Projet de Semestre

été 2005

Le Théorème de de Rahm

Michele Klaus

Professeur Responsable:

prof. Michel Matthey

Table des matières

Résumé

Le but de ce projet est de construire la cohomologie de de Rahm, l'homologie singulière et la cohomologie singulière pour pouvoir démontrer le Théorème de de Rahm qui affirme que la cohomologie singulière et la cohomologie de de Rahm sont isomorphes.

Table des notations

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long du travail:

$\mathbb{N}$	$\{1, 2, 3, ...\}$
$\mathbb{N}_0$	$\{0, 1, 2, 3, ...\}$
$\mathbb{N}$	$\{0, 1, 2, 3, ...\}$
X	espace topologique
(X, A)	paire topologique
V	espace vectoriel
$\bigwedge^p(V)$	ensemble des p-formes alternées sur V
$\wedge$	produit extérieur
M	variété différentiable
$T_m(M)$	espace tangent à M en m
$Der_m(M)$	ensemble des dérivations en m
$T(M)$	fibré tangent sur M
$f_* = df$	application tangente
$T^*_m(M)$	espace cotangent à M en m
ω	p-forme différentielle
$\Omega^p(M)$	ensemble des p-formes différentielles
d^p	dérivation extérieure de $\Omega^p(M)$
$\triangle_n$	n-ème simplexe standard
σ	p-simplexe singulier
$S_n(X)$	ensemble des n-simplexes singuliers sur X
$C_n(X)$	groupe abélien libre de base $S_n(X)$
$H_n(X, A; G)$	n-ème groupe d' homologie singulière à coefficients dans G
$H^n(X, A; G)$	n-ème groupe de cohomologie singulière à coefficients dans G
S_n	groupe symétrique sur n lettres

CHAPITRE 1

La cohomologie de de Rahm

1. Préliminaires d' algèbre linéaire

Convention 1.1. Dans tout le paragraphe on notera $\mathbb{K}$ pour un corps de caractéristique nulle et V pour un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

Définition 1.2. Une p-forme sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V est une application sur p facteurs $\varphi : V \times ... \times V \to \mathbb{K}$ linéaire en chaque variable.

Définition 1.3. Une p-forme alternée sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V est une p-forme $\varphi : V \times ... \times V \to \mathbb{K}$ telle que $\varphi(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_p) = -\varphi(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_p)$ pour tout i différent de j.

Remarque 1.4. Si φ est une p-forme alternée sur V et $v \in V \times ... \times V$ avec $v_i = v_j$ pour un certain i différent de j, alors $\varphi(v) = 0$.

En effet $\varphi(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_p) = -\varphi(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_p) = \varphi(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_p)$, donc $2\varphi(v) = 0$ mais $car\mathbb{K} = 0$ donc $\varphi(v) = 0$.

Notation 1.5. On notera $\bigwedge^p(V)$ l'ensemble des p-formes alternées sur V. En particulier on a que $\bigwedge^1(V)$=V^*, l'espace vectoriel dual de V. On pose $\bigwedge^0(V) = \mathbb{K}$. On remarque facilement que $\bigwedge^p(V)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les opérations ponctuelles usuelles.

Exemple 1.6. Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ une matrice antisymétrique, alors l'application $\varphi : V \times V \to \mathbb{K}$, $(x, y) \mapsto x^tAy$ est une 2-forme alternée sur V : φ est clairement linéaire en chaque variable et de plus $\varphi(x, y) = x^tAy = (A^tx)^ty = (-Ax)^ty = y^t(-Ax) = -(y^tAx) = -\varphi(y, x)$.

Remarque 1.7. Soit φ une p-forme alternée sur V et $e_1, ..., e_n$ une base de V. Par linéarité on a que φ est entièrement déterminée par l'image des p-uples de vecteurs de base. Comme φ est alternée on a en fait que l'application est uniquement déterminée par $\varphi(e_{i_1}, ..., e_{i_p})$ pour tout choix de $i_1, ..., i_p \in \{1, ..., n\}$ avec $1 \leqslant i_1 < ... < i_p \leqslant n$.

PROPOSITION 1.8. *L'ensemble des p-formes alternées* $\left\{\varphi_{i_1,\ldots,i_p} | 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n\right\}$ *définies par :*

$$\varphi_{i_1,\ldots,i_p}(e_{j_1},\ldots,e_{j_p}) = \begin{cases} 1, & si\ (i_1,\ldots,i_p) = (j_1,\ldots,j_p)\,; \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

avec $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_p \leqslant n$ *et étendues par linéarité alternée, est une base du* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* $\bigwedge^p(V)$.

DÉMONSTRATION. Soit $\varphi \in \bigwedge^p(V)$ et pour tout $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n$ posonos $\lambda_{i_1,\ldots,i_p} := \varphi(e_{i_1},\ldots,e_{i_p})$. Alors on a que $\varphi = \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_p\leqslant n} \lambda_{i_1,\ldots,i_p}\varphi_{i_1,\ldots,i_p}$. Clairement les $\varphi_{i_1,\ldots,i_p}$ de l'ensemble considéré sont linéairement indépendantes. □

COROLLAIRE 1.9. *De la proposition précédente il en résulte que* $dim_{\mathbb{K}}(\bigwedge^p(V)) = \sharp\{choix\ de\ p\ parmi\ n\} = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$. *Si p>n on a donc que* $dim_{\mathbb{K}}(\bigwedge^p(V)) = 0$.

DÉFINITION 1.10. Le produit extérieur de $\bigwedge^p(V)$ et $\bigwedge^q(V)$ est l'application $\wedge$: $\bigwedge^p(V) \times \bigwedge^q(V) \to \bigwedge^{p+q}(V)$, $(\varphi,\psi) \mapsto \varphi\wedge\psi$ définie par :

$$(\varphi\wedge\psi)(v_1,\ldots,v_{p+q}) := \frac{1}{p!q!}\sum_{\sigma\in S_{p+q}} sgn(\sigma)\varphi(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(p)})\psi(v_{\sigma(p+1)},\ldots,v_{\sigma(p+q)})$$

PROPOSITION 1.11. *Le produit extérieur est bien défini.*

DÉMONSTRATION. (1) Pour tout $v_1,\ldots,v_{p+q},w_1 \in V$ on a que :

$$(\varphi\wedge\psi)(v_1+w_1,\ldots,v_{p+q}) = \frac{1}{p!q!}\sum_{\sigma\in S_{p+q}} sgn(\sigma)\varphi(v_{\sigma(1)}+w_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(p)})\psi(v_{\sigma(p+1)},\ldots,v_{\sigma(p+q)}) =$$

$$= \frac{1}{p!q!}\sum_{\sigma\in S_{p+q}} sgn(\sigma)(\varphi(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(p)}) + \varphi(w_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(p)}))\psi(v_{\sigma(p+1)},\ldots,v_{\sigma(p+q)}) =$$

$$= \frac{1}{p!q!}\sum_{\sigma\in S_{p+q}} sgn(\sigma)\varphi(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(p)})\psi(v_{\sigma(p+1)},\ldots,v_{\sigma(p+q)}) +$$

$$+\frac{1}{p!q!}\sum_{\sigma\in S_{p+q}} sgn(\sigma)\varphi(w_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(p)})\psi(v_{\sigma(p+1)},\ldots,v_{\sigma(p+q)}) =$$

$$= (\varphi\wedge\psi)(v_1,\ldots,v_{p+q}) + (\varphi\wedge\psi)(w_1,\ldots,v_{p+q})$$

et de même pour les autres variables.

(2) Pour tout $v_1,\ldots,v_{p+q} \in V$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on remarque facilement que $(\varphi\wedge\psi)(\lambda v_1,\ldots,v_{p+q}) = \lambda(\varphi\wedge\psi)(v_1,\ldots,v_{p+q})$ et de même pour les autres variables.

(3) Soient $v_1, ..., v_{p+q} \in V$ et $\tau \in S_{p+q}$. Soit $\sigma \in S_{p+q}$ et posons $\gamma = \sigma\tau$, alors $sgn(\sigma) = sgn(\tau)sgn(\sigma)sgn(\tau) = sgn(\tau)sgn(\sigma\tau) = sgn(\tau)sgn(\gamma)$. Ainsi :

$$(\varphi \wedge \psi)(v_{\tau(1)}, ..., v_{\tau(p+q)}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} sgn(\sigma)\varphi(v_{\sigma\tau(1)}, ..., v_{\sigma\tau(p)})\psi(v_{\sigma\tau(p+1)}, ..., v_{\sigma\tau(p+q)}) =$$

$$= \frac{1}{p!q!} \sum_{\gamma \in S_{p+q}} sgn(\tau)sgn(\gamma)\varphi(v_{\gamma(1)}, ..., v_{\gamma(p)})\psi(v_{\gamma(p+1)}, ..., v_{\gamma(p+q)}) =$$

$$= sgn(\tau)(\varphi \wedge \psi)(v_1, ..., v_{p+q})$$

(4) Il s'ensuit que $(\varphi \wedge \psi)$ est bien une p+q forme alternée.

□

Proposition 1.12. *Le produit extérieur est bilinéaire et associatif.*

Démonstration. (1) Soient φ, ψ deux p-formes alternées, η une q-forme alternée et λ, μ deux scalaires dans $\mathbb{K}$. Alors :

$$((\lambda\varphi + \mu\psi) \wedge \eta)(v_1, ..., v_{p+q}) =$$

$$= \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} sgn(\sigma)(\lambda\varphi + \mu\psi)(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(p)})\eta(v_{\sigma(p+1)}, ..., v_{\sigma(p+q)}) =$$

$$= \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} sgn(\sigma)(\lambda\varphi(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(p)}) + \mu\psi(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(p)}))\eta(v_{\sigma(p+1)}, ..., v_{\sigma(p+q)}) =$$

$$= \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} sgn(\sigma)\lambda\varphi(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(p)})\eta(v_{\sigma(p+1)}, ..., v_{\sigma(p+q)}) + \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} sgn(\sigma)\mu\psi(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(p)})\eta(v_{\sigma(p+1)}, ..., v_{\sigma(p+q)}) =$$

$$= \lambda\varphi \wedge \eta + \mu\psi \wedge \eta$$

De la même façon on prouve la linéarité de la deuxième variable.

(2) Soit φ une p-forme alternée, ψ une q-forme alternée et η une r-forme alternée. Alors

$$((\varphi \wedge \psi) \wedge \eta)(v_1, ..., v_{p+q+r}) =$$

$$= \frac{1}{(p+q)!r!} \sum_{\sigma \in S_{p+q+r}} sgn(\sigma)(\varphi \wedge \psi)(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(p+q)})\eta(v_{\sigma(p+q+1)}, ..., v_{\sigma(p+q+r)}) =$$

$$= \frac{1}{(p+q)!r!} \sum_{\sigma \in S_{p+q+r}} sgn(\sigma) \left(\frac{1}{p!q!} \sum_{\tau \in S_{p+q}} sgn(\tau)\varphi(v_{\tau\sigma(1)}, ..., v_{\tau\sigma(p)})\psi(v_{\tau\sigma(p+1)}, ..., v_{\tau\sigma(p+q)}) \right) \eta(v_{\sigma(p+q+1)}, ..., v_{\sigma(p+q+r)}) =$$

$$= \frac{1}{(p+q)!r!q!p!} \sum_{\tau \in S_{p+q}} \sum_{\sigma \in S_{p+q+r}} sgn(\sigma)sgn(\tau)\varphi(v_{\tau\sigma(1)}, ..., v_{\tau\sigma(p)})\psi(v_{\tau\sigma(p+1)}, ..., v_{\tau\sigma(p+q)})\eta(v_{\sigma(p+q+1)}, ..., v_{\sigma(p+q+r)}) =$$

$$= \frac{1}{(p+q)!r!q!p!} (p+q)! \sum_{\varrho \in S_{p+q+r}} sgn(\varrho)\varphi(v_{\varrho(1)}, ..., v_{\varrho(p)})\psi(v_{\varrho(p+1)}, ..., v_{\varrho(p+q)})\eta(v_{\varrho(p+q+1)}, ..., v_{\varrho(p+q+r)})$$

Puisqu'on peut considérer toute permutation τ sur $p+q$ éléments comme une permutation sur $p+q+r$ éléments qui laisse fixe les r derniers termes. Ainsi pour toute permutation τ fixée, les permutations $\varrho = \tau\sigma$ recouvrent

S_{p+q+r} lorsque σ parcours S_{p+q+r}. Comme il y a $(p+q)!$ de telles permutations τ le résultat s'ensuit.

De la mème façon on prouve que

$$(\varphi\wedge(\psi\wedge\eta))(v_1,...,v_{p+q+r}) = \frac{1}{r!q!p!}\sum_{\varrho\in S_{p+q+r}} sgn(\varrho)\varphi(v_{\varrho(1)},...,v_{\varrho(p)})\psi(v_{\varrho(p+1)},...,v_{\varrho(p+q)})\eta(v_{\varrho(p+q+1)},...,v_{\varrho(p+q+r)})$$

et donc que le produit exetérieur est associatif.

□

Proposition 1.13. *Soit $(e_1,...,e_n)$ une base de V et $(e_1^*,...,e_n^*)$ la base duale associée, alors l'ensemble $\left\{e_{i_1}^*\wedge...\wedge e_{i_p}^* | 1\leqslant i_1<...<i_p\leqslant n\right\}$ est une base de $\bigwedge^p(V)$.*

Démonstration. Soient $i_1,...,i_p,j_1,...,j_p\in\{1,...,n\}$ tels que $1\leqslant i_1<...<i_p\leqslant n$ et $1\leqslant j_1<...<j_p\leqslant n$. Alors on a que :

$$(e_{i_1}^*\wedge...\wedge e_{i_p}^*)(e_{j_1},...,e_{j_p}) = \frac{1!}{1!...1!}\sum_{\sigma\in S_p} sgn(\sigma)e_{i_1}^*(e_{\sigma(j_1)})...e_{i_p}^*(e_{\sigma(j_p)}) = \begin{cases} 1, & \text{si } (i_1,...,i_p)=(j_1,...,j_p)\,; \\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}$$

C'est à dire $e_{i_1}^*\wedge...\wedge e_{i_p}^* = \varphi_{i_1,...,i_p}$. Le résultat est ainsi démontré grâce à la Proposition 1.8. □

Proposition 1.14. *Si φ est une p-forme alternée sur V et ψ est une q-forme alternée sur V, alors $\varphi\wedge\psi = (-1)^{pq}\psi\wedge\varphi$*

Démonstration. Soit $\{e_1,...,e_n\}$ une base de V et soit $\left\{e_1^*,...,e_n^*\right\}$ sa base duale. Soit $v=\lambda_1e_1+...+\lambda_ne_n$ et $w=\mu_1e_1+...+\mu_ne_n$ deux vecteurs dans V. On a alors que : $(e_i^*\wedge e_j^*)(v,w) = e_i^*(v)e_j^*(w) - e_i^*(w)e_j^*(v) = \lambda_i\mu_j - \mu_i\lambda_j = -(\lambda_j\mu_i - \mu_j\lambda_i) = -(e_j^*(v)e_i^*(w) - e_j^*(w)e_i^*(v)) = -(e_j^*\wedge e_i^*)(v,w)$ et donc $e_i^*\wedge e_j^* = (-1)e_j^*\wedge e_i^*$ pour tout $i,j=1,...,n$.

Par bilinéarité du produit extérieur il suffit de prouver l'assertion pour deux formes $\varphi = e_{i_1}^*\wedge...\wedge e_{i_p}^*$ et $\psi = e_{j_1}^*\wedge...\wedge e_{j_q}^*$. Or dans ce cas tout est clair puisque pour passer de $\varphi\wedge\psi = e_{i_1}^*\wedge...\wedge e_{i_p}^*\wedge e_{j_1}^*\wedge...\wedge e_{j_q}^*$ à $\psi\wedge\varphi = e_{j_1}^*\wedge...\wedge e_{j_q}^*\wedge e_{i_1}^*\wedge...\wedge e_{i_p}^*$ il faut permuter p fois chaque élément $e_{j_k}^*$. Comme il y a q termes de cette forme, ce qui précède nous permet de conclure que $\varphi\wedge\psi = (-1)^{pq}\psi\wedge\varphi$. □

2. Variétés différentiables

Définition 1.15. Une variété différentiable de dimension n sans bord est un espace topologique M de Hausdorff possédant une base dénombrable d'ouverts et muni d'une collection d'applications $\left\{U_\alpha, \phi_\alpha\right\}_{\alpha\in A}$ appelées cartes et vérifiant :

(1) Toute carte ϕ_α est un homéomorphisme entre un ouvert U_α de M et un ouvert U'_α de $\mathbb{R}^n$.
(2) Tout point x de M est contenu dans le domaine U d'une carte.
(3) Pour toute paire de cartes (U,ϕ) et (V,ψ) avec $U\cap V \neq \emptyset$ on a que $\phi\circ\psi^{-1}$: $\psi(U\cap V)\to\phi(U\cap V)$ est une application de classe C^∞.

Définition 1.16. Une application $f : M \to N$ entre deux variétés différentiables est dite lisse ou différentiable si pour toute carte (U,ϕ) de M et (V,ψ) de N on a que la composition $\psi\circ f\circ\phi^{-1}$ est différentiable lorsqu'elle est définie.

Convention 1.17. Dans ce chapitre on notera M pour une variété différentiable, n pour sa dimension et m pour un point arbitraire dans M.

Notation 1.18. On note C^M_m l'ensemble des chemins continus $c : I \to M$ où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $c(0) = m$.

Dans la suite du travail on se prendra la liberté de ne pas toujours specifier les domaines des applications lorsqu'on considérera leur composition.

Lemme 1.19. *Pour deux chemins $c_1, c_2 \in C^M_m$ la relation suivante est une relation d'équivalence :*
$c_1 \sim c_2 \Leftrightarrow$ *il existe une carte (U,ϕ) autour de m avec $(\phi\circ c_1)'(0) = (\phi\circ c_2)'(0)\Leftrightarrow$ pour toute carte (U,ϕ) autour de m on a $(\phi\circ c_1)'(0) = (\phi\circ c_2)'(0)$*

Démonstration. Premièrement on prouve l'equivalence des défintions et ensuite on montre qu'on a bien une relation d'equivalence.

(1) Supposons que $c_1, c_2 \in C^M_m$ sont deux chemins équivalents pour la carte (U,ϕ) et soit (V,ψ) une deuxième carte au tour de m. Alors on a que :
$$(\psi\circ c_1)'(0) = ((\psi\circ\phi^{-1})\circ(\phi\circ c_1))'(0) =$$
$$= (\psi\circ\phi^{-1})'(\phi(c_1(0)))\cdot(\phi\circ c_1)'(0) =$$
$$= (\psi\circ\phi^{-1})'(\phi(c_2(0)))\cdot(\phi\circ c_2)'(0) =$$
$$= ((\psi\circ\phi^{-1})\circ(\phi\circ c_2))'(0) = (\psi\circ c_2)'(0)$$
On en déduit qu'il existe une carte (U,ϕ) autour de m avec $(\phi\circ c_1)'(0) = (\phi\circ c_2)'(0)\Leftrightarrow$ pour toute carte (U,ϕ) autour de m on a $(\phi\circ c_1)'(0) = (\phi\circ c_2)'(0)$
(2) La relation $\sim$ est clairement réflexive et symétrique.

(3) Soient $c_1, c_2, c_3 \in C_m^M$ et (U, ϕ), (V, ψ) deux cartes autour de m avec $(\phi \circ c_1)'(0) = (\phi \circ c_2)'(0)$ et $(\psi \circ c_2)'(0) = (\psi \circ c_3)'(0)$. Alors on a que $(\psi|_{U\cap V} \circ c_1)'(0) = (\psi|_{U\cap V} \circ c_2)'(0) = (\psi|_{U\cap V} \circ c_3)'(0)$. Ce qui prouve la transitivité.

□

Définition 1.20. On appelle espace tangent à M en m l'ensemble $T_m(M) := C_m^M / \sim$. Les éléments de $T_m(M)$ sont appelés les vecteurs tangents à M en m.

Définition 1.21. Soit M une variété différentiable et m un point dans M. Une fonction $f : M \to \mathbb{R}$ est différentiable en m s'il existe une carte (U, ϕ) autour de m telle que $f \circ \phi^{-1}$ soit de classe C^∞ en $\phi(m)$. On note $C^\infty(M)$ l'ensemble des fonctions différentiables en tout point m de M ; on remarque sans autre que $C^\infty(M)$ possède une structure naturelle de $\mathbb{R}$-algèbre.

Lemme 1.22. *Une fonction $f : M \to \mathbb{R}$ est différentiable en m $\Leftrightarrow$ pour toute carte (V, ψ) autour de m on a que $f \circ \psi^{-1}$ est de classe C^∞ en $\psi(m)$.*

Démonstration. Le résultat découle diréctement du fait que la variété est différentiable et de l'egalité suivante : $f \circ \psi^{-1} = (f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \psi^{-1})$. □

Définition 1.23. Soit M une variété différentiable et m un point dans M. Une dérivation en m est une application linéaire $D_m : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ telle que $D_m(fg) = f(m)D_m(g) + g(m)D_m(f)$ pour tout couple de fonctions différentiables f et g. On note $Der_m(M)$ l'ensemble des dérivations en m.

Cette définition est particulièrement intéréssante parce qu'elle nous permet de mieux caractériser l'espace tangent $T_m(M)$ et de lui donner une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Pour faire cela on a besoin du lemme suivant :

Lemme 1.24. *Soit D_m une dérivation en m et $f, g \in C^\infty(M)$ deux fonctions différentiables s'annullant en m ; alors $D_m(fg) = 0$. De plus $D_m(k) = 0$ pour toute fonction constante k.*

Démonstration. Comme D_m est une dérivation on a directement que $D_m(fg) = f(m)D_m(g) + g(m)D_m(f) = 0$ et $D_m(k) = D_m(1k) = 1D_m(k) + kD_m(1) = 2D_m(k)$ et donc $D_m(k) = 0$. □

Les trois propositions suivantes nous montrent que l'espace tangent est un espace vectoriel comme annoncé.

PROPOSITION 1.25. *L'ensemble des dérivations en m est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel pour les lois :* $(D_1 + D_2)(f) = D_1(f) + D_2(f)$ *et* $(\lambda D)(f) = \lambda(D(f))$.

DÉMONSTRATION. Vérification facile. □

PROPOSITION 1.26. *Soit* $[c] \in T_m(M)$ *un vecteur tangent à M en m. L'application* $D_{[c]} : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ *définie par* $D_{[c]}(f) = (f \circ c)'(0)$ *est une dérivation en m.*

DÉMONSTRATION. On prouve d'abord que cette application est bien définie et ensuite qu'il s'agit d'une dérivation.

(1) Soit $[c] \in T_m(M)$ et $c_1 \in [c]$. Soit aussi (U, ϕ) une carte autour de m ; par définition de $[c]$ on a que $(\phi \circ c)'(0) = (\phi \circ c_1)'(0)$ et donc $(f \circ c)'(0) = (f \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ c)'(0) = (f \circ \phi^{-1})'(\phi \circ c(0)) \cdot (\phi \circ c)'(0) = (f \circ \phi^{-1})'(\phi \circ c_1(0)) \cdot (\phi \circ c_1)'(0) = (f \circ c_1)'(0)$.
(2) Soit $f, g \in C^\infty(M)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors : $D_{[c]}(f + g) = ((f + g) \circ c)'(0) = (f \circ c + g \circ c)'(0) = (f \circ c)'(0) + (g \circ c)'(0) = D_{[c]}(f) + D_{[c]}(g)$.
De même $D_{[c]}(\lambda f) = ((\lambda f) \circ c)'(0) = (\lambda(f \circ c))'(0) = \lambda(f \circ c)'(0) = \lambda D_{[c]}(f)$.
Ainsi $D_{[c]}$ est linéaire et il ne nous reste plus qu'à prouver la règle de Leibnitz : $D_{[c]}(fg) = ((fg) \circ c)'(0) = ((f \circ c)(g \circ c))'(0) = (f \circ c)'(0)(g \circ c)(0) + (f \circ c)(0)(g \circ c)'(0) = D_{[c]}(f)g(m) + D_{[c]}(g)f(m)$.

□

PROPOSITION 1.27. *L application* $D : T_m(M) \to Der_m(M)$, $[c] \mapsto D_{[c]}$ *est bijective.*

DÉMONSTRATION. Prouvons d'abord l'injectivité et ensuite la surjectivité :

(1) Soient $[c_1], [c_2] \in T_m(M)$ deux vecteurs tangents et supposons que $D_{[c_1]}(f) = D_{[c_2]}(f)$ pour tout $f \in C^\infty(M)$. Soit (U, ϕ) une carte autour de m, alors on a que $\phi_i \in C^\infty(M)$ quelque soit $i = 1, ..., n$ et donc $(\phi_i \circ c_1)'(0) = D_{[c_1]}(\phi_i) = D_{[c_2]}(\phi_i) = (\phi_i \circ c_2)'(0)$ ce implique que $(\phi \circ c_1)'(0) = (\phi \circ c_2)'(0)$ et donc $[c_1] = [c_2]$. D'où l'injectivité de D.
(2) Soit maintenant D' une dérivation en m et (U, ϕ) une carte autour de m. Posons $a_i := D'(\phi_i)$ et $a = (a_1, ..., a_n)$. Considérons le chemin dans M suivant : $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$, $t \mapsto \phi^{-1}(\phi(m) + ta)$. On remarque que $\gamma(0) = m$ ainsi $[\gamma]$ est un vecteur tangent en m. On veut prouver que $D_{[\gamma]} = D'$.

Soit f une fonction différentiable sur M et notons $\bar{f} := f \circ \phi^{-1}$. Par la formule de Taylor on a qu'il existe une famille de fonction $\left\{\psi_{i,j}\right\}_{i,j=1,...,n}$ définies sur le domaine de $\bar{f}$ avec :

$$\bar{f}(x) = \bar{f}(\phi(m)) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}\phi(m)(x_i - \phi_i(m)) + \sum_{i,j=1}^{n} \psi_{i,j}(x_i - \phi_i(m))(x_j - \phi_j(m))$$

En composant à droite par ϕ on obtient :

$$f(p) = f(m) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}\phi(m)(\phi_i(p) - \phi_i(m)) + \sum_{i,j=1}^{n} \psi_{i,j}(\phi_i(p) - \phi_i(m))(\phi_j(p) - \phi_j(m))$$

Comme la dernière partie de cette expression est une somme de produits de fonctions s'annullant en m on a par le Lemme 1.24 et par linéarité de D' :

$$D'(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} \phi(m) D'(\phi_i(p) - \phi_i(m)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} \phi(m) a_i$$

Or $D_{[\gamma]}(f) = (f \circ \gamma)'(0) = (f \circ \phi^{-1}(\phi(m) + ta))'(0) = (\bar{f}(\phi(m) + ta))'(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} \phi(m) a_i$. Ce qui prouve l'assertion et donc la surjectivité de D.

□

Corollaire 1.28. *L'epace tangent $T_m(M)$ est un espace vectoriel isomorphe à $Der_m(M)$.*

Une fois établi le fait que l'espace tangent est un espace vectoriel on cherche à déterminer une base :

Soit M une variété différentiable, m un point arbitraire de M et (U, ϕ) une carte autour de m. Soit f une fonction différentiable sur M et posons $\bar{f} : \phi(U) \to \mathbb{R}$; $x \mapsto f \circ \phi^{-1}(x)$. Localement on peut donc écrire f sous la forme $f|_U = \bar{f} \circ \phi$.

Considérons les chemins dans M donnés par $c_i :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M ; t \mapsto \phi^{-1}(\phi(m) + te_i)$ où e_i est le i-ème vecteur de la base canonique. On va montrer que l'ensemble $\{D_{[c_1]}, ..., D_{[c_n]}\}$ est une base de l'espace vectoriel $Der_m(M)$:

Remarquons d'abord que si $[c] \in T_m(M)$ est un vecteur tangent en m, alors :

$$\begin{aligned} D_{[c]}(f) &= (f \circ c)'(0) = \\ &= (\bar{f} \circ \phi \circ c)'(0) = \\ &= (\bar{f}(\phi_1 c(t), ..., \phi_n c(t)))'(0) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}(\phi(c(0))) \cdot \frac{\partial(\phi_i \circ c)}{\partial t}(0) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} D_{[c]}(\phi_i) \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}(\phi(m)) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}(\phi(m)) \end{aligned}$$

Ce qui nous permet d'établir l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} D_{[c_j]}(f) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}(\phi(m)) \cdot \frac{\partial(\phi \circ \phi^{-1}(\phi(m) + te_j))}{\partial t}(0) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}(\phi(m)) \cdot \delta_{i,j} = \\ &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_j}(\phi(m)) \end{aligned}$$

Comme $D_{[c]}(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}(\phi(m))$ il en résulte que l'ensemble $\{D_{[c_1]}, ..., D_{[c_n]}\}$ engendre l'espace vectoriel $Der_m(M)$.

Soient maintenant $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i D_{[c_j]} = 0$. Pour tout $j = 1, ..., n$ considérons la fonction $f_j : U \to \mathbb{R}$ définie localement sur U par $m \mapsto \phi_i(m)$. Grâce au Théorème de partition de l'unité cette fonction s'étend en une fonction différentiable sur tout M de la façon habituelle. Ainsi on a que :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i D_{[c_i]}(f_j) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial \bar{f}_j}{\partial x_i}(\phi(m)) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial(\phi_j \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}(\phi(m)) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_j \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve. Il faut encore remarquer que la base $\{D_{[c_1]}, ..., D_{[c_n]}\}$ dépend de la carte choisie. La notation ne le met pas en évidence parce que les syboles ϕ_i ont déjà plusieurs significations.

Remarque 1.29. Ce qui précède nous montre que la dimension de l'espace tangent vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel est égale à la dimension de la variété. Deuxièmement on en déduit un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espace vectoriel entre $\mathbb{R}^n$, qu'on peut voir comme variété de dimension n, et son espace tangent en un point quelconque : $\varphi : \mathbb{R}^n \to T_m(\mathbb{R}^n)$, $e_i \mapsto \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Définition 1.30. On appelle fibré tangent de M le fibré vectoriel sur M donné par l'ensemble $T(M) := \bigcup_{m \in M} T_m(M)$ avec la projection canonique.

Après avoir étudié les espaces tangents on va s'interesser aux applications entre espaces tangents.

Définition 1.31. Soient N,M deux variétés différentiables et $f : M \to N$ une application différentiable. L'appliaction tangente (ou application différentielle) de f en m est l'application $f_* : T_m(M) \to T_{f(m)}(N)$ définie par $f_*(D_{[c]}) = D_{[f \circ c]}$. On note aussi $df = f_*$.

Proposition 1.32. *Sous les mêmes hypothèses, on a que f_* est bien définie, linéaire et vérifie $(f_* D_{[c]})(g) = D_{[c]}(g \circ f)$ pour toute application différentiable $g \in C^\infty(N)$. De plus si $h : N \to P$ est une autre application différentiable entre variétés, alors on a que $h_* \circ f_* = (h \circ f)_*$.*

Démonstration. (1) Soit g une application différentiable sur N, alors : $(f_*(D_{[c]}))(g) = D_{[f\circ c]}(g) = (g \circ f \circ c)'(0) = D_{[c]}(g \circ f)$. Ainsi la première relation annoncée est vérifiée et f_* est bien définie car $D_{[c]}$ l'est.

(2) Soient $D_{[c_1]}, D_{[c_2]}$ deux dérivations en m et $a, b \in \mathbb{R}$. Soit g une application différentiable sur N, alors : $(f_*(aD_{[c_1]} + bD_{[c_2]}))(g) = (aD_{[c_1]} + bD_{[c_2]})(f \circ g) = aD_{[c_1]}(f \circ g) + bD_{[c_2]}(f \circ g) = a(f_*(D_{[c_1]}))(g) + b(f_*(D_{[c_2]}))(g)$.

(3) La dernière relation est vite prouvée : $(h_*(f_*(D_{[c]})))(g) = (f_*(D_{[c]}))(g \circ h) = D_{[c]}(g \circ h \circ f) = ((h \circ f)_*(D_{[c]}))(g)$.

□

Définition 1.33. Soit M une variété différentiable et m un point dans M. L'espace cotangent à M en m est l'espace vectoriel dual $T^*_m(M)$ de $T_m(M)$.

Comme dans le cas de l'espace tangent on cherche une base de cet espace. En particulier si (U, x) est une carte autour de m on essaye de déterminer la base duale de la base $\{D_{[c_1]}, ..., D_{[c_n]}\}$ de l'espace tangent qu'on vient de calculer.

La carte locale $x : U \to \mathbb{R}^n$ induit n applications $x_i : U \to \mathbb{R}$ qui à leur tour induisent n applications tangentes $dx_i = x_{i_*} : T_m(M) \to T_{x_i(m)}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$. Ainsi on a comme candidat pour la base duale l'ensemble suivant : $\{dx_i, ..., dx_n\} \subset T^*_m(M)$.

Rappelons que, par définition, on a $c_j = x^{-1}(x(m) + te_j)$ et donc $x_i \circ c_j = x_i \circ x^{-1}(x(m) + te_j) = x(m) + \delta_{ij}te_j$.

Considérons maintenant $dx_i(D_{[c_j]}) = D_{[x_i\circ c_j]}$. Soit $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ une application différentiable, alors on a que

$$\begin{aligned} D_{[x_i\circ c_j]}(g) &= \frac{\partial(g \circ x_i \circ c_j)}{\partial t}(0) = \\ &= \frac{\partial(g(x(m) + \delta_{i,j}te_j))}{\partial t}(0) = \\ &= g'(x(m)) \cdot \frac{\partial(x(m) + \delta_{ij}t)}{\partial t} = \\ &= \delta_{ij}g'(x(m)) \end{aligned}$$

Par l'isomorphisme déjà établi entre $T_{x_i(m)}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$ on a que $dx_i(D_{[c_j]}) = \delta_{i,j}$ et ainsi on a bien que $\{dx_i, ..., dx_n\}$ est la base duale de $\{D_{[c_1]}, ..., D_{[c_n]}\}$.

3. Formes différentielles

Notation 1.34. Dans tout ce paragraphe on notera M pour une variété différentiable de dimension n, m pour un point arbitraire dans M et $T_m(M)$ l'espace tangent.

Définition 1.35. Une p-forme différentielle sur une variété différentiable M est une application différentiable (à expliquer) qui à tout point m dans M associe une p-forme alternée $\omega_m \in \bigwedge^p(T_m(M))$ sur l'espace vectoriel tangent.

Le mot "différentiable" dans la définition a la signification suivante : en appliquant les résultats du premier paragraphe on a que si (U, x) est une carte sur M on a une base locale sur U de l'espace vectoriel $\bigwedge^p(T_m(M))$ donnée par $\left\{dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p} | 1 \leqslant i_1 < ... < i_p \leqslant n\right\}$. Ainsi localement on peut écrire $\omega = \sum_{1\leqslant i_1<...<i_p\leqslant n} f_{i_1...i_p} dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p}$ pour certaines fonctions $f_{i_1...i_p} : U \to \mathbb{R}$. Différentiable signifie que toutes les fonctions $f_{i_1...i_p}$ sont différentiables.

Cette propriétée est bien définie parce que si (V, y) est une autre carte avec $U \cap V \neq \varnothing$ alors par les propriétés algébriques de la base duale on a que $dx_i = \sum_{k=1}^n dx_i(D_{[c_k]})dy_k$. Ainsi si on écrit le changement de coordonnées on obtient que ω reste différentielle si elle l'était (puisque $D_{[c_k]}x_i(m) = \frac{\partial \overline{x_i}}{\partial y_k}(y(m))$ donc $D_{[c_k]}x_i \circ y^{-1} = \frac{\partial \overline{x_i}}{\partial y_k}$ qui est différentiable vu que $\overline{x_i} = x_i \circ x^{-1}$ l'est).

Exemple 1.36. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Posons $\omega_x : (T_x(U))^n \to \mathbb{R}$ définie par $\omega_x(u_1, ..., u_n) = f(x)det(u_1, ..., u_n)$ pour tout x dans U. Clairement ω_x est une n-forme alternée sur $T_x(U)$ pour tout x dans U et par différentiabilité du déterminant et de la fonction f on a que ω est une n-forme différentielle sur U.

Notation 1.37. On note $\Omega^p(M)$ l'ensemble des p-formes différentielles sur M. Si p=0 on pose $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$. On remarque au passage que les 1-formes sont les sections du fibré vectoriel constitué du fibré cotangent.

Lemme 1.38. *L'ensemble des p-formes différentielles sur une variété M est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les lois ponctuelles.*

Démonstration. Soient $\omega, \eta \in \Omega^p(M)$ deux p-formes différentielles et $\lambda \in \mathbb{R}$. Puisque $\bigwedge^p(T_m(M))$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel on a que la somme et le produit définis comme suit induisent clairement une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel sur $\Omega^p(M) : (\omega + \eta)_m = \omega_m + \eta_m$ et $(\lambda\omega)_m = \lambda\omega_m$. □

Définition 1.39. Soient $p, q \in \mathbb{N}$. Le produit extérieur de $\Omega^p(M)$ et $\Omega^q(M)$ est l'application $\wedge : \Omega^p(M) \times \Omega^q(M) \to \Omega^{p+q}(M) ; (\omega, \eta) \mapsto \omega \wedge \eta$ définie ponctuellement par $(\omega \wedge \eta)_m := \omega_m \wedge \eta_m$ où $\wedge$ est le produit extérieur de $\bigwedge^p(T_m(M))$ et $\bigwedge^q(T_m(M))$ déjà défini.

Proposition 1.40. *Le produit extérieur est bien défini, bilinéaire, associatif et vérifie $\omega \wedge \eta = (-1)^{pq}\eta \wedge \omega$ si ω est une p-forme différentielle et η est une q-forme différentielle.*

Démonstration. Cette opération est bien définie puisque si on écrit localement une p-forme différentielle ω et une q-forme différentielle ρ sous la forme $\omega = \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_p\leqslant n} f_{i_1\ldots i_p} dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_p}$ et $\rho = \sum_{1\leqslant j_1<\ldots<j_q\leqslant n} g_{j_1\ldots j_p} dx_{j_1}\wedge\ldots\wedge dx_{j_p}$, par bilinéarité et associativité du produit ponctuel on a que $\omega\wedge\rho = \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_p\leqslant n, 1\leqslant j_1<\ldots<j_q\leqslant n} g_{j_1\ldots j_q} f_{i_1\ldots i_p} dx_{i_1}\wedge \ldots \wedge dx_{j_q}$. Les fonctions $g_{j_1\ldots j_q} f_{i_1\ldots i_p}$ sont différentiables puisque $g_{j_1\ldots j_q}$ et $f_{i_1\ldots i_p}$ le sont.

Le reste est clair par ponctualité des opérations et par la proposition 1.12 □

Remarque 1.41. Si f est une fonction différentiable (i.e. si $f \in \Omega^0(M)$), ω une p-forme différentielle et si $D_1, ..., D_p$ sont p vecteurs tangents en m on a :

$$(f_m \wedge \omega_m)(D_1, ..., D_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma\in S_p} sgn(\sigma) f_m \omega_m(D_{\sigma(1)}, ..., D_{\sigma(p)}) = f_m\omega_m(D_1, ..., D_p)$$

puisque si $sgn(\sigma) = -1$ alors $\omega_m(D_{\sigma(1)}, ..., D_{\sigma(p)}) = -\omega_m(D_1, ..., D_p)$ et si $sgn(\sigma) = 1$ alors $\omega_m(D_{\sigma(1)}, ..., D_{\sigma(p)}) = 1\omega_m(D_1, ..., D_p)$ et de plus $|S_p| = p!$.

Pour cette raison souvent on note $f\omega$ la p-forme différentielle $f \wedge \omega$.

Comme dans le cas des espaces tangents on a qu'une application différentiable entre deux variétés induit une application entre les espaces des p-formes :

Définition 1.42. Soient M,N deux variétés différentiable et $\theta : M \to N$ une application différentiable. On définit l'application $\theta^* : \Omega^p(N) \to \Omega^p(M)$ par : $(\theta^*(\omega))_m(D_1, ..., D_p) = \omega_{\theta(m)}(\theta_*(D_1), ..., \theta_*(D_p))$ où ω est une p-forme sur N et $D_1, ..., D_p$ sont p vecteurs tangents à M en m. Si f est une 0-forme sur N, i.e. si f est une fonction différentiable sur N, on pose $\theta^*(f) = f \circ \theta$.

On doit encore montrer que cette application est bien définie, cela résulte de la proposition suivante :

Proposition 1.43. *Soient M,N,P trois variétés différentiables et $\theta : M \to N$ et $\psi : N \to P$ deux applications différentiables. Alors :*

(1) $(\psi \circ \theta)^* = \theta^* \circ \psi^*$
(2) $\theta^*(\omega \wedge \eta) = \theta^*(\omega) \wedge \psi^*(\eta)$ *pour toute p-forme ω et pour toute q-forme η.*
(3) $\theta^*(f dx_1 \wedge ... \wedge dx_p) = f \circ \theta d(x_1 \circ \theta) \wedge ... \wedge d(x_p \circ \theta)$

Démonstration. (1) Soit $\omega \in \Omega^p(P)$ une p-forme sur P et $D_1, ..., D_p \in T_m(M)$ p vecteurs tangents à M en m. On a :

$$((\psi \circ \theta)^*(\omega))_m(D_1, ..., D_p) = \omega_{(\psi\circ\theta)(m)}((\psi \circ \theta)_* D_1, ..., (\psi \circ \theta)_* D_p) =$$

$$= \omega_{(\psi\circ\theta)(m)}(\psi_*(\theta_* D_1), ..., \psi_*(\theta_* D_p) = (\psi^*(\omega_{\theta(m)}))(\theta_* D_1, ..., \theta_* D_p) =$$

$$= \theta^*(\psi^*(\omega_m))(D_1, ..., D_p)$$

(2) Soient $\omega \in \Omega^p(N)$, $\eta \in \Omega^q(N)$ et $D_1, ..., D_{p+q} \in T_m(M)$.

$$(\theta^*(\omega \wedge \eta))_m(D_1, ..., D_{p+q}) = (\omega \wedge \eta)_{\theta(m)}(\theta_* D_1, ..., \theta_* D_{p+q}) =$$

$$= \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} sgn(\sigma)\omega_{\theta(m)}(\theta_* D_{\sigma(1)}, ..., \theta_* D_{\sigma(p)})\eta_{\theta(m)}(\theta_* D_{\sigma(p+1)}, ..., \theta_* D_{\sigma(p+q)}) =$$

$$= \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} sgn(\sigma)(\theta^*\omega)_m(D_{\sigma(1)}, ..., D_{\sigma(p)})(\theta^*\eta)_m(D_{\sigma(p+1)}, ..., D_{\sigma(p+q)}) =$$

$$= (\theta^*(\omega) \wedge \theta^*(\eta))_m(D_1, ..., D_{p+q})$$

(3) On rappelle que si f est une fonction différentiable sur N et ω est une p-forme sur N alors la notation $f\omega$ signifie $f \wedge \omega$. Remarquons d'abors que si $g : N \to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable alors $\theta^*(dg) = d(\theta^* g)$. En effet : $d(\theta^*(g))(D_{[c]}) = d(g \circ \theta)(D_{[c]}) = D_{\left[g \circ \theta \circ c\right]} = dg(D_{[\theta \circ c]}) = dg(\theta_* D_{[c]}) = \theta^*(dg(D_{[c]}))$. Ainsi : $\theta^*(f \wedge dx_1 \wedge ... \wedge dx_p = \theta^* f \wedge \theta^*(dx_1) ... \wedge \theta^*(dx_p) = f \circ \theta \wedge d(\theta^* x_1) \wedge ... \wedge d(\theta^* x_p) = f \circ \theta \wedge d(x_1 \circ \theta) \wedge ... \wedge d(x_p \circ \theta)$.

□

Scholie 1.44. *Soit $\theta : M \to N$ une application différentiable et ω, η deux p-formes sur N, alors $\theta^*(\omega + \eta) = \theta^*\omega + \theta^*\eta$*

Corollaire 1.45. *Si $\theta : M \to N$ est une application différentiable et ω une p-forme sur N, alors $\theta^*\omega$ est bien une p-forme différentielle sur M.*

Démonstration. Si $\omega = f dx_1 \wedge ... \wedge dx_p$ avec $f : N \to \mathbb{R}$ différentiable alors $f \circ \theta$ est différentiable puisque θ l'est aussi. Ainsi le point trois de la proposition précédente permet de conclure. □

4. Cohomologie de de Rham

Définition 1.46. La dérivation extérieure de $\Omega^p(M)$ est l'application $d^p : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$ définie par $d^p(f dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p}) = df \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p}$ et étendue par linéarité.

Proposition 1.47. *Cette définition est bien posée (i.e. indépendante des coordonnées locales) et de plus $d^{p+1} \circ d^p = 0$.*

Démonstration. (1) Il suffit de devélopper les formules de changement de base.

(2) Clairement il suffit de prouver l'assertion pour une p-forme de la forme $\omega = f dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p}$. On a alors $d^p(\omega) = df \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p}$. Or $df : T_m(M) \to T_{f(m)}(M) \cong \mathbb{R}$ appartient au dual de $T_m(M)$. Ainsi df s'écrit sous la forme $df = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$ avec $a_i = df(D_{[c_i]})$ vu qu'on a montré que les dx_i sont la base duale des $D_{[c_i]}$. Puisque $a_i = D_{[c_i]}(f) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}(x(m))$ on a que

$$\begin{aligned} df &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_k} dx_k \right) \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p} = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p} \end{aligned}$$

Comme on a :

$$\begin{aligned} D_{[c_i]}(D_{[c_j]}(f)) &= \frac{\partial \overline{D_{[c_j]}(f)}}{\partial x_i} = \\ &= \frac{\partial (D_{[c_j]} f \circ x^{-1})}{\partial x_j} = \\ &= \frac{\partial (\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i})}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial x_i \partial x_j} \end{aligned}$$

il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} d^{p+1}(d^p(\omega)) &= \sum_{k=1}^n d^{p+1} \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_k} dx_k \right) \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p} = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial x_k \partial x_s} dx_s \wedge dx_k \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p} = 0 \end{aligned}$$

puisque $dx_s \wedge dx_k = -dx_k \wedge dx_s$.

□

Proposition 1.48. *Soit M,N deux variétés différentiables et $\theta : M \to N$ une application différentiable. Alors on a que $\theta^*(d^p\omega) = d^p(\theta^*(\omega))$.*

Démonstration. Soit ω, $\eta \in \Omega^p(N)$ et $D_1, ..., D_p \in T_m(M)$ alors : $(\theta^*(\omega + \eta))_m(D_1, ..., D_p) = (\omega + \eta)_{\theta(m)}(\theta_* D_1, ..., \theta_* D_p) = \omega_{\theta(m)}(D_1, ..., D_p) + \omega_{\theta(m)}(D_1, ..., D_p) = (\theta^*(\omega))_m(D_1, ..., D_p) + (\theta^*(\eta))_m(D_1, ..., D_p) = \theta^*\omega + \theta^*\eta)_m(D_1, ..., D_p)$. Il suffit donc de prouver l'assertion pour un élément de $\Omega^p(N)$ de la forme $\omega = f dx_1 \wedge ... \wedge dx_p$: $\theta^*(d^p\omega) = \theta^*(df \wedge dx_1 \wedge ... \wedge dx_p) = \theta^*(df) \wedge \theta^*(dx_1 \wedge ... \wedge dx_p) = d(f \circ \theta) \wedge d(x_1 \circ \theta) \wedge ... \wedge d(x_p \circ \theta) = d^p(f \circ \theta d(x_1 \circ \theta) \wedge ... \wedge d(x_p \circ \theta)) = d^p(\theta^*\omega)$. □

Proposition 1.49. *Soit ω une p-forme et η une q-forme. On a alors que $d^{p+q}(\omega \wedge \eta) = d^p\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d^q \eta$.*

DÉMONSTRATION. Par linéarité il suffit de prouver cela pour deux éléments de la forme $\omega = f dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p}$ et $\eta = g dx_{j_1} \wedge ... \wedge dx_{j_q}$. Remarquons d'abord que $\overline{fg} = (fg) \circ x^{-1} = (f \circ x^{-1})(g \circ x^{-1}) = \bar{f}\bar{g}$. Par bilinéarité de l'opération $\wedge$ on a que :

$$d^{p+q}((f dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p}) \wedge (g dx_{j_1} \wedge ... \wedge dx_{j_q}) =$$

$$= d^{p+q}(fg dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge ... \wedge dx_{j_q}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \overline{fg}}{\partial x_k} dx_k \wedge ... \wedge dx_{j_q} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\bar{g} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_k} + \bar{f} \frac{\partial \bar{g}}{\partial x_k}) dx_k \wedge ... \wedge dx_{j_q} =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_k} dx_k \wedge ... \wedge dx_{i_p} \right) \wedge \left(\bar{g} dx_{j_1} \wedge ... \wedge dx_{j_q} \right) + \left(\bar{f} dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p} \right) \wedge \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \bar{g}}{\partial x_k} dx_k \wedge ... \wedge dx_{j_q} \right) =$$

$$= d^p \omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d^q \eta$$

puisque dans le deuxième terme de la somme le facteur dx_k doit permuter avec le facteur dx_{i_1} ensuite avec le facteur dx_{i_2} et ainsi de suite jusqu'à la place du facteur dx_{i_p}, ce qui fait un total de p permutations. □

DÉFINITION 1.50. Une p-forme différentielle ω est dite fermée si $d^p(\omega) = 0$ et exacte s'il existe une (p-1)-forme η avec $d^{p-1}(\eta) = \omega$.

DÉFINITION 1.51. Considérons le complexe de cochaînes positif suivant :

$$\cdots \longrightarrow \Omega^{p-1}(M) \xrightarrow{d^{p-1}} \Omega^p(M) \xrightarrow{d^p} \Omega^{p+1}(M) \longrightarrow \cdots$$

Le p-ème groupe de cohomologie de de Rham est l'espace vectoriel réel $H^p_\Omega(M) := Kerd^p / Imd^{p-1}$ =p-formes fermées/p-formes exactes.

EXEMPLE 1.52. $H^0_\Omega(M) = Kerd^0 = \{f : C^\infty(M) \to \mathbb{R} | df = 0\} =$
$= \left\{ f : C^\infty(M) \to \mathbb{R} | \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} = 0 \ pour \ tout \ i = 1, ..., n \right\} =$
$= \{f : C^\infty(M) \to \mathbb{R} | f \ est \ localement \ constante\}$. Or une fonction continue localement constante sur un domaine connexe est constante. Ainsi toutes les fonctions dans $H^0_\Omega(M)$ sont l'une multiple scalaire de l'autre sur chaque composante connexe de M. Il s'ensuit que $H^0_\Omega(M)$ est le produit d' autant de copies de $\mathbb{R}$ que de composantes connexes de M.

5. Intégration de formes et formule de Stokes

Dans ce paragraphe on aimerait définir l'intégrale d'une n-forme sur une variété M de dimension n. Considérons d'abord le cas où M=U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$:

Soit ω une n-forme sur U à support compact. Par le Théorème de Uryshon il existe une fonction continue $h : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ avec $h|_{supp(\omega)} = 1$ et s'annullant en dehors de U. Ainsi on peut étendre ω sur tout $\mathbb{R}^n$ par $f\omega$. On a donc que $\omega = f(x_1, ..., x_n)dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$ avec f s'annullant sur le complémentaire d'un ensemble compact. On peut donc poser :

$$\int_U \omega = \int_{\mathbb{R}^n} \omega = \int_{\mathbb{R}} ... \int_{\mathbb{R}} f(x_1, ..., x_n)dx_1...dx_n$$

Soit maintenant $W \subset \mathbb{R}^n$ un autre ouvert et $\theta : W \to U$ un difféomorphisme de classe C^∞. Cela induit la n-forme $\theta^*\omega$ sur W donnée par : $\theta^*\omega = f \circ \theta d(x_1 \circ \theta) \wedge ... \wedge d(x_n \circ \theta)$. Or $d(x_i \circ \theta) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(x_i \circ \theta)}{\partial x_j} dx_j = \sum_{j=1}^n J_{ij}(\theta)dx_j$ où $J(\theta)$ est la matrice Jacobienne de θ, donc :

$$d(x_1 \circ \theta) \wedge ... \wedge d(x_n \circ \theta) = \left(\sum_{j_1=1}^n J_{1j_1}(\theta)dx_{j_1} \right) \wedge ... \wedge \left(\sum_{j_n=1}^n J_{nj_n}(\theta)dx_{j_n} \right) =$$

$$= \sum_{j_1=1}^n ... \sum_{j_n=1}^n J_{1j_1}...J_{nj_n} dx_{j1} \wedge ... \wedge dx_{jn} = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma)(J_{1\sigma(1)_1}...J_{n\sigma(n)_n})dx_1 \wedge ... \wedge dx_n =$$

$$= det(J(\theta))dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$$

puisque si $j_a = j_b$ pour des certains a et b, alors $dx_{j_1} \wedge ... \wedge dx_{j_n} = 0$ et ainsi il ne reste plus que les termes de la forme $J_{1\sigma(1)}...J_{n\sigma(n)}$. Il en résulte que $\theta^*\omega = (f \circ \theta)det(J(\theta))dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$ et donc (par la formule de changement de variable standard) :

$$\int_W \theta^*\omega = \int_{\mathbb{R}} ... \int_{\mathbb{R}} f(\theta(x_1, ..., x_n))det(J(\theta))dx_1...dx_n =$$

$$= \pm \int_{\mathbb{R}} ... \int_{\mathbb{R}} f(x_1, ..., x_n)dx_1...dx_n = \pm \int_U \omega$$

où ± est le signe du déterminant de la Jacobienne.

Si les domaines W et U sont connexes, par continuité de l'application *det* on a que le déterminant de la Jacobienne est toujours strictement positif ou negatif (parce que θ est un difféomorphisme) et aucun problème ne se pose. Si par contre W et U ne sont pas connexes il faut supposer que le déterminant ne change pas de signe lorsqu'on passe d'une composante connexe à l'autre car autrement on aurait des termes qui s'ajoutent et d'autres qui se soustraient et donc la dernière égalité serait fausse. Le même problème se pose si on veut définir l'intégrale d'une forme sur une variété : il est facile de deviner que la méthode sera d'intégrer une forme sur chaque "morceau" de la variété homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et de sommer tout ces termes. Or il faut bien vérifier que les termes de cette somme ne se compensent pas mais qu'il s'ajoute effectivement. Cela motive la définition suivante :

Définition 1.53. Une variété différentiable M est orientable si pour toutes cartes (U, ϕ) et (V, ψ) avec $U \cap V \neq \emptyset$, on a $det(J(\phi \circ \psi^{-1})) > 0$.

Soit maintenant M une variété différentiable orientable de dimension n. Soit ω une n-forme sur M à support compact dans un ouvert U de M domaine d'une carte (U, ϕ). Alors $(\phi^{-1})^*(\omega)$ est une n-forme sur $\phi(U)$ à support compact puisque $(\phi^{-1})^*(\omega) = (\phi^{-1})^*(f dx_1 \wedge ... \wedge dx_n) = f \circ \phi^{-1} d(x_1 \circ \phi^{-1}) \wedge ... \wedge d(x_n \circ \phi^{-1})$ et donc $supp((\phi^{-1})^*(\omega)) = \phi(supp(\omega))$ qui est un compact puisque $supp(\omega)$ est compact et ϕ est continue. On peut donc poser :

$$\int_M \omega = \int_{\mathbb{R}^n} (\phi^{-1})^*(\omega)$$

Lemme 1.54. *Cette dernière définition est indépendante de la carte choisie.*

Démonstration. Soit ω une n-forme sur M et (U, ϕ), (V, ψ) deux cartes avec $supp(\omega) \subset U$ et $supp(\omega) \subset V$. Posons $\theta = \psi \circ \phi^{-1}$, alors $\psi^{-1} \circ \theta = \phi^{-1}$ et donc $(\phi^{-1})^* = \theta^* \circ (\psi^{-1})^*$, ainsi :

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\phi^{-1})^*(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} \theta^*((\psi^{-1})^*(\omega)) = \int_{\mathbb{R}^n} (\psi^{-1})^*(\omega)$$

puisque θ est clairement un difféomorphisme entre $\psi(V)$ et $\phi(U)$. □

On va maintenant étendre cette définition pour une n-forme ω à support compact sur une variété. Notons $\{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement localement fini d'ouverts qui sont domaines de cartes. Par le Théorème de partition de l'unité on a qu'il existe une famille de fonctions $\{f_i\}_{i \in I}$ différentiables positives de M dans $\mathbb{R}$ telles que $supp(f_i) \subset U_i$ et$\sum_{i \in I} f_i = 1$. On a alors $\omega = (\sum_i f_i)\omega$. Par compacité de supp($\omega$) on a qu'il existe un nombre fini d'ouvert U_j dans $\{U_i\}_{i \in I}$ recouvrant supp(ω). On peut donc poser :

$$\int_M \omega = \sum_{i \in I} \int_M f_i \omega$$

Cette définition est bien posée puisque si $\left\{g_j\right\}_{j \in J}$ est une autre famille de telles fonctions alors

$$\sum_{i \in I} \int_M f_i \omega = \sum_{i \in I} \int_M \left(\sum_{j \in J} g_j \right) f_i \omega = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \int_M f_i g_j \omega =$$

$$= \sum_{j \in J} \int_M \left(\sum_{i \in I} f_i \right) g_j \omega = \sum_{j \in J} \int_M g_j \omega$$

On énonce maintenant le Théorème de Stokes qui sera utilisé dans la démonstration du Théorème de de Rham :

THÉORÈME 1.55. *Soit M une variété différentiable orientable de dimension n et à bord (éventuellement vide). Soit ω une (n-1)-forme sur M à support compact. On a alors :*

$$\int_M d^{n-1}\omega = \int_{\partial M} \omega$$

CHAPITRE 2

Algèbre homologique

Le but de ce chapitre est de construire l'homologie singulière et la cohomologie singulière. Premièrement on va énoncer une définition "abstraite" de homologie, cette approche axiomatique permet de démontrer des résultats valables pour toute homologie. Nous auron en particulier besoin de construire la suite de Mayer-Vietoris, un outil très important pour les calculs homologiques. Ensuite on construira l'homologie singulière et on montrera, au moins partiellement, qu'il s'agit effectivement d'une homologie au sense de la définition donnée. Le même programme sera suivi pour mettre en place la cohomologie singulière ; on evitera tout de même de donner les démonstrations vu qu'elle sont souvent duales à celles présentées dans le cadre homologique.

1. Théorie d'homologie

Convention 2.1. Dans tout le chapitre on notera (X,A) pour un couple formé d'un espace topologique X et d'un sous-espace A de X ; si $A = \emptyset$ on écrira $(X, A) = X$. On appelle (X,A) une paire topologique.

Terminologie 2.2. Une sous-paire de la paire topologique (X,A) est un couple (X',A') formé d'un sous-espace X' de X et d'un sous-espace A' de A. Une application entre paires topologiques $f : (X, A) \to (Y, B)$ est une application continue de X dans Y avec $f(A) \subset B$. On remarque qu'une composition d'applications entre paires topologiques reste une application entre paires topologiques.

Exemple 2.3. L'inclusion de la sous-paire (X',A') dans (X,A) est une application entre paires topologiques.

Définition 2.4. Une catégorie admissible pour une théorie d'homologie (ou plus simplement une catégorie admissible) est une catégorie $\mathfrak{C}$ dont les objets sont des paires topologiques et les morphismes sont des applications entre paires topologiques vérifiant :

(1) Si $(X, A) \in \mathfrak{C}$ alors le diagramme d'inclusions suivant (appelé le diagramme de la paire) est dans $\mathfrak{C}$:

$$\begin{tikzcd} & & (X, \varnothing) \arrow[dr] & \\ (\varnothing, \varnothing) \arrow[r] & (A, \varnothing) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (X, A) \\ & & (A, A) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

(2) Si $(X, A), (Y, B) \in \mathfrak{C}$ et si $f : (X, A) \to (Y, B)$ est une application entre paires topologiques dans $\mathfrak{C}$, alors $\mathfrak{C}$ contient les applications d'un élément du diagramme de la paire (X,A) vers l'élément corréspondent du diagramme de la paire (Y,B) définies par restriction de f.

(3) Pour tout triple de paires topologiques $(X, A), (Y, B), (Z, C) \in \mathfrak{C}$ et pour toutes applications $f : (X, A) \to (Y, B)$, $g : (Y, B) \to (Z, C)$ dans $\mathfrak{C}$, l'application $g \circ f : (X, A) \to (Z, C)$ est également dans $\mathfrak{C}$.

(4) Soit $I = [0, 1]$. Si $(X, A) \in \mathfrak{C}$ alors $(X, A) \times I = (X \times I, A \times I)$ est dans $\mathfrak{C}$ et les deux inclusions $k_1 : (X, A) \to (X, A) \times I$, $x \mapsto (x, 1)$ et $k_0 : (X, A) \to (X, A) \times I$, $x \mapsto (x, 0)$ sont dans $\mathfrak{C}$.

(5) Il existe une paire $(\{x\}, \varnothing)$ dans $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}$ contient toutes les applications continues $f : \{x\} \to Y$ quelque soit Y dans $\mathfrak{C}$.

Exemple 2.5. La catégorie de toutes les paires topologiques avec toutes les applications entre paires topologiques est une catégorie admissible.

La catégorie de toutes les paires topologiques compactes (i.e. X compact et A fermé dans X) avec toutes les applications entre elles est une catégorie admissible.

La catégorie de toutes les paires topologiques (X,A) formées par un CW-complexe X et un sous-complexe A de X et avec toutes les applications entre elles, est une troisième catégorie admissible.

Définition 2.6. Soient (X, A), (Y, B) deux paires topologiques et $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ deux applications entre paires topologiques. On dit que f et g sont homotopes s'il existe une homotopie $h : X \times I \to Y$ de f vers g avec $h(A \times I) \subset B$.

Définition 2.7. Une théorie d'homologie sur une catégorie admissible $\mathfrak{C}$ est un triple $\kappa = \{H, *, \partial\}$ où :

(1) H associe à toute paire (X,A) dans $\mathfrak{C}$ et à tout nombre entier q dans $\mathbb{Z}$ un groupe abélien noté $H_q(X, A)$ et appelé le q-ème groupe de la paire (X,A) dans la théorie d'homologie κ.

(2) $*$ assigne à toute application $f : (X, A) \to (Y, B)$ dans $\mathfrak{C}$ et à tout nombre q dans $\mathbb{Z}$ un homomorphisme de groupe $f_{*_q} : H_q(X, A) \to H_q(Y, B)$ appelé le q-ème homomorphisme induit par f dans la théorie d'homologie κ.

(3) ∂ associe à toute paire (X,A) dans $\mathfrak{C}$ et à tout q dans $\mathbb{Z}$ un homomorphisme de groupe $\partial_{(X,A,q)} : H_q(X,A) \to H_q(A,\emptyset)$

De plus, on requiert que :

(1) Si $(X,A) \in \mathfrak{C}$, alors $(id_{(X,A)})_{*_q} : H_q(X,A) \to H_q(X,A)$ est l'identité.

(2) Si $f : (X,A) \to (Y,B)$ et $g : (Y,B) \to (Z,C)$ sont dans $\mathfrak{C}$, alors on a que $(g \circ f)_{*_q} = g_{*_q} \circ f_{*_q}$ pour tout q dans $\mathbb{Z}$.

(3) Si $f \in \mathfrak{C}$, alors, en posant $g := f|_A$, on a que le diagramme suivant commute pour tout q dans $\mathbb{Z}$:

$$\begin{tikzcd} H_q(X,A) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\partial"'] & H_q(Y,B) \arrow[d, "\partial"] \\ H_{q-1}(A) \arrow[r, "g_*"'] & H_{q-1}(B) \end{tikzcd}$$

(4) Si $(X,A) \in \mathfrak{C}$ notons i l'inclusion de A dans X et j l'inclusion de X dans (X,A). On a alors une longue suite exacte :

$$\cdots \longrightarrow H_q(A) \xrightarrow{i_*} H_q(X) \xrightarrow{j_*} H_q(X,A) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

(5) Si $f, g : (X,A) \to (Y,B)$ sont dans $\mathfrak{C}$ et sont homotopes dans (C), alors $f_* = g_*$

(6) Si U est un ouvert de X avec $\overline{U} \subset \mathring{A}$ pour un certain sous espace A de X et si $e : (X \setminus U, A \setminus U) \to (X,A)$ est dans $\mathfrak{C}$, alors $e_* : H_q(X \setminus U, A \setminus U) \to H_q(X,A)$ est un isomorphisme de groupes pour tout q dans $\mathbb{Z}$.

(7) Si $X = \{x\} \in \mathfrak{C}$, alors $H_q(X) = 0$ pour tout entier q différent de zéro. On appelle $G = H_0(X)$ le goupe de coefficient de l'homologie κ.

Remarque 2.8. Soit $\mathfrak{C}$ une catégorie admissible. Si on pose $H_q(X,A) = 0$ pour tout q dans $\mathbb{Z}$ et pour tout (X,A) dans $\mathfrak{C}$ alors $\kappa = \{H, *, \partial\}$ est une théorie d'homologie appelée homologie triviale et notée κ_0.

Proposition 2.9. *Soit $\mathfrak{C}$ une catégorie admissible et κ une théorie d'homologie sur $\mathfrak{C}$. Si $f : (X,A) \to (Y,B)$ est une équivalence d'homotopie dans $\mathfrak{C}$ d'inverse g, alors $f_* : H_q(X,A) \to H_q(Y,B)$ est un isomorphisme de groupes d'inverse g_*.*

Démonstration. Par les axiomes 1,2,5 on a directement que :

$$g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = (id)_* = id : H_q(X,A) \to H_q(X,A)$$
$$f_* \circ g_* = (f \circ g)_* = (id)_* = id : H_q(Y,B) \to H_q(Y,B)$$

□

Corollaire 2.10. *Soit $\mathfrak{C}$ une catégorie admissible et κ une théorie d'homologie sur $\mathfrak{C}$. Si X et un espace contractile dans $\mathfrak{C}$, alors $H_q(X) \cong 0$ pour tout q différent de zéro et $H_0(X) \cong H_0(\{x\}) = G$.*

Démonstration. Clair par l'axiome 7 et la proposition précédente. □

2. Suite de Mayer-Vietoris

Définition 2.11. Soit $\mathfrak{C}$ une catégorie admissible, X un espace topologique dans $\mathfrak{C}$ et (A,B) une paire ordonnée de sous-espaces de X dans $\mathfrak{C}$. Le triple (X ;A,B) est une triade topologique propre par rapport à la théorie d'homologie κ si les deux inclusions $\alpha : (A, A \cap B) \to (A \cup B, B)$ et $\beta : (B, A \cap B) \to (A \cup B, A)$ induisent deux isomorphismes $\alpha_* : H_q(A, A \cap B) \to H_q(A \cup B, B)$ et $\beta_* : H_q(B, A \cap B) \to H_q(A \cup B, A)$.

Exemple 2.12. Si A,B sont deux fermés dans X avec $\overline{A \setminus (A \cap B)} \cap \overline{B \setminus (A \cap B)} = \emptyset$ alors α_* et β_* sont deux isomorphismes par l'axiome 6 et donc (X ;A,B) est une triade topologique propre.

Convention 2.13. Dans ce paragraphe on notera (X ;A,B) pour une triade topologique propre vérifiant $X = A \cup B$. On pose également $C = A \cap B$.

Pour établir et montrer la suite de Mayer-Vietoris on a besoin des trois lemmes suivants :

Lemme 2.14. *Soient A,C,X trois groupes abéliens et $i : A \to X$, $f : X \to C$ deux homomorphismes de groupes tels que $f \circ i$ est un isomorphisme. On a alors que $X = Imi \oplus Kerf$.*

Démonstration. Soit x un élément de X, comme $f \circ i$ est surjectif on a qu'il existe un a dans A avec $(f \circ i)(a) = f(x)$. Ainsi $f(x - i(a)) = f(x) - f(i(a)) = 0$ donc $x = (x - i(a)) + i(a) \in Imi + Kerf$.

De plus si $x \in Imi \cap Kerf$ alors $x = i(a')$ pour un certain a' dans A et $f(x) = e_C$, on a donc $(f \circ i)(a') = e_C$ mais $f \circ i$ est injectif donc $a' = e_A$ et ainsi $x = i(a') = i(e_A) = e_X$. Il en résulte que $X = Imi \oplus Kerf$. □

Lemme 2.15. *Considérons le diagramme de groupes abéliens et d'homomorphismes de groupes suivant :*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "i"] \arrow[dd, "h"'] & & B \arrow[dl, "j"'] \arrow[dd, "k"] \\
& X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\
C & & D
\end{tikzcd}$$

Supposons que :

(1) *les deux triangles commutent, i.e $f \circ i = h$ et $g \circ j = k$.*

(2) *$Imi = Kerg$ et $Imj = Kerf$.*

(3) *h et k sont des isomorphismes.*

Alors on a que les deux applications suivantes sont des isomorphismes :

$$\begin{array}{ll} \varphi : A \oplus B \to X & \psi : X \to C \oplus D \\ (a, b) \mapsto i(a) + j(b) & x \mapsto (f(x), g(x)) \end{array}$$

Démonstration. Par le lemme 2.14 on a que $X = Imi \oplus Kerf$ et par la condition 2 on a que $Kerg \cap Kerf = Imi \cap Kerf = 0$.

(1) φ est injectif :

soit $(a, b) \in A \oplus B$ avec $\varphi(a, b) = i(a) + j(b) = 0$, alors

$$h(a) = f(i(a)) + 0 = f(i(a)) + f(j(b)) = f(i(a) + j(b)) = f(0) = 0$$

$$k(b) = g(j(b)) + 0 = g(j(b)) + g(i(a)) = g(j(b) + i(a)) = g(0) = 0$$

Par injectivité de h et de k on a que $a = 0 = b$.

(2) φ est surjectif :

soit x dans X et posons $a = h^{-1}(f(x))$ et $b = k^{-1}(g(x))$. Considérons $y = \varphi(a, b) - x$, on a :

$$f(y) = f(i(a)) + f(j(b)) - f(x) = h(a) - f(x) = 0$$

$$g(y) = g(i(a)) + g(j(b)) - g(x) = k(b) - g(x) = 0$$

Ainsi $y \in Kerf \cap Kerg = 0$ donc $\varphi(a, b) - x = 0$ et donc $x = \varphi(a, b)$.

(3) ψ est injectif :

soit x dans X avec $\psi(x) = 0$, alors $f(x) = 0 = g(x)$ mais $Kerf \cap Kerg = 0$ donc $x = 0$.

(4) ψ est surjectif :

soit $(c, d) \in C \oplus D$ et posons $x = j(k^{-1}(d)) + i(h^{-1}(c))$, on obtient :

$$f(x) = (f \circ j)(k^{-1}(d)) + (f \circ i)(h^{-1}(c)) = h(h^{-1}(c)) = c$$

$$g(x) = (g \circ j)(k^{-1}(d)) + (g \circ i)(h^{-1}(c)) = k(k^{-1}(d)) = d$$

Ce qui prouve que $\psi(x) = (c, d)$.

□

Lemme 2.16. *Considérons le diagramme de groupes abéliens et d'homomorphismes de groupes suivant :*

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "l_1"'] \arrow[dr, "l_2"] \arrow[dd, "f"] & \\
A_1 & & A_2 \\
 & G \arrow[ul, "j_1"] \arrow[ur, "j_2"'] \arrow[dd, "g"] & \\
B_1 \arrow[uu, "k_1"] \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr, "h_1"'] & & B_2 \arrow[uu, "k_2"'] \arrow[ul, "i_2"'] \arrow[dl, "h_2"] \\
 & D &
\end{tikzcd}$$

Supposons que :

(1) *les triangles commutent.*

(2) *$Imi_1 = Ker j_2$ et $Imi_2 = Ker j_1$.*

(3) *k_1 et $k_2$sont des isomorphismes.*

Alors on a que $h_1 \circ k_1^{-1} \circ l_1 + h_2 \circ k_2^{-1} \circ l_2 = g \circ f$.

Démonstration. Prouvons d'abord que $i_1 \circ k_1^{-1} \circ j_1 + i_2 \circ k_2^{-1} \circ j_2 = id_G$:
soit $x \in G$, par le Lemme 2.15 il existe u_1 dans B_1 et u_2 dans B_2 avec $i_1(u_1) + i_2(u_2) = x$. Ainsi :

$$i_1 \circ k_1^{-1} \circ j_1 \circ i_1(u_1) = i_1 \circ k_1^{-1} \circ k_1(u_1) = i_1(u_1)$$

$$i_2 \circ k_2^{-1} \circ j_2 \circ i_2(u_2) = i_2 \circ k_2^{-1} \circ k_2(u_2) = i_2(u_2)$$

et

$$i_1 \circ k_1^{-1} \circ j_1 \circ i_2(u_2) = 0 = i_2 \circ k_2^{-1} \circ j_2 \circ i_1(u_1)$$

On a donc $(i_1 \circ k_1^{-1} \circ j_1 + i_2 \circ k_2^{-1} \circ j_2)(i_1(u_1) + i_2(u_2)) = i_1(u_1) + i_2(u_2)$, comme on avait $x = i_1(u_1) + i_2(u_2)$ on bien $i_1 \circ k_1^{-1} \circ j_1 + i_2 \circ k_2^{-1} \circ j_2 = id_G$. Finalement : $g \circ f = g \circ id_G \circ g = g(i_1 \circ k_1^{-1} \circ j_1 + i_2 \circ k_2^{-1} \circ j_2) \circ f = g \circ i_1 \circ k_1^{-1} \circ j_1 \circ f + g \circ i_2 \circ k_2^{-1} \circ j_2 \circ f = h_1 \circ k_1^{-1} \circ l_1 + h_2 \circ k_2^{-1} \circ l_2$. □

Corollaire 2.17. *Sous les mèmes hypothèses qu'au Lemme 2.16, on a que si $g \circ f = 0$ alors $h_1 \circ k_1^{-1} \circ l_1 = -h_2 \circ k_2^{-1} \circ l_2$.*

Revenons maintenant à l'algèbre homologique et construisons la suite de Mayer-Vietoris :

Soit (X ;A,B) une triade topologique propre et notons $h_1 : C \to A$, $h_2 : C \to B$ les deux inclusions et $h_{1_*} : H_q(C) \to H_q(A)$, $h_{2_*} : H_q(C) \to H_q(B)$ les deux applications induites. Notons aussi $m_1 : A \to X$, $m_2 : B \to X$ les deux autres inclusions et

$m_{1_*} : H_q(A) \to H_q(X)$, $m_2 : H_q(B) \to H_q(X)$ les applications induites. Pour tout q dans $\mathbb{Z}$ définissons :

$$\begin{array}{rl} \psi : H_q(C) \to H_q(A) \oplus H_q(B) \\ c \mapsto (h_{1_*}(c), -h_{2_*}(c)) \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \varphi : H_q(A) \oplus H_q(B) \to H_q(X) \\ (a,b) \mapsto m_{1_*}(a) + m_{2_*}(b) \end{array}$$

Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
& H_q(X) \arrow[dl, "l_{1*}"'] \arrow[dr, "l_{2*}"] \arrow[dd, "j_*"] & \\
H_q(X,A) & & H_q(X,B) \\
& H_q(X,C) \arrow[ul, "j_{1*}"] \arrow[ur, "j_{2*}"'] \arrow[dd, "\partial"] & \\
H_q(B,C) \arrow[uu, "k_{1*}"] \arrow[ur, "i_{1*}"'] \arrow[dr, "\partial_1"'] & & H_q(A,C) \arrow[uu, "k_{2*}"'] \arrow[ul, "i_{2*}"] \arrow[dl, "\partial_2"] \\
& H_{q-1}(C) &
\end{tikzcd}$$

où ∂, ∂_1 et ∂_2 sont données par la définition d'une homologie et les autres applications sont induites par les inclusions.

Par définition d'une triade topologique propre on a que k_{1_*} et k_{2_*} sont des isomorphismes. Par l'axiome 4 on a que $\partial \circ j_* = 0$ et $Imi_{1_*} = Ker j_{2_*}$, $Imi_{2_*} = Ker j_{1_*}$. De plus par l'axiome 2 on a que $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ donc, comme il s'agit d'inclusions, les quatres triangles supérieurs commutent. Pour vérifier que les deux autres triangles commutent regardons les applications $i_1 : (B,C) \to (X,C)$ et id_C ; grâce aux axiomes 1 et 3 on a que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
H_q(B,C) \arrow[r, "i_{1*}"] \arrow[d, "\partial"'] & H_q(X,C) \arrow[d, "\partial"] \\
H_{q-1}(C) \arrow[r, "id"'] & H_{q-1}(C)
\end{tikzcd}$$

donc le triangle en bas à gauche commute et de même on prouve que celui en bas à droite commute aussi.

Ce qui précède montre que toutes les hypothèses du Corollaire 2.17 sont satisfaites et on peut poser $\triangle : H_q(X) \to H_{q-1}(C)$ définie par $\triangle = \partial_1 \circ k_{*_1}^{-1} \circ l_{*_1} = \partial_2 \circ k_{*_2}^{-1} \circ l_{*_2}$. On obtient une suite infinie appelée la suite de Mayer-Vietoris de la triade topologique propre (X ;A,B) (par rapport à la théorie d'homologie κ) :

$$\cdots \longrightarrow H_q(C) \xrightarrow{\psi} H_q(A) \oplus H_q(B) \xrightarrow{\varphi} H_q(X) \xrightarrow{\triangle} H_{q-1}(C) \longrightarrow \cdots$$

Théorème 2.18. *Pour toute triade topologique propre (X ;A,B) la suite de Mayer-Vietoris associée est exacte.*

Démonstration. Sans preuve. ◻

3. Théorie de cohomologie

Définition 2.19. Une théorie de cohomologie sur une catégorie admissible $\mathfrak{C}$ est un triple $\Upsilon = \{H, *, \delta\}$ où :

(1) H associe à toute paire (X,A) dans $\mathfrak{C}$ et à tout nombre entier q dans $\mathbb{Z}$ un groupe abélien noté $H^q(X, A)$ et appelé le q-ème groupe de la paire (X,A) dans la théorie de cohomologie Υ.

(2) $*$ assigne à toute application $f : (X, A) \to (Y, B)$ dans $\mathfrak{C}$ et à tout nombre q dans $\mathbb{Z}$ un homomorphisme de groupe $f^{*_q} : H^q(Y, B) \to H^q(X, A)$ appelé le q-ème homomorphisme induit par f dans la théorie de cohomologie Υ.

(3) δ associe à toute paire (X,A) dans $\mathfrak{C}$ et à tout q dans $\mathbb{Z}$ un homomorphisme de groupe $\delta_{(X,A,q)} : H^{q-1}(A) \to H^q(X, A)$

De plus, on requiert que :

(1) Si $(X, A) \in \mathfrak{C}$, alors $(id_{(X,A)})^{*_q} : H^q(X, A) \to H^q(X, A)$ est l'identité.

(2) Si $f : (X, A) \to (Y, B)$ et $g : (Y, B) \to (Z, C)$ sont dans $\mathfrak{C}$, alors on a que $(g \circ f)^{*_q} = f^{*_q} \circ g^{*_q}$ pour tout q dans $\mathbb{Z}$.

(3) Si $f \in \mathfrak{C}$, alors, en posant $g := f|_A$, on a que le diagramme suivant commute pour tout q dans $\mathbb{Z}$:

$$\begin{tikzcd} H^{q-1}(B) \arrow[r, "g^*"] \arrow[d, "\delta"'] & H^{q-1}(A) \arrow[d, "\delta"] \\ H^q(Y, B) \arrow[r, "f^*"'] & H^q(X, A) \end{tikzcd}$$

(4) Si $(X, A) \in \mathfrak{C}$ notons i l'inclusion de A dans X et j l'inclusion de X dans (X,A). On a alors une longue suite exacte :

$$\cdots \longrightarrow H^{q-1}(A) \xrightarrow{\delta} H^q(X, A) \xrightarrow{j^*} H^q(X) \xrightarrow{i^*} H^q(A) \longrightarrow \cdots$$

(5) Si $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ sont dans $\mathfrak{C}$ et sont homotopes, alors $f^* = g^*$

(6) Si U est un ouvert de X avec $\overline{U} \subset \mathring{A}$ pour un certain sous espace A de X et si $e : (X \setminus U, A \setminus U) \to (X, A)$ est dans $\mathfrak{C}$, alors $e^* : H^q(X, A) \to H^q(X \setminus U, A \setminus U)$ est un isomorphisme de groupes pour tout q dans $\mathbb{Z}$.

(7) Si $X = \{x\} \in \mathfrak{C}$, alors $H^q(X) = 0$ pour tout entier q différent de zéro. On appelle $G = H^0(X)$ le goupe de coefficient de la cohomologie Υ.

Analoguement au cas de l'homologie on définit la suite de Mayer-Vietoris : soit (X ;A,B) une triade topologique propre dans une catégorie admissible $\mathfrak{C}$ munie d'une théorie de cohomologie Υ. Définissons les applications suivantes :

$$\begin{array}{rlrl} \varphi : & H^q(X) \to H^q(A) \oplus H^q(B) & \psi : & H^q(A) \oplus H^q(B) \to H^q(A \cap B) \\ & x \mapsto (m_1^*(x), m_2^*(x)) & & (a,b) \mapsto h_1^*(a) - h_2^*(b) \end{array}$$

où $m_1^*, m_2^*, h_1^*, h_2^*$ sont les applications induites par les inclusions $m_1 : A \to X$, $m_2 : B \to X$, $h_1 : C \to A$, $h_2 : C \to B$. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & H^{q-1}(C) \arrow[dl, "\delta_1"'] \arrow[dr, "\delta_2"] \arrow[dd, "\delta"] & \\
H^q(B,C) & & H^q(A,C) \\
 & H^q(X,C) \arrow[ul, "i_{1*}"] \arrow[ur, "i_{2*}"'] \arrow[dd, "j^*"] & \\
H^q(X,A) \arrow[uu, "k_{1*}"] \arrow[ur, "j_{1*}"'] \arrow[dr, "l_1^*"'] & & H^q(X,B) \arrow[uu, "k_2^*"'] \arrow[ul, "j_{2*}"] \arrow[dl, "l_2^*"] \\
 & H^q(X) &
\end{tikzcd}$$

où δ, δ_1 et δ_2 sont données par la définition de cohomologie et les autres applications sont induites par les inclusions. Posons $\triangle = l_2^* \circ k_2^{*^{-1}} \circ \delta_2$. On obtient une longue suite exacte appelée la suite de Mayer-Vietoris de la triade topologique propre (X ;A,B) (par rapport à la théorie de cohomologie Υ) :

$$\cdots \longrightarrow H^{q-1}(C) \xrightarrow{\triangle} H^q(X) \xrightarrow{\varphi} H^q(A) \oplus H^q(B) \xrightarrow{\psi} H^q(C) \longrightarrow \cdots$$

4. Homologie singulière

Après avoir énoncé les définitions de base on va construire l'homologie singulière. Premièrement on construira les groupes d'homologie singulière en quatre étapes, chacune généralisant la précédente. Ensuite on va construire $*$ et ∂.

Convention 2.20. Dans tout le reste du chapitre on notera X pour un espace topologique.

Définition 2.21.

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on appelle le n-ème simplexe standard le sous-ensemble $\triangle_n$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ défini par :
$\triangle_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} | x_i \geqslant 0 \ \textit{pour tout } i \textit{ et } \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1 \right\}$

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $i = 1, ..., n+1$ on appelle la i-ème face du n-ème simplexe standard le sous ensemble $\triangle_n^i$ de $\triangle_n$ donné par $\triangle_n^i = \{x \in \triangle_n | x_i = 0\}$.

(3) Soit X un espace topologique. Un n-simplexe singulier de X est une application continue $\sigma : \triangle_n \to X$.

Notation 2.22. On pose $\varphi_n^i : \triangle_{n-1}^i \to \triangle_n, x \mapsto (x_1, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n)$ pour tout n naturel et pour tout i=1,...,n+1.

Définition 2.23. Soit X un espace topologique et $\sigma : \triangle_n \to X$ un n-simplexe singulier. On appelle la i-ème face de σ le (n-1)-simplexe singulier défini par $\sigma \circ \varphi_n^i : \triangle_{n-1} \to X$.

Notation 2.24. On note $S_n(X)$ l'ensemble des n-simplexes singuliers sur X et $S(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n(X)$.

Première étape :

Définition 2.25. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ le groupe des n-chaînes singulières intégrales $C_n(X)$ est le groupe abélien libre de base $S_n(X)$, si $n < 0$ on pose $C_n(X) = 0$

Le n-ème homomorphisme de bord est l'homomorphisme $d_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ défini sur la base $S_n(X)$ de $C_n(X)$ par $d_n(\sigma) = \sigma \circ \varphi_n^1 - \sigma \circ \varphi_n^2 + ... + (-1)^n \sigma \circ \varphi_n^{n+1}$. Si $n \leqslant 0$ on pose $d_n = 0$.

Lemme 2.26. *Pour tout entier n on a* $d_n \circ d_{n+1} = 0$

Démonstration. Si $n \leqslant 0$ c'est trivial. Soit $n > 0$ et $\sigma \in S_n(X)$, alors :

$$\begin{gathered}
d_n(d_{n+1}(\sigma)) = d_n(\sigma \circ \varphi_{n+1}^1 - \sigma \circ \varphi_{n+1}^2 + ... + (-1)^{n+1} \sigma \circ \varphi_{n+1}^{n+2}) = \\
= \sigma \circ \varphi_{n+1}^1 \circ \varphi_n^1 - \sigma \circ \varphi_{n+1}^1 \circ \varphi_n^2 + ... + (-1)^n \sigma \circ \varphi_{n+1}^1 \circ \varphi_n^{n+1} + \\
-\sigma \circ \varphi_{n+1}^2 \circ \varphi_n^1 + \sigma \circ \varphi_{n+1}^2 \circ \varphi_n^2 + ... + (-1)^{n+1} \sigma \circ \varphi_n^2 \circ \varphi_n^{n+1} + \\
+...+ \\
(-1)^{n+1} \sigma \circ \varphi_{n+1}^{n+2} \circ \varphi_n^1 - (-1)^{n+1} \sigma \circ \varphi_{n+1}^{n+2} \circ \varphi_n^2 + ... + (-1)^{n^2+n} \sigma \circ \varphi_{n+1}^{n+2} \circ \varphi_n^{n+1} = \\
= 0
\end{gathered}$$

puisque $\varphi_{n+1}^i \circ \varphi_n^i = \varphi_{n+1}^{i+1} \circ \varphi_n^i$ pour tout $i = 1, ..., n$ et $\varphi_{n+1}^k \circ \varphi_n^l = \varphi_{n+1}^l \circ \varphi_n^{k-l}$ pour tout $l = 1, ..., n$ et pour tout $l + 1 < k \leqslant n + 1$. On remarque que tous les termes s'annullent deux à deux. □

On peut maintenant définir les groupes d'homologie singulières intégrales d'un espace topologique X à l'aide du complexe de chaîne suivant :

$$\cdots \longrightarrow C_n(X) \xrightarrow{d_n} C_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_0(X) \xrightarrow{d_0} 0$$

qu'on appelle le complexe de chaînes singulières intégrales de X et on le note $(C_*(X), d_*)$.

Définition 2.27. Le n-ème groupe d'homologie singulière intégrale de l'espace topologique X est le groupe abélien : $H_n(X) = Kerd_n / Imd_{n+1}$.

Deuxième étape :

Soit maintenant A un sous espace de X ; on a clairement que $S_n(A) \hookrightarrow S_n(X)$ et donc $C_n(A)$ est sommand direct de $C_n(X)$. On peut donc poser :

Définition 2.28. Soit X un espace topologique et A un sous espace de X. Le groupe de n-chaînes singulières intégrales de la paire (X,A) est le groupe abélien $C_n(X, A) = C_n(X)/C_n(A)$.

Si $\sigma \in S_n(A)$ on a que $d_n(\sigma) \in S_{n-1}(A)$ et donc $d_n(C_n(A)) \subset C_{n-1}(A)$. Ainsi le n-ème homomorphisme de bord induit un homomorphisme $\overline{d_n} : C_n(X, A) \to C_{n-1}(X, A)$, $[\sigma] \mapsto [d_n(\sigma)]$. Clairement $\overline{d_n} \circ \overline{d_{n-1}} = 0$ et donc on a le complexe de chaînes singulières intégrales de la paire (X,A) donné par :

$$\cdots \longrightarrow C_n(X, A) \xrightarrow{\overline{d_n}} C_{n-1}(X, A) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_0(X, A) \xrightarrow{\overline{d_0}} 0$$

Définition 2.29. Soit X un espace topologique et A un sous-espace de X. Le n-ème groupe d'homologie singulière intégrale de la paire (X,A) est le groupe abélien $H_n(X, A) = Ker\overline{d_n}/Im\overline{d_{n+1}}$

Remarque 2.30. Dans la cas où $A = \emptyset$, on a $H_n(X, A) = H_n(X)$.

Troisième étape :

Soit X un espace topologique et G un groupe abélien. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ le groupe de n-chaînes singulières de X sur G est le groupe $C_n(X; G) = C_n(X) \otimes G$. Comme $C_n(X)$ est un groupe abélien libre de base $S_n(X)$ on a que :

$$C_n(X; G) = C_n(X) \otimes G = (\oplus_{\sigma \in S_n(X)} \mathbb{Z}) \otimes G \cong \oplus_{\sigma \in S_n(X)} (\mathbb{Z} \otimes G) \cong \oplus_{\sigma \in S_n(X)} G \cong$$
$$\cong \{g_1\sigma_1 + ... + g_k\sigma_k | k \in \mathbb{N},\ \ g_i \in G,\ \ \sigma_i \in S_n(X)\ \ pour\ \ tout\ \ i = 1, ..., k\}$$

Les applications d_n et id_G induisent un homomorphisme de groupes $\partial_n = d_n \otimes id_G$: $C_n(X) \otimes G \to C_{n-1}(X) \otimes G$ appelé homomorphisme de n-bord.

Lemme 2.31. *Pour tout entier n on a que* $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$.

Démonstration. En appliquant les défintions on obtient directement que si c est une n-chaîne et g un élément dans G, alors $\partial_{n-1} \circ \partial_n(c \otimes g) = (d_{n-1}(d_n(c))) \otimes g = 0 \otimes g = 0$. Comme les éléments de la forme $c \otimes g$ engendrent le produit tensoriel, le résultat est prouvé. □

On obtient un complexe de chaîne $(C_*(X; G), \partial_*)$ appelé le complexe de chaînes singulières de X sur G :

$$\cdots \longrightarrow C_n(X; G) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X; G) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_0(X; G) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

Définition 2.32. Soit X un espace topologique, G un groupe abélien et n un entier. Le n-ème groupe d'homologie singulière de X sur G est le groupe abélien $H_n(X; G) = Ker\partial_n/Im\partial_{n+1}$.

On remarque que si on choisit $G = \mathbb{Z}$ alors $C_n(X;G) = C_n(X) \otimes \mathbb{Z} = (\oplus_{\sigma \in S_n(X)} \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z} \cong \oplus_{\sigma \in S_n(X)} (\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}) \cong \oplus_{\sigma \in S_n(X)} \mathbb{Z} = C_n(X)$. Donc $H_n(X;\mathbb{Z}) \cong H_n(X)$.

Proposition 2.33. *Soit G un groupe abélien. Si X est formé d'un seul point alors* $H_0(X,G) \cong G$ *et* $H_n(X;G) = 0$ *pour tout n différent de zéro.*

Démonstration. Clairement $H_n(X;G) = 0$ pour tout n négatif. Supposons $n \geqslant 0$. Comme $X = \{*\}$, il existe un unique n-simplexe singulier $\sigma_n : \triangle_n \to X$ et donc $C_n(X) \cong \mathbb{Z}$. Ainsi $C_n(X;G) = C_n(X) \otimes G \cong \mathbb{Z} \otimes G \cong G$. On a :

$$\partial_n(\sigma_n \otimes g) = \left(\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \sigma_n \circ \varphi_n^i \right) \otimes g = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} (\sigma_{n-1} \otimes g) = \begin{cases} 0, & \text{si n est impair ;} \\ \sigma_{n-1} \otimes g, & \text{si n est pair.} \end{cases}$$

On en déduit que : $\begin{cases} H_0(X;G) = ker\partial_0 / Im\partial_1 = C_0(X;G)/0 \cong G, & \\ H_n(X;G) = ker\partial_n / Im\partial_{n+1} = 0/0 = 0, & \text{si n est pair ;} \\ H_n(X;G) = ker\partial_n / Im\partial_{n+1} = G/G = 0, & \text{si n est impair.} \end{cases}$ □

Quatrième étape :

Si on considère mintenant un sous-espace A de X on à déjà vu que $C_n(A)$ est sommand direct de $C_n(X)$. Alors $C_n(X;G) = C_n(X) \otimes G = (C_n(A) \oplus M) \otimes G \cong (C_n(A) \otimes G) \oplus (M \otimes G) = C_n(A;G) \oplus N$ et donc $C_n(A;G)$ est sommand direct de $C_n(X;G)$. Cela nous permet de poser :

Définition 2.34. Soit G un groupe abélien et (X,A) une paire topologique. Le groupe $C_n(X,A;G) = C_n(X;G)/C_n(A;G)$ est appelé le groupe des n-chaînes singulières de la paire (X,A) sur G.

Si σ est un n-simplexe singulier dans A, ses faces sont des (n-1)-simplexes singuliers dans A et donc $\partial_n(C_n(A;G)) \subset C_{n-1}(A;G)$ par définition de ∂_n. On peut donc considérer l'application induite $\overline{\partial_n} : C_n(X,A;G) \to C_{n-1}(X,A;G)\,;[c] \mapsto [\partial_n(c)]$ qu'on notera également ∂_n. Comme $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ on a $\overline{\partial_n} \circ \overline{\partial_{n+1}} = 0$, ce qui donne lieu au complexe de chaînes $(C_*(X,A;G), \overline{\partial_*})$ appelé le complexe de chaînes singulières de la paire (X,A) sur G et donné par :

$$\cdots \longrightarrow C_n(X,A;G) \xrightarrow{\overline{\partial_n}} C_{n-1}(X,A;G) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_0(X,A;G) \xrightarrow{\overline{\partial_0}} 0$$

Définition 2.35. Soit G un groupe abélien et (X,A) une paire topologique. Le n-ème groupe d'homologie singulière de la paire (X,A) sur G est le groupe abélien $H_n(X,A;G) = ker\overline{\partial_n}/Im\overline{\partial_{n+1}}$.

Notation 2.36. On notera $\overline{\partial} = \partial$.

Remarque 2.37. On remarque facilement que $(C_*(X,\varnothing;G),\partial_*) = (C_*(X;G),\partial_*)$ puisque $C_n(\varnothing) = \varnothing$. Donc $H_n(X,\varnothing;G) = H_n(X,G)$.

De même $(C_*(X,A;\mathbb{Z}),\partial_*) = (C_*(X,A),d_*)$ puisque $C_n(X,\mathbb{Z}) \cong C_n(X)$, $C_n(A,\mathbb{Z}) \cong C_n(A)$ et $\partial_n = d_n \otimes id_{\mathbb{Z}}$. Ainsi $H_n(X,A;\mathbb{Z}) = H_n(X,A)$.

Les trois propositions suivantes nous définissent l'application $*$ de l'homologie singulière :

Soient (X,A),(Y,B) deux paires topologiques et $f : X \to Y$ une application entre paires topologiques. L'application f induit $S_n(f) : S_n(X) \to S_n(Y)\,;\, \sigma \mapsto f \circ \sigma$ qui est telle que $S_n(f)(S_n(A)) \subset S_n(B)$ parce que $f(A) \subset B$ par hypothèse. Cette dernière application s'étend en un homomorphisme $C_n(f) : C_n(X) \to C_n(Y)$ vu que $S_n(X)$ est une base de $C_n(X)$.

Lemme 2.38. *Pour tout n dans* $\mathbb{Z}$ *on a que* $C_{n-1}(f) \circ \partial_{n,x} = \partial_{n,y} \circ C_n(f)$*, c'est-à-dire que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} C_n(X) \arrow[r, "\partial_{n,X}"] \arrow[d, "C_n(f)"'] & C_{n-1}(X) \arrow[d, "C_{n-1}(f)"] \\ C_n(Y) \arrow[r, "\partial_{n,Y}"'] & C_{n-1}(Y) \end{tikzcd}$$

Démonstration. Si $n \leqslant 0$ c'est clair puisque $C_{n-1}(f) = 0$. Supposons $n > 0$ et soit $\sigma \in S_n(X)$, alors : $\partial_{n,Y}(C_n(f)(\sigma)) = \partial_{n,Y}(f \circ \sigma) = \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i-1}(f \circ \sigma \circ \varphi_n^i)$. D'autre part :

$$C_{n-1}(f)(\partial_{n,x}(\sigma)) = C_{n-1}(f)\left(\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i-1}\sigma \circ \varphi_n^i\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i-1}C_{n-1}(f)(\sigma \circ \varphi_n^i) = \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i-1}(f \circ \sigma \circ \varphi_n^i)$$

□

Soit maintenant G un groupe abélien et considérons les complexes de chaînes $(C_*(X;G), d_*)$ et $(C_*(Y;G), d_*)$. Les applications $C_n(f)$ et id_G induisent un homomorphisme sur le produit tensoriel $C_n(f) \otimes id_g : C_n(X) \otimes G \to C_n(Y) \otimes G$. Comme $S_n(f)(S_n(A)) \subset S_n(B)$ on a $C_n(f)(C_n(A)) \subset C_n(B)$ et donc $(C_n(f) \otimes id_g)(C_n(A;G)) \subset C_n(B;G)$. Ainsi $C_n(f) \otimes id_G$ induit un homomorphisme $C_n(f;G) : C_n(X,A;G) \to C_n(Y,B;G)$.

Proposition 2.39. *Pour tout n dans* $\mathbb{Z}$ *le rectangle suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} C_n(X,A;G) \arrow[r, "\partial_{n,X}"] \arrow[d, "C_n(f;G)"'] & C_{n-1}(X,A;G) \arrow[d, "C_{n-1}(f;G)"] \\ C_n(Y,B;G) \arrow[r, "\partial_{n,Y}"'] & C_{n-1}(Y,B;G) \end{tikzcd}$$

Démonstration. $C_n(X,A;G) = C_n(X;G)/C_n(A;G) = C_n(X) \otimes G/C_n(A) \otimes G = ((C_n(A) \otimes G) \oplus (H \otimes G))/C_n(A) \otimes G \cong H \otimes G$ où H est le groupe abélien libre de base $S_n(X) \setminus S_n(A)$. Soit $\sigma \otimes g \in H \otimes G$, grâce au lemme précédent on a :

$C_{n-1}(f;G)(\partial_{n,X}(\sigma\otimes g)) = (C_n(f)(\partial_{n,X}(\sigma)))\otimes g = (\partial_{n,Y}(C_{n-1}(f)(\sigma)))\otimes g = (\partial_{n,Y}\circ C_n(f;G))\sigma\otimes g$

ce qui prouve la proposition puisque les éléments de la forme $\sigma \otimes g$ engendrent $H \otimes G$. □

On vient de montrer que toute application continue entre paires topologiques $f : (X, A) \to (Y, B)$ induit un homomorphisme de complexe de chaîne $C_*(f) : (C_*(X, A; G), \partial_*) \to (C_*(Y, B; G), \partial_*)$. Cela nous permet de construire des applications induites entre les groupes d'homologie :

Proposition 2.40. *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ l'homomorphisme $C_n(f; G) : C_n(X, A; G) \to C_n(Y, B; G)$ envoie $Ker\partial_{n,X}$ dans $Ker\partial_{n,Y}$ et $Im\partial_{n+1,X}$ dans $Im\partial_{n+1,Y}$.*

Démonstration. Soit n dans $\mathbb{Z}$ et $z \in Ker\partial_{n,X}$. Par la proposition précédente on a $\partial_{n,Y}(C_n(f; G)(z)) = C_{n-1}(f; G)(\partial_{n,X}(z)) = C_{n-1}(f; G)(0) = 0$.

Soit $w \in Im\partial_{n+1,X}$ et $v \in C_{n+1}(X, A; G)$ avec $w = \partial_{n+1,X}(v)$. Posons $u = C_{n+1}(f; G)(v)$, alors, toujours par la proposition précédente, on a : $\partial_{n+1,Y}(u) = C_n(f; G)(\partial_{n+1,X}(v)) = C_n(f; G)(w)$. □

Corollaire 2.41. *L'homomorphisme $C_n(f; G)$ induit un homomorphisme $f_{*_n} : H_n(X, A; G) \to H_n(Y, B; G)$; $[h] \mapsto [C_n(f; G)(h)]$.*

Une fois construite l'application $*$, vérifions dans les deux propositions suivantes qu'elle satisfait les axiomes :

Proposition 2.42. *Soit (X,A) une paire topologique et G un groupe abélien. Pour tout n dans $\mathbb{Z}$ on a que $(id_X)_* : H_n(X, A; G) \to H_n(X, A; G)$ est l'identité.*

Démonstration. Par construction on a directement que : $f = id_X \Rightarrow S_n(f) = id_{S_n(X)} \Rightarrow C_n(f) = id_{C_n(X)} \Rightarrow C_n(X) \otimes id_G = id_{C_n(X) \otimes G} \Rightarrow C_n(f; G) = id_{C_n(X,A;G)} \Rightarrow f_* = id_* = id_{H_n(X,A;G)}$. □

Proposition 2.43. *Soit G un groupe abélien et $f : (X, A) \to (Y, B)$. $g : (Y, B) \to (Z, C)$ deux applications entre paires topologiques. Alors on a que $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.*

Démonstration. Comme dans la preuve précédente le résultat decoule directement de la construction de l'application *. □

On veut maintenant construire des homomorphismes de groupe $\partial : H_n(X, A; G) \to H_{n-1}(X, A; G)$ pour obtenir une longue suite exacte

$$\cdots \longrightarrow H_n(A; G) \xrightarrow{i_*} H_n(X; G) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A; G) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A; G) \longrightarrow \cdots$$

et aussi une famille de diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd} H_n(X,A;G) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_*"'] & H_{n-1}(A;G) \arrow[d, "g_*"] \\ H_n(Y,B;G) \arrow[r, "\partial"'] & H_{n-1}(B;G) \end{tikzcd}$$

où $f : (X, A) \to (Y, B)$ est une application entre paires topologiques et $g = f|_A$.

Notation 2.44. Pour construire ∂ on démontre les quatre lemmes qui suivent. On utilisera les notations suivantes : pour un n dans $\mathbb{Z}$ on note $Z_n(X, A; G) = Ker\partial_{n,X}$ et $B_n(X, A; G) = Im\partial_{n+1,X}$. On note aussi $\pi_n : C_n(X; G) \to C_n(X, A; G) = C_n(X; G)/C_n(A; G)$ et $p_n : Z_n(A; G) \to H_n(A; G) = Z_n(A; G)/B_n(A; G)$ les projections naturelles.

Lemme 2.45. *Soit $z \in Z_n(X, A; G)$ et $u \in C_n(X; G)$ avec $\pi_n(u) = z$, alors $\partial_n(u) \in C_{n-1}(A; G)$.*

Démonstration. Par définition des applications on a que le rectangle suivant commute :

$$\begin{tikzcd} C_n(X;G) \arrow[r, "\pi_n"] \arrow[d, "\partial_n"'] & C_n(X,A;G) \arrow[d, "\partial_{n,x}"] \\ C_{n-1}(X;G) \arrow[r, "\pi_{n-1}"'] & C_{n-1}(X,A;G) \end{tikzcd}$$

et donc $\pi_{n-1}(\partial_n(u)) = \partial_n(\pi_n(u)) = \partial_n(z) = 0$ car $z \in Ker\partial_n$ par hypothèse. Ainsi $\partial_n(u) \in C_n(A; G)$. □

Lemme 2.46. *Sous les mêmes hypothèses qu'avant on a en fait que $\partial_n(u) \in Z_{n-1}(A; G)$. De plus $p_{n-1}(\partial_n(u)) = p_{n-1}(\partial_n(u'))$ pour tout u et u' avec $\pi(u) = z$, i.e. la classe de u dans $H_{n-1}(A; G)$ ne dépend que de z.*

Démonstration. L'application $\partial_{n-1,A} : C_{n-1}(A; G) \to C_{n-2}(A; G)$ est la restriction de $\partial_{n-1,x} : C_{n-1}(X; G) \to C_{n-2}(X; G)$ donc $\partial_{n-1,A}(\partial_{n,A}(u)) = 0$.

Soit u' un deuxième élément tel que $\pi_n(u') = z = \pi_n(u)$. Alors $\pi_n(u - u') = 0$, donc $u - u' \in C_n(A; G)$. Ainsi $\partial_{n,x}(u - u') \in B_{n-1}(A; G)$ et donc $p_{n-1}(\partial_{n,x}(u)) - p_{n-1}(\partial_{n,x}(u')) = p_{n-1}(\partial_{n,x}(u - u')) = 0$, c'est-à-dire $[\partial_n(u)] = [\partial_n(u')] \in H_{n-1}(A; G)$. □

Cela nous permet de définir une application $\phi : Z_n(X, A; G) \to H_{n-1}(A; G)$ qui à tout z dans $Z_n(X, A; G)$ associe $p_{n-1}(\partial_{n,x}(u))$, ou u est un élément de $C_n(X; G)$ avec $\pi_n(u) = z$.

Lemme 2.47. *L'application ϕ ainsi définie est un homomorphisme de groupes.*

Démonstration. Soient x,y dans $Z_n(X, A; G)$ et u,v dans $C_n(X; G)$ avec $\pi_n(u) = y$ et $\pi_n(v) = x$. Comme $\pi_n(u + v) = \pi_n(u) + \pi_n(v) = x + y$ on a que $\phi(x + y) = p_{n-1}(\partial_{n,x}(u + v)) = p_{n-1}(\partial_{n,x}(u)) + p_{n-1}(\partial_{n,x}(v)) = \phi(x) + \phi(y)$. □

Lemme 2.48. *Le noyau de ϕ contient le sous groupe $B_n(X, A; G)$ de $Z_n(X, A; G)$.*

Démonstration. Soit $b \in B_n(X, A; G)$. Il existe alors $y \in C_{n+1}(X, A; G)$ avec $\partial_{n+1,X}(y) = z$ et $w \in C_{n+1}(X; G)$ avec $\pi_{n+1}(w) = y$. Posons $u = \partial_{n+1}(w)$. Comme dans le lemme 2.45 on a que le ractangle suivant commute :

$$\begin{tikzcd} C_{n+1}(X;G) \arrow[r, "\pi_{n+1}"] \arrow[d, "\partial_{n+1}"'] & C_{n+1}(X,A;G) \arrow[d, "\partial_{n+1}"] \\ C_n(X;G) \arrow[r, "\pi_n"'] & C_n(X,A;G) \end{tikzcd}$$

donc $\pi_n(u) = \pi_n(\partial_{n+1}(w)) = \partial_{n+1}(\pi_{n+1}(w)) = \partial_{n+1}(y) = b$. Finalement $\phi(b) = p_{n-1}(\partial_n(u)) = p_{n-1}(\partial_n \circ \partial_{n+1}(w)) = p_{n-1}(0) = 0$ □

On peut donc poser : $\partial : H_n(X, A; G) = Z_n(X, A; G)/B_n(X, A; G) \to H_{n-1}(A; G)$, $[z] \mapsto \left[\phi(z)\right]$. Vérifions que cette application satisfait les conditions requises :

Proposition 2.49. *Soit $f : (X, A) \to (Y, B)$ une application entre paires topologiques et notons $g = f|_A$. Soit G un groupe abélien et $n \in \mathbb{Z}$. Le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} H_n(X,A;G) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_*"'] & H_{n-1}(A;G) \arrow[d, "g_*"] \\ H_n(Y,B;G) \arrow[r, "\partial"'] & H_{n-1}(B;G) \end{tikzcd}$$

Démonstration. Notons $p : Z_n(X, A; G) \to H_n(X, A; G)$ la projection canonique. Soit $x \in H_n(X, A; G)$ et $z \in Z_n(X, A; G)$ avec $p(z) = x$. Soit aussi $u \in C_n(X; G)$ avec $\pi_n(u) = z$. Posons $v = C_n(h; G)(u)$ et $w = C_n(f; G)$ où $h : X \to Y$ est l'application induite par f. Par définition des applications $C_n(h; G)$ et $C_n(f; G)$ on a que le ractangle suivant commute :

$$\begin{tikzcd} C_n(X;G) \arrow[r, "\pi_n"] \arrow[d, "C_n(h;G)"'] & C_n(X,A;G) \arrow[d, "C_n(f;G)"] \\ C_n(Y;G) \arrow[r, "\pi_n"'] & C_n(Y,B;G) \end{tikzcd}$$

donc $\pi_n(v) = \pi_n(C_n(h; G)(u)) = C_n(f; G)(\pi_n(u)) = C_n(f; G)(z) = w$.

Par la Proposition 2.39 on a que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} C_n(X;G) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "C_n(h;G)"'] & C_{n-1}(X;G) \arrow[d, "C_{n-1}(h;G)"] \\ C_n(Y;G) \arrow[r, "\partial_y"'] & C_{n-1}(Y;G) \end{tikzcd}$$

donc $C_{n-1}(h; G)(\partial_n(u)) = \partial_n(C_n(h; G)(u)) = \partial_n(v)$. Or grâce au Lemme 2.45 on sait que $\partial_n(u) \in C_{n-1}(A; G)$ donc $\partial_n(v) = C_{n-1}(g; G)(\partial_n(u))$.

Par définition on a que $\partial(x) \in H_{n-1}(A;G)$ contient $\partial_n(u) \in Z_{n-1}(A;G)$. Ainsi $g_*(\partial(x)) \in H_{n-1}$ contient $C_{n-1}(g;G)(\partial_n(u)) \in Z_{n-1}(B;G)$. De même on prouve que $f_*(x) \in H_n(Y,B;G)$ contient $C_n(f;G)(z) = w \in Z_n(Y,B;G)$.

Comme $\pi_n(v) = w$ on a que $\partial(f_*(x)) \in H_{n-1}(B;G)$ contient $\partial(v) \in Z_{n-1}(B;G)$ puisque $\partial(v) = C_{n-1}(g;G)(\partial(u))$. Ce qui prouve que $g_*(\partial(x)) = \partial(f_*(x))$. □

Proposition 2.50. *Soit G un groupe abélien, (X,A) une paire topologique et* $\partial : H_n(X,A;G) \to H_{n-1}(A;G)$ *l'homomorphisme de bord qu'on vient de définir. Soit* $i_* : H_n(A;G) \to H_n(X;G)$ *et* $j_* : H_n(X;G) \to H_n(X,A;G)$ *les homomorphismes induits par les inclusions* $i : A \to X$ *et* $j : X \to (X,A)$*. Alors la longue suite suivante est exacte :*

$$\cdots \longrightarrow H_n(A;G) \xrightarrow{i_*} H_n(X;G) \xrightarrow{j_*} H_n(X,A;G) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A;G) \longrightarrow \cdots$$

Démonstration. Sans preuve. □

On peut résumer le paragraphe par la dérnière définition et la proposition :

Définition 2.51. Soit $\mathfrak{C}$ la catégorie admissible de toutes les paires topologiques (X,A) avec les applications entre paires topologiques. Soit G un groupe abélien. Définissons le triple $\kappa = \{H, *, \partial\}$ comme suit :

(1) H est l'application qui à tout élément (X,A) de $\mathfrak{C}$ et à tout entier q dans $\mathbb{Z}$ associe le groupe $H_q(X,A;G)$.

(2) * associe à toute application entre paires topologiques $f : (X,A) \to (Y,B)$ et à tout entier q dans $\mathbb{Z}$ l'homomorphisme de groupe f_{*_q}.

(3) ∂ associe à toute paires topologiques (X,A) et à tout entier q dans $\mathbb{Z}$ l'homomorphisme de bord ∂.

Proposition 2.52. *La collection* $\kappa = \{H, *, \partial\}$ *ainsi définie est une théorie d'homologie.*

Démonstration. On à déjà prouvé les axiomes 1,2,3 et 7. Les trois autres sont acceptés sans démonstration. □

5. Cohomologie singulière

On va maintenant définir la cohomologie singulière de façon semblable à ce qu'on a fait pour l'homologie singulière : premièrement on construit en deux étapes les groupes de cohomologie singulière et ensuite les application $*$ et δ.

Définition 2.53. Soit X un espace topologique et G un groupe abélien. Pour tout entier n on appelle le groupe de n-cochaînes singulières de X sur G, le groupe abélien $C^n(X;G) = Hom(C_n(X), G)$. Si n<0 on a $C^n(X;G) = 0$.

Définition 2.54. L'homomorphisme de groupe $\delta^n : C^n(X;G) \to C^{n+1}(X;G)$ défini pour tout c dans $C^n(X;G)$ sur la base de $C_{n+1}(X;G)$ par $\delta^n(c)(\sigma) = c(d_{n+1}(\sigma))$ est appelé le n-ème homomorphisme de cobord.

Lemme 2.55. *Cette définition est bien posée et de plus $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$.*

Démonstration. Soient $c_1, c_2 \in C^n(X;G)$ et $\sigma \in C_{n+1}(X;G)$. On a : $\delta^n(c_1+c_2)(\sigma) = (c_1 + c_2)(d_{n+1}(\sigma)) = c_1(d_{n+1}(\sigma)) + c_1(d_{n+1}(\sigma)) = \delta^n(c_1)(\sigma) + \delta^n(c_2)(\sigma)$. Egalement : $\delta^{n+1}(\delta^n(c))(\sigma) = \delta^n(c)(d_{n+2}(\sigma)) = c(d_{n+1}(d_{n+2}(\sigma))) = c(0) = 0$. □

Cela nous permet de définir le complexe de cochaînes $(C^*(X;G), \delta^*)$ appelé le complexe de cochaînes singulières de x sur G :

$$0 \longrightarrow C^0(X;G) \xrightarrow{\delta^0} \cdots \longrightarrow C^n(X;G) \xrightarrow{\delta^n} C^{n+1}(X;G) \longrightarrow \cdots$$

.

Définition 2.56. Soit X un espace topologique et G un groupe abélien. Le n-ème groupe de cohomologie singulière de X sur G est le groupe abélien $H^n(X;G) = Ker\delta^n / Im\delta^{n-1}$. Si $G = \mathbb{Z}$ on écrit $H^n(X, \mathbb{Z}) = H^n(X)$.

Notation 2.57. Considérons maintenant un sous-espace A de X et notons $C^n(X, A; G)$ le sous-ensemble $C^n(X, A; G) = \{c \in C^n(X;G) | c(C_n(A;G)) = 0\}$.

Lemme 2.58. *Soit A un sous-espace de X et $C^n(X, A; G)$ le sous-ensemble de $C^n(X;G)$ ci-dessus. L'homomorphisme de cobord δ^n envoie $C^n(X, A; G)$ dans $C^{n+1}(X, A; G)$.*

Démonstration. Soit $c \in C^n(X, A; G)$ et $\sigma \in S_{n+1}(A)$, alors : $\delta^n(c)(\sigma) = c(d_{n+1}(\sigma)) = 0$ car $d_{n+1}(\sigma) \in S_n(A)$ par définition de d_{n+1}. □

Notation 2.59. On note $\delta^n_A : C^n(X, A; G) \to C^{n+1}(X, A; G)$ l'homomorphisme induit par restriction de δ^n à $C^n(X, A; G)$.

Clairement on a que $\delta_A^{n+1} \circ \delta_A^n = 0$ et donc on obtient un complexe de cochaînes $(C^*(X,A;G), \delta_A^*)$ appelé complexe de cochaînes singulières de la paire (X,A) sur le groupe G :

$$0 \longrightarrow C^0(X,A;G) \xrightarrow{\delta_A^0} \cdots \longrightarrow C^n(X,A;G) \xrightarrow{\delta_A^n} C^{n+1}(X,A;G) \longrightarrow \cdots$$

.

Définition 2.60. Le n-ème groupe de cohomologie singulière de la paire topologique (X,A) sur le groupe abélien G est le groupe abélien $H^n(X,A;G) = Ker\delta_A^n / Im\delta_A^{n-1}$.

Remarque 2.61. Si $A = \emptyset$ on a que $C^n(X,A;G) = C^n(X;G)$ et donc $H^n(X,A;G) = H^n(X;G)$. Si n<0 alors $C^n(X,A;G) = 0$ est donc $H^n(X,A;G) = 0$. Si $G = \mathbb{Z}$ on écrit $H^n(X,A;\mathbb{Z}) = H^n(X,A)$.

Construisons maintenant l'application $*$:

Rappelons que toute application entre paires topologiques $f : (X,A) \to (Y,B)$ induit un homomorphisme $C_n(f;G) : C_n(X;G) \to C_n(Y;G)$ faisant commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
C_n(X;G) \arrow[r, "\partial_{n,x}"] \arrow[d, "C_n(f;G)"'] & C_{n-1}(X;G) \arrow[d, "C_{n-1}(f;G)"] \\
C_n(Y;G) \arrow[r, "\partial_{n,y}"'] & C_{n-1}(Y;G)
\end{tikzcd}$$

L'application $C_n(f;G)$ induit un homomorphisme $C^n(f) : C^n(Y;G) \to C^n(X;G)$ défini par $C^n(f)(c) = c \circ C_n(f;G)$, puisque si $c \in Hom(C_n((Y;G),G)$ alors $c \circ C_n(f;G) \in Hom(C_n(X;G),G)$. Comme $f(A) \subset B$ on a que $C^n(f)$ envoie $C^n(Y,B;G)$ dans $C^n(X,A;G)$, on pose alors $C^n(f;G) : C^n(Y,B;G) \to C^n(X,A;G)$ défini par restriction de $C^n(f)$ à $C^n(Y,B;G)$.

Proposition 2.62. *Avec les notations ci-dessus on a que le rectangle suivant commute pour tout n dans $\mathbb{Z}$:*

$$\begin{tikzcd}
C^{n-1}(Y,B;G) \arrow[r, "\delta_B^{n-1}"] \arrow[d, "C^{n-1}(f;G)"'] & C^n(Y,B;G) \arrow[d, "C^n(f;G)"] \\
C^{n-1}(X,A;G) \arrow[r, "\delta_A^{n-1}"'] & C^n(X,A;G)
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Soit $c \in C^{n-1}(Y,B;G)$ et $\sigma \in C_n(X;G)$. On obtient : $C^n(f;G)(\delta_B^{n-1}(c))(\sigma) = (\delta_B^{n-1}(c) \circ C_n(f;G))(\sigma) = \delta_B^{n-1}(c)(C_n(f;G)(\sigma)) = c(d_{n,y} \circ C_n(f;G)(\sigma)) = c(C_{n-1}(f;G) \circ d_{n,x}(\sigma)) = (c \circ C_{n-1}(f;G))(d_{n,x}(\sigma)) = C^{n-1}(f;G)(c)(d_{n,x}(\sigma)) = (C^{n-1}(f;G) \circ \delta_B^n)(c)(\sigma)$. □

Proposition 2.63. *Pour tout n dans $\mathbb{Z}$ l'homomorphisme $C^n(f;G)$ envoie $Ker\delta_B^n$ dans $Ker\delta_A^n$ et $Im\delta_B^{n-1}$ dans $Im\delta_A^{n-1}$.*

Démonstration. La preuve est analogue a celle déjà donnée pour l'homologie singulière. □

Corollaire 2.64. *L'homomorphisme $C^n(f;G)$ induit un homomorphisme $f^* : H^n(Y,B;G) \to H^n(X,A;G)\,;\,[c] \mapsto [C^n(f;G)(c)]$.*

Proposition 2.65. *Si on considère $id_{(X,A)} : (X,A) \to (X,A)$ alors $(id_{(X,A)})^* = id_{H^n(X,A;G)}$ et pour tout couple d' applications entre paires topologiques $f : (X,A) \to (Y,B)$, $g : (Y,B) \to (Z,C)$ on a que $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.*

Démonstration. Le résultat découle directement de la contruction qu'on vient de faire. □

De façon semblable au cadre homologique on va maintenant construire l'homomorphisme $\delta : H^{n-1}(A;G) \to H^n(X,A;G)$ via les quatre lemmes suivants.

Notons $Z^n(X,A;G) = Ker\delta^{n-1}$ et soit z un élément de $Z^{n-1}(A;G)$. Comme il s'agit d'un élément de $C^{n-1}(A;G)$ on a que z est un homomorphisme $z : C_{n-1}(A) \to G$. Or $C_{n-1}(A)$ est sommand direct de $C_{n-1}(X)$ donc il existe un homomorphisme $u : C_{n-1}(X) \to G$ avec $u|_{C_{n-1}(A)} = z$, donc $u \in C^{n-1}(X;G)$.

Lemme 2.66. *Avec les notations ci-dessus on a que $\delta^{n-1}(u) \in Z^n(X,A;G) \subset C^n(X,A;G)$.*

Démonstration. Pour montrer que $\delta^{n-1}u$ appartient à $C^n(X,A;G)$ considérons un élément c de $C_n(A)$, alors $(\delta^{n-1}(u))(c) = u(\partial(c)) = z(\partial c) = (\delta^{n-1}(z))(c) = 0$ puisque z est un élément de $Z^{n-1}(A;G)$ et $\partial_n(C_n(A)) \subset C_{n-1}(A)$. Donc $\delta^{n-1}(u)$ est bien dans $C^n(X,A;G)$ et de plus $\delta^n(\delta^{n-1}(u)) = 0$ donc le lemme est démontré. □

Notons $p_n : Z^n(X,A;G) \to H^n(X,A;G)$ la projection naturelle.

Lemme 2.67. *L'élément $p_n(\delta^{n-1}(u))$ de $H^n(X,A;G)$ est indépendant du choix de u dans $C^{n-1}(X;G)$ et ne dépend que de z.*

Démonstration. Soient u et v deux éléments de $C^{n-1}(X;G)$ avec $u|_{C_{n-1}(A)} = v|_{C_{n-1}(A)} = z$ et considérons $u - v \in C^{n-1}(X;G)$. Clairement $(u-v)|_{C_{n-1}(A)} = 0$ et donc $u-v$ appartient au sous-groupe $C^{n-1}(X,A;G)$ de $C^{n-1}(X;G)$. Ainsi $\delta^{n-1}(u-v) \in Im\delta^{n-1}$ et donc $p^n(\delta^{n-1}(u)) - p^n(\delta^{n-1}(v)) = p^n(\delta^{n-1}(u) - \delta^{n-1}(v)) = p^n(\delta^{n-1}(u-v)) = 0$ □

Par ce qui précède on peut définir l'application $\phi : Z^{n-1}(A;G) \to H^n(X,A;G)$ qui à tout z associe $\phi(z) = p_n(\delta^{n-1}(u))$ où $u \in C^{n-1}(X;G)$ est tel que $u|_{C_{n-1}(A)} = z$.

Lemme 2.68. *L'application ϕ est un homomorphisme.*

Démonstration. La démonstration est analogue à celle qui prouve l'énoncé homologique equivalent. □

Lemme 2.69. *Le noyau de ϕ contient le sous-groupe $Im\delta^{n-2}$ de $Z^{n-1}(A;G)$.*

Démonstration. Soit z un élément de $Im\delta^{n-2}$ et $y \in C^{n-2}(A;G)$ avec $\delta^{n-2}(y) = z$. Soit v dans $C^{n-2}(X;G)$ avec $v|_{C_{n-2}(A)} = y$, alors $\delta^{n-2}(v) \in C^{n-1}(X;G)$ est tel que $\delta^{n-2}(v)|_{C_{n-1}(A)} = z$ puisque $\partial_{n-1}(C_{n-1}(A;G)) \subset C_{n-2}(A;G)$. Donc $\phi(z) = p(\delta^{n-1}(\delta^{n-2}(v))) = p(0) = 0$. □

Il s'ensuit que ϕ induit un homomorphisme $\delta : H^{n-1}(A;G) \to H^n(X,A;G)$, encore une fois de façon analogue à l'homologie singulière on prouve les deux propositions suivantes :

Proposition 2.70. *Soit $f : (X,A) \to (Y,B)$ une application entre paires topologiques et notons $g = f|_A$. Soit G un groupe abélien et $n \in \mathbb{Z}$. Le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} H^{n-1}(B;G) & \xrightarrow{\delta} & H^n(Y,B;G) \\ {\scriptstyle g_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\ H^{n-1}(A;G) & \xrightarrow[\delta]{} & H^n(X,A;G) \end{array}$$

Proposition 2.71. *Soit G un groupe abélien, (X,A) une paire topologique et $\delta : H^{n-1}(A;G) \to H^n(X,A;G)$ l'homomorphisme de cobord qu'on vient de définir. Soit $i^* : H^n(X;G) \to H^n(A;G)$ et $j^* : H_n(X,A;G) \to H^n(X;G)$ les homomorphismes induits par les inclusions $i : A \to X$ et $j : X \to (X,A)$. Alors la longue suite suivante est exacte :*

$$\cdots \longrightarrow H^{n-1}(A;G) \xrightarrow{\delta} H^n(X,A;G) \xrightarrow{j_*} H^n(X;G) \xrightarrow{i^*} H^n(A;G) \longrightarrow \cdots$$

On résume le paragraphe avec une définition et une dernière proposition :

Définition 2.72. Soit $\mathfrak{C}$ la catégorie admissible de toutes les paires topologiques (X,A) avec les applications entre paires topologiques. Soit G un groupe abélien. Définissons le triple $\Upsilon = \{H, *, \delta\}$ comme suit :

(1) H est l'application qui à tout élément (X,A) de $\mathfrak{C}$ et à tout entier q dans $\mathbb{Z}$ associe le groupe $H^q(X,A;G)$.
(2) * associe à toute application entre paires topologiques $f : (X,A) \to (Y,B)$ et à tout entier q dans $\mathbb{Z}$ l'homomorphisme de groupe f^{*_q}.
(3) δ associe à toute paires topologiques (X,A) et à tout entier q dans $\mathbb{Z}$ l'homomorphisme de cobord δ.

Proposition 2.73. *La collection $\Upsilon = \{H, *, \delta\}$ ainsi définie est une théorie de cohomologie.*

6. Exemples

On va d'abord calculer le 0-ème groupe d'homologie singulière pour un espace topologique X arbitraire et ensuite on va s'intéresser au calcul des groupes d'homologie singulière de la sphère S^n.

Soit X un espace topologique et posons $G = \mathbb{Z}$. Comme $\triangle_0$ est un point on a que $S_0(X)$ est en bijection avec X. Ainsi on peut considérer $C_0(X)$ comme étant l'ensemble des sommes formelles $\sum_{x\in X} n_x x$ à coefficient dans $\mathbb{Z}$ et nulles presque partout. Définissons $\varepsilon : C_0(X) \to \mathbb{Z}$ par $\varepsilon(\sum_{x\in X} n_x x) = \sum_{x\in X} n_x$; il s'agit clairement d'un homomorphisme.

Si $\sigma \in S_1(X)$ est un 1-simplexe singulier sur X, alors $\partial\sigma = \sigma\circ\varphi_1^1 - \sigma\circ\varphi_1^2$ et donc $\varepsilon(\partial\sigma) = 0$. Comme ε est un homomorphisme on a que $\varepsilon(\partial c) = 0$ pour toute chaîne $c \in Im\partial_1$. Il en résulte que ε induit un homomorphisme $\varepsilon_* : H_0(X) \to \mathbb{Z}$.

Proposition 2.74. *Si X est un espace topologique non-vide et connexe par arcs, alors ε_* est un isomorphisme.*

Démonstration. ε_* est évidemment surjectif. Soit $x_0 \in X$ et pour tout autre x dans X posons λ_x le chemin de x_0 vers x. Par évidence λ_x est un 1-simplexe singulier avec $\partial\lambda_x = x - x_0$. Soit $c = \sum_{x\in X} n_x x$ une 0-chaîne avec $\varepsilon_*([c]) = \sum_{x\in X} n_x = 0$, alors $c - \partial\sum_{x\in X} n_x\lambda_x = c - \sum_{x\in X} n_x\partial\lambda_x = c - \sum_{x\in X} n_x(x - x_0) = (\sum_{x\in X} n_x)x_0 = 0$. Ainsi $c = \partial\sum_{x\in X} n_x\lambda_x$ donc $[c] = 0$ et donc ε_* est injectif. □

Corollaire 2.75. *$H_0(X)$ est isomorphe au groupe abélien libre basé sur les composantes connexes par arcs de X.*

Démonstration. Il suffit de repéter la preuve ci-dessus avec $\varepsilon : H_0(X) \to \oplus_{U\in\mathfrak{U}}\mathbb{Z}_U$; $\sum_{x\in X} n_x x \mapsto \oplus_{U\in\mathfrak{U}}(\sum_{x\in U} n_x)$ ou $\mathfrak{U}$ est la famille des composantes connexes par arcs de X. □

Pour calculer les groupes d'homologie singulière de S^n on va utiliser la suite exacte de Mayer-Vietoris.

Pour un x dans S^n notons $x = (x_0, ..., x_n)$ et considérons les sous-ensembles de S^n donnés par $E_+^n = \{x \in S^n | x_n \geqslant 0\}$ et $E_-^n = \{x \in S^n | x_n \leqslant 0\}$. Comme E_+^n et E_-^n sont contractiles on a que $H_q(E_+^n) = H_q(E_-^n) = 0$ pour tout q différent de zéro et $H_0(E_+^n) = H_0(E_-^n) = \mathbb{Z}$. Considérons la suite de Mayer-Vietoris :

$$H_q(E_+^n) \oplus H_q(E_-^n) \longrightarrow H_q(E_+^n \cup E_-^n) \longrightarrow H_{q-1}(E_+^n \cap E_-^n) \longrightarrow H_{q-1}(E_+^n) \oplus H_{q-1}(E_-^n)$$

Comme $E_+^n \cup E_-^n = S^n$ et $E_+^n \cap E_-^n = S^{n-1}$ on obtient :

$$H_q(E_+^n) \oplus H_q(E_-^n) \longrightarrow H_q(S^n) \longrightarrow H_{q-1}(S^{n-1}) \longrightarrow H_{q-1}(E_+^n) \oplus H_{q-1}(E_-^n)$$

Maintenant si $q > 1$ on a

$$0 \longrightarrow H_q(S^n) \longrightarrow H_{q-1}(S^{n-1}) \longrightarrow 0$$

donc $H_q(S^n) \cong H_{q-1}(S^{n-1})$ et donc si $q > 1$ alors $H_q(S^n) \cong H_{q-n}(S^0)$. Pour connaître les groupes d'homologie singulière de toutes les sphère on doit donc calculer les groupes d'homologie de S^0 et le premier groupe d'homologie de S^n.

Calculons $H_q(S^0)$:

Si $q < 0$ alors $H_q(S^0) = 0$, si $q = 0$ alors $H_0(S^0) = \mathbb{Z}^2$ puisque S^0 a deux composantes connexes par arcs. Supposons maintenant que $q > 0$, alors $\sigma_1 : \triangle_q \to S^0$; $t \mapsto 1$ et $\sigma_{-1} : \triangle_q \to S^0$, $t \mapsto -1$ sont les deux seuls q-simplexes singuliers, i.e. $S_q(S^0) = \{\sigma_1, \sigma_{-1}\}$. Considérons

$$\cdots \xrightarrow{d_{q-1}} C_q(S^0) \xrightarrow{d_q} \cdots$$

et regardons l'effet de d_q sur la base $\{\sigma_1, \sigma_{-1}\}$ de $C_q(S^0)$:

$$d_q(\sigma_i) = \sigma_i \circ \varphi_q^1 + \ldots + (-1)^{q+1}\sigma_i\varphi_q^{q+1} = \begin{cases} 0, & \text{si q est pair ;} \\ \sigma_i, & \text{si q est impair.} \end{cases}$$

Ainsi

$$Imd_q = \begin{cases} 0, & \text{si q est pair ;} \\ \mathbb{Z}^2, & \text{si q est impair.} \end{cases}$$

et

$$Kerd_q = \begin{cases} \mathbb{Z}^2, & \text{si q est pair ;} \\ 0, & \text{si q est impair.} \end{cases}$$

D'ou $H_q(S^0) = 0$ pour tout $p > 0$.

Calculons $H_1(S^n)$ pour $n > 0$:

Si $n = 1$ alors :

$$H_1(E^1_+) \oplus H_1(E^1_-) \longrightarrow H_1(S^1) \longrightarrow H_0(S^0) \longrightarrow H_0(E^1_+) \oplus H_0(E^1_-)$$

$$0 \longrightarrow H_1(S^1) \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z}^2$$

Par construction de la suite de Mayer-Vietoris on a que l'application ψ entre $H_0(S^0)$ et $H_0(E^1_+) \oplus H_0(E^1_-)$ est donnée par $\psi : H_0(S^0) \to H_0(E^1_+) \oplus H_0(E^1_-)$, $c \mapsto (h_{1_*}(c), -h_{2_*}(c))$ ou h_{1_*} et h_{2_*} sont les applications induites par les inclusions. Ainsi $Ker\psi \cong \mathbb{Z}$ et donc $H_1(S^1) \cong Im\phi = Ker\psi \cong \mathbb{Z}$.

Supposons que $n > 1$, alors :

$$H_1(E^n_+) \oplus H_1(E^n_-) \longrightarrow H_1(S^n) \longrightarrow H_0(S^{n-1}) \longrightarrow H_0(E^n_+) \oplus H_0(E^n_-)$$

$$0 \longrightarrow H_1(S^n) \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z}^2$$

Comme avant on a que $\psi : H_0(S^0) \to H_0(E^1_+) \oplus H_0(E^1_-)$ est donnée par $c \mapsto (h_{1_*}(c), -h_{2_*}(c))$. Il en résulte que $Ker\psi = 0$ et par injectivité de ϕ on a : $H_1(S^n) \cong Im\phi = Ker\psi = 0$

On en déduit que :

$$H_q(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}^2, & \text{si } n = 0 \text{ et } q = 0\,; \\ 0, & \text{si } n = 0 \text{ et } q \neq 0\,; \\ \mathbb{Z}, & \text{si } n \neq 0 \text{ et } q = 0\,; \\ \mathbb{Z}, & \text{si } n \neq 0 \text{ et } q = n\,; \\ 0, & \text{si } n \neq 0, q \neq 0 \text{ et } q \neq n. \end{cases}$$

CHAPITRE 3

Le Théorème de de Rham

Dans ce chapitre on va énoncer la Théorème de de Rham, qui affirme que la cohomologie singulière à coefficient dans $\mathbb{R}$ et la cohomologie de de Rham sont isomorphes et on va donner une esquisse de la preuve.

L'idée à la base de la démonstration est la suivante : étant donnée une p-forme ω sur une variété différentiable M on construit une application de l'ensemble des p-simplexes sur M vers $\mathbb{R}$ en intégrant ω sur l'image du p-simplexe. Cette application induira un isomorphisme de H^p_Ω vers $H^p(M;\mathbb{R})$. Les problèmes qui se posent sont au nombre de trois :

Premièrement pour appliquer la théorie d'intégration devéloppée on doit se restreindre aux p-simplexes singuliers $\sigma : \triangle_p \to M$ différentiables et pour que le résultat soit vrai il faut montrer que cette restriction ne change pas les groupes de cohomologie singulière. En effet il faut être encore plus réstrictif puisqu'en général un p-simplexe standard n'est pas une variété différentiable et donc à la place des p-simplexes singuliers on doit considérer les applications $\sigma : U \to M$ définies sur un ouvert contenant $\triangle_p$ et différentiable au sens usuel. On admettra que $H^p_{diff}(M;\mathbb{R}) \cong H^p(M;\mathbb{R})$.

Deuxièmement il faut définir l'intégrale sur un p-simplexe standard vu qu'il ne s'agit pas d'une variété. Pour faire cela on peut considérer une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ s'annullant sur un voisinage ouvert du (p-2)-ème squelette et prenant la valeur 1 en dehors de ce voisinage. On définit ensuite l'intégrale sur $\triangle_p$ d'une p-forme ω comme étant la limite, lorsque les voisinages autour du (p-2)-ème squelette deviennent de plus en plus petits, des intégrales de la p-forme $f\omega$ sur U.

Troisièmement il y a un problème d'orientation : si on considère la variété différentiable orientable donnée par un p-simplexe standard privé de son (p-2)-squelette, on doit regarder comment choisir une orientation et quelle est son rapport avec l'orientation sur le bord (le (p-1)-squelette). On admettra qu'il est possible d'orienter les p-simplexes successivement de telle sorte que l'inclusion $\varphi^i_p : \triangle_{p-1} \to \partial\triangle_p$ préserve l'orientation si et seulement si i est pair.

Avec les hypothèses ci-dessus on peut maintenant construire un homomorphisme entre $H^q_\Omega(M)$ et $H^q(M;\mathbb{R})$.

Soit ω une p-forme sur une variété différentiable M et $\sigma : \triangle_p \to M$ un p-simplexe standard défini sur un ouvert U content $\triangle_p$ et différentiable. On a que $\sigma^*\omega$ est une p-forme sur $\triangle_p$ et on pose :

$$\int_\sigma \omega = \int_{\triangle_p} \sigma^*\omega$$

Plus généralement si on a une chaîne $c = \sum_{i=1}^{n} a_i\sigma_i \in C_p(M)$ alors on pose

$$\int_c \omega = \sum_{i=1}^{n} a_i \int_{\triangle_p} \sigma^*\omega$$

Cela nous donne un homomorphisme $\psi(\omega) : C_p(M) \to \mathbb{R}$. L'application ψ est linéaire aussi par rapport à la variable ω puisque si ω_1 et ω_2 sont deux p-formes sur M alors par la définition qu'on vient de poser il suffit de traiter le cas d'un p-simplexe singulier σ et on a :

$$\psi(\omega_1 + \omega_2)(\sigma) = \int_\sigma (\omega_1 + \omega_2) = \int_{\triangle_p} \sigma^*(\omega_1 + \omega_2) = \int_{\triangle_p} \sigma^*(\omega_1) + \sigma^*(\omega_2) =$$

$$= \int_{\triangle_p} \sigma^*(\omega_1) + \int_{\triangle_p} \sigma^*(\omega_2) = \psi(\omega_1)(\sigma) + \psi(\omega_2)(\sigma)$$

Considérons maintenant une (p-1)-forme sur M et un p-simplexe singulier σ. En appliquant le théorème de Stokes on obtient :

$$\psi(d\omega)(\sigma) = \int_\sigma d\omega = \int_{\triangle_p} \sigma^*(d\omega) = \int_{\triangle_p} d(\sigma^*\omega) = \int_{\partial\triangle_p} \sigma^*\omega$$

Or $\partial\triangle_p = \cup i = 1^{n+1}\triangle_n^i$ et comme $\varphi_p^i : \triangle_{p-1} \to \partial\triangle_p$ présèrve l'orientation si et seulement si i est pair alors on que :

$$\int_{\partial\triangle_p} \sigma^*\omega = \sum_{i=1}^{p+1} \int_{\partial\triangle_n^i} \sigma^*\omega \;\; et \;\; \int_{\partial\triangle_n^i} \sigma^*\omega = (-1)^i \int_{\triangle_{p-1}} (\varphi_n^i)^*\sigma^*\omega$$

donc

$$\psi(d\omega)(\sigma) = \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^i \int_{\triangle_{p-1}} (\varphi_n^i)^*\sigma^*\omega = \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^i \int_{\triangle_{p-1}} (\sigma \circ \varphi_n^i)^*\omega = \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^i \int_{\sigma\circ\varphi_n^i} \omega$$

puisque $\sigma \circ \varphi_n^i$ est un (p-1)-simplexe singulier sur M et on applique la définition d'intégrale qu'on vient de donner.

On rappelle que l'homomorphisme $\partial : C_p(M) \to C_{p-1}(M)$ était donné par $\partial(\sigma) = \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^i\sigma\circ\varphi_n^i$. Ainsi en appliquant encore une fois directement la définition de l' intégrale :

$$\int_{\partial\sigma} \omega = \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^i \int_{\sigma\circ\varphi_n^i} \omega$$

Comme l'application $\delta : C^p(M;\mathbb{R}) \to C^{p+1}(M;\mathbb{R})$ était définie par $\delta(c) = c \circ \partial$ on a finalement que

$$\psi(d\omega)(\sigma) = \int_{\partial\sigma} \omega = \psi(\omega)(\partial\sigma) = \delta(\psi(\omega)(\sigma))$$

Il en résulte que $\psi : \Omega^*(M) \to (C^*(M;\mathbb{R}), \delta)$ ainsi défini est un homomorphisme de complexe de cohaînes puisqu'on vient de prouver que le diagramme suivant commute pour tout p dans $\mathbb{Z}$:

$$\begin{tikzcd} \Omega_{p-1}(M) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "d"'] & C^{p-1}(M;\mathbb{R}) \arrow[d, "\delta"] \\ \Omega_p(M) \arrow[r, "\psi"'] & C^p(M;\mathbb{R}) \end{tikzcd}$$

On note $\psi^* : H^p_\Omega(M) \to H^p(M;\mathbb{R})$ l'homomorphisme induit en homologie par ψ. On peut maintenant énoncer le Théorème de de Rham.

Théorème 3.1. *L'homomorphisme* $\psi^* : H^p_\Omega(M) \to H^p(M;\mathbb{R})$ *est un isomorphisme pour tout p dans* $\mathbb{Z}$.

On va maintenant énoncer et prouver partiellement les résultats auxiliaires qui prouverons le théorème

Proposition 3.2. *Soit U et V deux ouverts d'une variété différentiable M et considérons la suite :*

$$0 \longrightarrow \Omega^p(U\cup V) \xrightarrow{\alpha} \Omega^p(U)\oplus\Omega^p(V) \xrightarrow{\beta} \Omega^p(U\cap V) \longrightarrow 0$$

où $\alpha(\omega) = \omega|_U - \omega|_V$ *et* $\beta(\eta,\rho) = \eta|_{U\cap V} - \rho|_{U\cap V}$. *Alors la suite est exacte.*

Démonstration. (1) α est clairement injective.

(2) Soit $\omega \in \Omega^p(U\cup V)$, alors $\beta(\alpha(\omega)) = \beta(\omega|_U - \omega|_V) = \omega|_{U\cap V} - \omega|_{U\cap V} = 0$ et donc $Im\alpha \subset Ker\beta$. Soit maintenant $(\eta,\rho) \in \Omega^p(U)\oplus\Omega^p(V)$ avec $\beta(\eta,\rho) = 0$, alors $\eta|_{U\cap V} - \rho|_{U\cap V} = 0$ et donc $\eta|_{U\cap V} = -\rho|_{U\cap V}$. Ainsi la p-forme $\omega \in \Omega^p(U\cup V)$ suivante est bien définie :
$$\omega_x = \begin{cases} \eta_x, & \text{si } x \in U\,; \\ \rho_x, & \text{si } x \in V. \end{cases}$$
et vérifie $\alpha(\omega) = (\eta,\rho)$. Ce qui prouve que $Ker\beta \subset Im\alpha$.

(3) Soit $\omega \in \Omega^p(U\cap V)$. Par le Théorème de partition de l'unité appilqué à l'espace $U\cup V$ avec le recouvrement $\{U,V\}$ on a qu'il existe une fonction $f : U\cup V \to \mathbb{R}$ avec $f|_{U\setminus V} = 0$ et $f|_{V\setminus U} = 1$, donc $1 - f|_{V\setminus U} = 0$. Ainsi $f\omega \in \Omega^p(U)$ et $(1-f)\omega \in \Omega^p(V)$ et $\beta(f\omega, (1-f)\omega) = \omega$. On en déduit que β est surjective.

□

Proposition 3.3. *L'homomorphisme* $\psi^* : H^p_\Omega(U) \to H^p(U;\mathbb{R})$ *est un isomomorphisme pour tout ouvert convexe non-vide U de* $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. Sans perte de généralité on peut supposer que U contient 0. Comme U est contractile on a que $H^p(U;\mathbb{R}) = 0$ si p est différent de zéro et $H^0(U;\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Il faut donc prouver que :

(1) Toute fonction différentiable $f \in C^\infty(U)$ avec $df = 0$ est constante, ainsi on aura $H^0_\Omega = Kerd_0/Imd_{-1} = \mathbb{R}/\{0\} = \mathbb{R}$.

(2) Pour tout $p \geqslant 1$, toute p-forme fermée est exacte et donc $H^p_\Omega(U) = Kerd_p/Imd_{p+1} = 0$

(1) Si $f \in C^\infty(U)$ avec $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = 0$ alors $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ pour tout $i = 1, ..., n$ et donc f est constante puisque U est connexe.

(2) Pour des raisons de notations on écrira $U \subset \mathbb{R}^n$ avec coordonnées $(x_0, ..., x_n)$. Pour tout $p \geqslant 0$ définissons $\phi : \Omega^{p+1}(U) \to \Omega^p(U)$ comme suit : si $\omega \in \Omega^{p+1}(U)$ est de la forme $\omega = f(x_0, ..., x_n) dx_{j_0} \wedge ... \wedge dx_{j_p}$ on pose

$$\varphi(\omega) = \left(\int_0^1 t^p f(tx) dt\right) \eta$$

avec

$$\eta = \sum_{i=0}^p (-1)^i x_{j_i} dx_{j_0} \wedge ... \wedge \widehat{dx_{j_i}} \wedge ... \wedge dx_{j_p}$$

où $\widehat{dx_{j_i}}$ signifie que le terme n'est pas présent. Dans le cas d'une (p+1)-forme ω arbitraire on étend cette définition par linéarité.

On a alors :

$$\begin{aligned}
d(\phi(\omega)) &= d\left(\left(\int_0^1 t^p f(tx)dt\right) \sum_{i=0}^p (-1)^i x_{j_i} dx_{j_0} \wedge ... \wedge \widehat{dx_{j_i}} \wedge ... \wedge dx_{j_p}\right) = \\
&= d\left(\sum_{i=0}^p \left(\int_0^1 t^p f(tx)dt\right) (-1)^i x_{j_i} dx_{j_0} \wedge ... \wedge \widehat{dx_{j_i}} \wedge ... \wedge dx_{j_p}\right) = \\
&= \sum_{i=0}^p d\left(\left(\int_0^1 t^p f(tx)dt\right) (-1)^i x_{j_i}\right) dx_{j_0} \wedge ... \wedge \widehat{dx_{j_i}} \wedge ... \wedge dx_{j_p} = \\
&= \sum_{i=0}^p \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\left(\int_0^1 t^p f(tx)dt\right) (-1)^i x_{j_i}\right) dx_k \wedge dx_{j_0} \wedge ... \wedge \widehat{dx_{j_i}} \wedge ... \wedge dx_{j_p}\right) = \\
&= \sum_{i=0}^p \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\int_0^1 t^p f(tx)dt\right) (-1)^i x_{j_i} + \left(\int_0^1 t^p f(tx)dt\right) \frac{\partial}{\partial x_k} (-1)^i x_{j_i}\right) dx_k \wedge dx_{j_0} \wedge ... \wedge \widehat{dx_{j_i}} \wedge ... \wedge dx_{j_p}\right) = \\
&= \sum_{k=1}^n \int_0^1 t^{p+1} \frac{\partial}{\partial x_k} f(tx)dt \cdot \sum_{i=0}^p (-1)^i x_{j_i} dx_k \wedge dx_{j_0} \wedge ... \wedge \widehat{dx_{j_i}} \wedge ... \wedge dx_{j_p} + \\
&\quad + \int_0^1 t^p f(tx)dt \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{i=0}^p (-1)^i x_{j_i} dx_k \wedge dx_{j_0} \wedge ... \wedge \widehat{dx_{j_i}} \wedge ... \wedge dx_{j_p} = \\
&= \left(\sum_{k=1}^n \int_0^1 t^{p+1} \frac{\partial}{\partial x_k} f(tx)dt dx_k\right) \wedge \left(\sum_{i=0}^p (-1)^i x_{j_i} dx_{j_0} \wedge ... \wedge \widehat{dx_{j_i}} \wedge ... \wedge dx_{j_p}\right) + \\
&\quad + \int_0^1 t^p f(tx)dt \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^p \frac{\partial}{\partial x_k} (-1)^i x_{j_i} dx_k \wedge dx_{j_0} \wedge ... \wedge \widehat{dx_{j_i}} \wedge ... \wedge dx_{j_p} = \\
&= \sum_{k=0}^n \int_0^1 t^{p+1} \frac{\partial}{\partial x_k} f(tx)dt dx_k \wedge \eta + \left(\int_0^1 t^p f(tx)dt\right) d\eta = S + T
\end{aligned}$$

On sait déjà que

$$d\omega = \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} f(x) dx_k \wedge dx_{j_0} \wedge ... \wedge dx_{j_p}$$

et de plus si on transforme la base $dx_{j_0} \wedge ... \wedge dx_{j_p}$ de $\bigwedge^{p+1}(T_m(M))$ en une base $dx_{j_0} \wedge ... \wedge dx_{j_p} \wedge dx_k$ de $\bigwedge^{p+2}(T_m(M))$ on a que

$$\eta_{p+2} = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i x_{j_i} dx_{j_0} \wedge ... \wedge \widehat{dx_{j_i}} \wedge ... \wedge dx_{j_p} \wedge dx_k =$$

$$= x_k dx_{j_0} \wedge ... \wedge dx_{j_p} - dx_k \wedge \eta$$

où le premier terme est celui dans lequel l'élément dx_k est sauté et le deuxième regroupe tous les autres. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\phi(d\omega) &= \sum_{k=0}^{1} \left(\int_0^1 t^{p+1} \frac{\partial}{\partial x_k} f(tx) dt \right) (x_k dx_{j_0} \wedge ... \wedge dx_{j_p} - dx_k \wedge \eta) = \\
&= \sum_{k=0}^{1} x_k \left(\int_0^1 t^{p+1} \frac{\partial}{\partial x_k} f(tx) dt \right) dx_{j_0} \wedge ... \wedge dx_{j_p} - S = \\
&= \left(\int_0^1 t^{p+1} \frac{d}{dt} f(tx) dt \right) dx_{j_0} \wedge ... \wedge dx_{j_p} - S = \\
&= \left(t^{p+1} f(tx)|_0^1 - (p+1) \int_0^1 t^p f(tx) dt \right) dx_{j_0} \wedge ... \wedge dx_{j_p} - S = \omega - T - S
\end{aligned}$$

puisque

$$\begin{aligned}
d\eta &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{p} \frac{\partial}{\partial x_k} (-1)^i x_{j_i} dx_k \wedge dx_{j_0} \wedge ... \wedge dx_{j_p} = \\
&= \sum_{i=0}^{p} (-1)^i dx_{j_i} \wedge dx_{j_0} \wedge ... \wedge dx_{j_p} = \\
&= \sum_{i=0}^{p} dx_{j_0} \wedge ... \wedge dx_{j_{p+1}} = (p+1) dx_{j_0} \wedge ... \wedge dx_{j_{p+1}}
\end{aligned}$$

Il en résulte que $d\phi(\omega) + \phi(d\omega) = \omega$ pour tout $\omega \in \Omega^p(\mathbb{R}^{n+1})$, si $d\omega = 0$ alors $\phi(d\omega) = 0$ et donc $\omega = d\phi(\omega)$.

□

Lemme 3.4. *Si le Théorème de de Rham est vrai sur deux ouverts U et V de M et sur l'intersection $U \cap V$, alors il est vrai sur l'union $U \cup V$.*

Démonstration. On se limite à donner une esquisse de la preuve : la suite exacte de la Proposition 3.2 induit une longue suite exacte en homologie :

$$\cdots \longrightarrow H^p_\Omega(U \cup V) \longrightarrow H^p_\Omega(U) \oplus H^p_\Omega(V) \longrightarrow H^{p+1}_\Omega(U \cap V) \longrightarrow \cdots$$

L'homomorphisme ψ^* induit le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^p_\Omega(U \cup V) \arrow[r] \arrow[d] & H^p_\Omega(U) \oplus H^p_\Omega(V) \arrow[r] \arrow[d] & H^{p+1}_\Omega(U \cap V) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^p(U \cup V; \mathbb{R}) \arrow[r] & H^p(U; \mathbb{R}) \oplus H^p(V; \mathbb{R}) \arrow[r] & H^{p+1}(U \cap V; \mathbb{R}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

qui nous permet de conclure grâce au Lemme des cinq. □

Avec ce qu'on vient de faire, la preuve du théorème est une conséquence immédiate du lemme suivant, qu'on admettra sans preuve.

Lemme 3.5. *Soit M une variété différentiable. Si une propriété p est vraie sur une famille d'ouverts $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de M tels que :*

(1) *Tout ouvert U de M difféomorphe à un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ est dans la famille $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$.*

(2) *Pour tout $\alpha, \beta \in A$ avec p vraie sur $U_\alpha \cap U_\beta$, p est aussi vraie sur $U_\alpha \cup U_\beta$*

(3) *Si on a un sous-ensemble $\left\{U_\beta\right\}_{\beta \in B} \subset \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ avec $U_{\beta_1} \cap U_{\beta_2} = \emptyset$ pour tous β_1 et β_2 dans B, $\beta_1 \neq \beta_2$.*

Alors p est vraie sur $\bigcup_{\beta \in B} U_\beta$.

Bibliographie

[1] Glen E. Bredon. *Topology and Geometry*. Springer-Verlag, 1993

[2] Sze-Tsen Hu. *Cohomology theory* Markham publishing company, 1968.

[3] Sze-Tsen Hu. *Homology theory* Holden-Day, 1970.

[4] Ulrich Suter. *Topologie des fibrés* Université de Neuchâtel, 2004.

[5] Louis Fauchier-Magnan. *Introduction à la théorie de Morse* EPFL, 2005.

Index