.

Lemme 4.6. *Soit Γ une famille localement finie d'arcs de Jordan sur une surface S. Soit $p_2, p_2 \in S$ et supposons que p_1 et p_2 ne sont sur aucun des arcs de Γ. Alors ils peuvent être reliés par un arc de Jordan σ qui n'a qu'un nombre fini de points sur $\bigcup \Gamma$.*

Démonstration. Observons tout d'abord que le lemme a un caractère local. En effet, on peut trouver des points $p_1 = q_0, \ldots, q_m = p_2$ tels que q_{k-1} et q_k se trouvent dans un même disque $\triangle_k$. Si q_{k-1} et q_k peuvent être reliés dans $\triangle_k$ dans le sens du lemme, alors il en sera de même pour p_1 et p_2. Par conséquent, et par la remarque ci-dessus, on peut remplacer S par un ouvert connexe G.
Soit σ_0 un arc dans G qui relie p_1 à p_2. A cause de la finitude locale de Γ, il n'y a qu'un nombre fini d'arcs $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$ qui intersectent σ_0. Notons par Γ' l'ensemble des arcs restant et remplaçons G par la composante connexe de $G \backslash \bigcup \Gamma'$ qui contient σ_0. Puisqu'on peut toujours faire cette opération, il devient clair qu'il suffit de prouver le lemme pour une famille Γ finie.

Nous allons procéder en faisant un récurrence un peu particulière. Ecrivons $\Gamma = \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_n$, où les arcs dans Γ_i sont mutuellement disjoints. Soient P^n l'assertion du lemme pour tous les Γ de cette forme, et P^n_m la même assertion sous l'hypothèse que Γ_1 ne contient pas plus de m arcs.
Nous allons procéder comme suit : P^0 est trivial, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, P^n_0 est la même chose que P^{n-1}. Nous allons montrer que P_{n-1} et P^n_{m-1} implique P^n_m. Ainsi, P^{n-1} impliquera P^n_m pour tout $m \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire P^n.
Ainsi, P^n sera vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$ et le lemme sera prouvé.
Soit donc $n, m \in \mathbb{N}$ tels que P^{n-1} et P^n_{m-1} soient vrais, et supposons que Γ_1 contienne m arcs. Si $\gamma_1 \in \Gamma_1$ ne sépare pas p_1 et p_2 (c'est-à-dire que p_1 et p_2 se trouvent dans une même composante connexe de $G \backslash \gamma_1$), alors on peut appliquer P^n_{m-1} sur la composante de $G \backslash \gamma_1$ qui contient p_1, p_2. Donc P^n_m est prouvé.
Supposons maintenant que γ_1 divise G en G_1, G_2, avec $p_1 \in G_1$, $p_2 \in G_2$. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, posons $\lambda_\gamma = \gamma_1 \cap \gamma$ et δ_γ le bord de $\lambda_\gamma \subset \gamma_1$ par rapport à la topologie induite par γ_1. Soit encore $\delta = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \delta_\gamma$. δ n'est nulle part dense sur γ_1, et tout sous-ensemble compact de γ_1 ne contient qu'un nombre fini de points de δ. On peut donc trouver un point q sur γ_1 tel que $q \notin \delta$. Selon le lemme précédent, il existe un arc σ_1 qui relie p_1 à q avec $\sigma_1 \backslash \{q\} \subset G_1$. Par choix de q, il existe un voisinage V de q dans G tel que $V \backslash \gamma_1$ n'intersecte aucun arc, et donc il existe un sous-arc σ'_1 de σ_1 proche de q qui n'intersecte aucun autre arc. Par P^n_{m-1}, son extrémité dans G_1 peut être reliée à p_1 par un chemin σ' au sens du lemme. On peut donc extraire de $\sigma' \cup \sigma'_1$ un arc de Jordan de p_1 à q qui n'a qu'un nombre fini de points sur $\bigcup \Gamma$.
On répète la construction pour $p_2 \in G_2$ et on obtient ainsi un arc de p_1 à p_2, ce qui prouve P^n_m.
Le lemme est ainsi démontré. □

Nous sommes enfin en mesure de prouver le

Théorème 4.7. *Toute surface admet un recouvrement de type fini.*

Démonstration. Soient $\{V_n\}$ et $\{W_n\}$ les suites de disques construites dans 4.4. Nous allons montrer qu'il existe une suite de disques fermés $\{J_n\}$ avec $V_n \subset J_n \subset W_n$, dont les bords γ_n n'ont qu'un nombre fini de points en communs. On aura par conséquent un recouvrement de type fini.
Construisons cette suite inductivement. Posons $J_1 = \overline{V}_1$ et supposons que nous avons déjà construit $J_1, \ldots, J_{n-1}$.
Nous allons construire J_n de telle manière que son bord γ_n n'intersecte $\gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_{n-1}$ qu'en un nombre fini de points. On identifiera $\overline{W}_n$ avec un disque fermé dans $\mathbb{R}^2$ avec lequel il est homéomorphe. De plus on peut supposer que son centre est un point de V_n. C'est une conséquence du théorème de Jordan-Schönflies qu'un arc de Jordan a un intérieur vide. On peut donc trouver deux points p_1, p_2 dans W_n, sur des rayons distincts qui ne sont sur aucun des γ_i. $i = 1, \ldots, n-1$. De plus, ils peuvent être choisis de telle

sorte que le segment radial entre p_1, p_2 et le bord du disque n'intersecte pas $\overline{V}_n$. Ces segments, étendus jusqu' à la première intersection avec $\overline{V}_n$ seront dénotés s_1, s_2.

Appliquons le corollaire 4.2 deux fois. La première fois à la coupure formée par s_1, s_2 et un des arcs du bord de V_n entre p_1 et p_2. La deuxième fois à l'autre arc du bord de V_n. Il s'ensuit que s_1 et s_2 divisent $W_n \backslash \overline{V}_n$ en deux régions de Jordan ouvertes, notées Ω_1, Ω_2 Vu le lemme prédécédent, on peut relier p_1 et p_2 par des coupures σ_1, σ_2 dans Ω_1, Ω_2 qui ne rencontrent $\gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_{n-1}$ qu'en un nombre fini de points. Ces deux coupures forment ensemble une courbe de Jordan γ_n qui est le bord d'une région de Jordan fermée $J_n \subset W_n$.
On doit encore montrer que $V_n \subset J_n$. Puisque $\gamma_n \cap V_n = \emptyset$, soit $V_n \subset J_n$, soit V_n se trouve dans les complémentaires de J_n. Dans ce dernier cas, on voit que tout le bord de Ω_1 (par exemple) est dans le complémentaire de J_n, à l'exception des points p_1, p_2, qui sont sur γ_n. Donc on a $\Omega_2 \cap J_n = \emptyset$, ce qui contredit le fait que σ_1 appartient à la fois à Ω_1 et à $\gamma_n \subset J_n$.
Donc $V_n \subset J_n$ et le théorème est prouvé. $\square$

Conclusion

Sans devoir développer de théorie sophistiquée nous avons introduit des objets mathématiques très simples; c'est ce qui rend l'étude des complexes simpliciaux agréables. En généralisant la notion de triangle nous avons déjà atteint des résultats importants et d'une grande utilité pratique.

En effet, les théorèmes d'approximation simpliciale et de Rado peuvent être appliqués notamment en analyse numérique.
En ce qui concerne les approximations simpliciales, leur applications sont assez évidentes : il est plus facile d'étudier une fonction linéaire par morceaux, qu'une fonction continue compliquée qui n'est par exemple nulle part différentiable!
Le théorème de Rado, bien qu'il paraisse plus abstrait, est lui aussi utilisé en analyse numérique. Supposons par exemple que nous soyons amené à étudier une fontion définie sur une surface. En la triangulant, on peut se contenter de calculer les valeurs de la fontion aux sommets des triangles, ce qui épargne de devoir la connaître explicitement sur toute la surface. En raffinant la triangulation, on peut l'approximer de mieux en mieux. Cette méthode rappelle celle des éléments finis.

Le théorème de Rado ne peut pas être généralisé à de plus grandes dimensions. En effet, le résultat est toujours vrai en dimension 3, bien que les arguments de la preuve soient différents. Pour les lecteurs intéressés, la preuve est traitée dans [4]. Mais à partir de la dimension 4, le théorème est faux. Il fait partie de ces bizzareries mathématiques qui ne sont vraies que pour de petites dimensions.

Bibliographie

[1] Ahlfors and Sario. *Riemann Surfaces.* Princetion University Press, 1960. Le premier chapitre est un exposé complet de la topologie des surfaces.

[2] C.P.Rourke and B.J.Sanderson. *Introduction to piecewise-linear topology.* Springer-Verlag, 1972. Livre au contenu plus abstrait et avancé. Il s'intéresse surtout aux espaces de dimension quelconque.

[3] Edwin E.Moise. *Geometric Topology in Dimension 2 and 3.* GTM. Springer-Verlag, 1977.

[4] John Hempel. *3-Manifolds.* Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, 1976.

[5] I.M.Singer and John A.Thorpe. *Lecture Note on Elementary Topology and Geometry.* Scott, Foresman and Company, 1967. Livre d'introduction très accessible.

[6] John M.Lee. *Introduction to smooth manifolds.* GTM. Springer.