Projet de Semestre

été 2005

Algèbres de Clifford

Margherita Gonzato

Professeur Responsable:

prof. Manuel Ojanguren

Table des matières

Résumé

Dans les premiers chapitres on va définir les notions de base d'algèbres libres, algèbres graduées et algèbres tensorielles. On va définir les algèbres de Clifford sur des $A-$modules (avec A un anneau) associées à des formes quadratiques.
Les algèbres de Clifford sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont étudiées en détail.
La partie finale du travail est l'étude, en petites dimensions, des groupes Spin.

CHAPITRE 1

Algèbres universelles

1. Algèbres libres et propriété universelle

Soit E une algèbre sur un anneau A engendrée par un ensemble de générateurs $(x_i)_{i\in I}$. Soit $\sigma = (i_1, i_2, ..., i_h)$ une suite d'éléments de I et $y_\sigma = x_{i_1}...x_{i_h}$ (h est la longueur de σ).
On définit la composition de deux suites finies $\sigma = (i_1, ..., i_h)$ et $\sigma' = (j_1, ...j_k)$ par $\sigma\sigma' = (i_1, ..., i_h, j_1, ..., j_k)$.
Pour σ_0 (suite sans termes) on définit $\sigma_0\sigma = \sigma\sigma_0 = \sigma$, σ_0 est donc l'élément unité pour cette composition (et $y_{\sigma_0} = 1$). La composition est évidemment associative : $(\sigma\sigma')\sigma'' = \sigma(\sigma'\sigma'')$ et on a $y_{\sigma\sigma'} = y_\sigma y_{\sigma'}$.

Théorème 1.1. *Chaque élément de E est une combinaison linéaire de (y_σ) avec σ qui parcourt toutes les suites finies d'éléments de I.*

Démonstration. Soit E_1 le module engendré par tous les y_σ. On veut montrer que $E = E_1$. Pour faire ceci, on utilise le lemme suivant :

Lemme 1.2. *E_1 est fermé pour la multiplication.*

Démonstration. Soit $z = \sum_\sigma a_\sigma y_\sigma$ et $z' = \sum_{\sigma'} b_{\sigma'} y_{\sigma'}$ deux éléments de E_1 avec $a_\sigma = 0$ et $b_{\sigma'} = 0$ sauf pour un nombre fini de σ, σ'.
Alors on a : $zz' = \sum_{\sigma,\sigma'} a_\sigma b_{\sigma'} y_{\sigma\sigma'}$, et $y_{\sigma\sigma'} \in E_1$.
La somme étant finie, on a bien $zz' \in E_1$. □

Vu le lemme on a que E_1 est une sous-algèbre de E et si $\sigma = (i), y_\sigma = x_i$ et $y_{\sigma_0} = 1$. Alors E_1 contient l'ensemble de générateurs (x_i) et 1, donc E_1 contient E tout entier. On obtient $E = E_1$. □

Définition 1.3. Si les y_σ sont linéairement indépendants sur A, alors E est appelée une *algèbre libre* et $(x_i)_{i\in I}$ est le système libre de générateurs de E.

Théorème 1.4. *Une algèbre libre F sur A avec un système de générateurs $(x_i)_{i\in I}$ est universelle, c'est à dire que pour toute autre algèbre E sur A engendrée par $(\xi_i)_{i\in I}$ (même I) on a un unique homomorphisme (surjectif)*

$$\varphi : F \longrightarrow E \quad t.q.\ \varphi(x_i) = \xi_i \quad \forall i$$

DÉMONSTRATION. Par définition, on a que l'ensemble $\{y_\sigma = x_{i_1}..x_{i_h}\}$ forme une base de F vu comme module sur A.
Posons $\varphi : F \longrightarrow E$, avec $\varphi(y_\sigma) = \xi_{i_1}...\xi_{i_h}$ $\forall \sigma = (i_1, ..., i_h)$.
De plus si $\sigma = (i_1, ..., i_h)$ et $\sigma' = (j_1, ..., j_k)$ sont des suites finies de I, alors on a :

$$\varphi(y_\sigma y_{\sigma'}) = \varphi(y_{\sigma\sigma'}) = \xi_{i_1}...\xi_{i_h}\xi_{j_1}...\xi j_k = \varphi(y_\sigma)\varphi(y_{\sigma'})$$

On a donc que φ est bien un homomorphisme.
En particulier, si $\sigma = (i)$, respectivement $\sigma = \sigma_0$, on a $\varphi(x_i) = \xi_o$ et $\varphi(1) = 1$, ce qui prouve le théorème.

L'existence et l'unicité de cette algèbre est laissée à la sympathie du lecteur. □

2. Algèbres graduées

DÉFINITION 1.5. Soit $(\Gamma, +)$ un groupe additif. Une Γ-*algèbre graduée* est une algèbre E donné par une somme directe :

$$E = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} E_\gamma$$

où E_γ est un sous-module de E tel que $E_\gamma \cdot E_{\gamma'} \subset E_{\gamma+\gamma'}$, c'est à dire si $x \in E_\gamma$ et $x' \in E_{\gamma'}$, alors on a $xx' \in E_{\gamma+\gamma'}$

EXEMPLE 1.6.

I : Soit A un anneau et soit F l'algèbre libre sur A engendrée par le système de générateurs $(x_i)_{i \in I}$, et notons $y_\sigma = x_{i_1} \cdots x_{i_h}$ (où $\sigma = (i_1, ..., i_h)$).
On peut classifier les éléments y_σ par la longueur de σ. Soit F_h le module engendré par y_σ, avec σ de longueur h. Alors F est la somme directe de $F_0, F_1, \ldots$, comme A-module :

$$F = F_0 \oplus \cdots \oplus F_h \oplus \cdots$$

et on a $F_h \cdot F_{h'} \subset F_{h+h'}$, car la longueur de la composition $\sigma\sigma'$ est égal à la somme de longueur de σ plus celle de σ'.

II : $\mathbb{R}[X, Y]$ est une algèbre graduée car :

$$\mathbb{R}[X, Y] = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \{\text{ polynômes homogène de degré } n\}$$

DÉFINITION 1.7. Soient E, E' des Γ-algèbres graduées.
$E = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} E_\gamma$, $E' = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} E'_\gamma$. Un *homomorphisme de* $\Gamma-$*algèbres graduées* $\varphi : E \longrightarrow E'$ est un homomorphisme d'algèbres tel que $\varphi(E_\gamma) = E'_\gamma$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.

COROLLAIRE 1.8.

I : *Si* $\Gamma = \mathbb{Z}$ *alors on appelle la* $\Gamma-$*algèbre graduée une algèbre* $\mathbb{Z}-$*graduée.*

II : *Si* Γ *est le groupe à deux éléments* 0 *et* 1 *alors on écrit* $E = E_+ \oplus E_-$ *à la place de* $E = E_0 \oplus E_1$ *et on appelle* E *algèbre semi-graduée.*

REMARQUE 1.9. Une $\Gamma-$algèbre n'est pas une forme particulière d'algèbre. En fait, toute algèbre peut-être considérée comme $\Gamma-$algèbre graduée avec degré 0 pour chaque élément.

DÉFINITION 1.10. Soit E une $\Gamma-$algèbre graduée et $\gamma \in \Gamma$. Un élément e de E est dit *homogène de degré* γ si $e \in E_\gamma$.

DÉFINITION 1.11. Soit A una anneau. Un sous-$A-$ module M d'une $\Gamma-$*algèbre graduée* $E = \bigoplus E_\gamma$ est dit *homogène* si $M = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma}(M \cap E_\gamma)$

THÉORÈME 1.12. *Si un sous-module* M *ou un idéal* I *d'une algèbre* $\Gamma-$*graduée* E *est engendré par des éléments homogènes alors il est homogène.*

DÉMONSTRATION. Soit M un sous module de E engendré par un ensemble S d'éléments homogènes.
Soit $M' = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma}(M \cap E_\gamma)$.
On a donc $S \subset M' \subset M$.
Montrons que M' est un sous-module de E.
Si $x = \oplus x_\gamma$ et $x' = \oplus x'_\gamma \in M'$, alors $x + x' = \oplus(x_\gamma + x'_\gamma) \in M'$ car $x_\gamma + x'_\gamma \in M$.
De la même manière on a $\alpha x \in M'$ pour tout $\alpha \in A$.
Vu que M' est un sous-module qui contient l'ensemble des générateurs S, alors $M \subset M'$ et donc $M = M'$, ce qui prouve que M est homogène.
D'une manière semblable on démontre pour le cas d'un idéal.(En fait les sous-$E-$modules de E sont les idéaux de E dans le cas commutatif). □

REMARQUE 1.13. Soit $E = \bigoplus_\gamma E_\gamma$ une algèbre graduée et I un idéal homogène de E. Alors on a : $I = \bigoplus_\gamma I_\gamma$, avec $I_\gamma = I \cap E_\gamma$.
L'algèbre quotient E/I a aussi une structure d'algèbre graduée, car :

$$E/I = \bigoplus_\gamma E_\gamma/I_\gamma \text{ et } (E_\gamma/I_\gamma)\cdot(E_{\gamma'}/I_{\gamma'}) \subset (E_{\gamma+\gamma'}/I_{\gamma+\gamma'})$$

L'homomorphisme $\psi : E \longrightarrow E/I$ n'est pas seulement un homomorphisme d'algèbre mais aussi de $\Gamma-$algèbres graduées.

3. Algèbres tensorielles

DÉFINITION 1.14. Soit M un $A-$module. T est une *algèbre tensorielle sur M* si elle satisfait aux conditions suivantes :

(1) $T = A \oplus M \oplus M \otimes M \oplus M \otimes M \otimes M \oplus ...$

(2) Propriété universelle : pour toute application linéaire $f : M \longrightarrow E$ dans une algèbre E sur A il existe un unique homomorphisme $\hat{f} : T \longrightarrow E$ qui étend f. On peut représenter ceci par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\forall f"] \arrow[d, "i"'] & E \\ T \arrow[ur, "\exists! \hat{f}"'] & \end{tikzcd}$$

THÉORÈME 1.15. *Il existe une (et une seule) algèbre tensorielle sur M.*

DÉMONSTRATION. Soit T, T' deux algèbres sur M satisfaisant (1) et (2). Alors $M \subset T$ et $M \subset T'$. Il existe un homomorphisme $h : T \longrightarrow T'$ qui étend l'inclusion $i : M \hookrightarrow T$ et un homomorphisme $h' : T' \longrightarrow T$ qui étend l'inclusion $i' : M \hookrightarrow T'$. On a donc :

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "i"'] \arrow[dr, "i'"] & \\ T \arrow[rr, shift left, "h"] & & T' \arrow[ll, shift left, "h'"] \end{tikzcd}$$

avec $h \circ i = i'$ et $h' \circ i' = i$. Alors $h' \circ h : T \longrightarrow T$ est un homomorphisme qui coïncide avec l'identité, car :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & T \\ T \arrow[ur, shift left, "h' \circ h"] \arrow[ur, shift right, "id_T"'] & \end{tikzcd}$$

on a $(h' \circ h) \circ i = h' \circ i' = i$ et par unicité on a : $h' \circ h = id_T$
De façon similaire on voit que $h \circ h' = id_{T'}$. Ce qui prouve que T et T' sont des algèbres isomorphes. □

Notons cette algèbre $T := T(M)$. On a :

$$T(M) = \underbrace{A}_{T_0} \oplus \underbrace{M}_{T_1} \oplus \underbrace{M \otimes M}_{T_2} \oplus ... \oplus \underbrace{M \otimes .. \otimes M}_{T_h} \oplus ...$$

$T(M)$ a bien une structure graduée, avec :

$$\begin{aligned} T_h &= 0 \; \forall \, h < 0 \\ T_0 &= A \cdot 1 \\ T_1 &= M \end{aligned}$$

(T_h est engendré par le produit de h éléments de M)

4. Foncteurialité de T et de L

Soit M un $A-$ module et $T(M)$ l'algèbre tensorielle associée à M. On a alors un foncteur :

$$T : \underbrace{\text{Mod}}_{\text{catégorie des A-modules}} \longrightarrow \underbrace{\text{Alg.}\mathbb{N}\text{−grad.}}_{\text{catégorie des A-algèbre }\mathbb{N}\text{−graduées}}$$

$$M \xrightarrow{\varphi} N \quad \longrightarrow \quad T(M) \xrightarrow{T(\varphi)} T(N)$$

L'existence de $T(\varphi)$ est donné par la propriété universelle :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & N \arrow[r] & T(N) \\ T(M) \arrow[urr, "\exists ! T(\varphi)"'] & & \end{tikzcd}$$

Pour la même raison on a bien : $T(\varphi\psi) = T(\varphi)T(\psi)$ et $T(id_M) = id_{T(M)}$.

Définissons maintenant un autre foncteur :

$$L : \text{Alg.}\mathbb{N}\text{−grad.} \longrightarrow \text{Mod}$$

Soit E une $A-$algèbre $\mathbb{N}-$graduée $\Rightarrow E = \oplus_{n=0}^{\infty} E_n$, alors :

$$L : E \longmapsto L(E) = E_1$$

De plus on a bien $L(T(M)) = M \Rightarrow\ L \circ T \cong id_{AMod}$
Avec ces définitions on a :
$Hom_{AMod}(M, L(E)) \cong Hom_{AAlg\mathbb{N}-grad.}(T(M), E)$
en fait : si $\varphi \in Hom_{AMod}(M, E_1)$ et $\psi \in Hom_{AAlg\mathbb{N}-grad.}(T(M), E)$ alors on a :

$$\begin{cases} \varphi \longmapsto T(\varphi) : T(M) \longrightarrow E \\ \psi \longmapsto \psi|_{M^{\otimes 1}} = L(\psi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi \longmapsto T(\varphi) \\ \psi \longmapsto L(\psi) \end{cases}$$

sont des bijections l'une inverse de l'autre.

CHAPITRE 2

Algèbre de Clifford

Une algèbre de Clifford est une algèbre associée à une forme quadratique $Q(x)$, qui satisfait : $x^2 = Q(x) \cdot 1$ (*)

Définition 2.1. Soit M un $A-$module et Q une forme quadratique sur M. Soit $T(M)$ l'algèbre tensorielle sur M, notons $\otimes$ la multiplication dans $T(M)$.
Soit I l'idéal de $T(M)$ engendré par les éléments de la forme suivante :
$t(x) = x \otimes x - Q(x) \cdot 1$, $x \in M$, $1 =$él. unité de $T(M)$
Chaque élément de I peut donc être écrit comme :
$\sum \lambda_i t(x_i) \mu_i$ où λ_i et $\mu_i \in T(M)$, $x_i \in M$.
Le quotient $C = T(M)/I = T(M)/ < x \otimes x - Q(x) \cdot 1 >$ est appelé *algèbre de Clifford sur M associé à Q*. Notons $C = \mathrm{Cl}(M, Q)$.

Si π est la projection canonique : $\pi : T(M) \longrightarrow T(M)/I = C$ alors $\pi(M)$ est un sous-module de C qui engendre C. On a donc que $(\pi(x))^2 = Q(x) \cdot 1 \; \forall x \in M$.

On a le théorème suivant :

Théorème 2.2. *Soit f une application linéaire $f : M \longrightarrow E$ dans une algèbre E t.q. $(f(x))^2 = Q(x) \cdot 1, \forall x \in M$.*
Alors $\exists!$ homomorphisme

$$\varphi : C \longrightarrow E \text{ tel que } f(x) = \varphi(\pi(x)) \text{ pout tout } x \in M$$

Ce qui est représenté par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d] & E \\
T(M) \arrow[ur, "\exists!\rho"] \arrow[d, "\pi"'] & \\
C = T(M)/I \arrow[uur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

DÉMONSTRATION. Par la définition d'algèbre tensorielle on a que $\exists!$ application : $\rho : T(M) \longrightarrow E$ qui étend f.
Si $x \in M$, on a :

$$\begin{aligned} \rho(x \otimes x - Q(x) \cdot 1) &= \rho(x \otimes x) - \rho(Q(x) \cdot 1) \\ &= \rho(x)\rho(x) - Q(x)\rho(1) \\ &= f(x)^2 - Q(x) \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

On a donc que $\rho(I) = 0$, ce qui montre que $I \subset \ker \rho$.
On a alors qu'il $\exists!$ homomorphisme $\varphi : C \longrightarrow E$ t.q. $\varphi \circ \pi = \rho$.
La contraction f de ρ dans M satisfait la condition voulue car :
$\varphi(\pi(x)) = \rho(x) = f(x)$ pour tout $x \in M$.

Si on pose $Q(x) = \hat{Q}(\pi(x))$, avec $\hat{Q}$ forme quadratique de $\pi(M)$ dans A, alors pour tout $y \in \pi(M)$ on a $y^2 = \hat{Q}(y) \cdot 1$.

□

1. Structure graduée de l'algèbre de Clifford

On a vu que l'algèbre tensorielle $T(M)$ est graduée. Elle est en fait une algèbre semi-graduée. On décompose $T(M) = T_+ \oplus T_-$, avec T_+ conténant les éléments de degré pair et T_- conténant les éléments de degré impair. L'élément $x \otimes x$ est de degré 2 et l'élément $Q(x) \cdot 1$ est de degré 0. Alors l'élement $x \otimes x - Q(x) \cdot 1$ est homogène dans la semi-graduation de $T(M)$ car composé d'éléments de degré pair.(Plus précisement $x \otimes x - Q(x) \cdot 1 \in T_+$).
Par le théorème 1.12 on a que $I =< x \otimes x - Q(x) \cdot 1 >$ est homogène dans la semi-graduation de $T(M)$, ce qui prouve que $\mathrm{Cl}(M, Q) = T(M)/I$ est une algèbre semi-graduée.
Posons $\mathrm{Cl}(M, Q) = C_+ \oplus C_-$ avec $C_+ = \bigoplus_{i \text{ paire}} \pi(T_i)$ et $C_- = \bigoplus_{j \text{ impaire}} \pi(T_j)$.
Encore plus explicitement on a :

$$T = \underbrace{(A \oplus M \otimes M \oplus M \otimes M \otimes M \otimes M \oplus ...)}_{T_+} \oplus \underbrace{(M \oplus M \otimes M \otimes M \oplus ...)}_{T_-}$$

et $\mathrm{Cl}(M, Q)$ est donnée par la remarque 1.13.
On a que C_+ est une sous-algèbre de $\mathrm{Cl}(M, Q)$ engendrée par les produits d'un nombre pair d'éléments de M et C_- est une sous-algèbre de $\mathrm{Cl}(M, Q)$ engendrée par les produits d'un nombre impair d'éléments de M.

Vu que $\pi(x)^2 = Q(x) \cdot 1$, on a alors que :

$$\begin{aligned} \pi(x)\pi(y) + \pi(y)\pi(x) &= \pi(x)^2 + \pi(x)\pi(y) + \pi(y)\pi(x) + \pi(y)^2 - \pi(x)^2 - \pi(y)^2 \\ &= (\pi(x) + \pi(y))^2 - \pi(x)^2 - \pi(y)^2 \\ &= Q(x + y) \cdot 1 - Q(x) \cdot 1 - Q(y) \cdot 1 \\ &= (Q(x + 1) - Q(x) - Q(y)) \cdot 1 \\ &= \beta(x, y) \cdot 1 \end{aligned}$$

Avec β la forme bilinéaire associée à Q. En particulier, si x, y sont orthogonaux, on a :$\pi(x)\pi(y) + \pi(y)\pi(x) = 0 \Rightarrow \pi(x)\pi(y) = -\pi(y)\pi(x)$.
Si $x = \prod_{i=1}^{n} \pi(v_i)$ et $y = \prod_{s=1}^{m} \pi(w_s)$ sont respectivement éléments de $C^{(\alpha)}(V, Q)$

et $C^{(\beta)}(V,Q)$, avec $\alpha = n \mod 2$ et $\beta = m \mod 2$, alors si v_i est orthogonal à w_s pour toute paire (i,s) alors on a $xy = (-1)^{\alpha\beta}yx$

EXEMPLE 2.3. Soit K un corps et V un $K-$espace vectoriel.
Si $V = K$ et Q la forme quadratique définie par $Q(x) = dx^2$, avec $d \in K$ et $d \neq 0$, alors $T(V) = K[x]$ et $I = (x^2 - d)K[x]$.
On obtient donc $\mathrm{Cl}(V,Q) = K[x]/(x^2 - d)$.
Cette algèbre est bien semi-graduée si on écrit chaque élément de $Cl(V,Q)$ de la forme $a + bx$, où X est de degré 1 et a, b de degré 0.
En particulier, si $K = \mathbb{R}$ et $d = -1$, alors on a :

$$\mathrm{Cl}(\mathbb{R}, -x^2) = \mathbb{R}[x]/(x^2 + 1) \cong \mathbb{C}$$

Dans ce cas on peut voir la structure semi-graduée avec $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}, -x^2) = \mathbb{R} + i\mathbb{R}$.
Si $K = \mathbb{R}$ et $d = 1$, alors on a :

$$\mathrm{Cl}(\mathbb{R}, x^2) = \mathbb{R}[x]/(x^2 - 1) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$$

Si on considère e_1 base de $\mathbb{R}$ on a en fait l' isomorphisme :

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathrm{Cl}(\mathbb{R}, x^2) & \longrightarrow & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \\ 1 & \longmapsto & (1,1) \\ e_1 & \longmapsto & (1,-1) \end{array}$$

REMARQUE 2.4. L'algèbre de Clifford dépend "foncteuriellement" de la paire (V,Q). Plus précisement, si $f : V \longrightarrow V'$ est un homomorphisme de $K-$espaces vectoriels, avec $Q'(f(v)) = Q(v)$ (où Q et Q' sont les formes de V et V'), alors f induit un homomorphisme d'algèbres :

$$\mathrm{Cl}(f) : \mathrm{Cl}(V,Q) \longrightarrow Cl(V', Q')$$

et on a les identités : $\mathrm{Cl}(g \cdot f) = \mathrm{Cl}(g) \cdot Cl(f)$, et $\mathrm{Cl}(Id_V) = Id_{\mathrm{Cl}(V)}$.

DÉFINITION 2.5. Si A et B sont des $K-$algèbres semi-gradueés, alors on définit le *produit tensoriel gradué* $A\hat{\otimes}B$ comme l'algèbre du $K-$espace vectoriel $A \otimes_K B$ avec le produit défini par :

$$(x \otimes y)(z \otimes t) = (-1)^{\alpha\beta} xz \otimes yt$$

où $y \in B^\beta$ (homogène dans B et de degré β) et $z \in A^\alpha$ (homogène dans A et de degré α).
En supposant A et B finies, on a de plus que $\dim_K(A\hat{\otimes}B) = \dim_K A \cdot \dim_K B$

2. Algèbres extérieures

DÉFINITION 2.6. Si la forme quadratique est nulle, $Q = 0$, l'algèbre de Clifford $\mathrm{Cl}(M, Q)$ associée à Q est appelée *algèbre extérieure* sur M.

REMARQUE 2.7. Avec $Q = 0$ on a $\pi(x)\pi(x) = 0$ et $\pi(x)\pi(y) = -\pi(y)\pi(x)$.
L'élément générateur de I est réduit à $x \otimes x \in T_2$.
I est donc homogène non seulement dans la semi graduation de T mais aussi dans la structure graduée de T. On a alors que l'algèbre extérieure $E = T/I$ a une structure d'algèbre graduée.

THÉORÈME 2.8. *Soit E une algèbre extérieure.*
L'homomorphisme $\pi : T \longrightarrow E = T/I$ est en fait un isomorphisme sur M.On peut donc injecter M dans E et identifier M avec $\pi(M)$.

DÉMONSTRATION. Tout élément de I est une combinaison linéaire d'éléments de la forme :$u \otimes (x \otimes x) \otimes v$ avec $x \in M$, u, v homogènes en T.
Si $u \in T_h$ et $v \in T_k$, alors $u \otimes (x \otimes x) \otimes v \in T_{h+k+2}$ est donc de degré ≥ 2.
Alors tout élément de I est nul ou de degré ≥ 2.
Dans M on a que des éléments de degré 1, donc $I \cap M = \{0\}$. π est alors injective et $M \cong \pi(M)$. (En fait $E_0 = A$ et $E_1 = M$) □

EXEMPLE 2.9. Un exemple d'algèbre extérieure est le déterminant.
Soit K un corps et V un $K-$espace vectoriel de dimension finie n. $V =< e_1, e_2, ..., e_n >$.
Soit E l'algèbre extérieure sur V. On écrit :

$$E(V) = E_0 \oplus E_1 \oplus E_2 \oplus ... \oplus E_n$$

avec :

$$\begin{array}{rcl} E_0 & = & K \\ E_1 & = & V \\ E_2 & = & K(e_i \otimes e_j) \text{ avec i<j} \\ ... & = & ... \\ E_n & = & K(e_1 \otimes e_2 \otimes ... \otimes e_n) \end{array}$$

La dimension de E_i est $\binom{n}{i}$.
Un endomorphisme $f : V \longrightarrow V$ est alors uniquement étendu en un homomorphisme $\hat{f} : E \longrightarrow E$. Vu que E_n est de dimension 1 et $\hat{f}(E_i) \subset E_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$, alors il existe un unique scalaire $k \in K$ tel que : $\hat{f}|_{E_n}(z) = kz$ pour tout $z \in E_n$.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & V \arrow[d, "\pi"] \\
E \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "i"] \\
E_n \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d, "\cong"'] & E_n \arrow[d, "\cong"] \\
K \arrow[r] & K
\end{tikzcd}$$

Montrons que $\hat{f}$ correspond bien au déterminant.
Regardons le cas $n = 2$. On a :$f(e_1) = a_{11}e_1 + a_{12}e_2$ et $f(e_2) = a_{21}e_1 + a_{22}e_2$. Alors :

$$\begin{aligned}
\hat{f}(e_1 \otimes e_2) &= f(e_1) \otimes f(e_2) = (a_{11}e_1 + a_{12}e_2) \otimes (a_{21}e_1 + a_{22}e_2) = \\
&= a_{11}a_{21}e_1 \otimes e_1 + a_{11}a_{22}e_1 \otimes e_2 + a_{12}a_{21}e_2 \otimes e_1 + a_{12}a_{22}e_2 \otimes e_2 = \\
&= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(e_1 \otimes e_2)
\end{aligned}$$

qui correspond bien à la définition du déterminant. On peut facilement généraliser au cas général $\dim V = n$.

3. Dimension de $\mathrm{Cl}(V,q)$

Soit V un $K-$espace vectoriel de dimension n. Soit $E = \{e_1, ..., e_n\}$ une base orthonormée de V. Par ce qui précède on a :
$e_ie_j = -e_je_i$ si $i \neq j$ et $e_i^2 = Q(e_i)$ dans $\mathrm{Cl}(V,Q)$.
On a que E engendre (comme algèbre) $\mathrm{Cl}(V,Q)$.
Donc $\mathrm{Cl}(V,Q)$ est engendré comme $K-$espace vectoriel par les produits de la forme :
$e_1^{k_1}e_2^{k_2}...e_n^{k_n}$ avec $k_i = 0$ ou 1.
En particulier on a :

Corollaire 2.10. *$\dim_K \mathrm{Cl}(V,Q) \leq 2^n$ avec $n = \dim(V)$*

On veut montrer qu'en fait on a égalité :

Lemme 2.11. *Soit (V,Q), (V',Q') des $K-$espace vectoriels munis de formes quadratiques Q et Q'. Alors on a un homomorphisme surjectif :*
$f : \mathrm{Cl}(V \oplus V') \longrightarrow \mathrm{Cl}(V)\hat{\otimes}\,\mathrm{Cl}(V')$
dans la catégorie des algèbres semi-graduées.

Démonstration. Soit

$$\begin{aligned}
\varepsilon : V \oplus V' &\longrightarrow \mathrm{Cl}(V)\hat{\otimes}\,\mathrm{Cl}(V') \\
(x,x') &\longmapsto x \otimes 1 + 1 \otimes x'
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}(x\otimes 1+1\otimes x')^2 &= (x\otimes 1)(x\otimes 1)+(1\otimes x')(1\otimes x')+(x\otimes 1)(1\otimes x')+(1\otimes x')(x\otimes 1)\\ &= (-1)^{0\cdot 1}x^2\otimes 1+(-1)^{1\cdot 0}(1\otimes x'^2)+(-1)^{0\cdot 0}(x\otimes x')+(-1)^{1\cdot 1}(x\otimes x')\\ &= x^2\otimes 1+1\otimes x'^2+x\otimes x'+(-1)(x\otimes x')\\ &= Q(x)+Q'(x')\\ &= (Q+Q')(x,x')\end{aligned}$$

Par la propriété universelle des algèbres de Clifford on a un unique homomorphisme : $f : \mathrm{Cl}(V\oplus V') \longrightarrow \mathrm{Cl}(V)\hat{\otimes}\,\mathrm{Cl}(V')$ t.q. $f|_{V\oplus V'}$ coïncide avec ε.
On voit que f est homogène de degré 0.
Montrons que f est surjective.
Comme algèbre $\mathrm{Cl}(V)\hat{\otimes}\,\mathrm{Cl}(V')$ est engendrée par les éléments de la forme $x\otimes 1$ et $1\otimes x'$ $(x \in V, x' \in V')$.
Il suffit donc de montrer que $x\otimes 1$ et $1\otimes x' \in \mathrm{im}(f)$.
Mais $x\otimes 1 = f(x,0)$ et $1\otimes x' = f(0,x')$, d'où la surjectivité. □

THÉORÈME 2.12. *Si (V,Q) est un espace quadratique de dimension n, alors* $\dim(\mathrm{Cl}(V)) = 2^n$

DÉMONSTRATION. Par récurrence sur n.
Si $n=1$, on a : $V=K$ espace quadratique à une dimension. Vu l'exemple 2.3 on a bien que $\dim \mathrm{Cl}(V) = \dim \mathrm{Cl}(K) = 2 = 2^1$.
Supposons l'assertion vrai pour $k \leq n-1$ et montrons pour n.
Si $n>1$ on a deux cas à considérer :

- Pour tout $v\in V$ on a $Q(v)=0$. C'est à dire que $\mathrm{Cl}(V)$ est l'algèbre extérieure $E(V)$. Alors, vu que $\dim(E_i) = \binom{n}{i}$ on a bien que
$$\dim(\mathrm{Cl}(V)) = \dim(E(V)) = \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i} = 2^n$$
- Il existe $v\in V$ avec $Q(v)\neq 0$. Si $U = K\cdot v$ alors on a la décomposition orthogonale $V = U\oplus U^{\perp}$ où U est de dimension 1.
Par le lemme précedent on a :
$$\dim(\mathrm{Cl}(V)) \geq \dim(\mathrm{Cl}(U))\cdot\dim(\mathrm{Cl}(U^{\perp})) \overset{\text{hyp}}{=} 2\cdot 2^{n-1} = 2^n$$

□

REMARQUE 2.13. On conclut donc que l'homomorphisme f du lemme est en fait un isomorphisme. On a donc que :
$$\mathrm{Cl}(V\oplus V') \cong \mathrm{Cl}(V)\hat{\otimes}\,\mathrm{Cl}(V')$$

4. Algèbres $\mathrm{Cl}^{p,q}$ sur $\mathbb{R}$

Intéressons nous au cas ou K est le corps de nombres réels et $V=\mathbb{R}^{p+q}$ est muni de la forme quadratique $Q_{p,q} = -x_1^2 - \ldots - x_p^2 + x_{p+1}^2 + \ldots + x_{p+q}^2$. Dans ce cas on note l'algèbre de Clifford $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^{p+q}, Q_{p,q}) =: \mathrm{Cl}^{p,q}$. D'après ce qu'on a vu, l'algèbre $\mathrm{Cl}^{p,q}$ est engendrée sur $\mathbb{R}$ par $e_1, e_2, \ldots, e_{p+q}$ avec les relations :

$$\begin{array}{ll} (e_i)^2 = -1 & \text{si } 1 \leq i \leq p \\ (e_i)^2 = 1 & \text{si } p+1 \leq i \leq p+q \\ e_i e_j = -e_j e_i & \text{si } i \neq j. \end{array}$$

Exemple 2.14. Dans l'exemple 2.3 nous avons déjà vu que

$$\mathrm{Cl}^{1,0} = \mathrm{Cl}(\mathbb{R}, -x^2) \cong \mathbb{C} \text{ et}$$

$$\mathrm{Cl}^{0,1} = \mathrm{Cl}(\mathbb{R}, x^2) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$$

On a de plus que $\mathrm{Cl}^{0,2} \cong M_2(\mathbb{R})$, $\mathrm{Cl}^{2,0} \cong \mathbb{H}$ (corps de quaternions) et $\mathrm{Cl}^{1,1} \cong M_2(\mathbb{R})$. Considérons le plan euclidien $\mathbb{R}^2$. L'algèbre de Clifford $\mathrm{Cl}^{0,2}$ est engendrée par une base orthonormale e_1, e_2 de $\mathbb{R}^2$ avec les relations suivantes :

$$e_1^2 = 1$$

$$e_2^2 = 1$$

$$e_1 e_2 = -e_2 e_1$$

Notons $e_1 e_2 = e_{12}$ un bivecteur ; on a donc que $(e_{12})^2 = e_1 e_2 e_1 e_2 = e_1 e_2(-e_2 e_1) = e_1(-1)e_1 = -1$
L'algèbre de Clifford $\mathrm{Cl}^{0,2}$ est de dimension 4 et on a la table multiplicative suivante :

	e_1	e_2	e_{12}
e_1	1	e_{12}	e_2
e_2	$-e_{12}$	1	$-e_1$
e_{12}	$-e_2$	e_1	-1

On a un isomorphisme :

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathrm{Cl}^{1,1} & \longrightarrow & M_2(\mathbb{R}) \\ 1 & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ e_1 & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ e_2 & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ e_{12} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

En décomposant cette algèbre dans sa structure semi-graduée on obtient que : $\mathrm{Cl}^{0,2} = C_+ \oplus C_-$ avec $C_+ = 1 \cdot \mathbb{R} \oplus e_{12} \cdot \mathbb{R}$ et $C_- = e_1 \cdot \mathbb{R} \oplus e_2 \cdot \mathbb{R}$.
Dans C_+ on a donc des éléments de la forme : $x + y e_{12}$, $x, y \in \mathbb{R}$ et $e_{12}^2 = -1$. Alors la sous algèbre C_+ de $\mathrm{Cl}^{0,2}$ est isomorphe à $\mathbb{C}$, en fait le bivecteur e_{12} joue le rôle du nombre imaginaire i.
On constate que e_{12} anticommute avec tout vecteur dans $\mathbb{R}$, car : $r e_{12} = -e_{12} r$ pour $r = x e_1 + y e_2$ et $e_{12} = e_1 e_2$.

On peut aussi vérifier que $\mathrm{Cl}^{2,0} \cong \mathbb{H}$, avec l'isomorphisme :

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathrm{Cl}^{2,0} & \longrightarrow & \mathbb{H} \\ 1 & \longmapsto & 1 \\ e_1 & \longmapsto & i \\ e_2 & \longmapsto & j \\ e_{12} & \longmapsto & k \end{array}$$

De la même façon on construit un autre isomorphisme tel que $\mathrm{Cl}^{1,1} \cong M_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathrm{Cl}^{1,1} & \longrightarrow & M_2(\mathbb{R}) \\ 1 & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ e_1 & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ e_2 & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ e_{12} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Définition 2.15. Dans l'algèbre $\mathrm{Cl}^{p,q}$ avec $p+q$ pair, on considère l'élément $\varepsilon = e_1 e_2 \cdots e_n$ où $n = p+q$.
Alors $(\varepsilon)^2 = (-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+1}(e_1)^2(e_2)^2\cdots(e_n)^2 = \pm 1$
Si $(\varepsilon)^2 = 1$, on appelle l' *algèbre* $\mathrm{Cl}^{p,q}$ *positive*. Si $(\varepsilon)^2 = -1$ on l'appelle *négative*. Plus précisement on a : $(\varepsilon)^2 = (-1)^{n(n-1)/2}(-1)^p$. Donc si $p - q = 0, 4 \mod 8$, alors l'algèbre $\mathrm{Cl}^{p,q}$ est positive, et si $p - q = 2, 6 \mod 8$ alors l'algèbre $\mathrm{Cl}^{p,q}$ est négative. (Dans le cas où $p - q$ est impaire l'algèbre $\mathrm{Cl}^{p,q}$ n'a pas de signe).

Remarquons que si V est un espace vectoriel réel de dimension finie avec une forme quadratique Q non dégénérée, le choix d'une bonne base orthogonale définit un isomorphisme : $\mathrm{Cl}(V,Q) \cong \mathrm{Cl}^{p,q}$ où p et q sont bien définies par le théorème de Sylvester.

Désormais on va considérer de formes quadratiques Q non dégénérées et des espaces vectoriels V réels de dimension finie.

Proposition 2.16.

I : *Si* $\mathrm{Cl}(V,Q)$ *est positive et* $\dim(V)$ *est paire, alors*

$$\mathrm{Cl}(V \oplus V') \cong \mathrm{Cl}(V,Q) \otimes \mathrm{Cl}(V',Q')$$

II : *Si* $\mathrm{Cl}(V,Q)$ *est négative et* $\dim(V)$ *est paire, alors*

$$\mathrm{Cl}(V \oplus V') \cong \mathrm{Cl}(V,Q) \otimes \mathrm{Cl}(V',-Q')$$

Démonstration. Si $\varepsilon = e_1 e_2 \cdots e_n$, alors on a $\varepsilon e_i = (-1)^{n-1} e_i \varepsilon$. Vu que n est pair, on a $\varepsilon e_i = -e_i \varepsilon$ pour tout i, et donc $\varepsilon v = -v\varepsilon$ pour tout $v \in V$.
Dans le cas (I) on définit :

$$\begin{array}{rcl} \varphi : V \oplus V' & \longrightarrow & \mathrm{Cl}(V,Q) \otimes \mathrm{Cl}(V',Q') \\ (v,v') & \longmapsto & v \otimes 1 + \varepsilon \otimes v' \end{array}$$

alors on a :

$$\begin{array}{rcl} (\varphi(v,v'))^2 & = & (v\otimes 1)^2 + (\varepsilon \otimes v')^2 + (v \otimes 1)(\varepsilon \otimes v') + (\varepsilon \otimes v')(v \otimes 1) \\ & = & v^2 \otimes 1 + \varepsilon^2 \otimes v'^2 + v\varepsilon \otimes v' + \varepsilon v \otimes v' \\ & \overset{\text{alg.pos}}{=} & v^2 \otimes 1 + 1 \otimes v'^2 = Q(v) + Q'(v') \\ & = & (Q+Q')(v,v') \end{array}$$

Par la propriété universelle des algèbres de Clifford, on obtient un homomorphisme d'algèbres :

$$\psi : \mathrm{Cl}(V \oplus V', Q \oplus Q') \longrightarrow \mathrm{Cl}(V,Q) \otimes \mathrm{Cl}(V',Q')$$

qui étend φ.
Vu que les deux algèbres ont la même dimension, on a que si ψ est surjectif alors il est bien l'isomorphisme cherché. Vu que $\mathrm{Cl}(V,Q) \otimes \mathrm{Cl}(V',Q')$ est engendré par les éléments de la forme $v \otimes 1$ ou $1 \otimes v'$, il suffit montrer que $v \otimes 1$ ou $1 \otimes v' \in \mathrm{im}(\psi)$.
Et $v \otimes 1 = \psi(v,0)$ et $1 \otimes v' = (\varepsilon \otimes v')(\varepsilon \otimes 1) = \psi(0,v')\psi(\varepsilon,0)$.
Pour le cas (II) la preuve est similaire, en voyant φ comme application de $V \oplus V'$ vers $\mathrm{Cl}(V,Q) \otimes \mathrm{Cl}(V',-Q')$. $\square$

Lemme 2.17. *Soit K un corps et A une $K-$algèbre. Alors on a les isomorphismes d'algèbres suivant :*

(1) $A \otimes_K M_n(K) \cong M_n(A)$
(2) $M_p(M_n(A)) \cong M_{np}(A)$
(3) $M_n(A) \otimes_K M_p(K) \cong M_{np}(A)$

Démonstration.

(1)
$$\begin{tikzcd} A \times M_n(K) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d] & M_n(A) \\ A \otimes_K M_n(K) \arrow[ur, "\hat{\gamma}"'] & \end{tikzcd}$$

vu que l'application

$$\gamma : \left(a, \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n1} & \dots & \lambda_{nn} \end{pmatrix} \right) \longmapsto \begin{pmatrix} a\lambda_{11} & \dots & a\lambda_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a\lambda_{n1} & \dots & a\lambda_{nn} \end{pmatrix}$$

est $K-$bilinéaire , alors elle induit un homomorphisme d'algèbres : $\hat{\gamma} : A \otimes_K M_n(K) \longrightarrow M_n(A)$. Vu que $A \otimes_K K^{n^2} \cong A^{n^2}$ on a bien que $\hat{\gamma}$ est un isomorphisme.

(2) L'isomorphisme $M_p(M_n(A)) \cong M_{np}(A)$ est obtenu en écrivant les matrices par blocs.

(3) $M_n(A) \otimes_K M_p(K) \overset{(i)}{\cong} M_p(M_n(A)) \overset{(ii)}{\cong} M_{np}(A)$.

□

PROPOSITION 2.18. *Les algèbres* $\mathrm{Cl}^{p+n,q+n}$ *et* $M_{2^n}(\mathrm{Cl}^{p,q})$ *sont isomorphes.*

DÉMONSTRATION. Vu que l'algèbre $\mathrm{Cl}^{1,1}$ est positive on a :

$$\mathrm{Cl}^{p+1,q+1} \overset{\text{prop.2.16(i)}}{\cong} \mathrm{Cl}^{p,q} \otimes \mathrm{Cl}^{1,1} \overset{ex.2.14}{\cong} \mathrm{Cl}^{p,q} \otimes M_2(\mathbb{R}) \text{ et donc :}$$

$$\mathrm{Cl}^{p+n,q+n} \cong \mathrm{Cl}^{p,q} \otimes \underbrace{M_2(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes M_2(\mathbb{R})}_{n\text{fois}} \cong \mathrm{Cl}^{p,q} \otimes M_{2^n}(\mathbb{R}) \overset{\text{lemme 2.17(i)}}{\cong} M_{2^n}(\mathrm{Cl}^{p,q})$$

□

COROLLAIRE 2.19. *On a les isomorphismes suivants :*

I : $\mathrm{Cl}^{n,n} \cong M_{2^n}(\mathbb{R})$

II : $\mathrm{Cl}^{p,q} \cong M_{2^q}(\mathrm{Cl}^{p-q,0})$ *si* $p > q$

III : $\mathrm{Cl}^{p,q} \cong M_{2^p}(\mathrm{Cl}^{0,q-p})$ *si* $q > p$

DÉMONSTRATION.

I : $\mathrm{Cl}^{n,n} \overset{\text{prop.2.18}}{\cong} M_{2^n}(\mathrm{Cl}^{0,0}) \cong M_{2^n}(\mathbb{R})$

II : $\mathrm{Cl}^{p,q} = \mathrm{Cl}^{(p-q)+q,0+q} \overset{\text{prop.2.18}}{\cong} M_{2^q}(\mathrm{Cl}^{p-q,0})$

III : $\mathrm{Cl}^{p,q} = \mathrm{Cl}^{0+p,(q-p)+p} \overset{\text{prop.2.18}}{\cong} M_{2^p}(\mathrm{Cl}^{0,q-p})$

□

PROPOSITION 2.20. *Si* $\mathrm{Cl}(V,Q)$ *est positive et la dimension de* V *est paire, alors les algèbres graduées* $\mathrm{Cl}(V,Q)$ *et* $\mathrm{Cl}(V,-Q)$ *sont isomorphes.*

DÉMONSTRATION. Soit $\varepsilon = e_1 e_2 \cdots e_n$, et l'application :

$$\begin{array}{rcl} h : V & \longrightarrow & \mathrm{Cl}(V,Q) \\ v & \longmapsto & \varepsilon v \end{array}$$

alors $(h(v))^2 = (\varepsilon v)^2 = (\varepsilon v)(\varepsilon v) = -\varepsilon^2 v^2 \overset{\mathrm{Cl}(V,Q)>0}{=} -v^2 = -Q(v)$.
Donc par la propriété universelle on obtient un homomorphisme :

$$\hat{h} : \mathrm{Cl}(V, -Q) \longrightarrow \mathrm{Cl}(V, Q)$$

Pour voir que $\hat{h}$ est un isomorphisme, il suffit de prouver sa surjectivité car les deux algèbres ont la même dimension sur K. Montrons que V (vu comme sous-espace de $\mathrm{Cl}(V, Q)$) est contenu dans $\mathrm{im}(\hat{h})$. Si $e_1, \ldots, e_n$ est une base orthogonale de V avec $Q(e_i) = \pm 1$ et $\varepsilon' = e_1 e_2 \cdots e_n$ dans $\mathrm{Cl}(V, -Q)$, $v \in V$ alors on a :

$$\begin{aligned} \hat{h}(\varepsilon' v) &= \hat{h}(e_1)\hat{h}(e_2)\cdots\hat{h}(e_n)\hat{h}(v) \\ &= (\varepsilon e_1)(\varepsilon e_2)\cdots(\varepsilon e_n)(\varepsilon v) = \pm\varepsilon^2 v = \pm v \end{aligned}$$

Donc $v = \hat{h}(\varepsilon' v)$ ou $v = -\hat{h}(\varepsilon' v)$. On a donc que $v \in \mathrm{im}(\hat{h})$ pour tout $v \in V$, d'où la surjectivité de $\hat{h}$ voulue. □

Théorème 2.21. *Les algèbres* $\mathrm{Cl}^{p+8,q}$,$\mathrm{Cl}^{p,q+8}$ *et* $M_{16}(\mathrm{Cl}^{p,q})$ *sont isomorphes.*

Démonstration. Vu que $\mathrm{Cl}^{4,0}$ est positive et 4 est pair on a, par la proposition 2.16 : $\mathrm{Cl}^{8,0} \cong \mathrm{Cl}^{4,0} \otimes \mathrm{Cl}^{4,0}$. Par le proposition précedente et le corollaire 2.19 on a : $\mathrm{Cl}^{4,0} \otimes \mathrm{Cl}^{4,0} \cong \mathrm{Cl}^{4,0} \otimes \mathrm{Cl}^{0,4} \cong \mathrm{Cl}^{4,4} \cong M_{16}(\mathbb{R})$.
Vu que $\mathrm{Cl}^{8,0}$ est positive on a aussi :

$$\mathrm{Cl}^{p+8,q} \cong \mathrm{Cl}^{p,q} \otimes \mathrm{Cl}^{8,0} \cong \mathrm{Cl}^{p,q} \otimes M_{16}(\mathbb{R}) \cong M_{16}(\mathrm{Cl}^{p,q})$$

De même on montre que $\mathrm{Cl}^{p,q+8} \cong M_{16}(\mathrm{Cl}^{p,q})$ □

Avec ce théorème et le corollaire 2.19, il nous suffit de calculer les algèbres $\mathrm{Cl}^{p,0}$ et $\mathrm{Cl}^{0,q}$ avec $p < 8$ pour déterminer toutes les autres. En fait, vu que $\mathrm{Cl}^{0,2}$ et $\mathrm{Cl}^{2,0}$ sont négatives, la proposition 2.16 nous donne :

$$\mathrm{Cl}^{0,p+2} \cong \mathrm{Cl}^{p,0} \otimes \mathrm{Cl}^{0,2} \cong \mathrm{Cl}^{p,0} \otimes M_2(\mathbb{R}) \cong M_2(\mathrm{Cl}^{p,0})$$

De la même façon on a :

$$\mathrm{Cl}^{p+2,0} \cong \mathrm{Cl}^{0,p} \otimes \mathrm{Cl}^{2,0} \cong \mathrm{Cl}^{0,p} \otimes \mathbb{H}$$

Finalement, si $p < 4$ on a les isomorphismes suivantes :

$$\mathrm{Cl}^{p+4,0} \cong \mathrm{Cl}^{p,0} \otimes \mathrm{Cl}^{4,0} \cong \mathrm{Cl}^{p,0} \otimes \mathrm{Cl}^{0,4} \cong \mathrm{Cl}^{p,4} \cong M_{2^p}(\mathrm{Cl}^{0,4-p})$$

En ayant calculé $\mathrm{Cl}^{0,0} \cong \mathbb{R}$, $\mathrm{Cl}^{0,1} \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, $\mathrm{Cl}^{0,2} \cong M_2(\mathbb{R})$, $\mathrm{Cl}^{1,0} \cong \mathbb{C}$ et $\mathrm{Cl}^{2,0} = \mathbb{H}$ alors, par les identités précédentes et par le lemme 2.17,on obtient la table suivante :

p	$\mathrm{Cl}^{p,0}$	$\mathrm{Cl}^{0,p}$
0	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
1	$\mathbb{C}$	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$
2	$\mathbb{H}$	$M_2(\mathbb{R})$
3	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$M_2(\mathbb{C})$
4	$M_2(\mathbb{H})$	$M_2\ (\mathbb{H})$
5	$M_4(\mathbb{C})$	$M_2(\mathbb{H})\ \oplus M_2(\mathbb{H})$
6	$M_8(\mathbb{R})$	$M_4(\mathbb{H})$
7	$M_8(\mathbb{R})\ \oplus M_8(\mathbb{R})$	$M_8(\mathbb{C})$
8	$M_{16}(\mathbb{R})$	$M_{16}(\mathbb{R})$

Par exemple $\mathrm{Cl}^{0,3}$ est de dimension $2^3 = 8$ et a été calculée comme suit :

$$\mathrm{Cl}^{0,3} \cong \mathrm{Cl}^{0,1+2} \cong M_2(\mathrm{Cl}^{1,0}) \cong M_2(\mathbb{C})$$

Regardons de plus près cet isomorphisme.
Avec e_1, e_2, e_3 une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ on a les relations suivantes :
$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = 1$
$e_i e_j = -e_j e_i$ pour tout $i \neq j$
L'isomorphisme φ est donné par :

$$\begin{aligned}
\varphi : \mathrm{Cl}^{0,3} &\longrightarrow M_2(\mathbb{C}) \\
1 &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =: I \\
e_1 &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =: \sigma_1 \\
e_2 &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} =: \sigma_2 \\
e_3 &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =: \sigma_2
\end{aligned}$$

et $\sigma_i \sigma_j \cong e_{ij}$ pou tout $i \neq j$ et $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \cong e_{123}$.
En décomposant cette algèbre dans sa structure semi-graduée on obtient que :
$\mathrm{Cl}^{0,3} = C_+ \oplus C_-$ avec :
$C_+ = 1 \cdot \mathbb{R} \oplus e_{23} \cdot \mathbb{R} \oplus e_{31} \cdot \mathbb{R} \oplus e_{12} \cdot \mathbb{R}$ et $C_- = e_1 \cdot \mathbb{R} \oplus e_2 \cdot \mathbb{R} \oplus e_3 \cdot \mathbb{R} \oplus e_{123} \cdot \mathbb{R}$.
Les éléments 1 et $e_{12} = e_1 e_2$, $e_{13} = e_1 e_3$, $e_{23} = e_2 e_3$ sont appelés pairs car produit d'un nombre pair de vecteurs. Les éléments pairs sont représentés par les matrices suivantes : $w + xe_{23} + y_{31} + ze_{12} \cong \begin{pmatrix} w + iz & ix + y \\ ix + y & w - iz \end{pmatrix}$ et donc :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cl}_+ &= \{w + xe_{23} + y_{31} + ze_{12} | w, x, y, z \in \mathbb{R}\} \\
&\cong \{wI + xi\sigma_1 + yi\sigma_2 + zi\sigma_3 | w, x, y, z \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

est une sous algèbre de $\mathrm{Cl}^{0,3}$
On a de plus que C_+ est isomorphe à l'anneau de division des quaternions, avec

l'isomorphisme suivant :

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{H} & \longrightarrow & C_+ \\ 1 & \longmapsto & 1 \\ i & \longmapsto & -e_{23} \\ j & \longmapsto & -e_{31} \\ k & \longmapsto & -e_{12} \end{array}$$

Involutions et normes

DÉFINITION 2.22. Soit $u =< u >_0 + < u >_1 + < u >_2 \in \mathrm{Cl}^{0,2}$ avec $< u >_i$ élément de degré i dans la graduation de $\mathrm{Cl}^{0,2}$. On définit la *conjugaison de Clifford* par $\bar{u} =< u >_0 - < u >_1 - < u >_2$. Si $z = x + ye_{12}$ est un nombre complexe, alors $z \longmapsto \bar{z} = x - ye_{12}$ est la restriction de la conjugaison de Clifford $u \longmapsto \bar{u}$ dans $\mathrm{Cl}^{0,2}$. On obtient que $N(z) := z\bar{z} = x^2 + y^2$.

DÉFINITION 2.23. Soit $u =< u >_0 + < u >_1 + < u >_2 + < u >_3 \in \mathrm{Cl}^{0,3}$. On définie la *reversion* par $\bar{u} =< u >_0 + < u >_1 - < u >_2 - < u >_3 \in \mathrm{Cl}^{0,3}$. Les correspondances $\sigma_1 \cong e_1$,$\sigma_2 \cong e_2$, $\sigma_3 \cong e_3$ nous donnent que si $u \cong \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $\bar{u} \cong \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ c^* & d^* \end{pmatrix}$ avec $*$ qui désigne la conjugaison complexe. La reversion peut être utilisée pour étendre la norme de $\mathbb{R}^3$ à tout $\mathrm{Cl}^{0,3}$ avec : $N(u) =< u\bar{u} >_0$

5. Algèbres Cl'^n sur $\mathbb{C}$

Considérons maintenant les algèbre de Clifford sur des espaces vectoriels complexes munis de formes quadratiques non dégénerées.
Soit Cl'^n l'algèbre de Clifford de $\mathbb{C}^n$ avec forme quadratique $\sum_{i=1}^n (x_i)^2$.
Par la remarque 2.13 on a : $\mathrm{Cl}'^n = \underbrace{\mathrm{Cl}'^1 \hat{\otimes} \cdot \hat{\otimes} \mathrm{Cl}'^1}_{n \text{ fois}}$ où $\mathrm{Cl}'^1 = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$. Donc :

$$\mathrm{Cl}'^n \cong \mathrm{Cl}^{n,0} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathrm{Cl}^{0,n} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

De plus l'argument utilisé dans la proposition 2.16 montre que $\mathrm{Cl}'^{n+2} = \mathrm{Cl}'^n \otimes \mathrm{Cl}'^2$. En fait si on choisit $\varepsilon = ie_1e_2$ on obtient $\mathrm{Cl}(\mathbb{C}^{n+2}) \cong \mathrm{Cl}(\mathbb{C}^n) \otimes \mathrm{Cl}(\mathbb{C}^2)$. Vu que $\mathrm{Cl}'^2 = \mathrm{Cl}^{0,2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong M_2(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong M_2(\mathbb{C})$ on a l'isomorphisme $\mathrm{Cl}'^{n+2} \cong M_2(\mathrm{Cl}'^n)$. Donc $\mathrm{Cl}'^{2p} \cong M_{2^p}(\mathbb{C})$ et $\mathrm{Cl}'^{2p+1} \cong M_{2^p} \cong M_{2^p}(\mathbb{C}) \oplus M_{2^p}(\mathbb{C})$.

CHAPITRE 3

Groupes orthogonaux et groupes spin

Soit K un corps de caractéristique $\neq 2$, soit V un $K-$espace vectoriel de dimension finie. Soit Q une forme quadratique sur V, β la forme bilinéaire associée. Supposons que β soit non-dégénérée. Notons $C = \mathrm{Cl}(V, Q)$ l'algèbre de Clifford associée.

Définition 3.1. Un automorphisme $s : V \longrightarrow V$ est *orthogonalement associé à Q* (ou s est une *transformation orthogonale*) si s laisse Q invariant, c'est à dire si : $Q(s(x)) = Q(x)$ pour tout $x \in V$.
Soit $O(Q) = \{s : V \longrightarrow V \text{ automorphisme} | Q(s(x)) = Q(x) \, \forall \, x \in V\}$ le *groupe orthogonal de Q*.

Définition 3.2. L'ensemble $\Gamma = \{u \in C | \exists u^{-1} \in C \text{ et } uVu^{-1} \subset V\}$ est le *groupe de Clifford de Q*.

Si $u \in \Gamma$, alors

$$\begin{array}{rcl} s_u : V & \longrightarrow & V \\ x & \longmapsto & uxu^{-1} \end{array}$$

est une transformation orthogonale, car :

$$\begin{array}{rcl} Q(s_u(x)) \cdot 1 & = & (s_u(x))^2 = (uxu^{-1})(uxu^{-1}) = ux^2u^{-1} = \\ & = & u(Q(x) \cdot 1)u^{-1} = Q(x)uu^{-1} = Q(x) \cdot 1 \end{array}$$

On a que si $u \in \Gamma$, alors la transformation

$$\begin{array}{rcl} \chi : \Gamma & \longrightarrow & O(Q) \\ u & \longmapsto & s_u \end{array}$$

est une représentation vectorielle de Γ.
Si s est un automorphisme de V, il peut être représenté par une matrice M telle que si s est orthogonal (c'est à dire si $s \in O(Q)$) alors $\det M = \pm 1$.
L'ensemble $\{s \in O(Q) | \det s = 1\}$ est un sous-groupe de $O(Q)$ d'indice 2.
Soit $C = C_+ \oplus C_-$ la décomposition de C dans la structure semi-graduée. Posons $\Gamma^+ = \Gamma \cap C_+$
Définissons $O^+(Q) = \{s \in O(Q) | \det s = 1\}$.

EXEMPLE 3.3. Soit $V = \mathbb{R}^n$ et $Q(v) = \sum_{i=0}^n v_i^2 = \parallel v \parallel^2$, alors :
$O(Q) = \{s \in GL_n(\mathbb{R}) | \parallel sv \parallel^2 = \parallel v \parallel^2\}$ sont les rotations et les symétries de $\mathbb{R}^n$ et

$$\begin{aligned} O^+(Q) &= \{s \in O(G) | \det s = 1\} = SO_n(\mathbb{R}) = \\ &= \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) | M^T M = I \text{et} \det M = 1\} \text{ sont les rotations de } \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Montrons que $O^+(Q)$ n'est pas simplement connexe, c'est à dire : pour tout $n \geq 3$ on a $\pi_1(\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})) \neq \{1\}$.
Regardons le cas $n = 3$.
On a que $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \cong \mathbb{P}^2\mathbb{R}$. En fait une rotation ρ de $\mathbb{R}^3$ est donnée par un angle $\alpha \in [0, \pi]$ et un axe de rotation d. On représente $\alpha \in [0, \pi]$ comme distance au centre d'une boule de rayon π et $-\alpha$ la distance sur le rayon opposé. Le rayon est choisi par rapport à l'axe de rotation donné. On a donc mis en bijection une rotation de $\mathbb{R}^3$ et une boule avec points opposés identifiés. Par ailleurs on sait que $\mathbb{P}^2\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3 \setminus 0/\mathbb{R}^* \cong S^2/\pm 1 \cong \mathbb{P}^2\mathbb{R}$
On a donc que $S^2 \xrightarrow{\pi} \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est un revêtement à deux feuillets.
Alors $\pi_1(S^2) \subseteq \pi_1(\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}))$ et l'indice est le nombre de feuillets. Vu que le groupe fondamental de la sphère est trivial et que $\sharp\pi_1(\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}))/\sharp\pi_1(S^2) = 2$, on a que $\sharp\pi_1(\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})) = 2$. On conclut que $\pi_1(\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et donc $O^+(Q)$ n'est pas simplement connexe.

On va obtenir le groupe Spin à partir du groupe de Clifford en introduisant une condition de normalisation.

DÉFINITION 3.4. Le groupe Spin est $\mathrm{Spin}(V) = \{u \in \Gamma^+ || N(u)| = 1\}$

Notons Cl_n l'algèbre de Clifford de $\mathbb{R}^n$ associée à la forme quadratique $Q(V) = \sum_{i=0}^n v_i^2 = ||v||^2$ (c'est à dire : $\mathrm{Cl}_n = \mathrm{Cl}^{0,n}$) et $\mathrm{Cl}_n = C_+ \oplus C_-$ sa décomposition dans la structure semi-graduée. Notons encore $\mathrm{Spin}(n) = \mathrm{Spin}(\mathbb{R}^n)$.

EXEMPLE 3.5.

I : Le groupe Spin(2)
On a vu dans l'exemple 2.14 que $\mathrm{Cl}_2 \cong M_2(\mathbb{R})$ et avec la structure semi-graduée on a que $\mathrm{Cl}_2 = C_+ \oplus C_-$ avec $C_+ \cong \mathbb{C}$
On a donc que $\mathrm{Spin}(2) = \{u \in \Gamma^+ || N(u)| = 1\} = \{u \in \mathbb{C} | u\bar{u} = 1\} \cong S^1$
Une rotation d'un angle α dans le plan $\mathbb{R}^2$ peut être représentée par multiplication matricielle :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$$

où $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \{M \in M_2(\mathbb{R}) | M^T M = I \text{et} \det M = 1\}$ est le groupe des rotations. $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est isomorphe à S^1.
Les rotations dans $\mathbb{R}^2$ peuvent être representées par multiplication dans l'algèbre de Clifford comme ceci :
$xe_1 + ye_2 \longrightarrow (\cos\alpha/2 + e_{12}\sin\alpha/2)^{-1}(xe_1 + ye_2)(\cos\alpha/2 + e_{12}\sin\alpha/2)$
Deux éléments opposés du groupe Spin(2) représentent la même rotation dans $SO_2(\mathbb{R})$; en fait si $u \in \mathrm{Spin}(2)$ alors

$$s_u(x) = uxu^{-1} = (-u)x(-u)^{-1} = s_{-u}(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^2$. On a alors que Spin(2) est un recouvrement à deux feuillets de $SO_2(\mathbb{R})$. On écrit $\mathrm{Spin}(2)/\{\pm 1\} \cong \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.
On a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spin}(2) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \arrow[d, "\cong"] \\ S^1 \arrow[r] & S^1 \end{tikzcd}$$

Notons que le recouvrement de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ par Spin(2) n'est pas universel, vu que Spin(2) est isomorphe à S^1 qui a comme groupe fondamental $\mathbb{Z}$ et donc il n'est pas simplement connexe.

II : Le groupe Spin(3)
Préliminaires : soit r un quaternion pur (c'est à dire avec partie réelle réduite à zéro, notons $r \in \mathbb{H}_0$) ou un vecteur $r = iz + jy + kz \in \mathbb{R}^3$, où $\mathbb{H} \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{H}_0$, de norme $\bar{u} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Pour $u \in \mathbb{H}$, $u \neq 0$ on a que $s_u(r) = uru^{-1}$ est aussi un quaternion pur de même norme. En d'autres mots, l'application $s_u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ avec $s_u(r) = uru^{-1}$ est une rotation ou une symétrie dans l'espace des quaternions purs. Montrons que $\det(s_u) = 1$.
On a que $\det(s_u) \neq 0$ (en fait $s_u \circ s_{u^{-1}} = \mathrm{id}$ pour $u \neq 0$) et l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{H} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \det(s_u) \end{aligned}$$

est continue. De plus $\varphi(u) = \det(s_1) = \det(\mathrm{id}) = 1$. $\mathbb{H} \setminus \{0\}$ est connexe, φ est continue et jamais nulle, on a donc que $\varphi(u) = \det(s_u) = 1$ pour tout $u \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$.
Montrons maintenant que chaque rotation (element de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$) peut donc être représentée par un élément $u \in \mathbb{H}$, $u \neq 0$. Considérons l'application :

$$\psi : \mathbb{H} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathrm{SO}(\mathbb{H}_0)$$

et montrons que ψ est une surjection. Vu que les reflections (par rapport à des plans) engendrent $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ (même $O_3(\mathbb{R})$) il nous suffit de prouver que toute reflection σ_u, par rapport à un plan normal au vecteur $u \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ est image d'un élément de $\mathbb{H} \setminus \{0\}$.
Considérons le produit scalaire standard $< \cdot, \cdot >$ sur $\mathbb{R}^3$. Soit $x \in \mathbb{R}^3$, alors on a :

$$\begin{aligned} \sigma_u(x) &= x - 2\frac{< x, u > u}{u\bar{u}} = x - \frac{x\bar{u} + u\bar{x}}{\bar{u}} = \\ &= x - x - \frac{u\bar{x}}{\bar{u}} = -u\bar{x}\bar{u}^{-1} = -uxu^{-1} = \\ &= -s_u(x) \in O_3(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Donc $s_u(x) = -\sigma_u(x) =$ symétrie. Tout élément de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est donc l'image sous ψ d'un produit d'un nombre paire de symétries.

Soit $u \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$, si on regarde le noyau de $\gamma : u \longmapsto s_u$:

$$\begin{aligned} \ker(\gamma) &= \{u \in \mathbb{H} \setminus \{0\} | s_u(v) = v \,\forall\, v \in \mathbb{H}\} \\ &= \{u \in \mathbb{H} \setminus \{0\} | uvu^{-1} = v \,\forall\, v \in \mathbb{H}\} \\ &= \{u \in \mathbb{H} \setminus \{0\} | uv = vu \,\forall\, v \in \mathbb{H}\} = \{-1, 1\} \end{aligned}$$

car u appartient au centre de $\mathbb{H}$ qui est $\mathbb{R}$. On constate donc qu'il y a deux quaternions u et $-u$ de norme 1 qui representent la même rotation. Ce qui signifie que la sphère des quaternions unité : $S^3 = \{u \in \mathbb{H} || N(u)| = 1\}$ est un recouvrement à deux feuillets de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, c'est à dire que :

$$\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \cong S^3/\{\pm 1\}$$

On a vu que $\mathrm{Cl}_3 \cong M_2(\mathbb{C})$ et dans la structure semi-graduée on a que $\mathrm{Cl}_3 = C_+ \oplus C_-$ avec $C_+ \cong \mathbb{H}$

$$\begin{aligned} \text{On a que } \mathrm{Spin}(3) &= \{u \in \Gamma^+ || N(u)| = 1\} \cong \{u \in \mathbb{H} | u\bar{u} = 1\} \\ &\cong S^3 \end{aligned}$$

Pour un élément u de Spin(3) l'application $u \longmapsto uru^{-1}$ est une rotation de $\mathbb{R}^3$. Chaque élément de $SO_3(\mathbb{R})$ peut être représenté par un élément de Spin(3). Les éléments u et $-u$ représentent la même rotation dans $\mathbb{R}^3$. En d'autres mots $\mathrm{Spin}(3)/\{\pm 1\} \cong \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ et on peut dire que Spin(3) est un recouvrement universel du groupe de rotation $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

Bibliographie

[1] Chevalley, Claude. *The algebraic théory of spinors and Clifford algebras.* Springer-Verlag, 1997

[2] Lam, T.Y. *Algebraic Theory of Quadratic Forms.* W.A. Benjamin, Inc., 1973

[3] Porteous, Ian R.. *Clifford Algebras and the Classical Groups.* Cambridge University Press, 1995

[4] Lounesto, Pertti. *Clifford Algebras and Spinors.* Cambridge University Press, 2001