Projet de Semestre

été 2005

Analyse de Fourier

Mathieu Glardon

Professeur Responsable:

Antoine Derighetti

Table des matières

Résumé

Cette partie du projet est une introduction à l'analyse de Fourier. Nous exposons et démontrons les théorèmes les plus fondamentaux. Nous rappelons de plus quelques résultats généraux concernant la théorie de la mesure et de l'intégration.

Table des notations

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long du travail:

$\mathbb{N}$	$\{1, 2, 3, ...\}$
$\hat{f}$	Transformée de Fourier de f
$< x, t >$	Prod. scalaire usuel dans $\mathbb{C}^n$
$s_n f(x)$	n-ième somme de Fourier de f
$N_p(f)$	$\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \lvert f(x)\rvert^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}$

CHAPITRE 1

Notions préalables

1. Mesure

DÉFINITION 1.1. Soit X un ensemble. Une collection $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ est une tribu (ou σ-algèbre) ssi les 3 propriétés suivantes sont vérifiées :
- $\emptyset$ et $X \in \mathscr{A}$
- $A \in \mathscr{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathscr{A}$
- $\forall\ \{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$

On appelle espace mesurable un ensemble X muni d'une tribu $\mathscr{A}$.
Soit $(X, \mathscr{A})$ un espace mesurable. Une mesure sur $(X, \mathscr{A})$ est une fonction

$$\mu : \mathscr{A} \longrightarrow [0, +\infty] \quad t.q.$$

- $\mu(\emptyset) = 0$
- Si $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$ est une suite de parties deux à deux disjointes, alors

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

DÉFINITION 1.2. La mesure de Lebesgue λ^n sur $\mathbb{R}^n$ est la mesure obtenue par la construction suivante :
On définit d'abord $\lambda^* : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow [0, \infty]$ par

$$\lambda^*(A) := inf\Big\{\Big(\sum_{i=1}^{\infty} Vol_n(Q_i)\Big)\Big|\{Q_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset C \ \ recouvre \ \ A\Big\}$$

où $C \subset \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ est la collection des cubes axiparallèles dans $\mathbb{R}^n$.
On introduit la collection $\mathscr{L}$ de tous les ensembles qui sont λ^*-mesurables.
(i.e. $A \in \mathscr{L}$ ssi pour tout $S \subset \mathbb{R}^n$ on a $\lambda^*(S) = \lambda^*(S \cap A) + \lambda^*(S \cap A^C)$)
On pose finalement $\lambda^n := \lambda^*$ restreint à $\mathscr{L}$. C'est une mesure, celle de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

DÉFINITION 1.3. On appelle espace mesuré le triple $(X, \mathscr{A}, \mu)$, où μ est une mesure sur l'espace mesurable $(X, \mathscr{A})$.

Un ensemble $A \subset \mathscr{A}$ est de mesure nulle si $\mu(A) = 0$.

On dit qu'une propriété (P) définie sur un espace mesuré $(X, \mathscr{A}, \mu)$ est vérifiée presque partout ($\mu - p.p.$ ou $p.p.$) si elle est vérifiée sur le complémentaire d'un ensemble de mesure nulle.

2. Espaces $\mathscr{L}^p$ et L^p

Proposition et Définition 1.4 (L'espace $\mathscr{L}^1$). *Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré. Une fonction mesurable $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ est dite intégrable sur $C \subset X$ si $\int_D |f| d\mu < \infty$. On note $\mathscr{L}^1(D, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions intégrables sur D. On a les propriétés suivantes :*

$\mathscr{L}^1(D, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel réel.

L'intégration $f \mapsto \int_D f d\mu$ est linéaire sur cet espace vectoriel :

$$\int_D (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_D f \, d\mu + \beta \int_D g \, d\mu \ , \quad \forall f, g \in \mathscr{L}^1(D, \mathbb{R}), \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Passons à la notion d'intégrale d'une fonction à valeurs complexes :

On note $\mathscr{L}^1(D, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions mesurables $f : D \to \mathbb{C}$ telles que :

$$\int_D |f| d\mu < \infty$$

L'intégrale d'une fonction $f \in \mathscr{L}^1(D, \mathbb{C})$ est alors définie par

$$\textstyle\int_D f d\mu := \int_D Ré(f) d\mu + i \int_D Im(f) d\mu$$

Les propriétés de l'espace $\mathscr{L}^1(D, \mathbb{R})$ et de l'intégration se généralisent sans autre à l'espace $\mathscr{L}^1(D, \mathbb{C})$. En particulier, on a :
- *$\mathscr{L}^1(D, \mathbb{C})$ est un espace vectoriel complexe.*
- *L'intégration est linéaire : $\int_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_X f \, d\mu + \beta \int_X g \, d\mu$, $\forall f, g \in \mathscr{L}^1(D, \mathbb{C}), \ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$*
- *$\int_X |f| d\mu = 0$ si et seulement si $f = 0$ presque partout.*
- *(Chebychev) $\int_X |f| d\mu \leq a \cdot \mu(|f| \geq a)$, $\forall \ a \in \mathbb{R}_+$*
- *$\left|\int_X f d\mu\right| \leq \int_X |f| d\mu$*
- *(Fatou) $\int_X \Big(\liminf_{i\to\infty} |f_i|\Big) d\mu \leq \liminf_{i\to\infty} \int_X |f_i| d\mu$*

Théorème 1.5. *Convergence dominée de Lebesgue*
Soit $f_i : X \longrightarrow \mathbb{C}$ une suite de fonctions mesurables ($i \in I$ pas nécessairement dénombrable). Supposons satisfaites les hypothèses suivantes :
- *Il existe une fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ t.q. $f_i \to f$ presque partout*
- *Il existe $g \in \mathscr{L}^1(X, \mathbb{R}_+)$ t.q. $|f_i| \leq g$ presque partout pour tout i.*

Alors f est intégrable et on a :

$$\lim_{i\to\infty} \int_X |f_i - f| d\mu = 0$$

$$\lim_{i\to\infty} \int_X f_i d\mu = \int_X f d\mu$$

Le corollaire suivant joue un rôle important dans un grand nombre de questions, notamment en théorie des séries de Fourier.

COROLLAIRE 1.6. *Soit* $\{u_k\} \subset \mathscr{L}^1(X, \mathbb{C})$ *une suite de fonctions intégrables sur* X *telle que* $\sum_{k=1}^{\infty} \int_X |u_k| d\mu < \infty$.

Alors la série $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ *converge presque partout vers une fonction* $f \in \mathscr{L}^1(X, \mathbb{C})$. *De plus on a :*

$$\lim_{n\to\infty} \Big| \int_X \Big(f - \sum_{k=1}^{n} u_k\Big) d\mu \Big| = 0$$

$$\int_X f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X u_k d\mu$$

$$\Big| \int_X f d\mu \Big| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_X |u_k| d\mu$$

PROPOSITION ET DÉFINITION 1.7. *Soit* $1 \leq p < \infty$. *On note* $\mathscr{L}^p(X)$ *l'ensemble des fonctions* $f : X \longrightarrow [0, \infty]$ *qui sont p-intégrables :*

$$\mathscr{L}^p(X) = \Big\{ f : X \to [0, \infty] \Big| f \text{ mesurable et } \int_X |f|^p d\mu < \infty \Big\}$$

$\mathscr{L}^p(X)$ *est un espace vectoriel réel :*
Soient $f, g \in \mathscr{L}^p(X)$ *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *alors* $(\alpha f + \beta g)$ *est mesurable et comme* $|\alpha f + \beta g|^p \leq 2^p(|\alpha|^p |f|^p + |\beta|^p |g|^p)$, *on a :*
$\int_X |\alpha f + \beta g|^p d\mu \leq 2^p |\alpha|^p \int_X |f|^p d\mu + 2^p |\beta|^p \int_X |g|^p d\mu < \infty$
On définit ensuite une relation d'équivalence sur $\mathscr{L}^p(X)$ *en posant*

$f \backsim g \iff \mu(\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0$ *(i.e.* $f \backsim g$ *ssi* f *et* g *coïncident presque partout)*

DÉFINITION 1.8. L'espace $L^p(X)$ est par définition le quotient :

$$L^p(X) = \mathscr{L}^p(X) / \backsim$$

PROPOSITION 1.9 (Riesz-Fischer). $(L^p(X), \|.\|_p)$ *est un espace de Banach, où*

$$\|f\|_p := \Big(\int_X |f|^p d\mu \Big)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall f \in L^p(X)$$

3. Intégrales multiples

Soient $(X, \mathscr{A}_1, \mu_1)$ et $(X, \mathscr{A}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés.
On note simplement $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$ la σ-algèbre sur $X = X_1 \times X_2$ engendrée par les ensembles du type $A_1 \times A_2 \subset X$ où $A_1 \in \mathscr{A}_1$ et $A_2 \in \mathscr{A}_2$.

Lorsque $(X, \mathscr{A}_1, \mu_1)$ et $(X, \mathscr{A}_1, \mu_1)$ sont σ-finis, il existe une unique mesure μ sur $(X_1 \times X_2, \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2)$ t.q. :

- $\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$, $\forall A_1 \in \mathscr{A}_1,\ A_2 \in \mathscr{A}_2$
- μ est σ-finie
- $\mu(A) = \int_{X_1} \mu_2(A'_x)d\mu_1(x) = \int_{X_2} \mu_1(A''_y)d\mu_2(y)$, $\forall A \in \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$

où $A'_x := \big\{y \in Y | (x, y) \in A\big\} \subset Y$ et $A''_y := \big\{x \in X | (x, y) \in A\big\} \subset X$ sont des "tranches" de A.
Cette mesure est appelée mesure produit sur $(X_1 \times X_2, \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2)$ et est notée $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$.

Théorème 1.10 (Théorème de Fubini-Tonelli). *Soit $f : X_1 \times X_2 \to [0, \infty]$ une fonction mesurable, alors*

- *la fonction $x \mapsto \int_{X_2} f(x, y)d\mu_2(y)$ est mesurable (sur $(X_1, \mathscr{A}_1)$)*
- *la fonction $y \mapsto \int_{X_1} f(x, y)d\mu_1(x)$ est mesurable (sur $(X_2, \mathscr{A}_2)$)*
- $\iint_{X_1 \times X_2} f\mu_1 \otimes \mu_2 = \int_{X_1} \Big(\int_{X_2} f(x, y)d\mu_2(y)\Big) d\mu_1(x) = \int_{X_2} \Big(\int_{X_1} f(x, y)d\mu_1(x)\Big) d\mu_2(y)$

Théorème 1.11 (Théorème de Fubini-Lebesgue). *Soit $f \in \mathscr{L}^1(X_1 \times X_2)$ une fonction intégrable, alors*

- *pour presque tout $x \in X_1$, la fonction $y \mapsto f(x, y)$ est intégrable sur X_2*
- *pour presque tout $y \in X_2$, la fonction $x \mapsto f(x, y)$ est intégrable sur X_1*
- *la fonction $x \mapsto \int_{X_2} f(x, y)d\mu_2(y)$ est intégrable sur X_1*
- *la fonction $y \mapsto \int_{X_1} f(x, y)d\mu_1(x)$ est intégrable sur X_2*
- $\iint_{X_1 \times X_2} f\mu_1 \otimes \mu_2 = \int_{X_1} \Big(\int_{X_2} f(x, y)d\mu_2(y)\Big) d\mu_1(x) = \int_{X_2} \Big(\int_{X_1} f(x, y)d\mu_1(x)\Big) d\mu_2(y)$

3.1. Changement de variable. Soit $h : \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable et intégrable.
Si $F : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ est un difféomorphisme, alors
$F \circ h : \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ est mesurable et $J_F \cdot h \circ F$ est intégrable et on a :

$$\int_{\Omega_2} h(y)d\lambda^n(y) = \int_{\Omega_1} h(F(x))|J_F(x)|d\lambda^n(x)$$

On écrit cette formule sous la forme compacte

$$d^n y = |J_F(x)|d^n x = det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)d^n x$$

Ω_1 et Ω_2 sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $J_F(x) = det(DF_x)$ est le jacobien de F au point $x \in \Omega_1$.

CHAPITRE 2

Transformation de Fourier sur $\mathbb{R}^n$

PROPOSITION ET DÉFINITION 2.1. *Soit* $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$, $t \in \mathbb{R}^n$, *alors* $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i<x,t>} f(t)dt$ *existe* $\forall x \in \mathbb{R}^n$.
En effet, f *est mesurable, de même l'appl.* $x \mapsto e^{-i<x,t>} f(x)$ *est mesurable* $\forall t \in \mathbb{R}^n$.
De plus, $\int^*_{\mathbb{R}^n} \left| f(t)e^{-i<x,t>} \right| dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx$.
Ainsi, $x \mapsto e^{-i<x,t>} f(x) \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$.
$\forall f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$, $t \in \mathbb{R}^n$, *on pose :*

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,t>} f(x)dx$$

$\hat{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ *;* $\hat{f}$ *est la transformée de Fourier de f.*
Propriétés de $\hat{f}$ *:*

(1) *Puisque* $|\hat{f}(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{-i<x,t>} f(t) \right| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt = \|f\|_1$
on a que $\hat{f}$ *est bornée sur* $\mathbb{R}^n$ *et que*
$\|\hat{f}\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\hat{f}(x)| \leq \|f\|_1$. *(i.e* $\widehat{\ }$ *contractive)*

(2) $\hat{f}$ *est continue sur* $\mathbb{R}^n$, *en effet,* $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall h \in \mathbb{R}^n$, *on a*
$\hat{f}(x+h) - \hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,t>}(e^{-i<h,t>} - 1)f(t)dt$, *de sorte que*
$|\hat{f}(x+h) - \hat{f}(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-i<h,t>} - 1| \cdot |\hat{f(t)}|dt \leq \int_{\mathbb{R}^n} 2|f(t)|dt$.
Puisque $\lim_{h\to 0} |e^{-i<h,t>} - 1| \cdot |f(t)| = 0$, *en utilisant le théorème 1.5., on a que* $\lim_{h\to 0} \hat{f}(x+h) - \hat{f}(x) = 0$, *ce qui montre la continuité de* $\hat{f}$ *en* x.

(3) $\forall f, g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n), \widehat{(f+g)} = \hat{f} + \hat{g}$
$\forall \lambda \in \mathbb{C}, f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n), \widehat{(\lambda f)} = \lambda \hat{f}$

En résumé :
La transformation de Fourier est une application linéaire de $\mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ *dans* $\mathbb{C}^{\mathbb{R}^n}$, *de plus,*

$$\mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n) \overset{\widehat{\ }}{\longrightarrow} C^b(\mathbb{R}^n) \quad (= \textit{appl.cont.bornées})$$

REMARQUE 2.2. – Si $f, g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ avec $f(x) = g(x)$ p.p., alors $\hat{f} = \hat{g}$.
– $\hat{f} \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

THÉORÈME 2.3 (Riemann-Lebesgue).

$$\forall f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n), \quad \hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$$

i.e. $\forall \varepsilon \in (0, \infty)$, *il existe un compact* K_ε *tel que* $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus K_\varepsilon$, $|\hat{f}(x)| \leq \varepsilon$.

Démonstration. (1) Supposons n=1

Soit $a, b \in \mathbb{R},\ a < b,\ x \in \mathbb{R},\ x \neq 0$.

Puisque $\hat{1}_{[a,b]}(x) = \frac{e^{-ixa} - e^{-ixb}}{ix}$ et $|e^{-ixa} - e^{-ixb}| \leq |e^{-ixa}| + |e^{-ixb}| \leq 2$,

$|\hat{1}_{[a,b]}(x)| \leq \frac{2}{x}$ ainsi $1_{[a,b]} \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Soit $\mathscr{E} = \left\{ \sum_{j=1}^{N} c_j 1_{[a_j, b_j]} | N \in \mathbb{N}, a_i, b_i \in \mathbb{R}, c_i \in \mathbb{C}, a_j < b_j, 1 \leq i, j \leq N \right\}$

Ainsi, $\{\hat{h} \mid h \in \mathscr{E}\} \subset C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

$\mathscr{E}$ est dense dans $\mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ pour la semi-norme $\|.\|_1$. $\quad (\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx)$

Soit $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ et soit $\varepsilon \in (0, \infty)$.

Alors il existe $h \in \mathscr{E}$ t.q. $\|f - h\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$. (par densité)

Il existe un compact K de $\mathbb{R}$ t.q. $|\hat{h}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall x \in \mathbb{R} \backslash K$. $\quad \big(\text{car } h \in C_0(\mathbb{R}^n)\big)$

$|\hat{f}(x)| = |\hat{f}(x) - \hat{h}(x) + \hat{h}(x)| \leq |\hat{f}(x) - \hat{h}(x)| + |\hat{h}(x)|$

$= |\widehat{(f - h)}(x)| + |\hat{h}(x)| \leq \|f - h\|_1 + |\hat{h}(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

(2) Supposons n=2

Soit $f, g \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ et le produit tensoriel $(f \otimes g)(x, y) = f(x) \cdot g(y)$

Soit $f, g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)$. Alors $\widehat{(f \otimes g)} = \hat{f} \otimes \hat{g}$, en effet :

$\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}^2, \widehat{(f \otimes g)}(t_1, t_2) = \int_{\mathbb{R}^2} (f \otimes g)(x_1, x_2) e^{-i<x,t>} dx_1 dx_2$

$= \int_{\mathbb{R}^2} f(x_1) g(x_2) e^{-ix_1 t_1} e^{-ix_2 t_2} dx_1 dx_2 = \int_{\mathbb{R}} f(x_1) e^{-ix_1 t_1} dx_1 \int_{\mathbb{R}} g(x_2) e^{-ix_2 t_2} dx_2$

$= \hat{f}(t_1) \hat{g}(t_2) = (\hat{f} \otimes \hat{g})(t_1, t_2)$

Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}, a < b, c < d$

$(\widehat{1_{[a,b]} \otimes 1_{[c,d]}}) = \hat{1}_{[a,b]} \otimes \hat{1}_{[c,d]} \in C_0(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$

Donc $\hat{1}_{[a,b] \times [c,d]} \in C_0(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$

Les combinaisons linéaires finies de ces fonctions sont denses dans $\mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)$.

□

1. Convolution et transformation de Fourier

Définition 2.4. Soient $f, g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ à support compact $(f, g \in C_{00}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}))$. $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ on définit la convolution $*$ par :

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x + y) g(-y) dy := (f * g)(x)$$

On a alors que $f * g \in C_{00}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ et $supp(f * g) \subset supp(f) + supp(g)$, de plus, $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1\ \|g\|_1$. En effet, f et $g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ et donc il existe un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ de mesure nulle tel que $\int_{\mathbb{R}^n} f(x + y) g(-y) dy$ existe sur le complémentaire de E. En posant alors que $f * g$ s'annule sur E et vaut $\int_{\mathbb{R}^n} f(x + y) g(-y) dy$ si $x \notin E$, on a que $f * g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ et $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1\ \|g\|_1$.

PROPOSITION 2.5. $\forall\, f, g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$

$$\widehat{(f*g)} = \hat{f}\cdot\hat{g}$$

DÉMONSTRATION. Soit $t \in \mathbb{R}^n$

$\widehat{(f*g)}(t) = \int_{\mathbb{R}^n}(f*g)(x)e^{-i<x,t>}dx = \int_{\mathbb{R}^n}\big(\int_{\mathbb{R}^n} f(x+y)g(-y)dy\big)e^{-i<x,t>}dx$
$= \int_{\mathbb{R}^n} g(-y)\big(\int_{\mathbb{R}^n} f(x+y)e^{-i<x,t>}dx\big)dy \qquad$ (“$x+y=z$“, “$x=z-y$“)
$= \int_{\mathbb{R}^n} g(-y)\big(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i<x-y,t>}dx\big)dy$
$= \int_{\mathbb{R}^n} g(-y)\big(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i<x,t>}e^{i<y,t>}dx\big)dy = \int_{\mathbb{R}^n} g(-y)e^{i<y,t>}\hat{f}(t)dy$
$= \hat{f}(t)\int_{\mathbb{R}^n} g(-y)e^{i<y,t>}dy = \hat{f}(t)\int_{\mathbb{R}^n} g(y)e^{-i<y,t>}dy$
$= \hat{f}(t)\hat{g}(t)$

□

3 remarques utiles :

(1) D'après la prop. 1.9, $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Banach. En définissant la convolution sur $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ par $[f]*[g]=[f*g] \quad \forall f,g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}$
$L_1^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$, muni de $*$, est une algèbre de Banach. $\qquad (\,\|f*g\|_1 \le \|f\|_1\|g\|_1)$

(2) Dans ce qui suit, il sera pratique de considérer les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ de la manière suivante : $\forall f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$
$\|f\|_1 = \sup\big\{|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)dx| \;\big|\; \phi \in C_{00}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}) \;\; avec \;\; \|\phi\|_\infty \le 1\big\}$
de même $\forall h \in C^b(\mathbb{R}^n)$
$\|h\|_\infty = \sup\big\{|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)h(x)dx| \;\big|\; f \in C_{00}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}) \;\; avec \;\; \|f\|_1 \le 1\big\}$

(3) $\forall f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$, on pose $\widehat{[f]} = \hat{f}$

PROPOSITION ET DÉFINITION 2.6. *Posons* $A(\mathbb{R}^n) = \big\{\hat{f} \mid f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)\big\}$.
C'est une sous-algèbre de $C_0(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ *ayant la propriété suivante :*
$A(\mathbb{R}^n)$ *sépare les points de* $\mathbb{R}^n$.
(i.e. $\forall u,v \in \mathbb{R}^n, u \neq v$, *il existe* $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ *avec* $\hat{f}(u) \neq \hat{f}(v)$ *)*

DÉMONSTRATION. Soient $u,v \in \mathbb{R}^n$ avec $\hat{f}(u) = \hat{f}(v) \;\; \forall f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$.
Puisque $\int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-i<u,y>}dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-i<v,y>}dy$
on a que $\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\big(e^{-i<u,y>} - e^{-i<v,y>}\big)dy = 0$.
Par la remarque (2) ci-dessus, il s'ensuit que $\|e^{-i<u,\_>} - e^{-i<v,\_>}\|_\infty = 0$.
Ainsi $e^{-i<u,y>} = e^{-i<v,y>} \;\; \forall y \in \mathbb{R}^n$, et donc $u = v$.

□

COROLLAIRE 2.7. $A(\mathbb{R}^n)$ *est dense dans* $C_0(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ *pour la norme* $\|.\|_\infty$.

DÉMONSTRATION. Puisque $A(\mathbb{R}^n)$ a les 3 propriétés suivantes :

– $A(\mathbb{R}^n)$ est une sous-algèbre de $C_0(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$.
– $A(\mathbb{R}^n)$ sépare les points de $\mathbb{R}^n$.
– $A(\mathbb{R}^n)$ est stable par conjugaison complexe :
$\overline{\hat{f}} = \hat{\tilde{f}}$, où $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}, \;\; \tilde{f} \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$

la propriété ci-dessus découle du théorème de Stone-Weierstrass. **[3]** □

THÉORÈME 2.8. *La transformation de Fourier* $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\widehat{\ }} C_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ *est injective.*

DÉMONSTRATION. Soit $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}$ avec $\hat{f} = 0$. On veut voir que $f(x) = 0$ presque partout.

(1) $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)dx = 0 \quad \forall g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$
Soit $g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$. $0 = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\big(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i<x,y>}dx\big)dy$
$= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\big(\int_{\mathbb{R}^n} g(y)e^{-i<x,y>}dy\big)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)dx.$

(2) $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\psi(x)dx = 0 \quad \forall \psi \in C_{00}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$
Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\psi \in C_{00}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. D'après le corollaire 2.7.
on sait qu'il existe $k \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ avec $\|\psi - \hat{k}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{1+\|f\|_1}$. Ainsi :
$|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\psi(x)dx| \le |\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\psi(x)dx - \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{k}(x)dx| + |\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{k}(x)dx|$
$= |\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\big(\psi(x) - \hat{k}(x)\big)dx| \qquad$ par (1)
$\le \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \cdot \|\psi - \hat{k}\|_\infty dx \le \frac{\varepsilon}{1+\|f\|_1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx < \varepsilon.$

(3) D'après la remarque (2) de la page 9, on a que $\|f\|_1 = 0$.
Ainsi $f(x) = 0$ presque partout.

□

En résumé :

La transformation de Fourier est un homomorphisme injectif, contractif de l'algèbre de Banach $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ dans l'algèbre de Banach $(C_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}), \|.\|_\infty)$.
De plus, l'image est dense dans $C_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

2. Dérivation et transformation de Fourier

PROPOSITION 2.9. *Soit* $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$. *Supposons* f *dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $f' \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$. *Alors,* $\forall x \in \mathbb{R}$, *on a :* $\quad \hat{f'}(x) = ix\hat{f}(x)$

DÉMONSTRATION. Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(x+1) - f(x) = \int_x^{x+1} f'(t)dt.$
Posons $y = t - x \ \Rightarrow \int_0^1 f'(x+y)dy = f(x+1) - f(x).$
$f' * 1_{[-1,0]}(-y) = \int_{\mathbb{R}} f'(x+y)1_{[-1,0]}(-y)dy = \int_{\mathbb{R}} f'(x+y)1_{[0,1]}(y)dy = \int_0^1 f'(x+y)dy$
Ainsi $f(x+1) - f(x) = \int_0^1 f'(x+y)dy$. En notant $f_1(x) := f(x+1)$, on obtient :
$f_1 - f = f' * 1_{[-1,0]}$. Dès lors, on a :
$\widehat{(f_1 - f)} = \widehat{f'} * \hat{1}_{[-1,0]}$ et donc $\widehat{f_1} - \hat{f} = \widehat{f'} * \hat{1}_{[-1,0]}. \quad \Big($avec $\hat{1}_{[-1,0]} = \frac{e^{ix}-1}{ix}\Big)$

Supposons $x \neq 0$: $\hat{f}(x)e^{ix} - \hat{f}(x) = \widehat{f'}(x)\frac{e^{ix}-1}{ix}$.
Supposons $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ $\quad (e^{ix} \neq 1)$. On a $\hat{f}(x)(e^{ix}-1) = \widehat{f'}(x)\frac{e^{ix}-1}{ix}$.
d'où $\hat{f}(x) = \frac{\widehat{f'}(x)}{ix}$ et $ix\hat{f}(x) = \widehat{f'}(x)$.
Mais puisque $\hat{f}$ et $\widehat{f'}$ sont continues, ceci est vrai $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

$\square$

Remarque 2.10. Soit $k \in \mathbb{N}, k > 1, f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$.
Supposons que $f^{(k)}$ existe sur $\mathbb{R}$, $f^{(j)} \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ $\forall 1 \leq j \leq k$. Alors :
$\widehat{f^{(k)}}(x) = (ix)^k\hat{f}(x)$. (Sans preuve)

CHAPITRE 3

Formule de Parseval

Proposition et Définition 3.1. *Pour tout $f \in \mathscr{L}^1([0,2\pi])$, on définit les coefficients de Fourier de f par :*
$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx \ \ \forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ *et*
$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx \ \ \forall n \in \mathbb{N}$.
On définit également la n-ième somme de Fourier de f par :
$s_n f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)$.
On rappelle que les coefficients de Fourier de la fonction $x \mapsto s_n f(x)$ sont les mêmes que ceux de f. (cf.[**4**]*)*

Théorème 3.2. *Soient*

(1) $f \in \mathscr{L}^2([0,2\pi])$
(2) $n \in \mathbb{N}$

Alors

$$\inf\Big\{ \int_0^{2\pi} \big(f(x) - \frac{c_0}{2} - \sum_{k=1}^{n} c_k\cos kx + d_k\sin kx\big)^2 dx \ \Big| \ c_0, c_1, ..., c_n, d_1, ..., d_n \in \mathbb{R}\Big\}$$

$$= \int_0^{2\pi} \big(f(x) - s_n f(x)\big)^2 dx$$

Démonstration. Posons, $\forall \ c_0, c_1, ..., c_n, d_1, ..., d_n \in \mathbb{R}$,
$I(c_0, c_1, ..., c_n, d_1, ..., d_n) := \int_0^{2\pi} \big(f(x) - \frac{c_0}{2} - \sum_{k=1}^{n} c_k\cos kx + d_k\sin kx\big)^2 dx$
Il suffit alors de montrer que $I(c_0, c_1, ..., c_n, d_1, ..., d_n) \geq I(a_o, a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n)$.
$I(c_0, c_1, ..., c_n, d_1, ..., d_n) - (a_o, a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n)$
$= \int_0^{2\pi} \big(f(x) - p(x)\big)^2 dx - \int_0^{2\pi} \big(f(x) - s_n f(x)\big)^2 dx$

où $p(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} c_k\cos kx + d_k\sin kx \ , \ \ x \in [0,2\pi]$

$= \int_0^{2\pi} \big((f(x) - p(x))^2 - (f(x) - s_n f(x))^2\big)dx$
$= \int_0^{2\pi} p^2(x)dx - 2\int_0^{2\pi} f(x)p(x)dx - \int_0^{2\pi} {s_n}^2 f(x)dx + 2\int_0^{2\pi} f(x)s_n f(x)dx$
$= \pi\big\{\frac{{c_0}^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}({c_k}^2 + {d_k}^2) - 2(\frac{a_0c_0}{2} + \sum_{k=i}^{n} a_kc_k + b_kd_k) + (\frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} {a_k}^2 + {b_k}^2)\big\}$
$= \pi\big\{\frac{{c_0}^2 + {a_0}^2 - 2a_0c_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}({c_k}^2 + {a_k}^2 - 2a_kc_k) + ({d_k}^2 + {b_k}^2 - 2b_kd_k)\big\}$
$= \pi\big\{\frac{(c_0 - a_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(c_k - a_k)^2 + (d_k - b_k)^2\big\} \geq 0.$ □

Corollaire 3.3. *Soient $f \in \mathscr{L}^2([0,2\pi])$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors*

$$\int_0^{2\pi} \big(f(x) - s_n f(x)\big)^2 dx \geq \int_0^{2\pi} \big(f(x) - s_{n+1} f(x)\big)^2 dx$$

Démonstration. Posons $N = n+1$. Ainsi :
$c_0 = a_0,\ c_1 = a_1,\ c_{N-1} = a_n,\ c_N = 0,\ d_1 = b_1,\ d_{N-1} = b_n,\ d_N = 0.$
Vu le théorème 3.4,
$\int_0^{2\pi} \big(f(x) - \frac{c_0}{2} - \sum_{k=1}^n c_k \cos kx + d_k \sin kx\big)^2 dx \geq \int_0^{2\pi} \big(f(x) - s_N f(x)\big)^2 dx$
i.e. $\int_0^{2\pi} \big(f(x) - s_n f(x)\big)^2 dx \geq \int_0^{2\pi} \big(f(x) - s_{n+1} f(x)\big)^2 dx.$ ☐

Théorème 3.4 (Parseval). *Soit $f \in \mathscr{L}^2([0,2\pi])$. Alors :*

$$\frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} {a_k}^2 + {b_k}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(x) dx$$

Démonstration. $\int_0^{2\pi} f(x) s_n f(x) dx$
$= \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} f(x)dx + \sum_{k=1}^n a_k \int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)dx + b_k \int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)dx$
$= \frac{a_0}{2}\pi a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \pi a_k + b_k \pi b_k = \pi\Big(\frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{k=1}^n {a_k}^2 + {b_k}^2\Big).$
D'après la prop. 3.3, on obtient d'une manière similaire que :
$\int_0^{2\pi} s_n f(x)^2 dx = \pi\Big(\frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{k=1}^n {a_k}^2 + {b_k}^2\Big).$
Ainsi $\int_0^{2\pi} \Big(f(x) - s_n f(x)\Big)^2 dx = \int_0^{2\pi} f^2(x)dx + \int_0^{2\pi} s_n f(x)^2 dx - 2\int_0^{2\pi} f(x) s_n f(x) dx$
$= \int_0^{2\pi} f^2(x)dx - \pi\Big(\frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{k=1}^n {a_k}^2 + {b_k}^2\Big).$
Nous voulons alors montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \Big(f(x) - s_n f(x)\Big)^2 dx = 0$$

Soit $\varepsilon > 0$.
Il existe $g \in C([0,2\pi])$ avec $\int_0^{2\pi} \big(f(x) - g(x)\big)^2 dx < \big(\frac{\varepsilon}{3}\big)^2$.
Il existe donc $M \in (0,\infty)$ avec $|g(x)| \leq M \ \ \forall x \in [0,2\pi]$.
Soit $\delta < \min\big\{2\pi, \big(\frac{\varepsilon}{6M}\big)^2\big\}$.
Posons $h(x) = g(x)\ \forall\, x \in\ [0, 2\pi - \delta)$ et sur $[2\pi - \delta, 2\pi]$ on pose
$h(x) = g(2\pi - \delta) + \big(x - (2\pi - \delta)\big)\Big(\frac{g(o) - g(2\pi-\delta)}{2\pi - (2\pi - \delta)}\Big).$
Ainsi $h \in C([0,2\pi])$, $h(0) = h(2\pi)$. Par le cours *Séries trigonométriques I* [**6**],
il existe $p(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^n c_k \cos kx + d_k \sin kx$ avec :

$$\sup_{x\in[0,2\pi]} |h(x) - p(x)| < \frac{\varepsilon}{3\sqrt{2\pi}}$$

Or par Minkowski nous savons que $\Big(\int_0^{2\pi} \big(f(x) - p(x)\big)^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}$

$\leq \Big(\int_0^{2\pi} \big(f(x) - g(x)\big)^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\int_0^{2\pi} \big(g(x) - h(x)\big)^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\int_0^{2\pi} \big(h(x) - p(x)\big)^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}.$

$< \quad \frac{\varepsilon}{3} \quad + \quad \Big(\int_{2\pi-\delta}^{2\pi} \big(g(x) - h(x)\big)^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \quad + \quad \frac{\varepsilon}{3\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}$

$\forall x \in [2\pi-\delta, 2\pi]$, $|g(x)-h(x)| \leq |g(x)|+|h(x)| \leq M+\max\{|h(2\pi-\delta)|, |h(2\pi)|\}$ $= M + \max\{|g(2\pi-\delta)|, |g(0)|\} \leq M + M = 2M$. Ainsi nous avons
$\int_{2\pi-\delta}^{2\pi} \big(g(x)-h(x)\big)^2 dx \leq \int_{2\pi-\delta}^{2\pi} 4M^2 dx = 4M^2\delta < 4M^2 \frac{\varepsilon^2}{36M^2} = \frac{\varepsilon^2}{9}$,
$\Longrightarrow \left(\int_{2\pi-\delta}^{2\pi} \big(g(x)-h(x)\big)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{3}$.
Ainsi $\int_0^{2\pi} \Big(f(x) - \frac{c_0}{2} - \sum_{k=1}^n c_k \cos kx + d_k \sin kx\Big)^{\frac{1}{2}} dx < \varepsilon^2$.
Par le théorème 3.4, $\int_0^{2\pi} \big(f(x) - s_n f(x)\big)^2 dx < \varepsilon^2$.
Par le corollaire 3.5, $\forall\, m > n$, $\int_0^{2\pi} \big(f(x)-s_n f(x)\big)^2 dx \geq \int_0^{2\pi} \big(f(x)-s_m f(x)\big)^2 dx$.
En résumé, $\int_0^{2\pi} \big(f(x) - s_k f(x)\big)^2 < \varepsilon^2$, ainsi,

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{2\pi} \Big(f(x) - s_k f(x)\Big)^2 dx = 0.$$

□

Remarque 3.5. (1) L'inégalité $\frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} {a_k}^2 + {b_k}^2 \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(x) dx$ à été obtenue par *F.W. Bessel* , avec des conditions restrictives sur f. (1826)
(2) *M.A Parseval* obtient l'égalité. (1806)
(3) *Hurwitz* démontre l'égalité pour f intégrable au sens de Riemann. (1903)
(4) La version ci-dessus est due à *P.Fatou*. (1906)

CHAPITRE 4

Inversion de la transformation de Fourier

THÉORÈME 4.1. *Soit* $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ *une suite de* $\mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}), u \in \mathscr{L}^1([0,\infty])$ *avec :*

(1) $\hat{k_n} = \check{\hat{k}}_n$ $\qquad$ *(où* $\check{k_n}(x) = k_n(-x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}$*)*

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{k_n}(t)dt = 1$

(3) $u \geq 0$

(4) u *décroissante sur* $[0,\infty]$

(5) $u(x) - u(a) = \int_a^x u'(t)dt \qquad 0 \leq a < x$

(6) $|\hat{k_n}(t)| \leq n\, u(nt), \ \ n \in \mathbb{N}; \ \ t \in [0,\infty)$

Soit $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}),\ x_0 \in \mathbb{R}$*. On suppose de plus que :*

$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_o^h |f(x_0+t)+f(x_0-t)-2f(x_0)|dt = 0$*. Alors :*

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)e^{itx_0}k_n(t)dt$$

REMARQUE 4.2. Si f est continue en x_0, l'hypothèse ci-dessus est vérifiée :
Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $0 < h < \delta$.
$\frac{1}{h}\int_0^h |f(x_0+t)+f(x_0-t)-2f(x_0)|dt \leq \frac{1}{h}\int_0^h \left(\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\right)dt = \varepsilon.$

DÉMONSTRATION. $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)e^{itx_0}k_n(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} k_n(t)\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-ity}dy\Big)e^{itx_0}dt =$
$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\Big(\int_{-\infty}^{\infty} k_n(t)e^{-it(y-x_0)}dt\Big)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\hat{k}_n(y-x_0)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y+x_0)\hat{k}_n(y)dy =$
$\int_{-\infty}^{\infty} f(y+x_0)\hat{k}_n(-y)dy = f * \hat{k}_n(x_0)$.
On veut donc montrer que $\lim_{n\to\infty} f*\hat{k}_n(x_0) - f(x_0) = 0$.
$f*\hat{k}_n(x_0) - 1\cdot f(x_0) = f*\hat{k}_n(x_0) - \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0)\hat{k}_n(-y)dy$
$= \int_{-\infty}^{\infty}\Big(f(y+x_0)-f(x_0)\Big)\hat{k}_n(-y)dy$. Or $\int_{-\infty}^{0}\Big(f(y+x_0)-f(x_0)\Big)\hat{k}_n(-y)dy$
$= \int_{\infty}^{0}\Big(f(x_0-t)-f(x_0)\Big)\hat{k}_n(t)(-1)dt$
$= \int_0^{\infty}\Big(f(x_0-t)-f(x_0)\Big)\hat{k}_n(t)dt.$
$\Longrightarrow f*\hat{k}_n(x_0) - f(x_0) = \int_0^{\infty}\Big(f(x_0+t)+f(x_0-t)-2f(x_0)\Big)\hat{k}_n(t)dt$
$\Longrightarrow |f*\hat{k}_n(x_0) - f(x_0)| \leq \int_0^{\infty}|f(x_0+t)+f(x_0-t)-2f(x_0)||\hat{k}_n(t)|dt$

Posons, $\forall\, t \in [0, \infty)$, $\varphi(t) = f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2f(x_0)$.
$\Longrightarrow |f * \hat{k}_n(x_0) - f(x_0)| \leq \int_0^\infty |\varphi(t)| \cdot |\hat{k}_n(t)| dt \leq \int_0^\infty |\varphi(t)| n u_n(t) dt$.
Montrons que

$$\lim_{n\to\infty} |\varphi(t)| n u_n(t) dt = 0$$

Soit $\varepsilon > 0$.
Par hypothèse, il existe $0 < h_0 \leq 1$ tel que $\forall\, h \leq h_0,\ h > 0$:
$\frac{1}{h}\int_0^h |\varphi(t)| dt < \frac{\varepsilon}{c}$, où $c = 1 + 6\varepsilon + 6\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx + 6u(0) + 6|f(x_0)| + 3\int_0^\infty u(t) dt$.
Soit $f_n(t) = 1_{\left[\frac{nh_0}{2}, \infty\right)}(t) u(t) \quad \forall\ t \in [0, \infty)$.
$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = 0$ (ponctuellement) et $f_n(t) \leq u(t)$. Par le théorème de convergence dominée de Lebesgue (thm 1.5 page 4), on a $\int_0^\infty f_n(t) dt = 0$.
Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\ n \geq n_0 \quad \int_0^\infty f_n(t) dt < \frac{\varepsilon h_0}{2}$,
i.e. $\int_{\frac{nh_0}{2}}^\infty u(t) dt < \frac{\varepsilon h_0}{2c}$. Or $\int_{\frac{nh_0}{2}}^{nh_0} u(t) dt = \frac{nh_0}{2} u(\xi)$ (où $\frac{nh_0}{2} \leq \xi \leq nh_0$)
$\geq \frac{nh_0}{2} u(nh_0)$ car u est décroissante.
$\Rightarrow nu(nh_0) = \frac{nh_0}{2} u(nh_0) \cdot \frac{2}{h_0} \leq \frac{2}{h_0}\int_{\frac{nh_0}{2}}^{nh_0} u(t) dt \leq \frac{2}{h_0}\int_{\frac{nh_0}{2}}^{\infty} u(t) dt < \frac{2}{h_0}\frac{\varepsilon h_0}{2c} = \frac{\varepsilon}{c}$.
Ainsi, $\forall\, n \geq n_0, \qquad nu(nh_0) < \frac{\varepsilon}{c}$.

Soit $n_1 \geq \{n_0, \frac{1}{h_0}\}$, il reste à voir que :
$\forall\ n \geq n_1, \quad \int_0^\infty |\varphi(t)| nu(nt) dt < \varepsilon$. $(n \geq \frac{1}{h_0} \ \Rightarrow\ \frac{1}{n} \leq h_0)$
Soit $n \geq n_1$. $\int_0^\infty |\varphi(t)| nu(nt) dt = I_1(n) + I_2(n) + I_3(n)$ où :
$I_1(n) = \int_0^{\frac{1}{n}} |\varphi(t)| nu(nt) dt,\ \ I_2(n) = \int_{\frac{1}{n}}^{h_0} |\varphi(t)| nu(nt) dt,\ \ I_3(n) = \int_{h_0}^\infty |\varphi(t)| nu(nt) dt$

(1) $\underline{\forall\ \ n \geq n_1, \text{ on a }\ I_1(n) < \frac{\varepsilon}{3}}$

$I_1(n) \leq \int_0^{\frac{1}{n}} |\varphi(t)| nu(0) dt$ $\big(u(nt) \leq u(0)$ car u décroissante$\big)$
$= u(0)\frac{1}{\frac{1}{n}}\int_0^{\frac{1}{n}} |\varphi(t)| dt$ $(\ \frac{1}{n} \leq h_0\ )$
$\leq u(0)\frac{\varepsilon}{c} < \frac{\varepsilon}{6} < \frac{\varepsilon}{3}$ $\big($ car $c > 6u(0)\big)$

(2) $\underline{\forall\ \ n \geq n_1, \text{ on a }\ I_2(n) < \frac{\varepsilon}{3}}$

$\forall\ x \in [\frac{1}{n}, h_0]$, posons $\phi(x) = \int_0^x |\varphi(t)| dt$. $\phi'(x)$ existe et vaut $|\varphi(x)|$.
$I_2(n) = \int_{\frac{1}{n}}^{h_0} \phi'(t) nu(nt) dt = \phi(t) nu(nt)\Big|_{\frac{1}{n}}^{h_0} - \int_{\frac{1}{n}}^{h_0} \phi(t) n^2 u'(nt) dt$
$= \phi(h_0) nu(nh_0) - \phi(\frac{1}{n}) nu(n\frac{1}{n}) - \int_{\frac{1}{n}}^{h_0} \phi(t) n^2 u'(nt) dt$
$\leq \frac{1}{h_0}\phi(h_0) nu(nh_0) + \frac{1}{\frac{1}{n}}\phi(\frac{1}{n}) u(1) - \int_{\frac{1}{n}}^{h_0} \phi(t) n^2 u'(nt) dt$
$< \quad \frac{\varepsilon}{c}\cdot\frac{\varepsilon}{c} \quad + \quad \frac{\varepsilon}{c}\cdot u(0) \quad - \int_{\frac{1}{n}}^{h_0} \phi(t) n^2 u'(nt) dt$.
Or $\quad -\int_{\frac{1}{n}}^{h_0} \phi(t) n^2 u'(nt) dt = \int_{\frac{1}{n}}^{h_0} \phi(t) n^2 (-u'(t)) dt$.
De plus, u décroissante $\Rightarrow u'(t) \leq 0 \quad ,\forall\ \ t \in [0, \infty)$,
et $\quad \frac{1}{n} \leq t \leq h_0 \Rightarrow \frac{1}{t}\phi(t) < \frac{\varepsilon}{c}$.

D'où $\quad -\int_{\frac{1}{n}}^{h_0} \phi(t)n^2u'(nt)dt \leq \int_{\frac{1}{n}}^{h_0} t\frac{\varepsilon}{c}n^2(-u'(nt))dt$

$$= -n^2\frac{\varepsilon}{c}\int_{\frac{1}{n}}^{h_0} tu'(nt)dt.$$

On a alors $\quad I_2(n) < \left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^2 + \frac{\varepsilon}{c}\cdot u(0) - n^2\frac{\varepsilon}{c}\int_{\frac{1}{n}}^{h_0} tu'(nt)dt.$

Par parties on a : $\int_{\frac{1}{n}}^{h_0} tu'(nt)dt = \frac{tu(nt)}{n}\Big|_{\frac{1}{n}}^{h_0} - \int_{\frac{1}{n}}^{h_0}\frac{u(nt)}{n}dt$

$= \frac{h_0u(nh_0)}{n} - \frac{1}{n^2}u(1) - \frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{h_0} u(nt)dt.$

D'où $\quad I_2(n) < \left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^2 + \frac{\varepsilon}{c}\cdot u(0) \underbrace{-n\cdot\frac{\varepsilon}{c}h_0u(nh_0)}_{(nu(nh_0))<\frac{\varepsilon}{c}} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{c}\cdot u(1)}_{u(1)<u(0)} + n\cdot\frac{\varepsilon}{c}\int_{\frac{1}{n}}^{h_0} u(nt)dt$

$< \left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^2 + 2\cdot\frac{\varepsilon}{c}\cdot u(0) + \left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^2 + n\cdot\frac{\varepsilon}{c}\int_{\frac{1}{n}}^{h_0} u(nt)dt.$

En effectuant le changement de variable $y = nt$, on obtient

$n\cdot\frac{\varepsilon}{c}\int_{\frac{1}{n}}^{h_0} u(nt)dt = \frac{\varepsilon}{c}\cdot n\int_1^{nh_0} u(y)\cdot\frac{1}{n}dy = \frac{\varepsilon}{c}\int_1^{nh_0} u(y)dy \leq \frac{\varepsilon}{c}\int_1^{\infty} u(y)dy.$

Puisque $c > 1$, $\quad \frac{\varepsilon^2}{c^2} < \frac{\varepsilon^2}{c}$, et ainsi :

$I_2(n) < 2\left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^2 + 2\frac{\varepsilon}{c}u(0) + \int_0^{\infty} u(y)dy \leq \frac{\varepsilon}{c}\Big(2\varepsilon + 2u(0) + \int_0^{\infty} u(y)dy\Big).$

Or $\quad c > 6\varepsilon + 6u(0) + 3\int_0^{\infty} u(y)dy$, donc $\quad c > 3\big(2\varepsilon + 2u(0) + \int_0^{\infty} u(y)dy\big).$

D'où finalement $I_2(n) < \frac{\varepsilon\left(2\varepsilon+2u(0)+\int_0^{\infty} u(y)dy\right)}{3\left(2\varepsilon+2u(0)+\int_0^{\infty} u(y)dy\right)} = \frac{\varepsilon}{3}.$

(3) $\underline{\forall \;\; n \geq n_1, \text{ on a } \;\; I_3(n) < \frac{\varepsilon}{3}}$

$I_3(n) = \int_{h_0}^{\infty} |\varphi(t)|nu(nt)dt.$

On a : $|\varphi(t)| \leq |f(x_0+t)| + |f(x_0-t)| + 2|f(x_0)|.$

$\Rightarrow I_3(n) \leq \int_{h_0}^{\infty} |f(x_0+t)|nu(nt)dt + \int_{h_0}^{\infty} |f(x_0-t)|nu(nt)dt + 2|f(x_0)|\int_{h_0}^{\infty} nu(nt)dt.$

Vu la décroissance de u, on a : $\quad \int_{h_0}^{\infty} f(x_0+t)nu(nt)dt$

$\leq \int_{h_0}^{\infty} f(x_0+t)nu(nh_0)dt = nu(nh_0)\int_{h_0}^{\infty} f(x_0+t)dt \leq nu(nh_0)\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|dy$

$< \frac{\varepsilon}{c}\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|dy.$

$\Rightarrow I_3(n) < 2\cdot\frac{\varepsilon}{c}\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|dy + 2|f(x_0)|\int_{h_0}^{\infty} nu(nt)dt.$

En effectuant le changement de variable $y = nt$, on obtient

$\int_{h_0}^{\infty} nu(nt)dt = \int_{nh_0}^{\infty} nu(y)\frac{1}{n}dy = \int_{nh_0}^{\infty} u(y)dy$

$\leq \int_{\frac{nh_0}{2}}^{\infty} u(y)dy < \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{h_0}{c} \leq \frac{\varepsilon}{2c} < \frac{\varepsilon}{c}$

$\Rightarrow I_3(n) < 2\cdot\frac{2\varepsilon}{c}\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|dy + 2|f(x_0)|\frac{\varepsilon}{c}.$

Or $\quad c > 6\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|dy + 6|f(x_0)|.$

D'où $\quad I_3(n) < \frac{\varepsilon}{3}.$

En résumé : $\quad \forall\, n \geq 1, \quad \int_0^{\infty} |\varphi(t)|nu(nt)dt < \varepsilon.$

$\square$

Corollaire 4.3. *Soit* $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
Supposons de plus que $\hat{f} \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$. *Alors*

$$\check{f} = \frac{1}{2\pi}\ \hat{\hat{f}}$$

Démonstration. Puisque $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on a que
$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^h |f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)|dt = 0 \quad , \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.
On pose $k_n(t) = \frac{e^{-\frac{|t|}{n}}}{2\pi} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.
$k_n(t)$ s'appelle le *noyau d'Abel*. Il vérifie les hypothèses du théorème 4.1. En effet :
$\hat{k}_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-|y|}{n}} e^{-iyt} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{0} e^{\frac{-|y|}{n}} e^{-iyt} dy + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{\frac{-|y|}{n}} e^{-iyt} dy$.
$\int_{-R}^{0} e^{y(\frac{1}{n} - it)} dy = \left[\frac{e^{y(\frac{1}{n}-it)}}{\frac{1}{n} - it} \right]_{-R}^{0} = \frac{1}{\frac{1}{n} - it} - \frac{e^{-R(\frac{1}{n}-it)}}{\frac{1}{n} - it} \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\frac{1}{n} - it}$.
De même, $\int_0^{\infty} e^{-\frac{y}{n} - yit} dy = \frac{1}{\frac{1}{n} + it}$.
Donc $2\pi \hat{k}_n(t) = \frac{\frac{2}{n}}{\frac{1}{n^2} + t^2} = \frac{2n}{1+n^2t^2} \implies \hat{k}_n(t) = \frac{n}{\pi(1+n^2t^2)}$. D'où $\check{\hat{k}}_n = \hat{k}_n$.
De plus, $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{k}_n(t) dt = \frac{n}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2t^2} dt = \frac{n}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{n(1+u^2)}$
$= \frac{1}{\pi}\Big(arctg(\infty) - arctg(-\infty) \Big) = \frac{1}{\pi}\Big(\frac{\pi}{2} - \big(-\frac{\pi}{2} \big) \Big) = 1$.
Ainsi, par le théorème 4.1 ,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e^{itx} k_n(t) dt$$

Puisque $\lim_{n\to\infty} \hat{f}(t) \frac{e^{-\frac{|t|}{n}}}{2\pi} e^{itx} = \frac{\hat{f}(t)}{2\pi} e^{itx}$, on a que $|\hat{f}(t) k_n(t) e^{itx_0}| \le \frac{\hat{f}(t)}{2\pi}$.

En utilisant alors le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a que $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e^{itx} k_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e^{itx} dt \ , \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$.
Ainsi, $\ f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e^{itx} dt \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\ ,\ \ i.e.$

$$\check{f} = \frac{1}{2\pi} \hat{\hat{f}}$$

□

CHAPITRE 5

Théorème de Plancherel

PROPOSITION 5.1. *Soit* $1 < p < \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$, $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ *et* $g \in \mathscr{L}^{p'}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$. *Alors*

$$f * g \in C_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$$

sans preuve.

THÉORÈME 5.2. *Soit* $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$. *Supposons* $f \in \mathscr{L}^\infty_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, $\hat{f} \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *et* $\hat{f}(x) \geq 0 \;\; \forall \;\; x \in \mathbb{R}$. *Alors* $\hat{f} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$.

(i.e. la transformée de Fourier est intégrable)

sans preuve.

REMARQUE 5.3. (1) Soit $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \cap \mathscr{L}^\infty_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$. Alors $f \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$.

(2) Soit $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ avec $\hat{f} \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$. Alors $\hat{f} \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$.

THÉORÈME 5.4. *Soit* $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \cap \mathscr{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$. *Alors*

$$\hat{f} \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \quad et \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(x)|^2 dx$$

DÉMONSTRATION. Posons $\tilde{f}(x) = \overline{f(x)}$.
$f * \tilde{f} = g \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap \mathscr{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$. $\big($ par le thm 5.1 et car f , $\tilde{f} \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})\big)$
$\hat{g} = \hat{f} \cdot \hat{\tilde{f}} = \hat{f} \cdot \bar{\hat{f}} = |\hat{f}|^2 \implies \hat{g} \geq 0$. Vu le théorème 5.2., $\hat{g} \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ et g est continue.
Par le théorème 4.3., $\check{g} = \frac{1}{2\pi} \hat{\hat{g}}$.
$\check{g}(0) = g(0) = f * \tilde{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \tilde{f}(-x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$
$= \frac{1}{2\pi} \hat{\hat{g}}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(x)|^2 dx.$ □

LEMME 5.5.

$$\big\{ \; \varphi * \psi \;\; | \;\; \varphi, \; \psi \; \in \; \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \cap \mathscr{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \; \big\} \textit{ est dense dans } \mathscr{L}^2_{\mathbb{C}}.$$

DÉMONSTRATION. $\varphi, \psi \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}} \cap \mathscr{L}^2_{\mathbb{C}}$, $\varphi * \psi \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}} \cap C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. (par la prop. 5.1.) Ainsi, $\varphi * \psi \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{C}}$.

(1) Soit $\varphi \in C_{00}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
Posons $\psi_n(x) = \frac{n}{2} \cdot 1_{[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]}(x)$, $\psi_n \in \mathscr{L}^1 \cap \mathscr{L}^2$, $\psi_n \geq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x) dx = 1$.
Montrons que $N_2(\varphi - \varphi * \psi_n) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. $\left(N_2(f) = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \right)$

Pour cela, montrons que : $N_2(\varphi - \varphi * \psi_n) \leq \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x) N_2(\varphi - \varphi_{-x}) dx$

(où $\varphi_{-x}(y) = \varphi(y-x) \;\; \forall y \in \mathbb{R}$)

Soit $g \in C_{00}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ avec $N_2(g) \leq 1$.
$\int_{\mathbb{R}} g(x)\big(\varphi(x) - \varphi * \psi_n(x)\big)dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)\big(\int_{\mathbb{R}}(\varphi(x) - \varphi(x-y))\psi_n(y)dy\big)dx$
$= \int_{\mathbb{R}} \psi_n(x)\big(\int_{\mathbb{R}} g(x)(\varphi(x) - \varphi(x-y))dx\big)dy$.
Ainsi $|\int_{\mathbb{R}} g(x)\big(\varphi(x) - \varphi * \psi_n(x)\big)dx| \leq \int_{\mathbb{R}} \psi_n(y) N_2(g) N_2(\varphi - \varphi_{-y})dy$
$\leq \int_{\mathbb{R}} \psi_n(y) N_2(\varphi - \varphi_{-y})dy$.

$$\sup_{\substack{g \in C_{00}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \\ N_2(g) \leq 1}} \Big| \int_{\mathbb{R}} g(x)\big(\varphi(x) - \varphi * \psi_n(x)\big)dx \Big| \leq \int_{\mathbb{R}} \psi_n(y) N_2(\varphi - \varphi_{-y})dy$$

i.e. $N_2(\varphi - \varphi * \psi_n) \leq \int_{\mathbb{R}} \psi_n(y) N_2(\varphi - \varphi_{-y})dy$.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout y avec $|y| \leq \delta$, on a $N_2(\varphi - \varphi_{-y}) < \varepsilon$. Soit alors $n \geq \frac{1}{\delta}$, de sorte que

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_n(y) N_2(\varphi - \varphi_{-y})dy < \varepsilon$$

(2) Soit $f \in \mathscr{L}^2$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $\varphi \in C_{00}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ avec $N_2(f - \varphi) < \frac{\varepsilon}{2}$.
Par (1), il existe $n \in \mathbb{N}$ avec $N_2(\varphi - \varphi * \psi_n) < \frac{\varepsilon}{2}$.
$N_2(f - \varphi * \psi_n) < \varepsilon$. Or $\varphi \in \mathscr{L}^1 \cap \mathscr{L}^2$ et $\psi_n \in \mathscr{L}^1 \cap \mathscr{L}^2$. □

PROPOSITION 5.6.

$\big\{ f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \;\big|\; \hat{f} \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \big\}$ *est dense dans* $\mathscr{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$.

sans preuve.

THÉORÈME 5.7. *(Plancherel)*
Il existe une unique transformation linéaire continue de $L^2 \longrightarrow L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, *notée* $\mathscr{F}$, *avec* $\mathscr{F}(f) = \hat{f}$ *pour tout* $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \cap L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$.
$\mathscr{F}$ *s'appelle la transformation de Fourier, elle vérifie les propriétés suivantes :*

(1) *Pour tout* $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, $\|\mathscr{F}(f)\|_2 = \sqrt{2\pi} \cdot \|f\|_2$
(2) *Pour tout* $f, g \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, *on a* $< \mathscr{F}(f), \mathscr{F}(g) >_{L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}), L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})}$
donné par $2\pi \cdot < f, g >_{L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}), L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})}$.
$\big($*où* $< f, g >_{L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}), L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} r(x)\overline{(s(x))}dx$ *avec* $r \in f$, $s \in g\big)$
(3) $\mathscr{F}$ *est une bijection linéaire de* $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$.
Pour tout $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ *avec* $\hat{f} \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ *alors* $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ *et*

$$\mathscr{F}^{-1}(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{iyx} dy$$

DÉMONSTRATION. Soit $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$. D'après la proposition 5.6., il existe $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de $L^1 \cap L^2$ avec $\|f_n - f\|_2 \longrightarrow 0$. Ainsi vu le théorème 5.4. $(\hat{f}_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$. Montrons que $(\hat{f}_n)_{n=1}^{\infty}$ est de Cauchy. (L^2 complet)
Soient $m, n \in \mathbb{N}$, $\|\hat{f}_m - \hat{f}_n\|_2 = \|\widehat{(f_m - f_n)}\|_2 = \sqrt{2\pi}\, \underbrace{\|f_m - f_n\|_2}_{\to 0}$. (thm 5.4)

Donc $(\hat{f}_n)_{n=1}^{\infty}$ est de Cauchy, donc convergente.
Il existe donc $g \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ avec $\|\hat{f}_n - g\|_2 \longrightarrow 0$.

Soit $(f'_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de $L^1 \cap L^2$ avec $\|f'_n - f\|_2 \longrightarrow 0$.
Il existe $g' \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ avec $\|\hat{f}'_n - g'\|_2 \longrightarrow 0$.
(On veut montrer que g ne dépend pas du choix de f_n)

Montrons que $g = g'$:
$\|\hat{f}_n - \hat{f}'_n\|_2 = \sqrt{2\pi} \cdot \|f_n - f'_n\|_2 \leq \sqrt{2\pi} \cdot \big(\|f_n - f\|_2 + \|f - f'_n\|_2\big) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$
On pose $g = \mathscr{F}(f) \Longrightarrow \mathscr{F} \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}), \quad \mathscr{F}$ linéaire.

(1) Il existe $f_n \in L^1 \cap L^2$ avec $\|f_n - f\|_2 \longrightarrow 0$.
On a : $\|\hat{f}_n - \mathscr{F}(f)\|_2 \longrightarrow 0$ et $\hat{f}_n = \mathscr{F}(f_n)$. (car $f_n \in L^1 \cap L^2$)
$\|\mathscr{F}(f)\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|\mathscr{F}(f_n)\|_2 = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2\pi} \cdot \|f_n\|_2 = \sqrt{2\pi} \cdot \|f\|_2$.

(2) On va montrer que $\mathscr{F}$ est surjective.
Soit $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$. Il existe $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de $L^1_{\mathbb{C}} \cap L^2_{\mathbb{C}}$ avec $\|f_n - f\|_2 \longrightarrow 0$.
On a que $(\check{\hat{f}}_n)_{n=1}^{\infty}$ est de Cauchy dans $L^2_{\mathbb{C}}$. (car $(\hat{f}_n)$ est de Cauchy)
$\|\frac{1}{2\pi} \cdot \check{\hat{\hat{f}}}_n - \mathscr{G}(f)\|_2 \longrightarrow 0$ où $\mathscr{G}$ est une application linéaire continue de $L^2_{\mathbb{C}}$ dans $L^2_{\mathbb{C}}$.
Soit $f \in L^1_{\mathbb{C}}$ avec $\hat{f} \in L^1_{\mathbb{C}}$. Vu la prop. 5.6. on sait que $f \in L^2_{\mathbb{C}}$.
$\mathscr{G}\big(\mathscr{F}(f)\big) = \mathscr{G}(\hat{f}) = \frac{1}{2\pi} \cdot \check{\hat{\hat{f}}} = f$.
Vu la prop. 5.6. $\mathscr{G}\big(\mathscr{F}(f)\big) = f \quad \forall\, f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$.
$\Longrightarrow \mathscr{G} \circ \mathscr{F} = id_{\mathbb{C}}$.

$\square$

Bibliographie

[1] Sogge, C.. *Fourier Integrals in Classical Analysis*. Cambridge University Press, 1993

[2] Willem Michel. *Analyse Harmonique Réelle*. Hermann, 1995

[3] Hewitt & Stromberg. *Real and Abstract Analysis*. Springer,

[4] Derighetti A.. *Analyse IV.* , Cours, 2002-2003

[5] Derighetti A.. *Analyse Harmonique.* , Cours, 2003-2004

[6] Derighetti A.. *Séries trigonométriques I et II.* , Cours, 2003-2004

[7] Troyanov M.. *Mesure, intégration et espaces fonctionnels*. Cours, 2003-2004

Index